

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра открытых горных работ

Составитель Д. Ю. Сирота

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА КИНЕМАТИКА

**Методические материалы к практическим занятиям
и самостоятельной работе**

Рекомендовано учебно-методической комиссией
специальности 21.05.04 Горное дело
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2025

Рецензент: Баёв М. А. – канд. техн. наук, доцент кафедры открытых горных работ ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева»
Марков С. О. – канд. техн. наук, доцент кафедры открытых горных работ ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева»

Сирота Дмитрий Юрьевич

Теоретическая механика. Кинематика : методические материалы практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся специальности 21.05.04 Горное дело / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; кафедра открытых горных работ; составитель Д. Ю. Сирота. – Кемерово : КузГТУ, 2025. – 1 файл (2325). – Текст : электронный.

Приведено содержание практических и самостоятельных работ, материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Теоретическая механика» и организация практических и самостоятельных работ.

© Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева, 2025
© Сирота Д. Ю., составление, 2025

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Рассмотрим некоторые основные понятия теоретической механики вообще и кинематики в частности.

Деформируемое тело – это тело, у которого расстояния между точками меняются в течение определённого промежутка времени.

Абсолютно жёсткое тело – это тело, которое не деформируется в течение определённого промежутка времени.

Отметим, что само по себе это понятие не является абсолютным, так как определяется уровнем внешних сил, свойствами жёсткости материала тела, продолжительностью выделенного промежутка времени. Таким образом, абсолютно жёсткое тело – это некоторая **модель реального тела**, в рамках которой выполняется указанное в определении свойство.

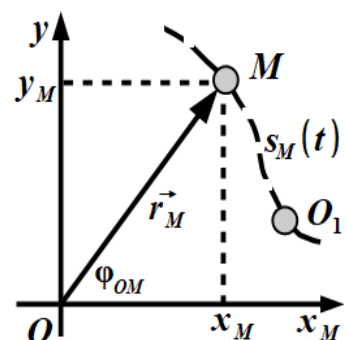
Материальная точка (частица) – это модель реального тела в тех случаях, когда внутренними свойствами и процессами его можно пренебречь.

Механическое движение – это изменение положения выбранного тела относительно других тел с течением времени.

Существует три основных способа аналитически, с помощью математики описать движение точки (рисунок 1).

Способ 1. Векторный. Наблюдатель находится вне движущегося тела и отслеживает перемещения в пространстве путём измерения расстояния и угла поворота до него. Математически он описывается с помощью радиус-вектора по формуле

$$\overline{r_M} = \overline{r}(t). \quad (1)$$



–рисунок 1.1_1

Способ 2. Координатный. Наблюдатель также находится вне движущегося тела, но отслеживает перемещения тела вдоль взаимно перпендикулярных осей координат. Если такая ось одна, то точка движется по прямой; если две, то точка движется на плоскости; если три, то точка движется в пространстве.

Как известно, существует несколько эквивалентных систем координат. Так как везде далее мы будем рассматривать движение по плоскости, то приведём формулы для двух основным плоскостных систем: декартовой и полярной.

Математически они описывается с помощью двух функций, которые зависят от параметра, по формулам

$$\begin{cases} x_M = x(t) \\ y_M = y(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{cases} r_{OM} = r(t) \\ \varphi_{OM} = \varphi(t) \end{cases} . \quad (2.2)$$

Способ 3. Естественный. Наблюдатель находится внутри движущегося тела и отсчитывает пройденное расстояние вдоль произвольной криволинейной траектории движения от некоторой фиксированной точки.

$$s_M = s(t) . \quad (3)$$

Для количественной характеристики движения точки с течением времени используют две величины: скорость и ускорение. Рассмотрим частные случаи движений, в рамках которых найдём эти величины.

2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Пусть точка «М» движется вдоль прямой. Таким образом, траектория движения – это всегда набор отрезков, которые расположены на этой прямой. Положение точки в каждый момент времени определяется расстоянием, которое измеряется от выбранной неподвижной точки «О»: $x_M = x(t)$.

Рассмотрим вывод расчётных формул для скорости точки (рисунок 2). Пусть в некоторый момент времени t_A точка находилась в положении «А», которое определяется радиус-вектором $\overline{r_A}$, и двигалась со скоростью $\overline{v_A}$. Пусть в некоторый следующий момент

времени t_B точка находилась в положении «В», которое определяется радиус-вектором \vec{r}_B , и двигалась со скоростью \vec{v}_B .

Тогда за промежуток времени $t_{AB} = t_B - t_A$ точка переместится в направлении вектора $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, а вектор скорости точки поменяет своё направление на величину $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

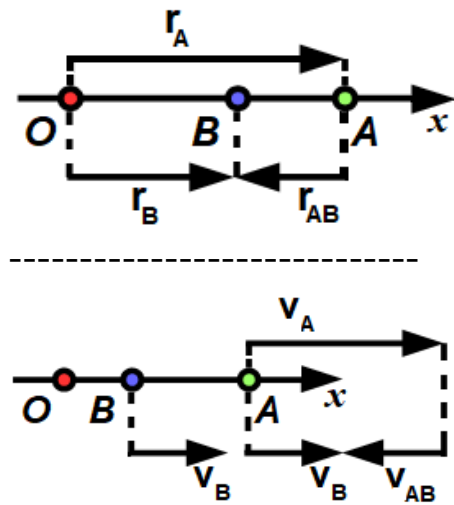
Между величинами t_{AB} и \vec{r}_{AB} , а также t_{AB} и \vec{v}_{AB} существуют линейные взаимосвязи $\vec{r}_{AB} = \vec{v}_{AB} \times t_{AB}$ и $\vec{v}_{AB} = \vec{a}_{AB} \times t_{AB}$. Коэффициенты \vec{v}_{AB} и \vec{a}_{AB} зависят от продолжительности промежутка времени t_{AB} и являются

средней скоростью и средним ускорением движения точки. Их размерности в системе СИ – м/с и м/с².

Однако движение точки может быть устроено таким образом, что существует некий промежуток времени, за который точка дошла до конца пути и вернулась обратно, то есть вектор перемещения $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 0$. Аналогичная ситуация может быть и с вектором скорости: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. При этом скорость и ускорение, естественно, не могут быть равны нулю на всём временном промежутке, так как точка прошла всю траекторию от начала до конца, меняя при этом величину и направление скорости.

Поэтому вместо произвольного промежутка времени t_{AB} используют малый промежуток времени Δt , за который точка не может вернуться обратно, а лишь перемещается на какое-то расстояние в направлении $\vec{\Delta r}$ и меняет скорость на величину $\vec{\Delta v}$. Линейная взаимосвязь между этими величинами по-прежнему сохраняется, но при этом коэффициенты пропорциональности называются **мгновенной скоростью** точки: $\vec{\Delta r} = \vec{v} \times \Delta t$ и мгновенным ускорением $\vec{\Delta v} = \vec{a} \times \Delta t$.

Поскольку мы не можем неограниченно уменьшать промежуток времени и при этом измерять соответствующие элементы рас-



– рисунок 1.1_2.

стояний и скоростей, то для практического вычисления мгновенной скорости и ускорения был придуман математический инструмент – пределы функции и, как следствие, производные функции. Таким образом, мгновенная скорость определяется по следующим формулам:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}; \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

а мгновенное ускорение по формулам

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}; \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (5)$$

ПРИМЕР 1. Дан закон движения точки вдоль прямой: $x(t) = 2 \times t^3 - 24 \times t + 6$, м. Определить время, когда точка разовьёт скорость 72 м/с; определить ускорение в тот момент, когда точка разовьёт скорость 30 м/с; определить пройденный путь за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с.

РЕШЕНИЕ. По формуле (4) найдём, что $v = \frac{dx}{dt} = 6 \times t^2 - 24$, м/с. Найдём момент времени, когда точка разовьёт скорость 72 м/с: $v = 72 \Rightarrow 6 \times t^2 - 24 = 72 \Rightarrow t = 4$ с.

По формуле (5) найдём, что $a = \frac{dv}{dt} = 12 \times t$, м/с². Найдём момент времени, когда точка разовьёт скорость 30 м/с: $v = 30 \Rightarrow 6 \times t^2 - 24 = 30 \Rightarrow t = 3$ сек. Тогда $a = 12 \times 3 = 36$, м/с².

Для определения пройденного пути надо понять, будет ли точка возвращаться или всё время будет двигаться в одном направлении. Для этого найдём момент времени, когда её скорость равна нулю: $v = 6 \times t^2 - 24 = 0 \Rightarrow t = 2$ с. Тогда весь временной интервал разобьём на два: $t \in [1; 2]$ и $t \in [2; 4]$, в течение которых точка двигалась только в одном направлении. Найдём пройденные расстояния: $S_1 = |x_1 - x_2| = 10$, $S_2 = |x_2 - x_4| = 64$, $S = S_1 + S_2 = 74$ м.

ПРИМЕР 2. Частица начала двигаться по прямой со стартовой скоростью $v(0) = 15$, м/с. В первые 4 секунды движения точка двигалась без ускорения, а затем точка стала замедлять движение с ускорением $a = 3$, м/с². Вычислить скорость и пройденный путь за 8 и 12 секунд. Определить максимальный пройденный путь до момента остановки.

РЕШЕНИЕ. Найдём пройденный путь за первые 4 секунды:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \times dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^4 v \times dt \Rightarrow x = v \times t \Big|_0^4 = 15 \times 4 = 60, \text{ м.}$$

Найдём скорость точки после четырёхсекундного движения:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \times dt \Rightarrow \int_{15}^v dv = \int_4^t a \times dt \Rightarrow v - 15 = -3 \times (t - 4).$$

Вычислим скорость через 8 и 12 секунд:

$$v(8) = 15 - 3 \times (8 - 4) = 3 \text{ м/с и } v(12) = 15 - 3 \times (12 - 4) = -9 \text{ м/с.}$$

Найдём перемещение точки после четырёхсекундного движения:

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \times dt \Rightarrow \int_{60}^x dx &= \int_4^t v \times dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - 60 = -3 \times \frac{(t - 4)^2}{2} + 15 \times t - 60. \end{aligned}$$

Определим пройденный путь через 8 и 12 секунд:

$$\begin{aligned} x(8) &= -3 \times \frac{(8 - 4)^2}{2} + 15 \times 8 = 96, \text{ м и} \\ x(12) &= -3 \times \frac{(12 - 4)^2}{2} + 15 \times 12 = 84, \text{ м.} \end{aligned}$$

Можно заметить, что в интервале от 8 до 12 секунд произошла остановка, и началось обратное движение. Найдём этот момент времени: $v = 0 \Rightarrow 15 - 3 \times (t - 4) = 0 \Rightarrow t = 9$, сек. Найдём пройденный

$$\text{путь за это время: } x(9) = -3 \times \frac{(9 - 4)^2}{2} + 15 \times 9 = 97,5, \text{ м.}$$

ПРИМЕР 3. Тело двигалось из состояния покоя вертикально вверх, развиг на высоте 40 метров скорость 75 м/с. После этого те-

ло двигалось по инерции вверх с ускорением свободного падения $a = -10 \text{ м/с}^2$. Определить максимальную высоту подъёма и максимальную скорость при свободном падении.

РЕШЕНИЕ. Найдём закон уменьшения скорости:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \times dt \Rightarrow \int_{75}^v dv = -10 \times \int_0^t dt \Rightarrow v - 75 = -10 \times t$$

Найдём время подъёма точки до остановки:

$$v = 0 \Rightarrow 75 - 10 \times t = 0 \Rightarrow t = 7,5, \text{ сек.}$$

Найдём высоту подъёма точки до остановки:

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \times dt \Rightarrow \int_{40}^h dx &= \int_0^{7,5} v \times dt \Rightarrow \\ \Rightarrow h - 40 &= -10 \times \frac{t^2}{2} + 75 \times t \Big|_0^{7,5} = -10 \times \frac{7,5^2}{2} + 75 \times 7,5 = 281,25 \\ \Rightarrow h &= 40 + 281,25 = 321,25, \text{ м.} \end{aligned}$$

Найдём закон увеличения скорости (ускорение должно быть положительным):

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \times dt \Rightarrow \int_0^v dv = 10 \times \int_0^t dt \Rightarrow v = 10 \times t.$$

Найдём время падения, зная весь пройденный телом путь:

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \times dt \Rightarrow \int_0^h dx &= \int_0^t v \times dt \Rightarrow h = 10 \times \frac{t^2}{2} \Big|_0^t \Rightarrow h = 5 \times t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \sqrt{0,2 \times h} = 8,02, \text{ сек.} \end{aligned}$$

Тогда максимальная скорость при падении $v = 10 \times t = 80,2, \text{ м/с.}$

ПРИМЕР 4. Тело начало двигаться вниз по вертикали из состояния покоя, находясь на расстоянии 100 мм от более верхней точки отсчёта. Определить скорость при приземлении и время падения, если тело прошло вниз расстояние 100 мм, а ускорение определялось по формуле $a = 4 \times x \text{ м/с}^2$.

РЕШЕНИЕ: Так как в данном случае нет никакой информации о времени передвижения, то перейдём в дифференциальных

выражениях от времени к перемещению по формуле:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt}.$$

Найдём выражение для скорости:

$$a = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \times v \Rightarrow v \times dv = a \times dx \Rightarrow \int_0^v v \times dv = 4 \int_{0,1}^x x \times dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_0^v = 4 \times \frac{x^2}{2} \Big|_{0,1}^x \Rightarrow \frac{v^2}{2} = 2 \times (x^2 - 0,1^2).$$

Тогда скорость при приземлении $v = 2 \times \sqrt{x^2 - 0,1^2} = 0,346$, м/с.

