

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Институт профессионального образования
Кафедра теории и методики профессионального образования

Елена Вячеславовна Кабачевская
Евгений Николаевич Грибанов

МАТЕМАТИКА

Методические материалы
к практическим занятиям и самостоятельной работе

Рекомендовано цикловой методической комиссией
математических и естественнонаучных дисциплин
в качестве электронного издания для использования
в образовательном процессе

Кемерово 2024

Рецензенты: Николаева Е. А., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Струкова Ю.В. – председатель цикловой методической комиссии математических и естественнонаучных дисциплин СПО ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кабачевская, Е.В., Грибанов, Е.Н. Математика: методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся II курса специальности СПО 18.02.12 Технология аналитического контроля химических соединений очной формы обучения/ сост. Е. Н. Грибанов, Е.В. Кабачевская; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2024. – Текст: электронный.

Приведены методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Математика», позволяющие закрепить знания, полученные в ходе аудиторных занятий; способствующие закреплению теоретических положений; развитию навыков по их практическому применению.

© Кузбасский государственный
технический университет
имени Т. Ф. Горбачева, 2024
© Грибанов Е. Н.,
Кабачевская Е.В.,
составление, 2024

Оглавление

Пояснительная записка	5
Раздел I. АЛГЕБРА	6
Тема 1.1. Развитие понятия о числе. Корни и степени.	
Логарифмы. Преобразование алгебраических выражений	6
Практическое занятие 1	6
Практическое занятие 2	7
Самостоятельная работа к разделу I	8
Раздел II. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ	9
Тема 2.1. Основные понятия. Основные тригонометрические тождества. Тригонометрические уравнения	9
Практическое занятие 3	9
Самостоятельная работа к разделу II	10
Раздел III. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ	12
Тема 3.1. Функции и их свойства. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.	12
Обратные тригонометрические функции	12
Практическое занятие 4	12
Практическое занятие 5	13
Самостоятельная работа к разделу III	15
Тема 4.1. Последовательности. Производная.	15
Первообразная и интеграл	15
Практическое занятие 6.	16
Практическое занятие 7.	17
Самостоятельная работа к разделу IV	19
Раздел V. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	20
Тема 5.1. Уравнения и системы уравнений. Неравенства.	20
Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств	20
Практическое занятие 8.	20
Практическое занятие 9.	21
Самостоятельная работа к разделу V	21
Раздел VI. КОМБИНАТОРИКА, СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	23
Тема 6.1. Элементы комбинаторики. Элементы теории вероятностей. Элементы математической статистики	23
Практическое занятие 10.	23

Практическое занятие 11.	25
Самостоятельная работа к разделу VI	27
Раздел VII. ГЕОМЕТРИЯ	28
Тема 7.1. Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники.	28
Тела и поверхности вращения. Измерения в геометрии.	28
Координаты и векторы	28
Практическое занятие 12.	29
Практическое занятие 13.	31
Практическое занятие 14.	31
Самостоятельная работа к разделу VII	32
Список источников	34

Пояснительная записка

Общие положения

Методические материалы разработаны в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Математика», при подготовке к практическим занятиям и организации самостоятельной работы.

В методических материалах приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Наиболее трудоемкие разделы дисциплины для лучшего усвоения учебного процесса дополняются самостоятельной работой студента.

Домашняя самостоятельная работа студентов дневной формы обучения распределяется следующим образом:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

Раздел I. АЛГЕБРА

Тема 1.1. Развитие понятия о числе. Корни и степени. Логарифмы. Преобразование алгебраических выражений

Целые и рациональные числа. Действительные числа. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степени с действительными показателями. Основное логарифмическое тождество. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию. Преобразование рациональных, иррациональных степенных, показательных и логарифмических выражений.

Практическое занятие 1

Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнение числовых выражений. Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами. Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени. Решение показательных уравнений. Решение прикладных задач.

Цель: изучить основные методы решения показательных уравнений.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Вычислите значения выражений:

- а) $\sqrt{0,09}$; $\sqrt{0,16}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{0,0025}$; $\sqrt{0,0001}$;
б) $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{0,125}$; $\sqrt[4]{0,0625}$; $\sqrt[4]{0,0081}$; $\sqrt[3]{0,027}$;
в) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; $\sqrt{\frac{100}{121}}$; $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; $\sqrt[7]{-128}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$.

