

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Кузбасский государственный технический  
университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра информационных и автоматизированных  
производственных систем

Составители  
В. В. Зиновьев, А. Н. Стародубов,  
П. И. Николаев, И. С. Кузнецов

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЫБОРОК ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ**

**Методические указания к лабораторной работе**

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки  
15.04.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»  
в качестве электронного издания для использования в образовательном  
процессе

Кемерово 2022

**Рецензенты:**

**Чичерин И. В.** – к.т.н., доцент кафедры информационных и автоматизированных производственных систем

**Зиновьев Василий Валентинович**

**Стародубов Алексей Николаевич**

**Николаев Петр Игоревич**

**Кузнецов Игорь Сергеевич**

**Применение метода коррелированных выборок при моделировании систем:** методические указания к лабораторной работе для обучающихся направления подготовки 15.04.04 Автоматизация технологических процессов и производств, для всех форм обучения / сост. В.В. Зиновьев, А.Н. Стародубов, П.И. Николаев, И.С. Кузнецов; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2022. – Текст : электронный.

В данных методических указаниях разработанных по дисциплине «Математическое моделирование» приведены цель и задача, общие сведения об изучаемом материале, задания для выполнения, вопросы для самопроверки. Рекомендуемая литература для самостоятельной подготовки приведена в рабочей программе дисциплины.

© Кузбасский государственный  
технический университет имени  
Т. Ф. Горбачева, 2022

© В.В. Зиновьев, А.Н. Стародубов,  
П.И. Николаев, И.С. Кузнецов,  
составление, 2022

## Содержание

1	Основные теоретические положения.....	4
1.1	Метод коррелированных выборок .....	4
2	Пример выполнения лабораторной работы .....	5
3	Задание на лабораторную работу.....	10
4	Требования к отчету .....	11
5	Контрольные вопросы .....	11
6	Список рекомендуемой литературы .....	11

**Цель работы** – получение практических навыков у магистров по использованию метода коррелированных выборок при моделировании систем.

Предполагается, что магистры знакомы с теорией систем массового обслуживания и средой компьютерного моделирования GPSS World.

## **1 Основные теоретические положения**

Существует множество методов уменьшения дисперсии случайных величин. Эти методы служат либо для увеличения точности при работе с выборкой постоянного объема, либо для уменьшения этого объема при обеспечении постоянной степени точности.

Для уменьшения дисперсии применяют методы:

- общих случайных величин (коррелированных выборок);
- дополняющих случайных величин;
- контрольных случайных величин;
- создания условий.

Так как эти методы довольно громоздки, рассмотрим лишь один из них. О других методах уменьшения дисперсии можно прочитать в литературе, т. к. они широко известны.

### **1.1 Метод коррелированных выборок**

Этот метод предназначен для применения в задачах сравнения двух и более альтернатив. Например, задача может заключаться в определении лучшего из двух вариантов стратегий  $A$  и  $B$ . В подобных случаях нас интересует относительное различие двух альтернатив, а не абсолютное значение каждой из них.

Для сравнения средних значений двух альтернатив необходимо оценить их разность:

$$Z=A-B \quad (1.1)$$

где:  $A$  – среднее значение переменной в варианте 1,  $B$  – среднее значение переменной в варианте 2.

При случайных и независимых  $A$  и  $B$  дисперсия разности определяется как сумма дисперсий

$$D(Z)=D(A)+D(B) \quad (1.2)$$

Таким образом дисперсия увеличивается, а значит точность результата уменьшается.

Если же случайные величины  $A$  и  $B$  будут зависимы (коррелированы), то новая переменная  $Z^*$  будет иметь то же среднее, что и  $Z$ , но меньшую дисперсию на удвоенную величину ковариации  $2\text{cov}(A, B)$ , т. е.

$$D(Z^*) = D(A) + D(B) - 2\text{cov}(A, B) \quad (1.3)$$

Ковариация – характеристика системы случайных величин, описывающая помимо рассеяния величин  $x$  и  $y$  еще и линейную связь между ними. Для независимых случайных величин ковариация равна нулю, а для зависимых отличается (хотя и не всегда).

При зависимых (коррелированных)  $A$  и  $B$

$$Z^* = Z \quad (1.4)$$

$$D(Z^*) = D(A) + D(B) - 2\text{cov}(A, B) \quad (1.5)$$

где  $Z^*$  – новая переменная;  $\text{cov}(A, B)$  – ковариация.

Т. е. чем больше будет ковариация, т. е. связь между значениями переменной в разных вариантах, тем дисперсия будет меньше, а значит, точность сравнения альтернатив выше.

Задача метода коррелированных выборок состоит в таком построении выборки, чтобы ковариация  $\text{cov}(A, B)$  была положительна и достаточно велика. При моделировании для получения сильной положительной корреляции можно использовать управление генерацией случайных величин на двух прогонах модели, т. е. осуществлять прогоны путем использования одной и той же случайной последовательности для обеих альтернатив. Такой способ позволяет сравнивать различные альтернативы при одинаковых условиях. Таким образом, мы можем поставить два или более эксперимента, используя коррелированные данные, и уменьшить случайную ошибку сравнения альтернатив. Еще лучше провести только один эксперимент и сравнить на нем необходимые альтернативы. В этом случае, кроме уменьшения дисперсии, уменьшается количество экспериментов.

