

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»

Институт профессионального образования  
Кафедра теории и методики профессионального образования

Евгений Николаевич Грибанов  
Елена Вячеславовна Кабачевская

## **ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Методические материалы к практическим занятиям  
и самостоятельной работе

Рекомендовано цикловой методической комиссией  
математических и естественнонаучных дисциплин  
в качестве электронного издания  
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2024

Рецензенты: Николаева Е. А., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»  
Струкова Ю.В. – председатель цикловой методической комиссии математических и естественнонаучных дисциплин СПО ИПО ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

**Грибанов, Е.Н., Кабачевская, Е.В. Элементы высшей математики:** методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе для студентов специальности СПО 09.02.07 Информационные системы и программирование очной формы обучения / сост. Е. Н. Грибанов, Е.В. Кабачевская, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2024. – Текст: электронный.

Приведены методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Элементы высшей математики», позволяющие закрепить знания, полученные в ходе аудиторных занятий; способствующие закреплению теоретических положений; развитию навыков по их практическому применению.

© Кузбасский государственный  
технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева, 2024  
© Грибанов Е. Н.,  
Кабачевская Е.В.,  
составление, 2024

## Оглавление

Пояснительная записка	5
Тема 1. Основы теории комплексных чисел	6
Практическое занятие 1.	6
Решение задач с комплексными числами	6
Самостоятельная работа к теме 1	7
Тема 2. Теория пределов	7
Практическое занятие 2. Исследование числовых последовательностей.	
Предел функции. Свойства пределов	7
Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной	8
Практическое занятие 3. Вычисление дифференциалов высших порядков	9
Самостоятельная работа к теме 3	9
Тема 4. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	9
Практическое занятие 4. Вычисление интегралов функций одной действительной переменной	10
Тема 5. Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных	11
Практическое занятие 5. Вычисление дифференциалов функции нескольких действительных переменных	11
Самостоятельная работа к теме 5	12
Тема 6. Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных	12
Практическое занятие 6. Вычисление интегралов функций нескольких действительных переменных	12
Тема 7. Теория рядов	14
Практическое занятие 7. Исследование на сходимость рядов с положительными членами по признаку Даламбера и знакопеременных рядов по признаку Лейбница	14
Самостоятельная работа к теме 7	15
Тема 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	15
Практическое занятие 8. Решение дифференциальных уравнений	15
Практическое занятие 9. Решение дифференциальных уравнений второго порядка	17
Тема 9. Матрицы и определители	18
Практическое занятие 10. Решение задач по вычислению суммы и произведения матриц	18
Практическое занятие 11. Решение задач над обратными матрицами	19

Самостоятельная работа к теме 9	19
Тема 10. Системы линейных уравнений	20
Практическое занятие 12. Решение линейных уравнений	20
Тема 11. Векторы и действия с ними	21
Практическое занятие 13. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов	21
Самостоятельная работа к теме 11	22
Тема 12. Аналитическая геометрия на плоскости	22
Практическое занятие 14. Составление и исследование уравнений окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости	23
Список источников	25

## **Пояснительная записка**

### **Общие положения**

Методические материалы разработаны в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Элементы высшей математики».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Элементы высшей математики», при подготовке к практическим занятиям и организация самостоятельной работы.

В методических материалах приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Наиболее трудоемкие разделы дисциплины для лучшего усвоения учебного процесса дополняются самостоятельной работой студента.

Домашняя самостоятельная работа студентов дневной формы обучения распределяется следующим образом:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

## Тема 1. Основы теории комплексных чисел

Определение комплексного числа. Формы записи комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел.

### Практическое занятие 1.

#### Решение задач с комплексными числами

**Цель:** ознакомиться с понятием комплексного числа. Изучить различные формы представления комплексных чисел: алгебраическую, тригонометрическую, показательную. Научиться изображать геометрически комплексное число; выполнять действия над комплексными числами.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Решить задачи на действия с комплексными числами.