Задание 2. Решите уравнения:

- | | |
|---|--|
| а) $\sqrt{3x - 5x^2 + 23} = 3$; | б) $\sqrt[3]{x^2 + 14x - 16} = -4$; |
| в) $\sqrt{4x^2 + 5x - 2} = 2$; | г) $\sqrt[3]{x^2 + 14x - 8} = -2$; |
| д) $\sqrt[5]{5x + 1} = \sqrt[5]{2x + 10}$; | е) $3\sqrt[3]{2 + x} = \sqrt[3]{2x - 5}$; |

$$\text{ж) } \sqrt[3]{7x+1} = 2\sqrt[3]{x+4};$$

$$\text{з) } \sqrt[3]{3x+8} = \sqrt[3]{x^2-2};$$

$$\text{и) } \sqrt[7]{4+x} = \sqrt[7]{2x+12};$$

$$\text{к) } \sqrt[4]{2x+6} = \sqrt[4]{x+5}.$$

Задание 3. Решите уравнения:

$$\text{а) } \sqrt{6x-5} = x;$$

$$\text{б) } \sqrt{x+2} = x;$$

$$\text{в) } \sqrt{2x+3} = x;$$

$$\text{г) } \sqrt{-36-13x} = -x;$$

$$\text{д) } \sqrt{x+2} = -x;$$

$$\text{е) } \sqrt{-35-12x} = -x;$$

$$\text{ж) } \sqrt{8+x} = x;$$

$$\text{з) } \sqrt{-32-12x} = x.$$

Практическое занятие 2

Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений. Приближенные вычисления и решения прикладных задач. Решение логарифмических уравнений.

Цель: изучить основные методы решения логарифмических уравнений.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Вычислите значения выражений:

$$\text{а) } \frac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1,2 - \log_9 12};$$

$$\text{б) } \frac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2};$$

$$\text{в) } (3\lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$$

$$\text{г) } \frac{\frac{1}{2}\log_3 64 - 2\log_3 2}{\log_3 2};$$

$$\text{д) } 4\log_4 2 \cdot \log_2 4 + 2;$$

$$\text{е) } 5\log_3 5 \cdot \log_5 3 - 1;$$

$$\text{ж) } \log_3 8 : \log_3 2 - 4;$$

$$\text{з) } \log_5 16 : \log_5 2 - 2.$$

Задание 2. Запишите, используя показатель степени соотношение:

$$\text{а) } \log_3 81 = 4;$$

$$\text{б) } \log_2 64 = 6;$$

$$\text{в) } \log_4 x = 3;$$

$$\text{г) } \log_{64} 2 = \frac{1}{6};$$

$$\text{д) } \log_5 2x = 2;$$

$$\text{е) } \log_x 49 = 2.$$

Задание 3. Вычислите значения выражений:

$$\text{а) } 15\log_5 3 \cdot \log_{27} 5 + 2^{\log_{18} 5} \cdot 9^{\log_{18} 5};$$

$$\text{б) } \log_2 \log_3 (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \log_2 \log_3 (7 + \sqrt{40});$$

в) $\lg \sin 15^\circ \cdot \lg \sin 30^\circ \cdot \lg \sin 45^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 120^\circ$;

г) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;

д) $5 \log_6 64 \cdot \log_4 6 + 3^{\log_{15} 2} \cdot 5^{\log_{15} 2}$.

Задание 4. Решите уравнения:

а) $\log_{12}(x-3) + \log_{12}(x-2) = 1$; б) $\log_2(2x-2) + \log_2(x-1) = 3$;

в) $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-3)$; г) $\log_4(x-3) + \log_4 x = 1$;

д) $1 + \log_5(2x-1) = \log_5(7x+4)$; е) $\log_7 x + \log_7(x+6) = 1$;

ж) $\log_3(5-x) + \log_3(3-x) = 1$; з) $\log_5(3x-1) + \log_5(3x-5) = 1$.

Задание 5. Решите уравнения:

а) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{5-x}{x+2} = -1$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{x+6} = -2$; в) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+5}{x-2} = -2$;

г) $\log_9 \frac{x-2}{x+1} = 2$; д) $\log_6 \frac{8-x}{5x-1} = 1$; е) $\log_8 \frac{x-10}{4x+1} = 1$;

ж) $\log_3 \frac{7-2x}{x+3} = 3$; з) $\log_2 \frac{x-2}{x+1} = 1$; и) $\log_4 \frac{5x-2}{x+2} = 1$.

Самостоятельная работа к разделу I

Задание 1. Вычислите значения выражений:

а) $\log_2 16 \cdot \log_6 36$; б) $\log_2 4 \cdot \log_3 81$; в) $\log_5 125 \cdot \log_9 729$;

г) $\log_5 125 \cdot \log_4 16$; д) $\log_5 125 \cdot \log_2 16$; е) $\log_7 343 \cdot \log_2 8$;

ж) $\log_9 81 \cdot \log_2 64$; з) $\log_8 512 \cdot \log_2 32$; и) $\log_5(\log_2 32)$.