## **2 Пример выполнения лабораторной работы**

Описание объекта моделирования:

На РТК поступают заготовки двух типов А и Б. Интервалы времени прихода заготовок А – 120+/-30 мин, а заготовок типа Б – 100+/-20 мин. Заготовки типа А обрабатываются примерно 150+/-45 мин, а типа Б – 50+/-10 мин. Если РТК при приходе новой заготовки занят обработкой предыдущей, то пришедшая заготовка хранится в накопителе. Из накопителя заготовки поступают на обработку по принципу «первым пришел – первым обслужен» независимо от типа.

Задание:

Путем проведения имитационных экспериментов необходимо проверить, уменьшится ли среднее число заготовок, ожидающих в накопителе при изменении дисциплины обслуживания (т. е., если заготовки типа А будут поступать на обработку только после заготовок типа Б).

Примечание.

Предполагается, что если заготовкам типа Б дать приоритет, то за счет того, что они обрабатываются быстрее среднее количество заготовок в накопителе перед РТК уменьшится.

Решение:

Имитационная модель будет выглядеть следующим образом:

GENERATE	120,30	Приход заготовок типа А
QUEUE	LINE	Ожидание освобождения РТК
SEIZE	AVTO	Занятие РТК
DEPART	LINE	Конец ожидания
ADVANCE	150,45	Обработка заготовки
RELEASE	AVTO	Освобождение РТК
TERMINATE		Заготовка обработана
BOX GENERATE	100,20	Приход заготовок типа Б
QUEUE	LINE	Ожидание освобождения РТК
SEIZE	AVTO	Занятие РТК
DEPART	LINE	Конец ожидания
ADVANCE	50,10	Обработка заготовки типа Б
RELEASE	AVTO	Освобождение РТК
TERMINATE		Заготовка обработана
GENERATE	480	Моделирование 8 часов
TERMINATE	1	
START	1	

CLEAR  
BOX GENERATE 100, 20,,,1                      Добавление приоритета  
START 1

В модели использован оператор CLEAR. Для того чтобы в одном прогоне можно было исследовать два варианта с различной дисциплиной обслуживания.

Оператор CLEAR удаляет все транзакты из модели, сбрасывает таймеры абсолютного и относительного времени, а также всю статистику относительно объектов (если нет ограничений). Не воздействует на переменные, стандартные числовые атрибуты и на генераторы случайных чисел.

Формат оператора CLEAR

CLEAR n1,n2,...

где необязательные операнды n1,n2,... – имена объектов, параметры которых не должны сбрасываться.

Итак, в задании необходимо сравнить два альтернативных варианта с разной дисциплиной обслуживания, т. е. оценить величину:  $Z=A-B$

где  $A$  – значение среднего размера очереди (среднего количества заготовок в накопителе) в варианте с дисциплиной – «первым пришел – первым обслужен», а  $B$  – значение среднего размера очереди в варианте с приоритетной дисциплиной обслуживания.

В модели блоки GENERATE и ADVANCE используют RN1, как источник равномерно распределенных случайных чисел. Т. е. 4 источника случайности делят между собой единственную последовательность случайных чисел.

Может быть так, что в очереди друг за другом стоят заготовки типа  $A$  и  $B$ . Тогда в модели без приоритетов будет обработана сначала сообщение типа  $A$ , а потом –  $B$ . В модели с приоритетами наоборот – сначала  $B$ , а потом –  $A$ .

Т. е. значения, выдаваемые генератором RN1 и используемые в блоках модели без приоритетов, будут отличаться от значений, используемых в модели с приоритетами. Следовательно, запросы выполняются в разных дисциплинах за разное время. Это влияет на дисциплину обслуживания. Следовательно, два варианта сравниваются не в одинаковых условиях.

В представленной модели среднее число скопившихся перед РТК заготовок будет зависеть от:

- 1) реализуемой дисциплины обслуживания
- 2) фактической последовательности значений интервалов времени прихода заготовок типа А
- 3) фактической последовательности значений интервалов времени прихода заготовок типа Б
- 4) фактической последовательности значений времени обработки заготовок типа А
- 5) фактической последовательности значений времени обработки заготовок типа Б

Т. е. средний размер очереди будет одновременно зависеть от 5 случайных факторов. Это означает, что величины А и В будут случайны и независимы, что затрудняет интерпретацию результатов, если необходимо исследовать влияние только дисциплины обслуживания, а также увеличивает дисперсию. Если необходимо установить влияние только дисциплины обслуживания, то другие условия, при которых сравниваются альтернативные варианты, должны быть строго одинаковыми, т.е. величины А и В должны быть коррелированными.

Для этого совершим действия, которые дадут гарантию того, что, каждый из 4 источников случайностей будет использовать свой собственный генератор. Этого можно добиться, используя функцию.