Найдём время прохождения участка в 100 мм:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \times dt \Rightarrow \int_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 0,1^2}} = \int_0^t 2 \times dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\sqrt{x^2 - 0,01} + x) \Big|_{0,1}^{0,2} = 2 \times t \Rightarrow t = 0,658, \text{ сек.}$$

ПРИМЕР 5. Тело движется со скоростью $v = 3 \times t^2 - 6 \times t$, м/с вдоль прямой из состояния покоя. Определить пройденный путь за 3,5 секунды.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что есть моменты времени, когда скорость равна нулю. Это означает, что в процессе движения тело останавливается и меняет его направление. Найдём эти моменты времени:

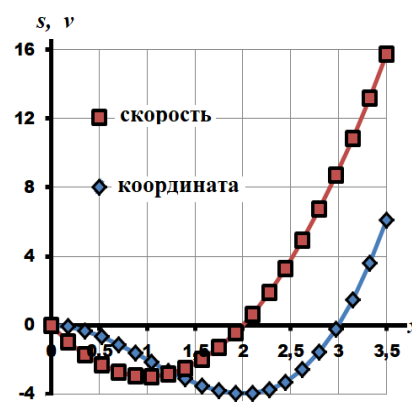
$$v = 0 \Rightarrow 3 \times t^2 - 6 \times t = 0 \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = 2, \text{ сек.}$$

Найдём координату точки через первые 2 секунды:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_0^{x_1} dx = \int_0^2 (3 \times t^2 - 6 \times t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = (t^3 - 3 \times t^2) \Big|_0^2 = -4, \text{ м.}$$

Найдём координату точки через следующие 1,5 секунды:



– рисунок 1.1_3.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{-4}^{x_2} dx = \int_2^{3,5} (3 \times t^2 - 6 \times t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 + 4 = (t^3 - 3 \times t^2) \Big|_2^{3,5} \Rightarrow x_2 = 6,125, \text{ м.}$$

Таким образом, полный пройденный путь равен общей сумме перемещений: 14,125 м.

Заметим, что эту же задачу можно решить и по-другому: вычисляя пройденный путь за указанные интервалы времени, а потом их складывая.

Найдём пройденный путь влево за первые 2 секунды:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \times dt \Rightarrow \int_0^{S_1} dx = \int_0^2 (6 \times t - 3 \times t^2) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_I = (3 \times t^2 - t^3) \Big|_0^2 = 4, \text{ м.}$$

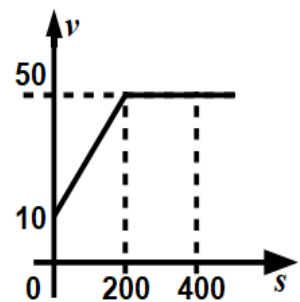
Найдём пройденный путь вправо за следующие 1,5 секунды:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow ds = v \times dt \Rightarrow \int_{-4}^{S_2} dx = \int_2^{3,5} (3 \times t^2 - 6 \times t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{II} = (t^3 - 3 \times t^2) \Big|_2^{3,5} = 10,125, \text{ м.}$$

Таким образом, полный пройденный путь так же равен общей сумме перемещений: 14,125 м.

ПРИМЕР 6. Дан график зависимости скорости от пройденного пути. Определить время, необходимое для прохождения расстояния в 400 метров.



– рисунок 1.1_4.

РЕШЕНИЕ. Найдём функцию, которая задаёт изменение скорости на первом участке. Будем использовать уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$v - v_0 = k \times (s - s_0) \Rightarrow v - 10 = \frac{40}{200} \times (s - 0) \Rightarrow v = 0,2 \times s + 10.$$

Найдём время прохождения первого участка:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_0^{200} \frac{ds}{0,2 \times s + 10} = \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 5 \times \ln(0,2 \times 200 + 10) - 5 \times \ln(10) = 8,047, \text{ с.}$$

Найдём время прохождения второго участка:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_{200}^{400} ds = \int_{8,047}^t 50 dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 = 50 \times (t - 8,047) \Rightarrow t = 12,047, \text{ с.}$$

Таким образом, общее время прохождения 20,094 с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК К1. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Задача 1. Тело двигалось со скоростью 35 м/с. После начала торможения за 15 секунд скорость снизилась до 10 м/с. Определить постоянное ускорение.

Ответ: $a = -1,667 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. Шар подбросили вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. Определить общее время полёта до возвращения в исходное положение.

Ответ: $t_1 = t_2 = 1,5 \text{ с}, t = 3 \text{ с}$.

Задача 3. Частица из состояния покоя движется по закону $v = 9 \times t - 3 \times t^2$, м/с. Определить координату положения частицы через 4 секунды движения.

Ответ: $x = 8, \text{ м}$.

Задача 4. Координата частицы в некоторой системе координат определяется формулой: $x = 2 \times t^2 - 8 \times t + 6$, м. Определить момент времени, когда скорость частицы равна нулю. Так же определить полный пройденный путь за 3 секунды.

Ответ: $t = 2, \text{ с}; S = 10 \text{ м}$.

Задача 5. Частица движется со скоростью $v = 20 - 0,05 \times x^2$, м/с. Определить ускорение в тот момент, когда $x = 15$, м.

Ответ: $a = -13,125 \text{ м/с}^2$.

Задача 6. Частица движется по прямой с ускорением в некоторой системе координат $a = 10 - 0,2 \times x$, м/с². Определить скорость частицы, когда координата $x = 10$ м, если в начале пути скорость была равна $v(0) = 5$, м/с.

Ответ: $v = 14,318$, м/с.

Задача 7. Ускорение частицы $a = 2 \times t - 1$, м/с² в некоторой системе координат. В начальный момент времени $x = 1$, м; $v = 2$, м/с. Определить скорость и координату частицы, когда $t = 6$, с. Так же определить пройденный путь за это время.

Ответ: $v = 32$, м/с; $x = 67$, м; $S = 66$, м.

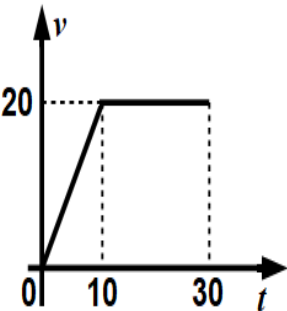
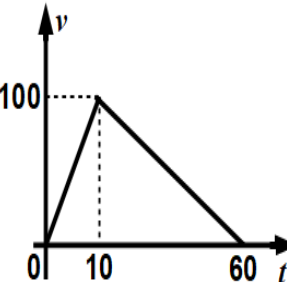
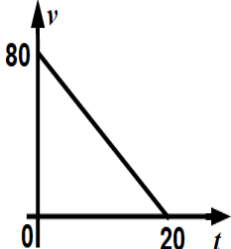
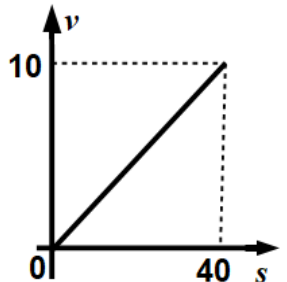
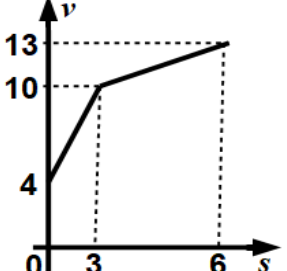
Задача 8. Мяч «А» подбрасывается вертикально вверх с крыши здания высотой 30 м с начальной скоростью 5 м/с. В то же мгновение другой мяч «В» подбрасывается вверх с земли с начальной скоростью 20 м/с. Определите высоту от земли и время, через которое они встретятся.

Ответ: $H = 35,799$, м; $t = 1,417$, с.

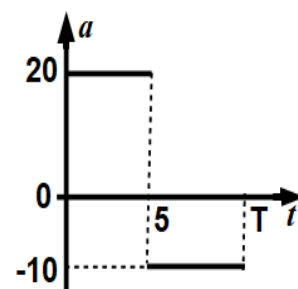
Задача 9. Мотоцикл «А» трогается с места в момент $t = 0$ и движется по прямой дороге с постоянным ускорением 1,8, м/с², пока не достигнет скорости 15 м/с. После этого он поддерживает эту скорость постоянной. Кроме того, при $t = 0$ автомобиль «В», находящийся в 1800 метрах дальше по дороге, движется навстречу мотоциклу с постоянной скоростью 9 м/с. Определите время и расстояние, пройденные мотоциклом «В», в момент их встречи.

Ответ: $S_A = 1101,56$, м; $t = 77,604$, с.

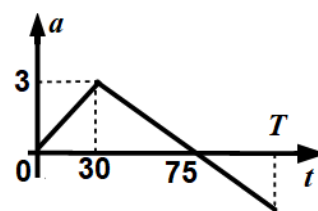
БЛОК К2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ: ГРАФИКИ.

<p>Задача 1 Велосипед движется по прямолинейной дороге. Динамика изменения скорости представлена на графике. Определить пройденный путь за промежуток времени между: $t_1 = 5$, сек и $t_2 = 25$, сек.</p> <p>Ответ: $\Delta S = 375$, м.</p>	
<p>Задача 2. Велосипед движется по прямолинейной дороге. Динамика изменения скорости представлена на графике. Определить пройденный путь за первые 10 секунд и за всё время движения.</p> <p>Ответ: $S_I = 500$, м; $S_{II} = 3000$, м.</p>	
<p>Задача 3. Тело движется по прямолинейной дороге. Динамика изменения скорости представлена на графике. Определить ускорение и пройденный путь за всё время движения.</p> <p>Ответ: $a = -4$, м/с²; $S = 800$, м.</p>	
<p>Задача 4. Тело движется по закону, представленному на графике. Определить время, за которое тело пройдёт указанное расстояние, а также ускорение в конце пути, если известно, что $s(1) = 1$.</p> <p>Ответ: $a = 2,5$, м/с²; $t = 15,756$, с.</p>	
<p>Задача 5. Тело движется по закону, представленному на графике. Определить время, за которое тело пройдёт первый участок и весь путь.</p> <p>Ответ: $t_I = 0,458$, сек; $t_{II} = 0,721$, сек</p>	

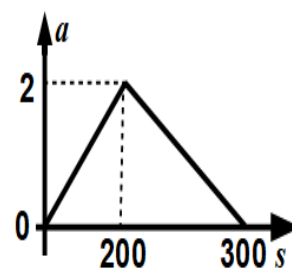
Задача 6. Автомобиль движется по прямой, разгоняясь и тормозя. Динамика изменения ускорения представлена на графике (время – секунды, расстояние – сантиметры). Определить протяжённость пути разгона, протяжённость пути торможения, полное время до остановки.
Ответ: $S_I = 250$, см; $S_{II} = 750$, см; $T = 15$, с.



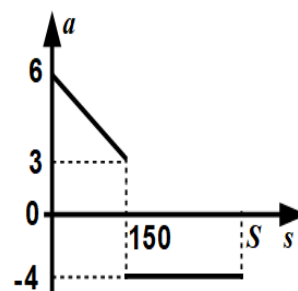
Задача 7. Тело движется по прямой из состояния покоя. Изменение ускорения движения представлено на графике (время – секунды, расстояние – метры). Определить время до остановки и пройденный путь.
Ответ: $T = 93,371$, м/с; $S = 6497,848$, м.



Задача 8. Автомобиль движется по прямой из состояния покоя. Динамика изменения ускорения представлена на графике (время – секунды, расстояние – сантиметры). Определить скорость в конце первого участка пути, скорость в конце второго участка пути.
Ответ: $v_I = 20$, см/с; $v_{II} = 24,495$, см/с.

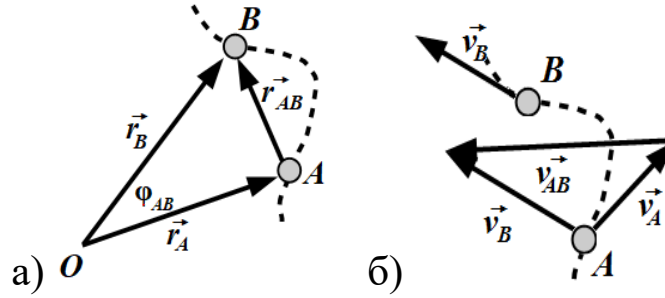


Задача 9. Тело движется по прямой из состояния покоя. Изменение ускорения движения представлено на графике (время – секунды, расстояние – метры). Определить максимальную скорость тела, а также пройденную дистанцию до остановки.
Ответ: $v_{\max} = 36,742$, м/с; $S = 318,75$, м.



3. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Пусть точка «М» движется на плоскости по произвольной криволинейной траектории, переходя из положения «А» в положение «В». В этом случае векторные соотношения для средних скорости и ускорения остаются прежними: $\overline{r_{AB}} = \overline{v_{AB}} \times t_{AB}$ и $\overline{v_{AB}} = \overline{a_{AB}} \times t_{AB}$ (рисунок 1.2_1).



– рисунок 1.2_1.

Уменьшая промежуток времени до бесконечно малого, получим аналогичные векторные равенства для мгновенных скорости и ускорения: $\Delta r = \bar{v} \times \Delta t$ и $\Delta v = \bar{a} \times \Delta t$.

СЛУЧАЙ 1. Движение задаётся в декартовой системе координат Oxy . Проектируя векторные равенства на оси координат, получим координаты вектора скорости

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (6)$$

и координаты вектора ускорения

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{dv_y}{dt}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (7)$$

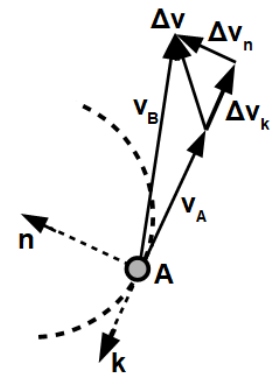
СЛУЧАЙ 2. Движение задаётся в естественной системе координат. В этом случае проекции осуществляются на касательную и нормаль к траектории движения в заданной точке (рисунок 1.2_2). Векторные соотношения для скорости и ускорения будут иметь вид: $\Delta s = v \times \Delta t$ и $\Delta v = a_k \times \Delta t$.

Приведём соответствующие расчётные формулы:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (8)$$

$$a_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (9)$$

Заметим, что в отличие от формул (6) и (8), которые позволяют найти одну и ту же величину, формулы (7) и (9) в общем случае не тождественны. Это связано с тем, что вектор ускорения в точке может быть направлен в произвольную сторону от касательной к траектории и только некоторая его часть направлена вдоль вектора скорости. Вторая часть вектора ускорения направлена вдоль нормали в сторону изгиба траектории. Величины этих частей ускорения могут быть выражены через компоненты векторов скорости и ускорения, если они заранее известны в данной точке:



– рисунок 1.2_2.