1) Представить числа в тригонометрической и показательной форме:  $a) -3 - \sqrt{3}i$ ;  $b) 3(\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)$ .

2) Выполнить действия. Результат представить в алгебраической форме: 
$$\frac{8(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{16(\cos(-50^\circ) + i \sin(-50^\circ))}.$$

3) Вычислить:

$$a) (2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3; \quad b) \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3};$$

$$c) (1+i)^{10}; \quad d) \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}};$$

$$e) (1+i)^8 (1-3i)^{-6}; \quad f) \left( \frac{i^5 + 2}{i^{11} + 1} \right)^2.$$

1) Найти все значения корней:

a)  $\sqrt{i}$ ;

b)  $\sqrt[2]{-9}$ ;

c)  $\sqrt[4]{-1}$ ;

d)  $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$ ;

e)  $\sqrt[6]{-1+i\sqrt{3}}$ ;

f)  $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$ .

2) Решить квадратные уравнения:

a)  $z^2 + 2z + 5 = 0$ ;

b)  $4z^2 - 2z + 1 = 0$ ;

c)  $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$ ;

d)  $4z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$ .

**Задание 2.** Ответить на контрольные вопросы.

1) Что называется комплексным числом?

2) Как геометрически изображается комплексное число на плоскости?

3) Какие действия выполняются над комплексными числами в алгебраической форме?

4) Перечислите действия над комплексными числами в тригонометрической форме и особенности этих действий.

### **Самостоятельная работа к теме 1**

Решение индивидуальных заданий по теме «Геометрическое изображение комплексного числа». Варианты заданий выдаются преподавателем.

### **Тема 2. Теория пределов**

Числовые последовательности. Предел функции. Свойства пределов. Замечательные пределы, раскрытие неопределенностей. Односторонние пределы, классификация точек разрыва.

### **Практическое занятие 2.**

#### **Исследование числовых последовательностей.**

#### **Предел функции. Свойства пределов**

**Цель:** изучить основные правила вычисления пределов.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

### Задания к практической работе:

**Задание 1.** Вычислить пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{2x^2 - 11x + 5}; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 9x - 5}{x - 5}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x^2 - 19x + 3}{x - 3}; \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \left( \frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} \right). \end{array}$$

**Задание 2.** Вычислить пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{3x + 10} - 4}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 6x - 7}{\sqrt{30 + 5x} - 5}; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{\sqrt{12 - 2x} - 4}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}. \end{array}$$

**Задание 3.** Вычислить пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 7x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 7x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctgx} \right).$$

**Задание 4.** Вычислить пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 1}{x - 1} \right)^x; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 2}{3x + 5} \right)^{4-x}.$$

**Задание 5.** Вычислить пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 14x}{x}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}; \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{5x + 7} \right)^{x+1}; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x + 10} - 5}{2x - 10}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 4}{x + 8} \right)^{-3x}. \end{array}$$

### Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Определение производной. Производные и дифференциалы высших порядков. Полное исследование функции. Построение графиков



### Практическое занятие 3.

#### Вычисление дифференциалов высших порядков

**Цель:** изучить основные правила вычисления дифференциалов высших порядков.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Вычислить производную данной функции:

$$1) y = (2x - 1)^2 \cdot \sin x; \quad 2) y = \frac{(3 - x)^6}{3 - 2x};$$

$$3) y = \frac{\sin x}{(2 - 3x)^2}; \quad 4) y = \frac{\sqrt{2 + x}}{\sqrt{3 - x}};$$

$$5) y = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{4}}; \quad 6) y = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$7) y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}; \quad 8) y = \frac{e^{(2x+3)^2}}{11x - 7};$$

$$9) y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}; \quad 10) y = \sqrt[4]{\ln 2x}.$$

**Задание 2.** Определить, имеют ли функция  $y = f(x)$  экстремумы. Найти их:

$$1) f(x) = \frac{(x - 7)(3 - x)}{x - 10}; \quad 2) f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x);$$

$$3) f(x) = \sqrt{4 + 3x - x^2}; \quad 4) f(x) = x^2 e^{x^2};$$

$$5) f(x) = \frac{e^x}{x}; \quad 6) f(x) = x + \frac{1}{x + 1};$$

$$7) f(x) = \ln(x^2 + 3x); \quad 8) f(x) = x^2 + \ln x.$$

#### Самостоятельная работа к теме 3

Решение индивидуальных заданий по теме «Исследование функций». Варианты индивидуальных заданий выдаются преподавателем.