Задание 2. Вычислите значения выражений:

а) $\log_5 5 + \log_{0,25} 64$; б) $\log_{10} 100 + \log_{0,5} 8$;

в) $\log_{10} 0,01 + \log_{0,5} 4$; г) $\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4$;

д) $\log_{25} 3125 + \log_{0,04} 0,008$; е) $\log_{25} 25 + \log_{0,2} 625$;

ж) $\log_5 625 + \log_{0,05} 8000$; з) $\lg 0,001 + \log_{0,5} 16$;

и) $\log_4 0,5 + \log_{0,25} 2$; к) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} : \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{49} \cdot \log_5 \sqrt{5}$.

Задание 3. Решите уравнения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \log_{\frac{1}{5}}(x+7) = -3; & \text{б) } \log_{\frac{1}{6}}(4x-8) = -2; & \text{в) } \log_{\frac{1}{3}}(1-2x) = -2; \\ \text{г) } \log_x(16-x^3) = 3; & \text{д) } \log_2(x^2+2x) = 3; & \text{е) } \log_2(x^2-1) = 3; \\ \text{ж) } \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) = -2; & \text{з) } \log_{\frac{1}{5}}(2x-3) = -1; & \text{и) } \log_{\frac{1}{7}}(4x+9) = -1. \end{array}$$

Раздел II. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Тема 2.1. Основные понятия. Основные тригонометрические тождества. Тригонометрические уравнения

Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Формулы приведения, формулы сложения. Формулы удвоения. Простейшие тригонометрические уравнения. Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс).

Практическое занятие 3

Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Простейшие тригонометрические уравнения. Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс.

Цель: изучить основные методы решения тригонометрических уравнений.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Вычислите:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{14}{\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right)}; & \text{б) } \frac{41}{\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{35\pi}{3}\right)}; \\ \text{в) } \frac{39}{\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)}; & \text{г) } \frac{18}{\operatorname{tg}\left(-\frac{29\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right)}; \end{array}$$

$$\text{д)} \frac{14}{\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right)};$$

$$\text{е)} \frac{41}{\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{35\pi}{3}\right)};$$

$$\text{ж)} \frac{9}{\operatorname{tg}\left(-\frac{26\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right)};$$

$$\text{з)} \frac{21}{\sin\left(-\frac{27\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{31\pi}{3}\right)}.$$

$$\text{и)} \frac{18}{\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{41\pi}{6}\right)};$$

$$\text{к)} \frac{21}{\operatorname{tg}\left(-\frac{21\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{27\pi}{6}\right)}.$$

Задание 2. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

$$\text{а)} \sin \alpha = 0,6, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\text{б)} \cos \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\text{в)} \cos \alpha = -0,8, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\text{г)} \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\text{д)} \sin \alpha = \frac{12}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$\text{е)} \cos \alpha = 0,6, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$\text{ж)} \cos \alpha = \frac{5}{13}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$\text{з)} \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

Задание 3. Решите уравнение:

$$\text{а)} \cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}; \quad \text{б)} \sin \frac{\pi(x+5)}{6} = \frac{1}{2}; \quad \text{в)} \operatorname{tg} \frac{\pi(x-7)}{3} = \sqrt{3};$$

$$\text{г)} \cos \frac{\pi(x+3)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{д)} \sin \frac{\pi(x-3)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{е)} \operatorname{tg} \frac{\pi(x-7)}{4} = 1;$$

$$\text{ж)} \operatorname{ctg} \frac{\pi(x+3)}{6} = \sqrt{3}; \quad \text{з)} \sin \frac{\pi x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{и)} \cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\text{к)} \sin \frac{\pi(x+3)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{л)} \cos \frac{\pi(x-1)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{м)} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3} = -\sqrt{3}.$$

Самостоятельная работа к разделу II

Задание 1. Вычислите значение выражения:

$$\text{а)} 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}; \quad \text{б)} 42\sqrt{6} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}; \quad \text{в)} \sqrt{6} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right);$$

г) $36 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$; д) $26\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$; е) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
 ж) $12\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}$; з) $18\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}$; и) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

Задание 2. Упростите:

а) $3 \cos(\pi - \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$; б) $\cos(3\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) + 2 \cos(2\pi - \beta)$; г) $\cos(\pi + \beta) - 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$;

д) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos(\pi - \alpha)$; е) $\cos(-3\pi - \beta) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right)$;

ж) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; з) $3 \operatorname{tg}(\pi - \beta) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$;

и) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \gamma\right) - \operatorname{tg}(-\gamma)$; к) $\operatorname{tg}(\alpha - 2\pi) + 5 \operatorname{tg}(-\alpha)$;

л) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + 3 \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$; м) $\operatorname{ctg}(2\pi - \gamma) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \gamma\right)$;

н) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{2 \cos(\pi - \beta)}$; о) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(3\pi - \alpha)}$;

Задание 3. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} + \gamma\right)$, если $\operatorname{ctg} \gamma = 1,25$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} - \beta\right)$, если $\operatorname{ctg} \beta = 0,05$;

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$;

г) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$; е) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\begin{array}{lll}
 \text{ж)} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1; & \text{з)} & \text{и)} \\
 & 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}; & \text{ctg}(\pi + 5x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \\
 \text{к)} & \text{л)} & \text{м)} \\
 \text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = -\sqrt{3}; & \sin\left(-\frac{1}{2}x + \pi\right) = -1; & \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{array}$$

Раздел III. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Тема 3.1. Функции и их свойства. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции

Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами. Монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Арифметические операции над функциями. Сложная функция (композиция). Определения функций, их свойства и графики. Преобразования графиков. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой $y = x$, растяжение и сжатие вдоль осей координат.