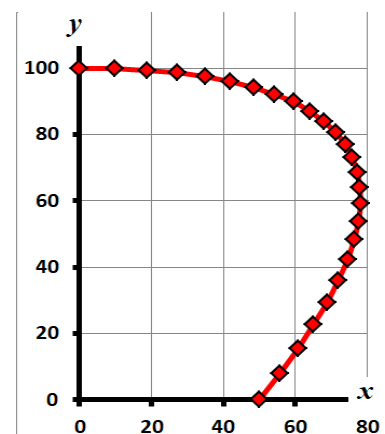
$$a_k = \frac{v_x \times a_x + v_y \times a_y}{v}, \quad a_n = \frac{|v_x \times a_y - v_y \times a_x|}{v}. \quad (10)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что у любой кривой есть геометрическая характеристика: кривизна и обратная к ней характеристика: радиус кривизны – радиус окружности, которая наилучшим образом совпадает с кривой в выбранной точке. В случае плоской кривой эта величина определяется по формуле:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \quad (11)$$

ПРИМЕР 7. Движение точки определяется двумя уравнениями: $v_x = 50 - 16 \times t$, м/с; $y = 100 - 4 \times t^2$, м. Также известно, что $x(0) = 0$. Построить траекторию движения, определить полную скорость и ускорение в момент времени, когда координата $y = 0$.

РЕШЕНИЕ. Для определения траектории необходимо получить полную запись системы уравнений (2). Перейдём от скорости к перемещению:



– рисунок 1.2_3.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x \times dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (50 - 16 \times t) dt \Rightarrow x = 50 \times t - 8 \times t^2$$

Найдём вторую компоненту вектора скорости:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(100 - 4 \times t^2)}{dt} = -8 \times t, \text{ м/с.}$$

Найдём обе компоненты вектора ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(50 - 16 \times t)}{dt} = -16, \text{ м/с}^2.$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(-8 \times t)}{dt} = -8, \text{ м/с}^2.$$

Найдём момент времени, когда координата $y = 0$:

$$y = 0 \Rightarrow 100 - 4 \times t^2 = 0 \Rightarrow t = 5, \text{ с.}$$

Найдём значения компонент вектора скорости и полную скорость в найденный момент времени:

$$v_x(5) = 50 - 16 \times 5 = -30, \text{ м/с}; \quad v_y(5) = -8 \times 5 = -40, \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 50, \text{ м/с.}$$

Найдём значения компонент вектора ускорения и полное ускорение в найденный момент времени:

$$a_x(5) = -16, \text{ м/с}^2; \quad a_y(5) = -8, \text{ м/с}^2; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 17,889, \text{ м/с}^2.$$

График траектории можно построить по точкам, вычисляя значения функции либо вручную, либо в табличном редакторе.

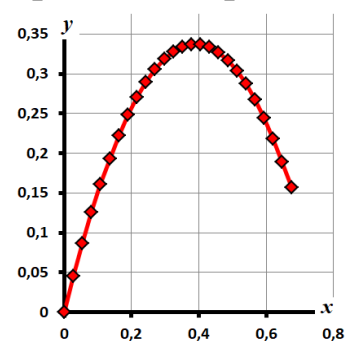
ПРИМЕР 8. Тело начинает двигаться вверх со скоростью $v = 3 \text{ м/с}$ под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонтали. В процессе движения на тело действует ускорение, с компонентами $a_x = 0, \text{ м/с}^2$, $a_y = -10, \text{ м/с}^2$. Определить максимальную высоту подъёма и пройденный путь по горизонтали.

РЕШЕНИЕ. Найдём компоненты начальной скорости:

$$v_x = v \cos \varphi = 1,5, \text{ м/с}; \quad v_y = v \sin \varphi = 2,598, \text{ м/с.}$$

Найдём компоненты вектора скорости:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x \times dt \Rightarrow \int_{1,5}^{v_x} dv_x = \int_0^t 0 dt \Rightarrow v_x - 1,5 = 0 \Rightarrow$$



— рисунок 1.2_3.

$$\Rightarrow v_x = 1,5, \text{ м/с.}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow dv_y = a_y \times dt \Rightarrow \int_{2,598}^{v_y} dv_y = -10 \times \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_y - 2,598 = -10 \times t \Rightarrow v_y = 2,598 - 10 \times t, \text{ м/с.}$$

Найдём законы изменения координат точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x \times dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t 1,5 dt \Rightarrow x = 1,5 \times t, \text{ м.}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y \times dt \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t (2,598 - 10 \times t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2,598 \times t - 5 \times t^2, \text{ м.}$$

Траектория движения точки приведена на рисунке.

Найдём время подъёма на максимальную высоту, когда вертикальная компонента скорости будет равна нулю:

$$v_y = 0 \Rightarrow 2,598 - 10 \times t = 0 \Rightarrow t = 0,2598, \text{ с.}$$

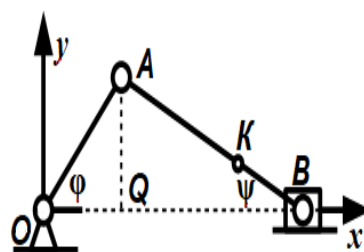
Найдём высоту подъёма и пройденный путь:

$$H = y(T) = 2,598 \times 0,2598 - 5 \times 0,2598^2 = 0,337, \text{ м;}$$

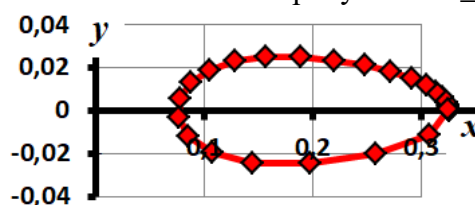
$$S = x(T) = 1,5 \times 0,2598 = 0,3897, \text{ м.}$$

ПРИМЕР 9. Дан кривошипно-ползунный механизм (рисунок 1.2_4) с размерами: $OA = 0,125, \text{ м; } AB = 0,25, \text{ м}$ и законом изменения угла поворота кривошипа $\varphi = 7 \times t^2, \text{ рад.}$ Найти скорость точки K в момент времени $t = 3 \text{ с}$, если $AK = 0,2 \text{ м}$. Построить траекторию движения точки K .

РЕШЕНИЕ: Для определения скорости и ускорения необходимо найти законы изменения координат от времени. Так как в условиях есть закон изменения угла поворота кривошипа от времени, то достаточно будет определить зависимость координат от этого угла. Эта вспомогательная задача решается чисто геометрически.



– рисунок 1.2_4.



– рисунок 1.2_5.

Найдём координаты точки K :

$$x_K = OA \times \cos(\varphi) + AK \times \cos(\psi); \quad y_K = BK \times \sin(\psi),$$

$$\text{где } \sin \psi = AQ / AB, \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}, \quad AQ = OA \times \sin \varphi.$$

График траектории можно построить по точкам, вычисляя значения функции либо вручную, либо в табличном редакторе (рисунк 1.2_5).

Здесь можно отметить влияние погрешностей округления и вообще особенности вычислительных реализаций различных аналитических формул. В данном случае негативное воздействие оказывает встроенная в EXCEL функция ASIN().

Так как для определения компонент скорости необходимо найти производные, то приведём вспомогательные формулы:

$$\frac{d \sin(\varphi)}{dt} = \cos(\varphi) \times \frac{d\varphi}{dt} = 14 \times t \times \cos(\varphi);$$

$$\frac{d \cos(\varphi)}{dt} = -\sin(\varphi) \times \frac{d\varphi}{dt} = -14 \times t \times \sin(\varphi);$$

$$\frac{d \sin(\psi)}{dt} = \frac{OA}{AB} \times \frac{d \sin(\varphi)}{dt}; \quad \frac{d \cos(\psi)}{dt} = -\frac{AQ \times OA}{AB^2} \times \frac{d \sin(\varphi)}{dt}.$$

Произведём необходимые вспомогательные вычисления в соответствующий момент времени.

$$\varphi|_{t=3} = 7 \times t^2|_{t=3} = 63^\circ \approx 3610^\circ \approx 10^\circ;$$

$$\sin(\varphi) = 0,1674, \quad \cos(\varphi) = 0,9859,$$

$$\frac{d \sin(\varphi)}{dt} = 14 \times t \times \cos(\varphi) = 41,4073,$$

$$\frac{d \cos(\varphi)}{dt} = -14 \times t \times \sin(\varphi) = -7,0308,$$

$$AQ = OA \times \sin \varphi = 0,02093; \quad \sin \psi = AQ / AB = 0,0837;$$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = 0,9965; \quad \sin(2\psi) = 0,1668;$$

$$\frac{d \sin(\psi)}{dt} = \frac{OA}{AB} \times \frac{d \sin(\varphi)}{dt} = 20,70365;$$

$$\frac{d \cos(\psi)}{dt} = -\frac{AQ \times OA}{AB^2} \times \frac{d \sin(\varphi)}{dt} = -1,7333.$$

Найдём величины компонент скорости и полную скорость в заданный момент времени:

$$v_x = OA \times \frac{d \cos(\varphi)}{dt} + AK \times \frac{d \cos(\psi)}{dt} = -1,22543 ;$$

$$v_y = BK \times \frac{d \sin(\psi)}{dt} = 1,0352 ;$$

$$v_K = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1,60415, \text{ м/с.}$$

Можно отметить, что процесс аналитического вычисления скорости (по сути производных) достаточно долог. Можно воспользоваться формулами численного вычисления производных следующего вида: $v_x = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2 \times h}$ и $v_y = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2 \times h}$.

Так, взяв шаг $h = 10^{-4}$, получим $v_x = -1,2263$; $v_y = 1,0352$;

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1,605$, м/с, что вполне совпадает с полученными выше значениями.

ПРИМЕР 10. Автомобиль движется по холмистой местности с сильными перепадами высот. В нижней точке «А» скорость тела равна 100 км/ч, а в верхней точке «С» – 50 км/ч. Расстояние между ними по траектории 120 м. Пусть известно, что: в точке «А» ускорение автомобиля было равно 3 м/с^2 , а в точке «С» радиус кривизны равен 150 м. Вычислить радиус кривизны в точке «А»; ускорение в средней точке траектории; полное ускорение в точке «С».

РЕШЕНИЕ. Перейдём к системе СИ:

$$v_A = 100 \times \frac{1}{3600} \times 1000 = 27,778, \text{ м/с}; \quad v_C = \frac{v_A}{2} = 13,889, \text{ м/с.}$$

Определить точное значение касательного ускорения в точках траектории невозможно. Поэтому дальнейшие расчёты будем основывать на усреднённых интегральных характеристиках.

Найдём касательное ускорение в точках траектории:

$$a_k = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \times v \Rightarrow v \times dv = a_k \times ds \Rightarrow \int_{v_A}^{v_C} v \times dv = a_k \int_0^{120} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_{v_A}^{v_C} = a_k \times s \Big|_0^{120} \Rightarrow -289,356 = a_k \times 120 \Rightarrow a_k = -2,411, \text{ м/с}^2.$$

Найдем по формуле () нормальное ускорение в точке A :

$$a_n^2 = a^2 - a_k^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{3^2 - (-2,411)^2} = 1,7852, \text{ м/с}^2.$$

Найдём радиус кривизны траектории в точке « A »:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{27,778^2}{1,785} = 432,279, \text{ м.}$$

В средней точке пути траектория представляет собой прямую линию, поэтому ускорение будет состоять только из одной компоненты:

$$a_B = a_k = -2,411, \text{ м/с}^2.$$

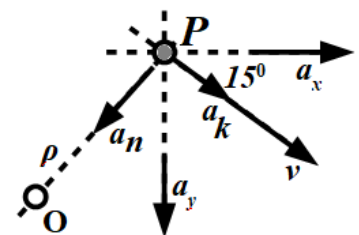
Найдём нормальное ускорение в точке « C »:

$$a_k = \frac{v^2}{\rho} = \frac{13,889^2}{150} = 1,287, \text{ м/с}^2.$$

Найдем по формуле (6.4) полное ускорение в точке « C »:

$$a = \sqrt{a_k^2 + a_n^2} = \sqrt{(-2,411)^2 + 1,287^2} = 2,733, \text{ м/с}^2.$$

ПРИМЕР 11. Ракета движется по криволинейной траектории вправо с горизонтальным ускорением 6 м/с^2 и вниз с вертикальным 9 м/с^2 . В некоторый момент времени, когда касательная к траектории ракете находилась под углом 15° к горизонтали, её скорость была равна 5280 м/с (рисунок 1.2_6). Определить радиус кривизны траектории; скорость изменения величины скорости; скорость изменения угла поворота; полное ускорение.



– рисунок 1.2_6.

РЕШЕНИЕ. Найдём нормальное ускорение в данный момент времени:

$$a_n = 9 \times \cos(15^\circ) - 6 \times \sin(15^\circ) = 7,140, \text{ м/с}^2.$$

Найдём радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5280^2}{7,140} \approx 3,904 \times 10^6, \text{ м.}$$

Найдём скорость изменения величины скорости (касательное ускорение): $a_k = 9 \times \sin(15^\circ) + 6 \times \cos(15^\circ) = 8,125, \text{ м/с}^2$.

Найдём скорость изменения угла поворота:

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{5280}{3,904 \times 10^6} = 1,352 \times 10^{-3}, \text{ рад/с.}$$

Найдём полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10,817, \text{ м/с}^2.$$

$$a = \sqrt{a_k^2 + a_n^2} = \sqrt{8,125^2 + 7,140^2} = 10,817, \text{ м/с}^2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК КЗ. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Задача 1. Точка движется по криволинейной траектории. В момент времени $t_A = 3,64$ с она находилась в точке «А», где её скорость была равна 40 м/с и направлена под углом 36° к горизонтали. В момент времени $t_B = 3,84$ с она находилась в точке «В», где её скорость была равна 44 м/с и направлена под углом 26° к горизонтали. Определить средние ускорения: полное, нормальное и касательное за этот промежуток времени.

Ответ: $a_{AB} = 41,676, a_{AB}^n = 36,563, a_{AB}^k = 20 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. Точка движется по криволинейной траектории. В момент времени $t_A = 2,4$ с она находилась в точке «А», где её скорость была равна 12 м/с и направлена под углом 15° к горизонтали. В момент времени $t_B = 2,62$ с она находилась в точке «В», где её скорость была равна 14 м/с и направлена под углом 25° к горизонтали. Определить средние ускорения: полное, нормальное и касательное за этот промежуток времени.

Ответ: $a_{AB} = 13,715, a_{AB}^n = 10,269, a_{AB}^k = 9,090 \text{ м/с}^2$.