#### Тема 4. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Неопределенный и определенный интеграл и его свойства. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Вычисление определенных интегралов. Применение определенных интегралов.

### Практическое занятие 4.

#### Вычисление интегралов

#### функций одной действительной переменной

**Цель:** изучить основные правила вычисления неопределенных интегралов и определенных.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Найти неопределенные интегралы:

a)  $\int (2x^3 - 10x + 9x^2 - 3) dx;$       b)  $\int 11 \cos x dx;$

d)  $\int \frac{8dx}{x};$       c)  $\int \sin(4x - 21) dx;$

e)  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx;$       f)  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx;$

i)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx;$       j)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$

**Задание 2.** Используя метод замены переменной вычислить интегралы:

a)  $\int x(9x^2 - 3)^4 dx;$       b)  $\int \sin x \cos^{10} x dx;$

c)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x};$       d)  $\int \sin \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

e)  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x};$       f)  $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2 - 1}};$

i)  $\int \frac{\cos x}{2 - 3 \sin x} dx;$       j)  $\int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{x^2 + x - 9}}.$

**Задание 3.** Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить определённые интегралы:

$$\text{a) } \int_{-1}^2 x^2 dx;$$

$$\text{b) } \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx;$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{dx}{x+1};$$

$$\text{d) } \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})};$$

$$\text{e) } \int_1^4 \frac{1+y}{\sqrt{y}} dy;$$

$$\text{f) } \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2};$$

$$\text{i) } \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dy;$$

$$\text{j) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx.$$

## Тема 5. Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных

Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков.

### Практическое занятие 5.

#### Вычисление дифференциалов функции нескольких действительных переменных

**Цель:** изучить основные правила вычисления дифференциалов функции нескольких переменных.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Построить области определения функции двух переменных:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad 2) f(x) = \sqrt{y \sin x}.$$

**Задание 2.** Найти частные производные первого и второго порядка от заданных функций:

1)  $u = x^2 + 3xy + 4y^2$ ;      2)  $u = \sin(3x + 5y - 4z)$ ;

3)  $u = e^{\frac{x}{y}}$ ;      4)  $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ;

5)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;      6)  $z = e^x \cos y - e^y \sin x$ ;

7)  $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**Задание 3.** Найти  $f'_x(3;2)$ ,  $f'_y(3;2)$ ,  $f''_{xx}(3;2)$ ,  $f''_{xy}(3;2)$ ,  $f''_{yy}(3;2)$ , если  $f(x; y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ .

**Задание 4.** Показать, что функция  $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  удовлетворяет уравнению  $x^2 z'_x + y^2 z'_y = \frac{x^3}{y}$ .

### **Самостоятельная работа к теме 5**

Решение индивидуальных заданий по теме «Вычисление частных производных». Варианты заданий выдаются преподавателем.

### **Тема 6. Интегральное исчисление**

#### **функции нескольких действительных переменных**

Двойные повторные интегралы и их свойства. Повторные интегралы. Приложение двойных интегралов.

#### **Практическое занятие 6.**

#### **Вычисление интегралов**

#### **функций нескольких действительных переменных**

**Цель:** изучить основные правила вычисления интегралов функции нескольких переменных.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

### Задания к практической работе:

**Задание 1.** В двойном интеграле  $\iint_D f(x; y) dx dy$  расставить пределы

интегрирования в том и другом порядке, где  $D$  – треугольник с вершинами  $O(0;0)$ ,  $A(1;0)$ ,  $B(1;1)$ .