Практическое занятие 4

Примеры зависимостей между переменными в реальных процессах из смежных дисциплин. Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций. Не- прерывные и периодические функции. Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Цель: изучить основные методы задания функций, свойства функций.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Вычислить $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$, если: а) $f(x) = x^2 - x + 1$; б) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$.

Задание 2. Найти значения функции $f(0)$, $f(a)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(x^2)$, $(f(x))^2$, если:

а) $f(x) = x^2 + 3x - 2$; б) $f(x) = \frac{5x}{2x-1}$; в) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

Задание 3. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = x^2 - 5$; в) $y = \sqrt{x}$;
 г) $y = 1 + \frac{1}{x}$; д) $y = \frac{x}{x-4}$; е) $y = \frac{5}{x^2+2}$;
 ж) $y = \frac{x+4}{x-2}$; з) $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; и) $y = x + \frac{4}{x}$.

Задание 4. Постройте график функции

а) $y = f(x-2)$; б) $y = f(x) + 4$; в) $y = f(-0,5x)$;
 г) $y = 3f(x)$; д) $y = 0,5f(x)$; е) $y = -f(x)$;
 ж) $y = f(2x+3)$; з) $y = f(4-x)$; и) $y = |f(x)|$;
 к) $y = f(|x|)$; л) $|y| = f(x)$; м) $|y| = f(|x|)$.

Задание 4. Какие из следующих функций являются четными, какие нечетными, какие ни четными, ни нечетными?

а) $y = 2x^3 - x$; б) $y = 5x^6 + x^2$; в) $y = \frac{1}{x}$.

Практическое занятие 5

Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции. Преобразования графика функции. Гармонические колебания. Прикладные задачи. Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения.

Цель: способствовать выработке навыков в вычислении значений выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Решите неравенства:

$$\text{а) } \cos \frac{\pi(x-7)}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } \sin \frac{\pi(x+5)}{6} < \frac{1}{2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \frac{\pi(x-7)}{3} > \sqrt{3};$$

$$\text{г) } \cos \frac{\pi(x+3)}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{д) } \sin \frac{\pi(x-3)}{3} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{е) } \operatorname{tg} \frac{\pi(x-7)}{4} \geq 1;$$

$$\text{ж) } \operatorname{ctg} \frac{\pi(x+3)}{6} \geq \sqrt{3}; \quad \text{з) } \sin \frac{\pi x}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{и) } \cos \frac{\pi(x-7)}{3} < -\frac{1}{2};$$

$$\text{к) } \sin \frac{\pi(x+3)}{6} < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{л) } \cos \frac{\pi(x-1)}{3} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{м) } \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3} = -\sqrt{3}.$$

Задание 2. Решите неравенства:

$$\text{а) } 3^{x+2} - 3^x < 8; \quad \text{б) } 5^{x+1} + 5^x > 150; \quad \text{в) } 3^{x+2} - 3^{x-1} < 28;$$

$$\text{г) } 2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15; \quad \text{д) } 2^x + 2^{x+2} \leq 20.$$

Задание 3. Решите неравенства:

$$\text{а) } 2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \geq 0,5; \quad \text{б) } 8^{\sqrt{x+1}} \geq 0,25^x;$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{5} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}; \quad \text{г) } 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x};$$

$$\text{д) } \frac{1}{8} \cdot \sqrt{2^{x-1}} < 4^{-1,25}; \quad \text{е) } 0,125^{\sqrt{x+1}} \leq 4^x.$$

Задание 4. Решите неравенства:

$$\text{а) } \log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right);$$

$$\text{б) } \sqrt{\log_2^2 x + \log_{0,5} x^2 - 3} > \sqrt{5} (\log_4 x^2 - 3);$$

$$\text{в) } \log_{1-x} (x+1) \log_{x+2} (2-x) \leq 0; \quad \sqrt{-x^2 + 7x - 10} \log_2 (x-3) \leq 0;$$

$$\text{г) } \sqrt{4-x^2} \left(\log_3 \frac{x+1}{x} + 2 \right) \leq 0;$$

$$\text{д) } (x^2 + 6x - 5) \log_3 (x-2) \leq 0;$$

$$\text{е) } \frac{\log^2_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2-4x-5} \geq 0.$$

Самостоятельная работа к разделу III

Задание 1. Построить график функции:

а) $y = |x|x^4$;

б) $y = |x|x^4 + x^5$;

в) $y = |x|x^3$;

г) $y = |x|x^4 - x^5$.