Задача 3. Кусок угля, двигаясь по транспортёру с горизонтальной скоростью $v_x = 12$ см/с, падает с высоты 6 метров. Определить время падения куска угля и расстояние до места падения по горизонтали.

Ответ: $T = 1,095$, с; $S = 13,14$, см.

Задача 4. Снегоуборочная машина выстреливает набранным снегом со скоростью $v_O = 7,625$, м/с под углом 30 градусов к горизонту. Определить максимальную высоту получаемого сугроба снега, если высота машины 1,22 метра, а сугроб расположен на расстоянии 6,1 м от машины.

Ответ: $h = 0,474$ м.

Задача 5. Набрызг-бетонная крепь осуществляется с помощью подачи раствора песчано-цементной смеси из сопла машины. Определить величину начальной скорости подачи и расстояние до крепи, если высота расположения сопла машины 3,75, м, максимальная высота крепи 5,0, метров, а угол подачи смеси 30 градусов к горизонту.

Ответ: $T = 0,5$, с; $v_O = 10$, м/с², $S = 4,33$, м.

Задача 6. Найти уравнение траектории частицы, проходящей через начало координат, если $v_x = 32 \times t$, м/с; $v_y = 8$, м/с. На каком расстоянии S от старта будет частица, когда высота её положения будет 8 метров.

Ответ: $y = 2 \times \sqrt{x}$, $S = 16$, м.

Задача 7. Частица движется по кривой $y = 0,25 \times x^2$. Определить величину скорости и ускорения в момент времени $t = 2$, с, если координата $x = 2 \times t^2$, м. Также определить радиус кривизны траектории и угловую скорость движения по ней.

Ответ: $v = 32,985$, м/с; $a = 48,166$, м/с²;

$\rho = 140$, м; $\omega = 0,235$, 1/с.

Задача 8. Частица движется по кривой $y = 2 \times \sqrt{x}$. Определить величину скорости и ускорения в момент времени $t = 0,5$, с, если координата $x = 4 \times t^4$, м. Также определит радиус кривизны траектории и угловую скорость движения по ней.

Ответ: $v = 4,472$, м/с; $a = 14,422$, м/с²; $\rho = 2,795$, м; $\omega = 1,6$, 1/с.

Задача 9. Закон движения частицы имеет вид $x = 3 \times t^3 - 2 \times t$, м и $y = 3 \times t^2$, м. Определить величину скорости, ускорения и радиус кривизны в момент времени $t = 2$ с.

Ответ: $v = 36,056$, м/с; $a = 36,497$, м/с²; $\rho = 205,604$, м.

Задача 10. Закон изменения скорости движения частицы имеет вид $v_x = 16 \times t^2 + 4 \times t^3$, см и $v_y = 5 \times t$, см. Определить ускорение частицы в момент времени $t = 2$ с, а также её положение в этот момент времени, если частица двигалась из начала координат.

Ответ: $a = 112,112$, см/с²; $x_M = 58,667$, см; $y_M = 10$, см.

Задача 11. Машина начинает движение из состояния покоя по кругу радиуса 80 м. Её скорость нарастает до 100 км/ч за 10 секунд. Определить полное ускорение машины после 8 секунд.

Ответ: $a = 6,769$ м/с².

Задача 12. Диск вращается с постоянной угловой скоростью 360 1/мин. Определит ускорение точек «А» и «В» на расстояниях 60 мм и 22 мм от центра.

Ответ: $a_A = 2,16$ м/с²; $a_B = 0,792$ м/с².

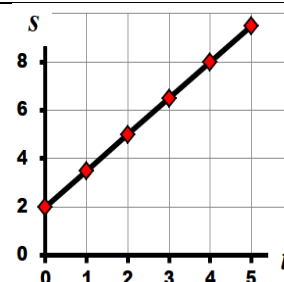
Задача 13. Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $a_k = 1,4$ м/с². Определить её нормальное ускорение и скорость в тот момент времени, когда её полное ускорение равно $a = 2,6$ м/с², а радиус кривизны равен $\rho = 0,03$ м.

Ответ: $a_n = 2,191$ м/с², $v = 0,256$ м/с.

БЛОК К4. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ГРАФИКИ

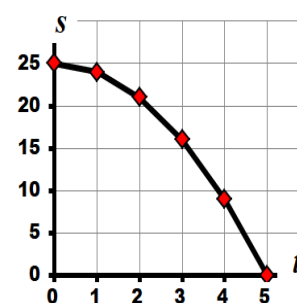
Задача 1. Дан график движения точки по окружности радиуса 1 в естественной форме. Определить скорость движения, пройденный путь и ускорение в момент времени 4 с.

Ответ: $v = 1,5 \text{ см/с}$; $s = 8 \text{ см}$;
 $a_k = 0 \text{ см/с}^2$; $a_n = 2,25 \text{ см/с}^2$; $a = 2,25 \text{ см/с}^2$.



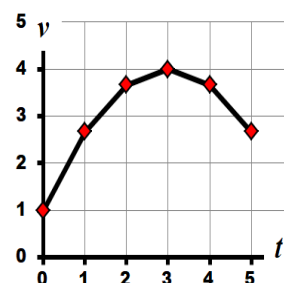
Задача 2. Точка движется по окружности радиуса 8. Закон её движения в естественной форме имеет форму параболы, которая проходит через три точки: (0; 25); (3; 16); (5; 0). Определить скорость движения, пройденный путь и ускорение в момент времени 2 секунды.

Ответ: $v = -4 \text{ см/с}$; $s = 21 \text{ см}$;
 $a_k = -2 \text{ см/с}^2$; $a_n = 2 \text{ см/с}^2$; $a = 2,8284 \text{ см/с}^2$



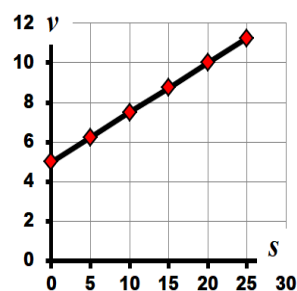
Задача 3. Закон изменения скорости движения точки по криволинейной траектории имеет форму параболы, которая проходит через три точки: (0; 1); (3; 4); (6; 1). Определить скорость движения, пройденный путь и ускорение в момент времени 3 секунды, если радиус кривизны в этот момент был равен 4 сантиметра.

Ответ: $v = 4 \text{ см/с}$; $s = 9 \text{ см}$;
 $a_k = 0 \text{ см/с}^2$; $a_n = 4 \text{ см/с}^2$; $a = 4 \text{ см/с}^2$.



Задача 4. Тело движется по закону, представленному на графике. Определить время, за которое тело пройдёт указанное расстояние, а также ускорение в конце пути, если известно, что $s(1) = 1$ и радиус кривизны 25 м.

Ответ: $t = 3,2437 \text{ с}$; $a_k = 2,8125 \text{ м/с}^2$;
 $a_n = 5,0625 \text{ м/с}^2$; $a = 5,7913 \text{ м/с}^2$.

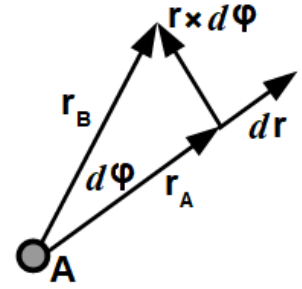


СЛУЧАЙ 3. Движение задаётся в полярной системе координат. В этом случае векторные равенства для координат мгновенной скорости примут вид: $\Delta r = v_r \times \Delta t$, $r \times \Delta \varphi = v_\varphi \times \Delta t$.

Тогда радиальная и тангенциальная координаты вектора скорости будут определяться по формулам:

$$v_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt};$$

$$v_\varphi = r \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \times \frac{d\varphi}{dt}; \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}. \quad (12)$$



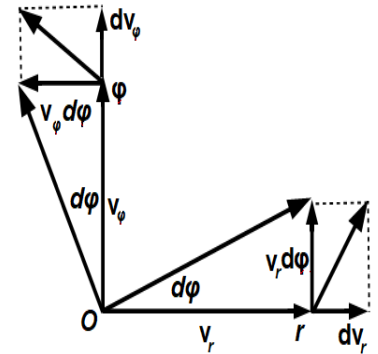
– рисунок 1.2_7.

В случае полярной системы координат выражения для компонент вектора ускорения будут более сложными. Не вдаваясь в математические детали процесса дифференцирования выражения (12), приведём геометрическую иллюстрацию полученных формул и сами формулы:

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} - v_\varphi \times \frac{d\varphi}{dt},$$

$$a_\varphi = v_r \times \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt}, \quad (13)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}.$$



– рисунок 1.2_8.

В частном случае движения точки по окружности, когда $r(t) = R$ – постоянная величина формулы (12) упрощаются до одной:

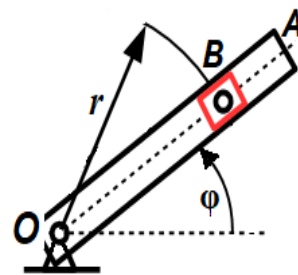
$$v_\varphi = r \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r \times \frac{d\varphi}{dt} = r \times \omega, \quad (14.1)$$

а формулы (13) трансформируются в формулы для нормального и касательного ускорений:

$$a_r = a_n = -v_\varphi \times \frac{d\varphi}{dt} = -r \times \omega^2, \quad a_\varphi = a_k = \frac{dv_\varphi}{dt} = r \times \varepsilon, \quad (14.2)$$

$$a = \sqrt{a_k^2 + a_n^2}.$$

ПРИМЕР 12. Дан кулисный механизм, содержащий кулису «ОА» и ползун «В». Движение вокруг неподвижной точки «О» определяется формулой: $\varphi = 0,2 \times t + 0,02 \times t^3$. Движение ползуна «В» вдоль кулисы «ОА» определяется формулой $r = 0,2 + 0,04 \times t^2$. Расстояния в метрах, время в секундах. Определить величину скорости и ускорения в момент времени $t = 3$ с. Построить траекторию движения.



– рисунок 1.2_9.

РЕШЕНИЕ. Найдём компоненты расчётных формул.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0,08 \times t \Rightarrow v_r(3) = 0,24, \text{ м/с};$$

$$v_\varphi = r \times \frac{d\varphi}{dt} = (0,2 + 0,04 \times t^2) \times (0,2 + 0,06 \times t^2) \Rightarrow v_\varphi(3) = 0,414, \text{ м/с};$$

$$\frac{dv_r}{dt} = 0,08; \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,2 + 0,06 \times t^2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt}(3) = 0,74, \text{ 1/с};$$

$$\frac{dv_\varphi}{dt} = 0,08 \times t \times (0,2 + 0,06 \times t^2) + (0,2 + 0,04 \times t^2) \times 0,12 \times t \Rightarrow$$

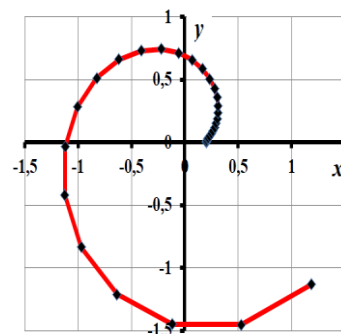
$$\Rightarrow \frac{dv_\varphi}{dt}(3) = 0,3792, \text{ м/с}^2;$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} - v_\varphi \times \frac{d\varphi}{dt} = -0,226, \text{ м/с}^2;$$

$$a_\varphi = v_r \times \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt} = 0,557, \text{ м/с}^2.$$

Тогда $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 0,479, \text{ м/с}$ и

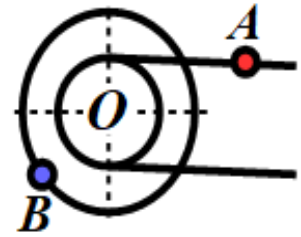
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = 0,601, \text{ м/с}^2.$$



– рисунок 1.2_10.

График траектории движения построим в декартовой системе координат (рисунок 13), используя взаимосвязь: $x = r \times \cos \varphi$, $y = r \times \sin \varphi$.

ПРИМЕР 13. Колесо и шкив вращаются вокруг неподвижной точки «О» за счёт движения ремня. Ремень вместе с точкой «А» движется с постоянным ускорением $a_A = 2 \text{ см/с}^2$ из состояния покоя. Определить кинематические характеристики колеса, шкива и точки «В» обода колеса в момент времени $t = 5 \text{ с}$. Радиусы $R = 8 \text{ см}$, $r = 4 \text{ см}$.



– рисунок 1.2_11.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим движение точки А. Так как её ускорение постоянное, то $v_A = a_A \times t = 2 \times t$, см/с и $s_A = a_A \times \frac{t^2}{2} = t^2$, см. Тогда в момент времени $t = 5 \text{ с}$: $v_A = 2 \times 5 = 10 \text{ см/с}$; $s_A = 5^2 = 25 \text{ см}$.

Рассмотрим шкив. Для скорости: $v_A = r \times \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r} = 2,5 \text{ 1/с}$; для ускорения: $a_A = r \times \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_A}{r} = 0,5 \text{ 1/с}^2$; для перемещения: $s_A = r \times \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{s_A}{r} = 6,25$, рад.

Рассмотрим колесо. Для скорости $v_B = R \times \omega = 20 \text{ м/с}$; для ускорения: $a_A^n = R \times \omega^2 = 50 \text{ см/с}^2$, $a_B^k = R \times \varepsilon = 4 \text{ см/с}^2$, $a_B = 50,159 \text{ см/с}^2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК К5. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Задача 1. Трансверсальная скорость точки равна 3 м/с. Определить радиальную скорость, если вектор полной скорости образует угол 30° с полярным радиусом.

Ответ: $v_\varphi = 5,196$

Задача 2. Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = t$, $r = t^2$. Определить полярный радиус в момент времени, когда $\varphi = 180^\circ$.

Ответ: $r = 9,869$, м.

Задача 3. Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = 0,5 \times t^2$, $r = 0,5 \times t$. Определить координаты скорости в полярной системе координат в тот момент времени, когда $r = 2$, м.

Ответ: $v_r = 0,5$, м/с; $v_\varphi = 8$, м/с.

Задача 4. Дано уравнение полярного радиуса $r = \sin(\pi \times t)$. Определить полярный угол φ и скорость v в момент времени, когда $r = 1$, м, если $\frac{d\varphi}{dt} = 0,4$, 1/с и $\varphi(0) = 0$.