**Задание 2.** Для данных интегралов написать уравнения кривых, ограничивающих области интегрирования и построить эти области:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x; y) dy; & 2) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x; y) dy; \\ 3) \int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x; y) dx; & 4) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x; y) dy. \end{array}$$

**Задание 3.** Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x; y) dy; & 2) \int_{-1}^1 dx \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x; y) dy; \\ 3) \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x; y) dx; & 4) \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x; y) dy; \\ 5) \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x; y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x; y) dx; \\ 6) \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x; y) dy + \int_{-1}^2 dx \int_x^{\sqrt{x+2}} f(x; y) dy; \\ 7) \int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x; y) dy + \int_2^{10} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x; y) dy; \\ 8) \int_3^7 dx \int_{\frac{9}{x}}^3 f(x; y) dy + \int_7^9 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x; y) dy. \end{array}$$

**Задание 3.** Вычислить двойной интеграл:

- 1)  $\iint_D 2x dx dy$  по области ограниченной линиями:  $y + x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
- 2)  $\iint_D \cos(x + y) dx dy$ , если  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$ .
- 3)  $\iint_D xy^2 dx dy$ , если  $D$  ограничена линиями  $y = x^2$ ,  $y = x$ .

### **Тема 7. Теория рядов**

Определение числового ряда. Свойства рядов. Функциональные последовательности и ряды. Исследование сходимости рядов.

#### **Практическое занятие 7.**

##### **Исследование на сходимость рядов**

**с положительными членами по признаку Даламбера  
и знакопеременных рядов по признаку Лейбница**

**Цель:** изучить основные способы нахождения сходимости рядов.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Дан общий член ряда  $\frac{n}{2^n + 1}$ , записать четыре первых члена ряда.

**Задание 2.** Выяснить вопрос о сходимости ряда:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-2}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-5}{3^n}; \\ 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^5}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}; & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}; & 9) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n. \end{array}$$

**Задание 3.** Исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n (n+3)!}; \\ 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 2n + 9}{n^2 (3n+5)^2}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3}{\sqrt[3]{7n^{10} + 2n^3 - 4}}. \end{array}$$

**Задание 4.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-1}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n. \end{array}$$

### Самостоятельная работа к теме 7

Решение индивидуальных заданий по теме «Исследование числового ряда на сходимость». Варианты индивидуальных заданий выдаются преподавателем.

### Тема 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Общее и частное решение дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

### Практическое занятие 8.

#### Решение дифференциальных уравнений

**Цель:** изучить основные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1)  $(x + y)dx - xdy = 0;$

6)  $xy' - y = y^3;$

2)  $(x + y)dx + (y - x)dy = 0;$

7)  $xyy' = 1 - x^2;$

3)  $(x - y)dx + (x + y)dy = 0;$

8)  $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy;$

4)  $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0;$

9)  $yy' + x = 1;$

5)  $(1 + e^{3y})xdx = e^{3y}dy;$

10)  $e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x) \frac{dy}{\cos^2 y}.$

**Задание 2.** Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными:

1)  $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \quad y(0) = 0;$

2)  $\frac{y}{y'} = \ln y, \quad y(2) = 1;$

3)  $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0, \quad y(1) = 1;$

4)  $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y}} + y' = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

**Задание 3.** Найти общее решение однородного уравнения:

1)  $xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y \sin\left(\frac{y}{x}\right);$

2)  $xyy' = y^2 + 2x^2;$

3)  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$

4)  $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right).$



**Задание 4.** Найти общее решение дифференциального уравнения:

1)  $xy' - y = x^2 \cos x$ ;

2)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ;

3)  $y' \cos x + y = 1 - \sin x$ ;

4)  $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$ ;

5)  $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos \left( \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right)$ .