Задание 2. Докажите, что функция является четной:

а) $y = 3x^6 - 3x^2 + 7$;

б) $y = x^n \cdot x^{n+2} - 4$;

в) $y = \frac{x^6 + 8}{x^2}$;

г) $y = \frac{x^{n+1}}{x^{n-1}}$.

Задание 3. Является ли функция четной, нечетной или она не является ни четной, ни нечетной. Постройте графики этих функций. Какая из функций имеет точку разрыва?

а) $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -(x+1)^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & x > 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -x^3, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 1, \\ -(x-1)^2, & x \geq 0. \end{cases}$

Раздел IV. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 4.1. Последовательности. Производная.

Первообразная и интеграл

Способы задания и свойства числовых последовательностей. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и её сумма. Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частные. Производные основных элементарных

функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком. Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона–Лейбница. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Практическое занятие 6.

Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности. Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Производная: механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной в общем виде

Цель: изучить основные методы задания последовательности, нахождения производной функций.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Выпишите по пять первых членов последовательностей, заданных ниже формулами общего члена или рекуррентно:

1) $a_n = n^2 - 1$; 4) $a_{n+1} = a_n - 2, a_1 = 3$;

2) $a_n = 2^n$; 5) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, a_1 = -1, a_2 = 0$.

3) $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 2$;

Задание 2. Определите: являются ли $a_1 = 8, a_4 = -10, a_{11} = -50$ членами арифметической прогрессии.

Задание 3. Решите следующие задачи:

1. Пусть $a_2 = 1, a_2 = 13$ – члены арифметической прогрессии.

Найдите a_7, a_{11}, d, S_{25} .

2. Пусть $a_5 = 3, a_8 = 11$ – члены арифметической прогрессии.

Найдите a_4, a_7, d, S_6 .

3. Пусть для арифметической прогрессии $d = 4, S_4 = 40$.

Найдите a_5 .

4. Являются ли $b_1=3, b_4=\frac{3}{8}, b_{11}=\frac{3}{1024}$ членами геометрической прогрессии?

5. Пусть $b_2=9, b_5=-243$ – члены геометрической прогрессии. Найдите b_4, b_7, q, S_6

Задание 4. Вычислите производную данной функции:

1) $y = \frac{(2x-1)^3}{x}$; 6) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$;

2) $y = x^3(2x+3)^2$; 7) $y = \sin 2x^2$;

3) $y = \frac{3x}{(x-1)^2}$; 8) $y = \sqrt{x^2+1}$;

4) $y = \left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{5}{4}}$; 9) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$;

5) $y = \sin x \cos 3x$;

Практическое занятие 7.

Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций. Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции. Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона-Лейбница. Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей.

Цель: изучить основные методы нахождения производной. Приложение производной. Изучить основные методы нахождения интегралов. Приложение интегралов.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Найдите экстремумы функции:

1) $y = x^3 - 12x^2 + 2$; 2) $y = 4x^2 - 2x^3 + 5$;

3) $y = 18x^2 - 2x^3 - 14$; 4) $y = 4x^2 - 6x^3 + 8$;

5) $y = x^3 - 9x - 7$; 6) $y = 3x^2 - 6x^3 + 8$.

Задание 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

1) $y = 3x^5 - 20x^3 - 10$ на отрезке $[-3; -1]$.

2) $y = 2x^2 - 5x + \ln x + 10$ на отрезке $\left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

3) $y = 6x^4 - 16x^3 + 48$ на отрезке $[1; 6]$.

4) $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 6\ln x - 5$ на отрезке $\left[\frac{5}{12}; \frac{13}{12}\right]$.

5) $y = 4x - 4\ln(x-2) + 12$ на отрезке $[2,5; 5]$.

Задание 3. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx,$

2) $\int \sin(4x+5) dx,$

3) $\int \frac{dx}{4x-7},$

4) $\int \cos(5x-11) dx.$

Задание 4. Вычислите определённые интегралы:

1) $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4x+3}{(x-2)^2} dx;$

2) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$

3) $\int_0^{\pi} x \sin x dx;$

4) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

Задание 5. Найдите площадь, ограниченную графиками функций:

$$1) y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2;$$

$$2) y = x^2, y = 1 + \frac{3}{4}x^2;$$

$$3) y = x^2 + 2, y = 1 - x^2, x = 0, x = 1.$$

Самостоятельная работа к разделу IV

Задание 1. Вычислите производную данной функции:

$$1) y = 3 \sin^3(4x + 5);$$

$$2) y = \frac{e^{(2x+3)^2}}{11x - 7};$$

$$3) y = \sqrt[4]{\ln 2x};$$

$$4) y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}.$$

Задание 2 Выясните, при каких x производная функции $y = f(x)$ равна нулю:

$$1) y = 2x + \cos 2x;$$

$$2) f(x) = 2x^2 - \ln 3x;$$

$$3) f(x) = 2\sqrt{x} - 3 \ln(x + 2);$$

$$4) f(x) = \frac{x + 2}{2\sqrt{x} + 1};$$

$$5) f(x) = (5 - 3x)e^{2x}.$$

Задание 3. Запишите уравнение касательной к графику в точке с заданной абсциссой:

$$1) y = x^2 - 4, x_0 = 3;$$

$$2) y = x - x^2, x_0 = -4;$$

$$3) y = 2 \ln(1 + x), x_0 = 0.$$

Задание 4. Найдите неопределенные интегралы:

- 1) $\int \sqrt{x} dx;$
- 2) $\int x\sqrt{x} dx;$
- 3) $\int 10^x dx;$
- 4) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx;$
- 5) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx;$
- 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$

Задание 5. Вычислите определённые интегралы:

- 1) $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4x+3}{(x-2)^2} dx;$
- 2) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$
- 3) $\int_0^{\pi} x \sin x dx;$
- 4) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

Задание 6. Найдите площадь, ограниченную графиками функций:

- 1) $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2;$
- 2) $y = x^2, y = 1 + \frac{3}{4}x^2;$
- 3) $y = x^2 + 2, y = 1 - x^2, x = 0, x = 1.$

Раздел V. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Тема 5.1. Уравнения и системы уравнений. Неравенства.

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств

Практическое занятие 8.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений. Корни уравне-

ний. Равносильность уравнений. Преобразование уравнений. Основные приемы решения уравнений. Решение систем уравнений

Цель: изучить основные методы решения систем уравнений.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Решите уравнения:

Практическое занятие 9.

Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств.

Цель: изучить основные методы решения систем уравнений.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \\ \sqrt{5x + y} + \sqrt{5x - y} = 4 \end{cases}$$

Самостоятельная работа к разделу V

Задание 1. Решите уравнения:

$$1) y^2 + 9 - y + \sqrt{y^2 - y + 9} = 12;$$

$$2) x^2 + 5x - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 2;$$

$$3) x^2 = \sqrt{x^2 - 4x + 20} + 4x;$$

$$4) \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt{x-1} = 3;$$

$$5) \sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12};$$

$$6) \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} - 2\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = 1;$$

$$7) 2 \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 4^x - 4 = 0;$$

$$8) \left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x = -\frac{65}{36};$$

$$9) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Задание 2. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} = 2 \\ 2^{2x+1} + 2^{2y+1} = 8 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0 \\ 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1} = 5 \end{cases}.$$

Раздел VI. КОМБИНАТОРИКА, СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 6.1. Элементы комбинаторики. Элементы теории вероятностей. Элементы математической статистики

Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий. Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Понятие о законе больших чисел. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики), генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана. Понятие о задачах математической статистики. Решение практических задач с применением вероятностных методов

Практическое занятие 10.

История развития комбинаторики, теории вероятностей и статистики и их роль в различных сферах человеческой жизнедеятельности. Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Прикладные задачи

Цель: изучить основные понятия комбинаторики.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Решение комбинаторных задач.

- 1) Сколькими способами можно расставить 7 книг на книжной полке?
- 2) Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?
- 3) Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что цифры в числе не повторяются?
- 4) Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек. Сколько различных комиссий можно

организовать, если имеется пять преподавателей?

5) Сколькими способами можно группу из 15 учащихся разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4, а в другой – 11 человек?

6) Из 20 студентов надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

7) На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Сколько различных трехзначных чисел можно из них составить?

8) Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

9) Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек, причем один из преподавателей должен быть назначен старшим. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

10) Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

11) Имеется шестизначная кодовая комбинация, состоящая из трех цифр 1, 3, 5, в которой цифра 1 встречается один раз, цифра 3 – два раза и цифра 5 – три раза. Сколько существует комбинаций таких наборов?

12) Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

13) В почтовом отделении имеются открытки 3 видов. Сколькими способами можно купить набор из 5 открыток?

14) В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

15) Сколько четырехбуквенных слов можно составить из букв М и А?

16) Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

Практическое занятие 11.

Классическое определение вероятности, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вычисление вероятностей. Прикладные задачи. Представление числовых данных. Прикладные задачи.

Цель: изучить основные методы вычисления вероятностей простых событий.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Вычисление вероятностей.

1) При стрельбе из винтовки вероятность попадания в цель равна 0,75. Найдите число попаданий, если всего было произведено 140 выстрелов.