Ответ: $r = 0,2$, м; $v = 0,4$, м/с.

Задача 5. Движение точки на плоскости определяется уравнениями: $r = 0,8 - 0,1 \times t - 0,05 \times t^2$, м; $\varphi = 0,4 + 0,12 \times t + 0,06 \times t^3$. Определить скорость и ускорение в момент времени $t = 2$, с.

Ответ: $\omega = 0,84$, 1/с; $v = 0,450$, м/с; $\varepsilon = 0,72$, 1/с²; $a = 0,439$, м/с².

Задача 6. Груз перемещается с помощью верёвки, которая намотана на барабан, из состояния покоя с постоянным ускорением $a = 20$, см/с². Определить угловую скорость барабана после 10 оборотов, если его радиус 2 см.

Ответ: $\omega = 35,449$, 1/с.

Задача 7. Скорость точки на постоянном расстоянии $r = 0,2$, м от оси вращения изменяется по закону $v = 4 \times t^2$, м/с. Определить угловое ускорение данного тела в момент времени $t = 2$, с.

Ответ: $\varepsilon = 80$, 1/с².

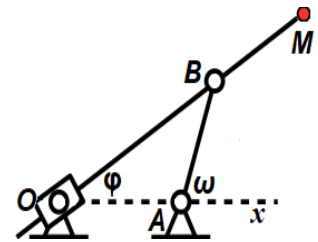
Задача 8. Закон движения груза из задачи 6 $y = 7 + 5 \times t^3$, см. Определить угловые кинематические характеристики барабана и точек его обода в момент времени $t = 3$, с, если радиус барабана 25 см.

Ответ: $\varphi = 163^\circ$, $\omega = 5,4$, 1/с; $\varepsilon = 3,6$, 1/с²;

$v = 135$, см/с; $a = 736$, см/с²

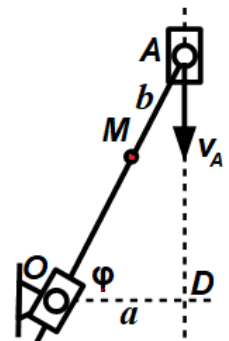
БЛОК К6. МЕХАНИЗМЫ

Задача 1. Кривошип «AB» длиной 10 см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 1, 1/\text{с}$ вокруг точки «A». В точке «B» с кривошипом шарнирно связана линейка, которая проходит сквозь качающуюся муфту «O», причём «OA» = «AB». Составить в полярной системе координат с центром в точке «O» уравнение движения точки «M» такой, что «MB» равно 20 см. Найти её положение на плоскости, скорость и ускорение в момент времени $t = 3,14159 \text{ с}$.



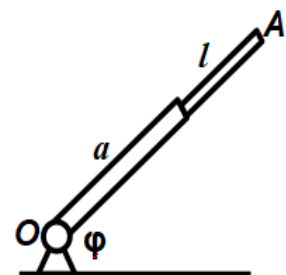
Ответ: $r = 20, \text{ см}$; $\varphi = 90^0$ или $\varphi = 1,571 \text{ рад}$;
 $v = 14,142, \text{ см/с}$; $a = 5,006, \text{ см/с}^2$.

Задача 2. Конеч «A» стержня «AB», находясь на высоте 40 см, перемещается вниз по прямолинейной направляющей с постоянной скоростью $v_A = 3 \text{ см/с}$. Стержень «AB» проходит через качающуюся муфту «O», которая располагается на постоянном расстоянии $a = 20 \text{ см}$. Приняв точку «O» за полюс полярной системы координат, найти положение на плоскости, скорость точки «M», если $b = 15 \text{ см}$ и $t = 6,667$, с.



Ответ: $r = 13,284, \text{ см}$; $\varphi = 45^0$; $v = 2,343, \text{ см/с}$.

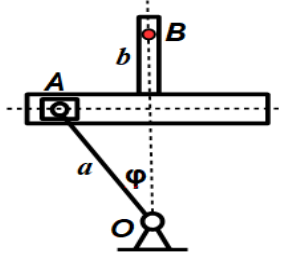
Задача 3. Элемент стойки шахтной крепи имеет телескопическую форму с постоянной частью $a = 100 \text{ см}$ и переменной $l = l(t)$. Стойка поворачивается и раздвигается с постоянными скоростями: $v_r = 8 \text{ см/с}$; $\omega = 0,0349, 1/\text{с}$. Определить момент времени, скорость и ускорении конечной точки стойки, когда $\varphi = 50^0$ и $r = 300 \text{ см}$.



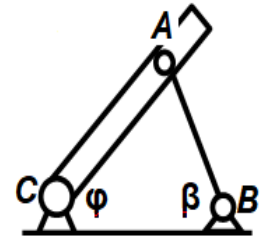
Ответ: $t = 25, \text{ с}$; $v = 8,134, \text{ см/с}$; $a = 0,667, \text{ см/с}^2$.

Задача 4. Определить положение, скорость и ускорение точки «В» в момент времени $t = 6$, с если расстояния $a = 10$, см и $b = 20$, см, а угол поворота $\varphi = 6 \times t$.

Ответ: $r = 18,721$, см; $v = 59,507$, см/с.



Задача 5. Дан кривошипно-кулисный механизм. Известно, что длина «BC» 150 мм, длина «AB» равна 150 мм. Кривошип «AB» вращается с постоянной скоростью $\gamma = 0,6$ 1/с. Определить момент времени, скорости и ускорения ползуна «А», когда $\beta = 60^\circ$, используя полярную систему координат с центром в точке «С» и полярным радиусом «СА».

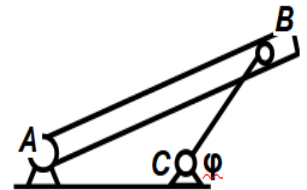


Ответ: $t = 1,745$, сек; $\omega = -0,3$, 1/с; $v_r = 77,942$, мм/с;

$v_\varphi = -45$, мм/с; $v = 90$, мм/с; $a_r = -27$, мм/с²;

$a_\varphi = -23,383$, мм/с². $a = 35,718$, мм/с².

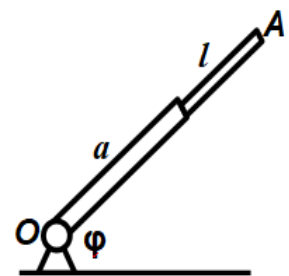
Задача 6. Дан кривошипно-ползунный механизм, в котором $AC = 5$, м; $BC = 3$, м; Ползун «В» движется в кулисе с постоянной скоростью $v_{AB} = 0,15$, м/с. Определить угловую скорость вращения кривошипа «BC» ω в тот момент, когда угол $\varphi = 60^\circ$, так же определить полную скорость ползуна «В».



Ответ: $\omega = 0,0808$, 1/с; $v = 0,285$, м/с.

Задача 7. Элемент стойки шахтной крепи имеет телескопическую форму с постоянной частью $a = 1,6$ и переменной $l = l(t)$. Стойка раздвигается и поворачивается по следующим законам:

$l = 0,3 \times \sin\left(\frac{\pi \times t}{2}\right)$; $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \times \sin\left(\frac{\pi \times t}{2}\right)$. Расстоя-



ние в метрах, время в минутах. Определить положение и кинематические параметры скорости точки «А» крепи в момент времени 2 минуты.

Ответ: $\varphi = 45$, рад; $\omega = -0,617$, 1/мин; $v_r = -0,471$, м/мин; $v_\varphi = -0,987$, м/мин; $v = 1,094$, м/мин.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

К-1. Определение кинематических характеристик точки по заданным уравнениям её движения.

Точка движется в плоскости по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$. Построить траекторию движения точки, для момента времени $t = 1$ секунда определить все компоненты скорости, все компоненты ускорения и радиус кривизны траектории.

Первая с конца цифра номера зачётки соответствует координате $x = x(t)$. Вторая цифра с конца номера зачётки соответствует координате $y = y(t)$.

№	$x = x(t)$	№	$y = y(t)$
0	$3 \times t^2 + 2 \times t + 2$	0	$3 \times t^3 + 3 \times \sin\left(\pi \times t / 6\right)$
1	$t^2 + 5 \times t + 6$	1	$4 \times t^3 + 5 \times \cos\left(\pi \times t / 4\right)$
2	$8 \times \cos\left(\pi \times t / 3\right)$	2	$20 \times \sin\left(\pi \times t / 6\right)$
3	$15 \times \sin\left(\pi \times t / 4\right)$	3	$16 \times \cos\left(\pi \times t / 4\right)$
4	$\frac{3}{(t+1)^2} + 8 \times t$	4	$\frac{4}{(t+2)^2} - 8 \times t$
5	$\frac{4}{(t+2)^2} - 8 \times t$	5	$\frac{3}{(t+1)^2} + 8 \times t$
6	$16 \times \cos\left(\pi \times t / 4\right)$	6	$15 \times \sin\left(\pi \times t / 4\right)$
7	$20 \times \sin\left(\pi \times t / 6\right)$	7	$8 \times \cos\left(\pi \times t / 3\right)$
8	$4 \times t^3 + 5 \times \cos\left(\pi \times t / 4\right)$	8	$t^2 + 5 \times t + 6$
9	$3 \times t^3 + 3 \times \sin\left(\pi \times t / 6\right)$	9	$3 \times t^2 + 2 \times t + 2$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ. Точка движется в плоскости по закону $x = -2 \times \cos\left(\frac{\pi \times t}{4}\right) + 3$, $y = 3 \times \sin\left(\frac{\pi \times t}{6}\right) - 1$. Для момента времени $t = 1$ секунда определить все компоненты скорости, все компоненты

ускорения и радиус кривизны траектории. Построить траекторию движения точки, построить вектора скорости и ускорения в указанной точке.

Найдём координаты точки в момент времени $t = 1$.

$$x = -2 \times \cos\left(\frac{\pi \times t}{4}\right) + 3 \Rightarrow x|_{t=1} = 1,586, \text{ м};$$

$$y = 3 \times \sin\left(\frac{\pi \times t}{6}\right) - 1 \Rightarrow y|_{t=1} = 0,5, \text{ м}.$$

Найдём координаты вектора скорости в декартовой системе координат.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \times \frac{\pi}{4} \times \sin\left(\frac{\pi \times t}{4}\right) \Rightarrow v_x|_{t=1} = 1,111, \text{ м/с}.$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 3 \times \frac{\pi}{6} \times \cos\left(\frac{\pi \times t}{6}\right) \Rightarrow v_y|_{t=1} = 1,360, \text{ м/с}.$$

Тогда величина скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1,756, \text{ м/с}$.

Перейдём к полярной системе координат с центром в начале декартовой системы координат:

$$r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \Rightarrow r|_{t=1} = 1,663, \text{ м};$$

$$\varphi(t) = \arctg\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \Rightarrow \varphi|_{t=1} = 17,498^\circ = 0,305, \text{ рад}.$$

Найдём координаты вектора скорости в полярной системе координат.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{x \times v_x + y \times v_y}{r} \Rightarrow v_r|_{t=1} = 1,468, \text{ м/с}.$$

$$v_\varphi = r \times \frac{d\varphi}{dt} = \frac{x \times v_y - y \times v_x}{r} \Rightarrow v_\varphi|_{t=1} = 0,963, \text{ м/с}.$$

Тогда величина скорости $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 1,756, \text{ м/с}$.

Найдём координаты вектора ускорения в декартовой системе координат.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \cos\left(\frac{\pi \times t}{4}\right) \Rightarrow a_x|_{t=1} = 0,872, \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -3 \times \frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{6} \times \sin\left(\frac{\pi \times t}{6}\right) \Rightarrow a_y|_{t=1} = -0,411, \text{ м/с}^2.$$

Тогда величина ускорения $a|_{t=1} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0,964, \text{ м/с}^2$.

Найдём составные части координат вектора ускорения в полярной системе координат.

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{v^2 + x \times a_x + y \times a_y - v_r^2}{r} \Rightarrow \frac{dv_r}{dt}\bigg|_{t=1} = 1,266, \text{ м/с}^2;$$

$$\frac{dv_\phi}{dt} = \frac{x \times a_y - y \times a_x - v_\phi \times v_r}{r} \Rightarrow \frac{dv_\phi}{dt}\bigg|_{t=1} = -1,505, \text{ м/с}^2;$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_\phi}{r} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt}\bigg|_{t=1} = 0,579, \text{ 1/с}.$$

Тогда координаты вектора ускорения

$$a_r|_{t=1} = \frac{dv_r}{dt} - v_\phi \times \frac{d\phi}{dt} = 0,708, \text{ м/с}^2;$$

$$a_\phi|_{t=1} = v_r \times \frac{d\phi}{dt} + \frac{dv_\phi}{dt} = -0,654, \text{ м/с}^2.$$

и величина ускорения $a|_{t=1} = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2} = 0,964, \text{ м/с}^2$.

Найдём координаты и величину ускорения в естественной системе координат:

$$a_k = \frac{v_x \times a_x + v_y \times a_y}{v} \Rightarrow a_k|_{t=1} = 0,233, \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{|v_x \times a_y - v_y \times a_x|}{v} \Rightarrow a_n|_{t=1} = 0,935, \text{ м/с}^2.$$

$$a|_{t=1} = \sqrt{a_k^2 + a_n^2} = 0,964, \text{ м/с}^2.$$

Величины скоростей и ускорений должны совпасть независимо от выбранной системы координат.

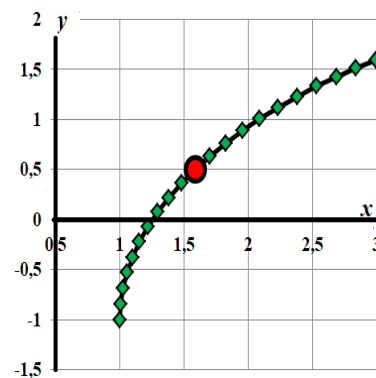
Найдём радиус кривизны траектории в данный момент времени:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \Rightarrow \rho|_{t=1} = \frac{1,756^2}{0,935} = 3,298, \text{ м}.$$

Построим графики траектории, компонент векторов скорости и ускорения (планы скоростей и ускорений). Так как не всегда возможно сделать это на одном чертеже, то рассмотрим методику построения планов на отдельных чертежах.