**Задание 5.** Найти частное решение дифференциального уравнения:

1)  $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, y(0)=0$ ;

2)  $y' = 2x(x^2 + y), y(0)=0$ ;

3)  $y' - y = e^x, y(0)=1$ ;

4)  $\cos y dx = (x + 2 \cos y) \sin y dy, y(0) = \frac{\pi}{4}$ .

### Практическое занятие 9.

#### Решение дифференциальных уравнений второго порядка

**Цель:** изучить основные методы решения дифференциальных уравнений второго порядка.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

#### Задания к практической работе:

**Задание 1.** Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка:

1)  $y'' = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;

4)  $xy'' - y' = e^x x^2$ ;

2)  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$ ;

5)  $2yy'' = 1 + (y')^2$ ;

3)  $yy'' + y'^3 = y'^2$ ;

6)  $yy'' = y'(y' + 1)$ .

**Задание 2.** Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1)  $y'' = xe^x, y(0)=1, y'(0)=0$ ;

2)  $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(2)=0, y'(2)=4$ .

**Задание 3.** Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$1) y'' - 2y' - 2y = 0;$$

$$2) y'' + 6y' + 13y = 0;$$

$$3) y'' - 6y' + 9y = 0;$$

$$4) y'' - y' = e^x;$$

$$5) y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x;$$

$$6) 4y'' - y = x^3 - 24x.$$

**Задание 4.** Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$1) y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1;$$

$$2) y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2;$$

$$3) y'' - 2y' = 2e^x, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0;$$

$$4) y'' + 4y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

## Тема 9. Матрицы и определители

Понятие матрицы. Действия над матрицами. Определитель матрицы. Обратная матрица. Ранг матрицы.

### Практическое занятие 10.

#### Решение задач по вычислению суммы и произведения матриц

**Цель:** изучить основные действия с матрицами.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Выполнить действия  $AB + 2C$ :

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задание 2.** Выполнить умножение:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Задание 3.** Найти определитель матрицы  $D = AB + C$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 22 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Практическое занятие 11.

#### Решение задач над обратными матрицами

**Цель:** изучить методы нахождения обратной матрицы.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Вычислить определители

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Задание 2.** Найти обратные матрицы:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Задание 3.** Решить матричные уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$4) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Самостоятельная работа к теме 9

Решение индивидуальных заданий по теме «Вычисление опреде-

лителя матрицы». Варианты выполнения задания выдаются преподавателем.

## **Тема 10. Системы линейных уравнений**

Основные понятия системы линейных уравнений. Правило решения произвольной системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

### **Практическое занятие 12.**

#### **Решение линейных уравнений**

**Цель:** изучить основные методы решения систем линейных уравнений.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Решить системы по правилу Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

**Задание 2.** Решить системы методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 1x + 2y + 3z = 6, \\ 4x - 2y - 2z = 0, \\ 3x + y - 3z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 4x - 3y - z = 2, \\ 4x + 2y + z = -8. \end{cases}$$

**Задание 3.** Решить системы матричным методом:

$$1) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x - 2y - z = 0, \\ 3x - y - 3z = 9. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - y - 3z = 5, \\ x + 2y - 2z = 0, \\ 3x - 3y + 4z = 10. \end{cases}$$

## Тема 11. Векторы и действия с ними

Определение вектора. Операции над векторами, их свойства. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов. Приложения скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

### Практическое занятие 13.

#### Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов

**Цель:** изучить методы основные действия с векторами.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Решите нижеперечисленные задачи:

1) Даны три вершины  $A(3, -4, 7)$ ,  $B(-5, 3, -2)$  и  $C(1, 2, -3)$  параллелограмма  $ABCD$ . Найти его четвертую вершину  $D$ , противоположную  $B$ .

2) Даны две смежные вершины параллелограмма  $A(-2, 6)$ ,  $B(2, 8)$  и точка пересечения его диагоналей  $O(2, 2)$ . Найти две другие вершины.

3) Даны вершины треугольника  $A(3, -1, 5)$ ,  $B(4, 2, -5)$  и  $C(-4, 0, 3)$ . Найти длину медианы, проведенной из вершины  $A$ .