2) В лотерее разыгрывается тысяча билетов. Среди них один выигрыш в 50 рублей, пять выигрышей в 20 рублей, двадцать выигрышей по 10 рублей и пятьдесят выигрышей по 5 рублей. Некто покупает один билет. Найдите вероятность: а) выиграть не менее 10 рублей; б) какого-либо выигрыша.

3) Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах?

4) Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадает четное число очков.

5) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до

100. Найдите вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.

6) Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну, б) две, в) три.

7) В ящике содержится 100 перемешанных жетонов, пронумерованных целыми числами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что извлеченный наудачу жетон имеет номер, который не делится ни на 2, ни на 3.

8) В урне *a* белых и *b* черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

9) На 20 одинаковых жетонах написано 20 двухзначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

10) В мешке смешаны нити 5 сортов; 30 % белых, 40 % черных, 15% – красных, 10 % зелёных, 5% голубых. Определите вероятность того, что наудачу взятая нить будет цветной.

11) В команде спортсменов 6 бегунов на короткие дистанции, 3 бегуна на длинные, 5 метателей, 7 борцов и 4 боксёра. Определите вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен будет легкоатлетом.

12) В пачке имеется 100 жетонов, пронумерованных числами от 1 до

100. Определите вероятность того, что номер наудачу взятого жетона будет кратным 25 или 30.

13) Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что А – выпадет одинаковое число очков; В – сумма выпавших очков равна 8; С – сумма выпавших очков четная; Д – число очков, выпавших при первом броске, больше числа очков, выпавших при втором броске; Е – сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

14) Из букв разрезанной азбуки составлено слово «мел». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

15) Из букв разрезанной азбуки составлено слово «рама». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

16) На одинаковых карточках написаны буквы а, а, б, г, е, р, л. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «алгебра»?

Самостоятельная работа к разделу VI

Задание 1. Решение комбинаторных задач.

1) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколько может быть вариантов такой выдачи?

2) Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый участник сыграл с каждым по одной партии, а партий было сыграно в 10 раз больше числа участников.

3) Имеются в неограниченном количестве палочки длиной 5, 6, 7, 8, 9, 10 см. Сколько различных треугольников можно из них составить?

4) Из 10 роз и 8 лилий нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 розы и 3 лилии. Сколькими способами это можно сделать?

5) Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколько существует возможностей выбора этих пяти человек?

6) Сколькими способами можно расставить 8 томов энциклопедии на книжной полке так, чтобы первый и второй тома:

а. стояли рядом;

б. не стояли рядом?

7) Даны две параллельные прямые. На одной из них имеется 10 точек, а на другой – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

8) На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

9) Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

10) Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом? Стояли ли не рядом?

11) В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было:

- а. 5 черных;
- б. 3 белых и 2 черных; в. 5 шаров одного цвета; г. 4 шара одного цвета?

Задание 2. Вычисление вероятностей.

1) Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наудачу последовательно вынимаются 3 карточки и ставятся слева направо в порядке появления. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число не содержит цифры 4?

2) В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определите вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

3) Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных?

4) Какова вероятность того, что три друга попадут в комиссию, состоящую из трех человек, если комиссию можно избрать из 15 человек?

5) Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу случайно берут 4 карточки и складывают в ряд. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?

6) Из колоды карт наудачу извлекается 3 карты. Найдите вероятность того, что А – одна карта окажется бубновой масти; В – 2 карты черви; С – все разной масти.

Раздел VII. ГЕОМЕТРИЯ

Тема 7.1. Прямые и плоскости в пространстве.

Многогранники.

Тела и поверхности вращения. Измерения в геометрии.

Координаты и векторы

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол.

Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей.

Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур. Вершины, ребра, грани многогранника. Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр. Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде. Сечения куба, призмы и пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдре, кубе, октаэдре, додекаэдре и икосаэдре).

Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию. Шар и сфера, их сечения. Касательная плоскость к сфере. Объем и его измерение. Интегральная формула объема. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы. Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы, плоскости и прямой. Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Практическое занятие 12.

Признаки взаимного расположения прямых. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей. Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произ-

вольными фигурами в пространстве.

Цель: изучить методы решения задач.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. В плоскости двух пересекающихся прямых a и b дана точка C , не принадлежащая этим прямым. Прямая c проходит через точку C . Как может быть расположена прямая c относительно прямых a и b ? Ответ обоснуйте.

Задание 2. Верно ли утверждение:

а) если прямая a пересекает b , а b пересекает c , то a и c – пересекающиеся прямые?

б) если $a \perp b$, $c \perp b$, то $a \parallel c$?

в) если $a \parallel b$ и c пересекает a , то c пересекает b ?

Задание 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Каково взаимное расположение прямых AC и $B_1 M$, где M – середина ребра BC ?

Задание 4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Установите, каково взаимное расположение прямых AB_1 и $A_1 N$, если N – внутренняя точка ребра AD .

Задание 5. Дан тетраэдр $ABCD$. M, N – точки ребра CD , K и L – точки ребра AB . Каково взаимное расположение прямых NK и ML ?