Шаг 1. Необходимо выбрать произвольную точку – начало координат.

Шаг 2. Построение выбранной точки в двух системах координат.



– рисунок ИДЗ_K-1_1.

2.а. Выбрать масштаб построения координат точек траектории.

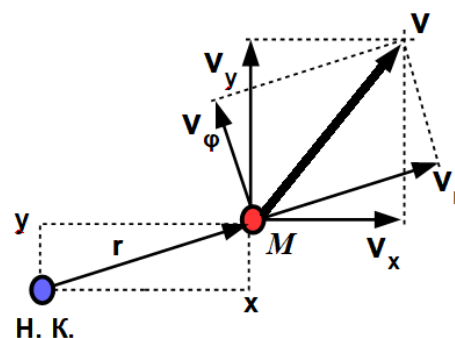
2.б. Отложить по горизонтали и вертикали найденные координаты точки в данный момент времени.

2.в. Построить точку, которая соответствует данному моменту времени.

2.г. Указать направление радиус-вектора в данный момент времени.

Шаг 3. Построение плана скоростей в двух системах координат.

3.а. Выбрать масштаб построения координат вектора скорости.



– рисунок ИДЗ_K-1_2.

3.б. Отложить по горизонтали и вертикали декартовы координаты вектора скорости. Построить диагональ прямоугольника скоростей.

3.в. Отложить вдоль радиус-вектора радиальную компоненту вектора скорости, а перпендикулярно ему – трансверсальную компоненту. Построить диагональ прямоугольника скоростей. Убедиться, что построения совпадают.

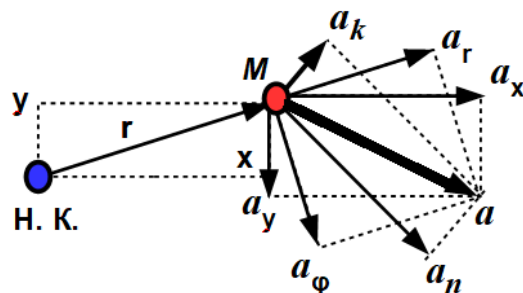
Шаг 4. Построение плана ускорений в трёх системах координат.

3.а. Выбрать масштаб построения координат вектора ускорения.

3.б. Отложить по горизонтали и вертикали декартовы координаты вектора ускорения. Построить диагональ прямоугольника ускорений.

3.в. Отложить вдоль радиус-вектора радиальную компоненту вектора ускорения, а перпендикулярно ему – трансверсальную компоненту. Построить диагональ прямоугольника ускорений. Убедиться, что построения совпадают.

3.г. Отложить вдоль касательной касательную компоненту вектора ускорения, а перпендикулярно ему – нормальную компоненту. Построить диагональ прямоугольника ускорений. Убедиться, что построения совпадают.



– рисунок ИДЗ_К-1_2.

К-2. Определение кинематических характеристик точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях.

Движение груза (для чётных первых номеров) или рейки (для нечётных первых номеров) задано общим уравнением вида $x = c_2 \times t^2 + c_1 \times t + c_0$. В начальный момент времени положение определяется координатой x_0 и скоростью v_0 . В момент времени t_2 положение определяется координатой x_2 .

ЗАДАНИЯ.

Определить коэффициенты уравнения движения.

Определить в момент времени $t = t_1$ все кинематические характеристики всех тел и всех указанных точек механизма.

Размеры колёс в сантиметрах являются одинаковыми для всех вариантов: $R_2 = 50$; $r_2 = 25$; $R_3 = 65$; $r_3 = 40$; $R_1 = 70$; $r_1 = 30$.

Необходимые данные для расчётов приведены в таблице 1, необходимые схемы приведены в таблице 2.

Первая с конца цифра номера зачётки соответствует данным таблицы 1. Вторая цифра с конца номера зачётки соответствует данным таблицы 2.

Таблица 1
Числовые данные для задания К-2

№	x_0 , см	v_0 , см/с	x_2 , см	t_2 , с	t_1 , с
0	2	12	173	3	2
1	5	10	41	2	1
2	8	6	40	4	2
3	4	4	172	4	3
4	3	15	102	3	2
5	7	16	215	4	2
6	8	5	124	4	3
7	6	2	111	3	2
8	10	7	48	2	1
9	5	3	129	4	3

Таблица 2
Схемы механизмов для задания К-2

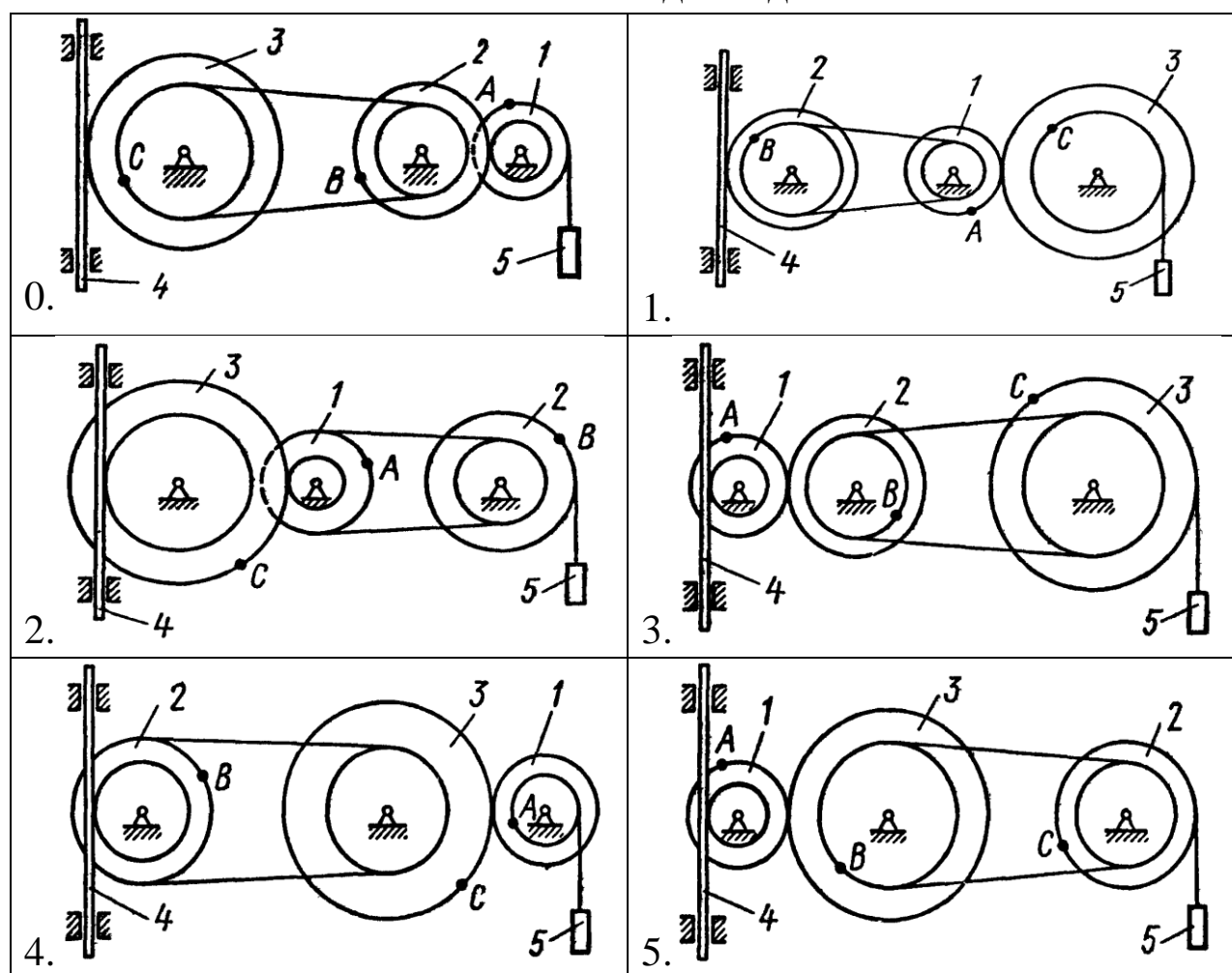
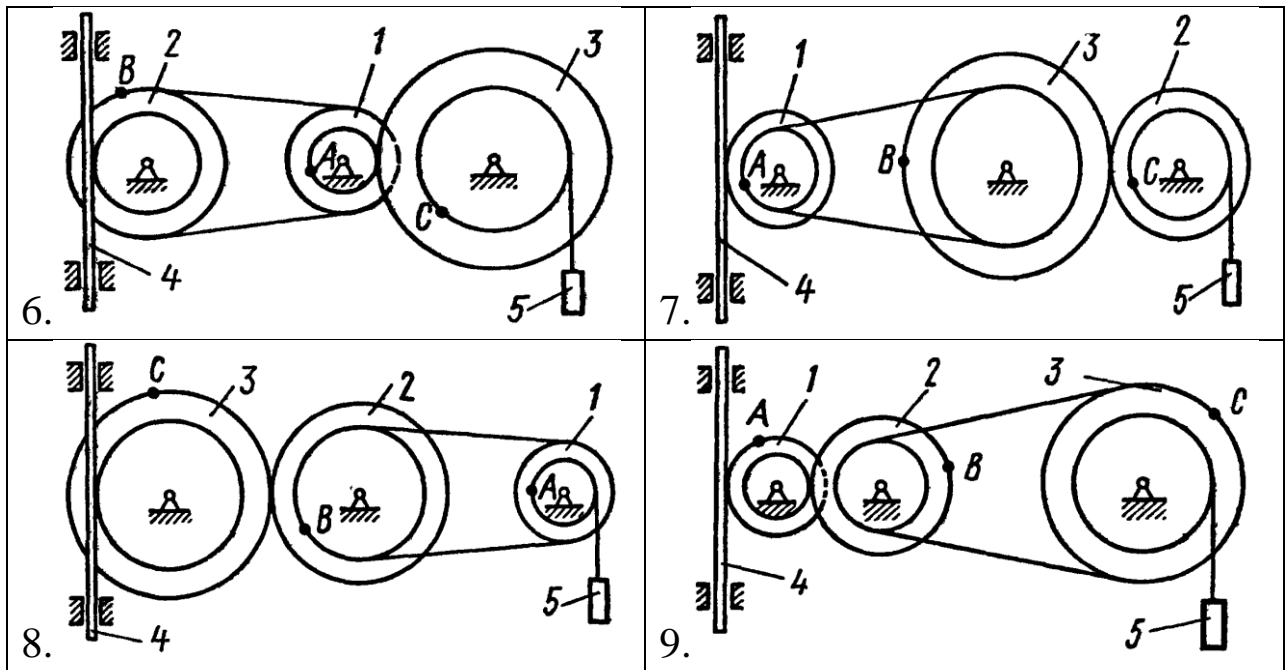


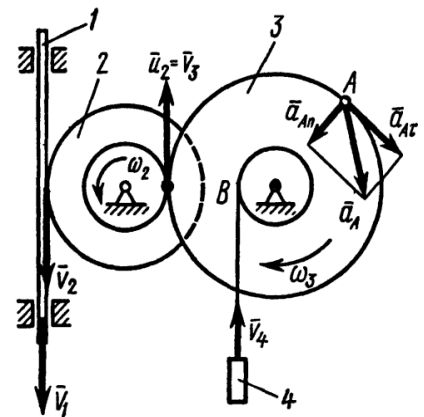
Таблица 2 (продолжение)
Схемы механизмов для задания К-2



ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ.

Дан механизм (см. рисунок). Размеры колёс в сантиметрах: $R_2 = 50$; $r_2 = 25$; $R_3 = 65$; $r_3 = 40$; $R_1 = 70$; $r_1 = 30$.

Уравнение движения груза и пространственно-временные данные для него имеют вид: $x_4 = c_2 \times t^2 + c_1 \times t + c_0$, см; $x_0 = 14$, см; $v_0 = 5$, см/с; $x_2 = 168$, см; $t_1 = 1$, с; $t_2 = 2$, с.



– рисунок ИДЗ_К-2_1.

Шаг 1. Найдём коэффициенты уравнения движения.

$$x_0 = 14 \Rightarrow x_4 = c_2 \times 0^2 + c_1 \times 0 + c_0 = 14 \Rightarrow c_0 = 14, \text{ см};$$

$$v_0 = 5 \Rightarrow v_4 = 2 \times c_2 \times 0 + c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = 5, \text{ см/с}.$$

$$x_2 = 168; t_2 = 2 \Rightarrow x_4 = c_2 \times 2^2 + c_1 \times 2 + c_0 = 168 \Rightarrow c_2 = 36.$$

Таким образом, $x_4 = 36 \times t^2 + 5 \times t + 14$, $v_4 = 72 \times t + 5$, $a_4 = 72$.

В момент времени $t_1 = 1$ получим следующие значения:

$$x_4|_{t=1} = 36 \times 1^2 + 5 \times 1 + 14 = 55, \text{ см}; v_4|_{t=1} = 72 \times 1 + 5 = 77, \text{ см/с}.$$

Шаг 2. Найдём кинематические характеристики тела 3 и точек «А», «В» на нём.