4) Дано:  $|\vec{a}_1| = 3$ ,  $|\vec{a}_2| = 4$  и угол между векторами  $\frac{2\pi}{3}$ . Вычислить:

а)  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ ;

б)  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot (\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$ .

5) Определить угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если известно, что  $|\vec{a}| = 1$  и  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 20$ .

6) Даны векторы  $\vec{a} = \{4, -2, -4\}$  и  $\vec{b} = \{6, -3, 2\}$ . Вычислить:

а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;

б)  $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ;

в)  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ;

г)  $|2\vec{a} - \vec{b}|$ ;

д)  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ ;

е) направляющие косинусы вектора  $\vec{a}$ ;

ж)  $\text{pr}_{\vec{a}+\vec{b}} (\vec{a} - 2\vec{b})$ ;

з)  $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ .

7) Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами  $A(-1, -2, 4)$ ,  $B(-4, -2, 0)$  и  $C(3, -2, 1)$ .

8) Дано:  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  и  $\angle \varphi = \pi/6$ .. Вычислить:

а)  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ;

б)  $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|$ ;

в)  $|\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})|$ .

9) Дано:  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$  и  $\angle \varphi = \pi/4$ .. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ .

10) Заданы векторы  $\vec{a} = \{3, -1, -2\}$  и  $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$ . Найти координаты векторов:

а)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;

б)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$ ;

в)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$ .

11) Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(5, -6, 2)$  и  $C(1, 3, -1)$ .

### Самостоятельная работа к теме 11

Решение индивидуальных заданий по теме «Вычисление скалярного произведения векторов». Варианты выполнения задания выдаются преподавателем.

### Тема 12. Аналитическая геометрия на плоскости

Уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка на плоскости. Уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости.

### **Практическое занятие 14.**

#### **Составление и исследование уравнений окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости**

**Цель:** изучить основные свойства кривых второго порядка.

**Продолжительность работы:** 90 мин.

**Задания к практической работе:**

**Задание 1.** Определить тип кривой и сделать схематический чертёж линий, задаваемых уравнениями:

- 1)  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ ;
- 2)  $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ ;
- 3)  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ ;
- 4)  $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 151 = 0$ ;
- 5)  $x = 2y^2 - 12y + 14$ .

**Задание 2.** Составить уравнение окружности с центром в точке  $M(2;2)$ , касающейся прямой  $3x + y - 18 = 0$ .

**Задание 3.** Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

- 1) его малая полуось равна 12 и расстояние между фокусами равно 10;
- 2) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен 0,6;
- 3) расстояние между фокусами равно 4 и расстояние между директрисами 5;
- 4) расстояние между директрисами равно 32 и эксцентриситет равен 0,5.

**Задание 4.** Составить уравнение гиперболы, если известно, что:

- 1) расстояние между вершинами равно 8 и расстояние между фокусами равно 10;
- 2) действительная полуось равна 5 и вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам;
- 3) действительная полуось равна 6 и гипербола проходит через точку  $A(9;-4)$ ;
- 4) точки  $E(-5;2)$  и  $P(2\sqrt{5};\sqrt{3})$ .

**Задание 5.** Составить каноническое уравнение параболы, если

известно, что:

- 1) парабола имеет фокус  $F(0;2)$  и вершину в точке  $O(0;0)$ ;
- 2) парабола симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точки  $O(0;0)$  и  $P(1;-4)$ ;
- 3) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точки  $O(0;0)$  и  $P(6;-2)$ .

**Задание 6.** Составить уравнение траектории движения точки  $M(x; y)$ , если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки  $A(5;0)$ , чем от прямой  $5x - 6 = 0$ .



### **Список источников**

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. — 4-е изд., стер. — М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2023. — 400 с.
2. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики : учебник : в 2 томах. Том 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2024. — 304 с. —
3. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики : учебник : в 2 томах. Том 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2024. — 368 с.