Изменим модель следующим образом:

RMULT 100,200,300,400 Для одинаковых начальных условий

AAAFUNCTION	RN1, C2	Приход заготовок типа А
0,90/1,150		
BBB FUNCTION	RN3, C2	Приход заготовок типа Б
0,80/1,120		
AAAA FUNCTION	RN2, C2	Обслуживание заготовок А
0,105/1,195		
BBBBB FUNCTION	RN4, C2	Обслуживание заготовок Б
0,40/1,60		
GENERATE FN\$AAA		Приход заготовок типа А
QUEUE LINE		Ожидание освобождения РТК
SEIZE AVTO		Занятие РТК

DEPART LINE	Конец ожидания
ADVANCE FN\$AAAA	Обработка заготовок типа А
RELEASE AVTO	Освобождение РТК
TERMINATE	Заготовка обработана
BOX GENERATE FN\$BBB	Приход заготовок типа Б
QUEUE LINE	Ожидание заготовок типа Б
SEIZE AVTO	Занятие РТК
DEPART LINE	Конец ожидания заготовок
типа Б	
ADVANCE FN\$BBBB	Обработка заготовок типа Б
RELEASE AVTO	Освобождение РТК
TERMINATE	Заготовка обработана
GENERATE 480	Моделирование 8 часов
TERMINATE 1	
START 1	
RMULT 100,200,300,400	Для одинаковых начальных
условий	
CLEAR	
BOX GENERATE FN\$BBB,,,1	Добавление приоритета
START1	

Существует еще одна проблема – оператор CLEAR не влияет на генераторы случайных чисел, поэтому во втором варианте последовательность чисел в генераторах будет отличаться от последовательности в первом варианте. Тогда опять два варианта будут сравниваться не в одинаковых условиях. Для устранения этой проблемы необходимо установить одинаковые последовательности случайных чисел для первого и второго вариантов. Для этого в GPSS используют оператор RMULT.

Оператор RMULT – устанавливает начальные значения датчиков псевдослучайных чисел и изменяет их последовательность. В GPSS World по умолчанию начальные значения всех датчиков разные.

В операндах A, B, C, D, E, F, G и H записываются начальные значения для датчиков 1-го, ... , 8-го соответственно. Значения, записываемые в операнды не должны превышать 10 знаков и быть положительными.

Пример:

RMULT 123,15,,,347

начальные значения (и последовательность псевдослучайных чисел) 1-го, 2-го и 5-го датчиков изменяются. Начальные значения всех остальных датчиков остаются неизменными.

RMULT ставится:

а) до первого оператора START для установления начальных значений генераторов.

б) между операторами START для восстановления начальных значений генераторов.

в) между операторами START для определения новых начальных значений генераторов.

Таким образом, установив при помощи RMULT одинаковые последовательности случайных чисел в первом и втором варианте системы, мы в одном прогоне сможем сравнивать эти варианты по среднему размеру очереди при прочих равных условиях.

### **3 Задание на лабораторную работу**

#### Описание объекта моделирования:

Рабочие приходят в кладовую через каждые  $300 \pm 250$  с., где они получают детали для неисправных станков. Кладовщику требуется  $280 \pm 150$  с. на поиск необходимой детали для одного рабочего.

Стоимость потерь из-за поломки станка и простоя рабочего в очереди составляет 0,5 у. е. в секунду (18 у. е. в час).

#### Задание:

1. Разработайте концептуальную модель складской системы, используя математический аппарат систем массового обслуживания (СМО).

2. Осуществите программную реализацию концептуальной модели при помощи специализированного языка компьютерной имитации GPSS.

4. Используя разработанную модель, проведите имитационные эксперименты и определите с точностью – 1 и доверительной вероятностью – 0,90 ущерб предприятию за 120 часов модельного времени.

5. Предположите, что кладовщик получает 4 у. е в час. Он может быть заменен другим кладовщиком, получающим 4,5 у. е.

в час, но зато выполняющим заявки рабочих за  $280 \pm 50$  с. На основе имитационных экспериментов определите ущерб из-за простоев рабочих.

6. Используя метод коррелированных выборок, сравните два варианта складской системы с разными кладовщиками и выясните, что лучше: оставить старого или нанять нового кладовщика.

#### **4 Требования к отчету**

Отчет о работе должен содержать:

1. Задание и исходные данные по лабораторной работе.
2. Модель в виде программы в среде компьютерного моделирования GPSS World (файл .gps).
3. Результаты имитационных экспериментов.
4. Вывод.

#### **5 Контрольные вопросы**

1. Для чего предназначен метод коррелированных выборок?
2. Какие еще методы уменьшения дисперсии бывают?
3. Что такое ковариация?
4. Какие функции выполняет оператор CLEAR?
5. Какие функции выполняет оператор RMULT?

#### **6 Список рекомендуемой литературы**

1. Зиновьев В. В. Моделирование процессов и систем учебное пособие / В. В. Зиновьев, А. Н. Стародубов, П. И. Николаев // – КузГТУ : Кемерово, 2016. – 146с.

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика учебное пособие. – 12-е изд., перераб. – Москва : Высшее образование, 2008, – 479 с.: ил. – (Основы наук.)