Вспомогательная точка «В»: $s_B|_{t=1} = x_4|_{t=1} = 55, \text{ см};$

$$v_B|_{t=1} = v_4|_{t=1} = 77, \text{ см/с};$$

$$a_B^k|_{t=1} = a_4|_{t=1} = 72, \text{ см/с}^2; \quad a_B^n|_{t=1} = \frac{v_B^2}{r_3}|_{t=1} = 148,225, \text{ см/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^k)^2 + (a_B^n)^2} = 164,787, \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Тело 3: } \varphi_3|_{t=1} = \frac{s_B}{r_3} = 1,375, \quad \omega_3|_{t=1} = \frac{v_B}{r_3} = 1,925, \text{ 1/с};$$

$$\varepsilon_3|_{t=1} = \frac{a_B^k}{r_3} = 1,8, \text{ 1/с}^2;$$

Точка «А»: $s_A|_{t=1} = R_3 \times \varphi_3 = 89,375, \text{ см};$

$$v_A|_{t=1} = R_3 \times \omega_3 = 125,125, \text{ см/с}; \quad a_A^k|_{t=1} = R_3 \times \varepsilon_3 = 117, \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^n|_{t=1} = \frac{v_A^2}{R_3}|_{t=1} = 240,865, \text{ см/с}^2; \quad a_A = \sqrt{(a_A^k)^2 + (a_A^n)^2} = 267,778, \text{ см/с}^2.$$

Шаг 3. Найдём кинематические характеристики тела 2.

$$\varphi_2|_{t=1} = \frac{s_A}{r_2} = 3,575; \quad \omega_2|_{t=1} = \frac{v_A}{r_2} = 5,005, \text{ 1/с}; \quad \varepsilon_2|_{t=1} = \frac{a_A^k}{r_2} = 4,68, \text{ 1/с}^2.$$

Шаг 4. Найдём кинематические характеристики тела 1.

$$s_1|_{t=1} = R_2 \times \varphi_2 = 178,75, \text{ см}; \quad v_1|_{t=1} = R_2 \times \omega_2 = 250,25, \text{ см/с};$$

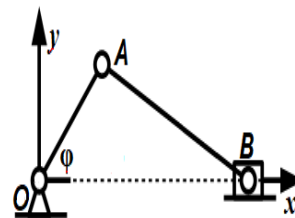
$$a_1|_{t=1} = R_2 \times \varepsilon_2 = 234, \text{ см/с}^2.$$

1.3. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Во всех предыдущих случаях движения точки мы использовали **неподвижную** систему координат. С её помощью можно задать только достаточно простые варианты движения точки. В более сложных механизмах оказывается, что задать движение выбранной

точки, используя неподвижную систему координат, либо сложно, либо невозможно.

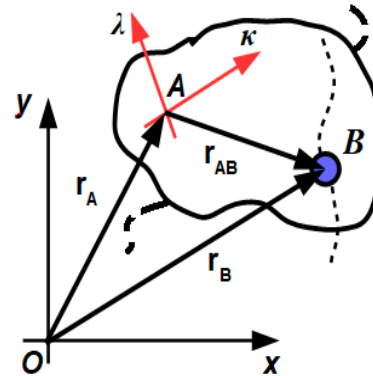
Рассмотрим простую ситуацию, когда движение точки «В» зависит от движения точки «А». Простейший механизм, который реализует это условие, – это кривошипно-ползунный механизм «ОАВ» (рисунок 1.3_1). Кривошип «ОА» вращается вокруг неподвижной точки «О», ползун «В» движется прямолинейно также относительно неподвижной точки «О», а шатун «АВ» движется, влекаемый этими двумя точками.



– рисунок 1.3_1.

Рассмотрим две системы координат: неподвижную систему – Oxy и подвижную систему – $Ak\lambda$. Тогда **абсолютное** истинное наблюдаемое движение точки «В» относительно неподвижной точки «О» можно разложить на два движения: **переносное** движение подвижной системы $Ak\lambda$ относительно неподвижной системы Oxy – «е»; **относительное** движение выбранной точки «В» относительно подвижной системы $Ak\lambda$ – «г».

Приведём бытовые примеры таких ситуаций: 1) движение лодки в воде, которая движется относительно неподвижного берега; 2) движение человека по эскалатору, который движется относительно неподвижного магазина; 3) движение человека в автобусе, который движется относительно неподвижной улицы.



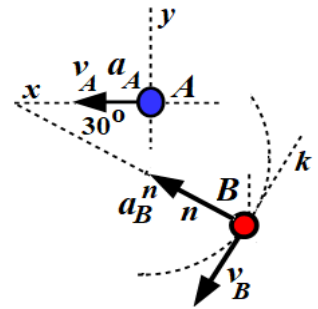
– рисунок 1.3_2.

Используя векторное задание движение точки, можно увидеть, что выполняются следующие векторные равенства:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} + \vec{a}_K, \quad (15)$$

где $\vec{a}_K = 2 \times \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ – ускорение Кориолиса, которое появляется в том случае, когда переносное движение является вращательным.

ПРИМЕР 14. Машина «А» движется по прямой с ускорением 1 м/с^2 . Машина «В» движется по окружности радиуса 135 м с постоянной скоростью 11 м/с . Определить скорость и ускорение машины «В» относительно наблюдателя из машины «А» в тот момент, когда скорость «А» равна 17 м/с .



– рисунок 1.3_3.

РЕШЕНИЕ. Так как требуется найти скорость и ускорение машины «В» относительно наблюдателя из машины «А», то выразим эти величины из равенств (15): $\bar{v}_{AB} = \bar{v}_B - \bar{v}_A$ и $\bar{a}_{AB} = \bar{a}_B - \bar{a}_A$.

Способ 1. Координатный. Спроектируем векторные равенства на оси координат.

Для скорости:

$$\begin{cases} v_{AB}^x = v_B^x - v_A^x = v_B \times \cos 60^\circ - v_A = -11,5 \\ v_{AB}^y = v_B^y - v_A^y = v_B \times \sin 60^\circ = 9,5263 \end{cases} \Rightarrow v_{AB} = 14,933 \text{ м/с}.$$

Для ускорения:

$$\begin{cases} a_{AB}^x = a_B^x - a_A^x = a_B^n \times \cos 30^\circ - 1 = -0,2237 \\ a_{AB}^y = a_B^y - a_A^y = -a_B^n \times \sin 30^\circ = -0,4482 \end{cases} \Rightarrow a_{AB} = 0,501 \text{ м/с}^2.$$

Способ 2. Векторный. Так как известно, куда направлены векторы скоростей точек «А», «В», то относительную скорость \bar{v}_{AB} можно найти, используя следствие теоремы косинусов (формулу равнодействующей):

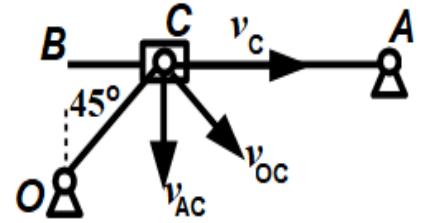
$$v_{AB}^2 = v_A^2 + v_B^2 + 2 \times (-v_A) \times v_B \times \cos(60^\circ) = 14,933^2.$$

Так как машина «В» движется с постоянной скоростью, то её ускорение состоит из одной компоненты:

$a_B = a_n = \frac{v_B^2}{R} = 0,8963 \text{ м/с}^2$, которая направлена вдоль нормали к окружности. По аналогии со скоростью найдём относительное ускорение:

$$a_{AB}^2 = a_A^2 + a_B^2 + 2 \times (-a_A) \times a_B \times \cos(30^\circ) = 0,501^2.$$

ПРИМЕР 15. Дан кривошипно-кулисный механизм. Кривошип «ОС» вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_{OC} = 2 \text{ 1/c}^2$ и в некоторый момент времени угловая скорость $\omega_{OC} = 4 \text{ 1/c}$. Определить все кинематические характеристики элементов механизма, если $AC = 1 \text{ м}$, $OC = 0,5 \text{ м}$.



– рисунок 1.3_4

РЕШЕНИЕ. Так как ползун «С» является связующим элементом кривошипа и кулисы, то он участвует в нескольких движениях: по окружности вместе с кривошипом «ОС», по окружности вместе с кулисой «АВ» и по прямой вдоль кулисы «АВ».

Рассматривая эти движения по отдельности, бывает достаточно сложно определить, какое из них является относительным, переносным и абсолютным и правильно составить векторное равенство составного движения.

Поэтому укажем на рисунке направления векторов скоростей для каждого движения и, учитывая конструкцию общей формулы составного движения $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$, запишем векторное равенство: $\vec{v}_{OC} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_C$. Спроектируем векторное равенство на оси координат:

$$v_{OC} \times \cos(45^\circ) = v_C; v_{OC} \times \sin(45^\circ) = v_{AC}.$$

Найдём скорости

$$v_{OC} = OC \times \omega_{OC} = 2 \text{ м/с}; v_C = v_{OC} \times \cos(45^\circ) = 1,414 \text{ м/с};$$

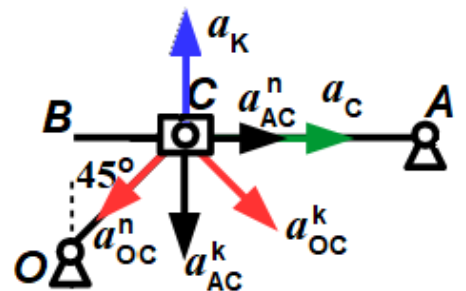
$$v_{AC} = v_{OC} \times \sin(45^\circ) = 1,414$$

м/с и угловую скорость кулисы «АВ»: $\omega_{AB} = \frac{v_{AC}}{AC} = 1,414 \text{ 1/c}$.

На основе найденного векторного равенства для скоростей составного движения запишем соответствующее равенство для ускорений в общем виде:

$$\vec{a}_{OC} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_C + \vec{a}_K, \text{ где } \vec{a}_K = 2 \times \omega_{AB} \times \vec{v}_C.$$

Так как и кривошип и кулиса совершают вращательные движения, то



– рисунок 1.3_5.

ускорения точки «С» раскладываются на две компоненты: нормальную и касательную.

Направление ускорение Кориолиса определим либо на основе определения векторного произведения векторов, либо по **правилу Жуковского**: необходимо повернуть вектор относительной скорости \bar{v}_C на 90° по направлению переносного вращения кулисы «АВ». Величина ускорения Кориолиса $\bar{a}_K = 2 \times \omega_{AB} \times v_C \times \sin(\xi) = 4$.

Спроектируем векторное равенство на оси координат:

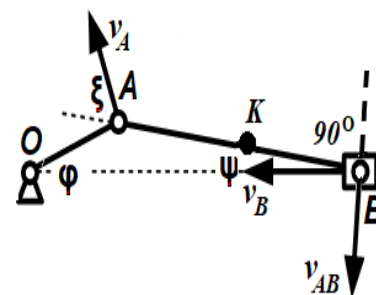
$$a_{OC}^k \times \cos(45^\circ) - a_{OC}^n \times \cos(45^\circ) = a_{AC}^n + a_C;$$

$$a_{OC}^k \times \sin(45^\circ) + a_{OC}^n \times \sin(45^\circ) = a_{AC}^k - a_K.$$

Найдём значения элементов системы: $a_{OC}^k = OC \times \varepsilon_{OC} = 1 \text{ м/с}^2$;
 $a_{OC}^n = OC \times \omega_{OC}^2 = 8 \text{ м/с}^2$; $a_{AC}^n = AC \times \omega_{AB}^2 = 2 \text{ м/с}^2$. Тогда ускорения $a_C = -6,949 \text{ м/с}^2$, $a_{AC}^k = 10,363 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_{AC} = 10,363 \text{ 1/с}^2$.

На практике анализа схем различных механизмов оказывается полезным частный случай составного движения, когда точки «А» и «В» оказываются связанными неким телом. В этом случае из всех возможных относительных движений точек «А» и «В» остаётся только одно – **вращательное движение**, так как оно сохраняет расстояние между точками. Само движение при этом называется **плоским движением тела**.

ПРИМЕР 16. Дан кривошипно-ползунный механизм с размерами: $OA = 0,125$, м; $AB = 0,25$, м. В некий момент времени кинематические характеристики кривошипа $\omega_{OA} = 42 \text{ 1/с}$, $\varepsilon_{OA} = 14 \text{ 1/с}^2$, угол $\varphi = 10^\circ$. Найти скорость и ускорение точки К, если $AK = 0,2$ м.



– рисунок 1.3_6.

РЕШЕНИЕ. Точка «А» движется по окружности вместе с кривошипом «ОА». Найдём скорость точки «А»:
 $v_A = OA \times \omega_{OA} = 5,25 \text{ м/с}$ и её ускорение: $a_A^n = OA \times \omega_{OA}^2 = 220,5 \text{ м/с}^2$,
 $a_A^k = OA \times \varepsilon_{OA} = 1,75 \text{ м/с}^2$, $a_A = 220,507 \text{ м/с}^2$.

Найдём два других угла, отмеченных на чертеже:

$$\frac{\sin(\varphi)}{AB} = \frac{\sin(\psi)}{OA} \Rightarrow \psi \approx 4,981^\circ; \quad \xi = 90^\circ - \varphi - \psi = 75,019^\circ.$$

Точка «В» движется прямолинейно влево с неизвестной скоростью \bar{v}_B . Шатун «АВ» в каждый момент времени поворачивается вокруг подвижной точки «А», поэтому вектор относительной скорости точки «В» перпендикулярен шатуну «АВ» и его длина равна $v_{AB} = AB \times \omega_{AB}$.

Спроектируем векторное равенство $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$ на оси координат, одна из которых будет совпадать с прямой «АВ». Тогда получим систему уравнений:

$$v_A \times \cos(\xi) = v_B \times \cos(\psi) \Rightarrow v_B = 1,362 \text{ м/с.}$$

$$v_A \times \sin(\xi) - v_{AB} = v_B \times \sin(\psi) \Rightarrow v_{AB} = 4,953 \text{ м/с.}$$

Тогда из равенства $v_{AB} = AB \times \omega_{AB}$ получим, что $\omega_{AB} = 19,812 \text{ 1/с.}$

Найдём относительную скорость точки «К»:

$$v_{AK} = AK \times \omega_{AB} = 3,962 \text{ м/с.}$$

В случае если необходимо знать угол направления вектора скорости \bar{v}_K , необходимо воспользоваться общей системой уравнений:

$$\begin{aligned} v_K \times \cos(\theta) &= v_A \times \cos(\xi) = 1,3571 & \Rightarrow & \quad \quad \quad tg(\theta) = 0,817 \Rightarrow \theta = 39,255^\circ \\ v_K \times \sin(\theta) &= v_A \times \sin(\xi) - v_{AK} = 1,109 & \Rightarrow & \quad \quad \quad v_K = \frac{v_A \times \cos(\xi)}{\cos(\theta)} = 1,7526. \end{aligned}$$

Перейдём к поиску ускорения точек механизма.

Так как элементы механизма совершают вращательное движение: кривошип «ОА» вокруг точки «О» и шатун «АВ» вокруг подвижной точки «В», то основное векторное равенство для ускорений представим в развернутой форме: $\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^k + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^k$. Дальнейшее решение связано с проектированием этого равенства на оси координат, одну из которых также направим вдоль прямой «АВ».

$$\begin{aligned} a_B &= -a_A^n \times \cos(\varphi) - a_A^k \times \sin(\varphi) - a_{AB}^n \times \cos(\psi) + a_{AB}^k \times \sin(\psi); \\ 0 &= -a_A^n \times \sin(\varphi) + a_A^k \times \cos(\varphi) + a_{AB}^n \times \sin(\psi) + a_{AB}^k \times \cos(\psi). \end{aligned}$$

Так как $\varphi = 10^\circ$ и $\psi = 4,981^\circ$, то $\cos(\varphi) = 0,9848$, $\sin(\varphi) = 0,1736$ и $\cos(\psi) = 0,9962$, $\sin(\psi) = 0,0872$.