Задание 6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной 1. Найдите градусную меру угла между прямыми AC_1 и CB_1 .

Задание 7. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 4. Точка K – середина ребра DD_1 . Точки M и H лежат на ребрах $A_1 B_1$ и AB соответственно, причем $A_1 M : MB_1 = 1 : 3$, $AH : HB = 3 : 1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH и KC_1 .

Задание 8. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведена высота DH . K – середина отрезка CH . BM – медиана боковой грани BCD .

а) Докажите, что угол между DH и BM равен углу BMK .

б) Найдите угол между DH и BM .

Практическое занятие 13.

Параллельное проектирование и его свойства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника. Взаимное расположение пространственных фигур. Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников. Площадь поверхности. Виды симметрий в пространстве. Симметрия тел вращения и многогранников. Вычисление площадей и объемов.

Цель: изучить методы нахождения площадей и объёмов.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Решите нижеперечисленные задачи:

- 1) Какими многоугольниками могут быть сечения куба.
- 2) В правильном тетраэдре проведено сечение плоскостью, параллельной двум скрещивающимся ребрам. Докажите, что четырех- угольник в таком сечении будет прямоугольным.
- 3) В четырехугольной пирамиде все ребра равны. Докажите, что ее сечение, проходящее через вершину пирамиды и диагональ основания, является прямоугольным треугольником.
- 4) В куб, объем которого равен 27, вписан правильный тетраэдр так, что вершины его совпадают с вершинами куба. Чему равен объем тетраэдра.
- 5) Определите расстояние между непересекающимися диагоналями пересекающихся граней куба, если длина диагонали куба равна 15.
- 6) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5, а диагональ боковой грани 2,5. Найдите площадь основания призмы.
- 7) Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба равно 2. Определите полную поверхность куба.

Практическое занятие 14.

Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве. Уравнение окружности, сферы, плоскости. Расстояние между точками. Действия с векторами, заданными координатами. Скалярное произведение векторов. Векторное

уравнение прямой и плоскости.

Цель: изучить методы работы с векторами.

Продолжительность работы: 90 мин.

Задание 1. Решите нижеперечисленные задачи:

1) Какой координатной оси принадлежат точки:

а) $A(0;0;-6)$, $B(-5;0;0)$, $C(0;2;0)$, $O(0;0;0)$.

б) $P(7;0;-6)$, $K(0;-8;0)$, $M(11;2;0)$, $N(3;0;0)$.

2) Какой координатной плоскости принадлежат точки:

а) $A(2;0;-6)$, $B(-5;2;-3)$, $C(0;2;-3)$, $D(-11;-3;0)$.

б) $P(7;0;3)$, $K(15;-3;0)$, $M(1;-2;0)$, $N(3;0;-4)$, $F(0;-9;-4)$.

3) Даны координаты начала и конца вектора. Найдите его координаты.

а) $A(2;4;-6)$, $C(-5;11;-4)$.

б) $F(-8;3;-7)$, $E(-7;5;-9)$.

в) $F(-5;1;3;11)$, $K(7;-2;4;8)$.

г) $K(3,6;2;-10)$, $N(11;3;-2,8)$.

д) $B(1,7;4;-2,2)$, $D(1,1;5;-1,5)$.

е) $E(-1;3;24)$, $F(-8;2,4;-3)$.

ж) $A(1,5;3;2,5)$, $C(-2;-3;5)$.

з) $Q(5,4;7;4)$, $R(-9;-3,2;-1,7)$.

и) $R(-5;1,3;-7)$, $L(-2;-3,7;5)$.

к) $S(3,1;-4;2,1)$, $K(2,6;2,4;1,1)$.

4) В треугольнике ABC , BM – медиана, $A(-2;7;9)$, $B(5;-4;1)$, $C(8;1;5)$.

Найдите:

а) координаты векторов AB , BC , AC ;

б) координаты точки M ;

в) длину вектора BM ;

г) координаты средней линии параллельной AB .

Самостоятельная работа к разделу VII

Задание 1. Решение нижеперечисленных задач:

1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1 . Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1 .

2) В единичном кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми

ми AB_1 и BC_1 .

3) Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.

4) В $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольном параллелепипеде известны длины ребер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K – середина ребра $C_1 D_1$. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .

5) Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

6) Точка O лежит на ребре DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка P является точкой пересечения диагоналей грани $ABCD$. $DO : DD_1 = 1 : 5$. Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины C .

7) Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра DC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

Список источников

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536607>.
2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике : учебное пособие для вузов / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 571 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18418-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/534965>. — Текст : электронный.
3. Баврин, И. И. Математика для технических колледжей и техникумов : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 397 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08026-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/537727>.
4. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учебное пособие для вузов / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 204 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8785-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536732>.