Найдём элементы системы уравнений.

Найдём компоненты ускорения точки «В» при повороте вокруг точки «А»:

$$a_{AB}^n = AB \times \omega_{AB}^2 = 112,698 \text{ м/с}^2, \quad a_{AB}^k = AB \times \varepsilon_{AB} = 0,25 \times \varepsilon_{AB} \text{ м/с}^2.$$

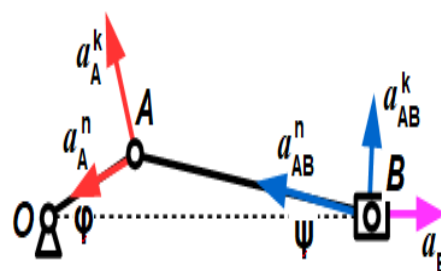
Получим следующую систему уравнений:

$$a_B = -329,7219 + a_{AB}^k \times 0,0872;$$

$$0 = -26,728 + a_{AB}^k \times 0,9962,$$

$$\text{откуда } a_{AB}^k = 26,829 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = -327,3823 \text{ м/с}^2; \quad \varepsilon_{AB} = 107,316 \text{ 1/с}^2.$$



– рисунок 1.3_7.

Для поиска ускорения точки «К» применим основное равенство к этой точке: $\vec{a}_K = \vec{a}_A + \vec{a}_B + \vec{a}_{AK} + \vec{a}_{BK}$. В качестве осей выберем те же, что и выше. В результате получим систему уравнений вида:

$$a_K^x = -a_A^n \times \cos(\varphi) - a_A^k \times \sin(\varphi) - a_{AK}^n \times \cos(\psi) + a_{AK}^k \times \sin(\psi);$$

$$a_K^y = -a_A^n \times \sin(\varphi) + a_A^k \times \cos(\varphi) + a_{AB}^n \times \sin(\psi) + a_{AB}^k \times \cos(\psi),$$

где $a_{AK}^n = AK \times \omega_{AB}^2 = 90,159 \text{ м/с}^2$, $a_{AK}^k = AK \times \varepsilon_{AB} = 21,463 \text{ м/с}^2$.

$$\text{Тогда } a_K^x = -305,397 \text{ м/с}^2, \quad a_K^y = -7,312 \text{ м/с}^2, \quad a_K = 305,485 \text{ м/с}^2.$$

ПРИМЕР 17. Дан ползунковый механизм. Точка «В» движется прямолинейно по закону

$$s_B = \sin\left(\frac{3 \times \pi \times t}{4}\right) \text{ м. Определить скорость}$$

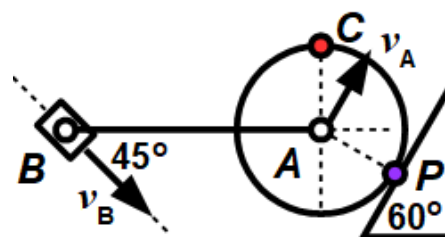
и ускорение точки «С» в момент времени

$t = 3 \text{ с}$, если радиус колеса $R = 0,15 \text{ м}$, длина толкателя $AB = 0,5 \text{ м}$.

РЕШЕНИЕ.

Шаг 1. Найдём скорость точки «В».

$$v_B = \frac{ds_B}{dt} \Rightarrow v_B|_{t=3} = 1,666 \text{ м/с}.$$



– рисунок 1.3_8.

Шаг 2. Найдём скорость точки «А». Применим общую векторную формулу: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{BA}$. Так как вектор \vec{v}_{BA} перпендикулярен отрезку «АВ», то спроектируем это векторное равенство на оси координат, одна из которых совпадает с прямой «АВ»:

$$v_A \times \cos(60^\circ) = v_B \times \cos(45^\circ) \Rightarrow v_A = 2,356 \text{ м/с.}$$

$$v_A \times \sin(60^\circ) = -v_B \times \sin(45^\circ) + v_{BA} \Rightarrow v_{BA} = 3,218 \text{ м/с.}$$

Шаг 3. Найдём угловую скорость вращения шатуна «АВ» вокруг точки «А»:

$$v_{BA} = AB \times \omega_{BA} \Rightarrow \omega_{BA} = 6,436 \text{ 1/с.}$$

Шаг 4. Найдём угловую скорость колеса. Колесо представляет собой набор кривошипов разной длины, каждый из которых в каждый момент времени как бы поворачивается вокруг точки касания с неподвижной поверхностью – точкой «Р». Применим общую векторную формулу: $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA}$. Так как точка «Р» неподвижна, то скорость $v_P = 0$, и тогда $v_A = v_{PA} = \omega \times AP \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{AP} = 15,707 \text{ 1/с.}$

Шаг 5. Найдём скорость точки «С». По аналогии с шагом 3 применим общую векторную формулу: $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}$. Спроектируем векторное равенство на ось «АС».

$$v_C^x = v_A \times \sin(60^\circ) = 2,040 \text{ м/с.}$$

$$v_C^y = v_A \times \cos(60^\circ) + v_{AC} = v_A \times \cos(60^\circ) + \omega \times AC = 3,534 \text{ м/с.}$$

$$\text{Полная скорость точки «С» } v_C^2 = (v_C^x)^2 + (v_C^y)^2 = 4,081 \text{ м/с.}$$

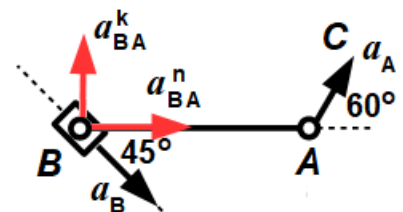
Шаг 6. Найдём ускорение точки «В».

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} \Rightarrow a_B|_{t=3} = -3,926 \text{ м/с}^2.$$

Шаг 7. Найдём ускорение точки «А». Запишем общую векторную формулу в развернутой форме: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^k$ и спроектируем его на прямую «АВ»:

$$a_A \times \cos(60^\circ) = a_B \times \cos(45^\circ) + a_{BA}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_A \times \cos(60^\circ) = a_B \times \cos(45^\circ) + AB \times \omega_{BA}^2 \text{ откуда } a_A = 35,871 \text{ м/с}^2.$$



– рисунок 1.3_9

Шаг 8. Для поиска ускорения точки «С» применим основное равенство к этой точке: $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^k$. В результате получим систему уравнений вида:

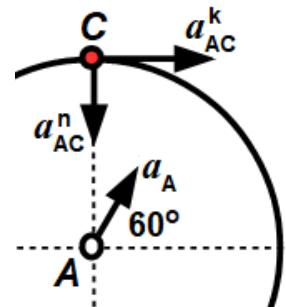
$$a_C^x = a_A \times \cos(60^\circ) + a_{AC}^k; \quad a_C^y = a_A \times \sin(60^\circ) - a_{AC}^n,$$

где $a_{AC}^n = AC \times \omega^2 = 123,355 \text{ м/с}^2$, $a_{AC}^k = AC \times \varepsilon = 0,15 \times \varepsilon \text{ м/с}^2$.

Угловое ускорение колеса найдём, вычисляя производную от выражения, при условии что длина «АР» является постоянной величиной:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} \Rightarrow \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{AP} \times \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A}{AP} = 239,14 \text{ 1/с}^2.$$

Тогда $a_C^x = 53,8065 \text{ м/с}^2$, $a_C^y = -92,291 \text{ м/с}^2$,
 $a_C = 106,831 \text{ м/с}^2$.

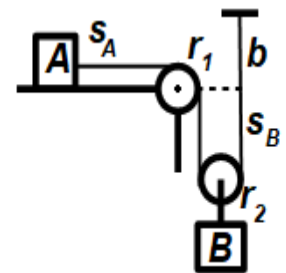


– рисунок
1.3_10.

ПРИМЕР 18. Дан полиспастный механизм, который предназначен для подъёма грузов. Найти скорость и ускорение тела «А» в момент времени $t = 3 \text{ с}$, если закон движения тела «В» имеет вид:

$$s_B = \sin\left(\frac{3 \times \pi \times t}{4}\right), \text{ см.}$$

РЕШЕНИЕ. Найдём взаимосвязь между скоростями тел. Это можно сделать используя теорию плоского движения.



– рисунок
1.3_11

Рассмотрим второе колесо. Оно катится по вертикальной поверхности – верёвке. Поэтому скорости и ускорения тел «А» и «В» оказываются взаимосвязаны равенствами: $v_A = 2 \times v_B$, $a_A = 2 \times a_B$.

Таким образом, $v_B = \frac{ds_B}{dt} \Rightarrow v_B|_{t=3} = 1,666 \text{ см/с}$ и $v_A = 3,332$

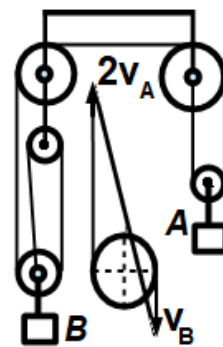
см/с; $a_B = \frac{dv_B}{dt} \Rightarrow a_B|_{t=3} = -3,926 \text{ см/с}^2$ и $a_A = -7,852 \text{ см/с}^2$.

ПРИМЕР 19. Дан полиспастный механизм. Найти скорость и ускорение тела «В» в момент времени, когда скорость тела «А» равна 3 м/с.

РЕШЕНИЕ. Найдём взаимосвязь между скоростями тел.

Рассмотрим правый блок, который связан с телом «А». Так как блок катится по неподвижной поверхности, то скорость его правой точки равна $2 \times v_A$.

Рассмотри блок, который связан с телом «В». За счёт того, что трос перекинут через дополнительный блок, скорость правой точки основного блока не будет равна нулю. Скорости центральной точки «В» и правой точки блока равны между собой и равны v_B .



– рисунок
1.3_11

Таким образом, получаем соотношения:

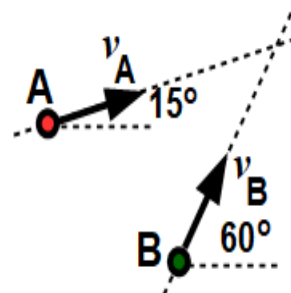
$$2 \times v_A = \omega \times 1,5 \times r; \quad v_B = \omega \times 0,5 \times r.$$

$$\text{Отсюда } v_B = \omega \times 0,5 \times r = \frac{2 \times v_A}{3} = 2, \text{ м/с.}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

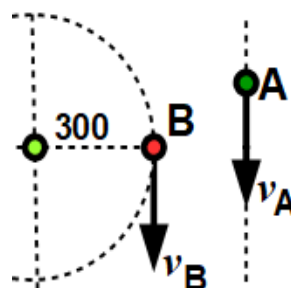
БЛОК К7. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Задача 1. Поезд «А» движется прямолинейно со скоростью 180 км/ч. Машина «В» движется также прямолинейно со скоростью 90 км/ч. В некоторый момент времени машина начала тормозить, а поезд ускоряться с величиной 3 м/с^2 . Определить скорость и ускорение поезда относительно машины.



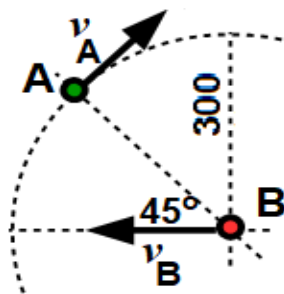
Ответ: $v_{AB} = 36,841 \text{ м/с}$; $a_{AB} = 5,543 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. Машина «А» двигаясь по прямой, начала увеличивать скорость на 8 км/ч каждую секунду. Машина «В» двигаясь по кольцу радиуса 300 м со скоростью 100 км/ч начала уменьшать скорость на 8 км/ч каждую секунду. Определить ускорение машины «В» относительно машины «А».



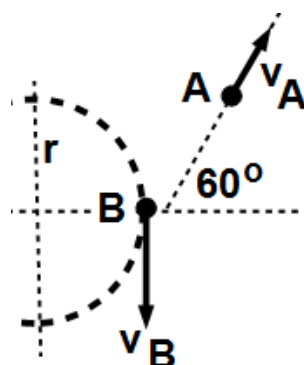
Ответ: $a_{AB} = 5,135 \text{ м/с}^2$.

Задача 3. В некоторый момент времени машина «А» движется со скоростью 60 км/ч и ускорением 3 км/ч за минуту по кольцу радиуса 300 м. Машина «В» движется со скоростью 80 км/ч и ускорением 5 км/ч за минуту в тот же момент времени оказывается в центре кольца. Определить скорость и ускорение машины «В» относительно машины «А».



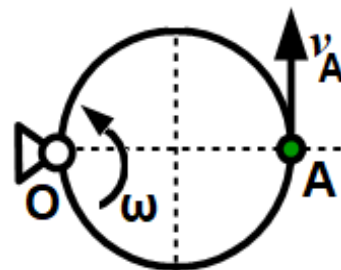
Ответ: $v_{AB} = 129,565$ км/ч., $a_{AB} = 445,83$ км/ч².

Задача 4. Машина «А» движется по прямой со скоростью 18 м/с и замедляет её на 2 м/с за секунду. Машина «В» движется по кругу радиуса 100 м со скоростью 12 м/с и увеличивает её на 3 м/с за секунду. Определить относительную скорость и ускорение.



Ответ: $v_{AB} = 9,69$ м/с; $a_{AB} = 5,32$ м/с².

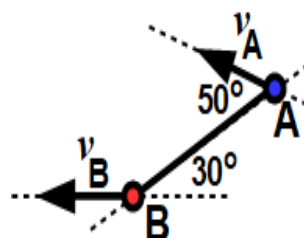
Задача 5. Кольцо радиуса 0,5 м вращается с постоянной угловой скоростью 4 1/с в плоскости чертежа. По кольцу перемещается точка «А» с постоянной скоростью 2 м/с. Определить модуль абсолютных скорости и ускорения точки «А».



Ответ: $v = 6$ м/с; $a = 40$ м/с².

БЛОК К8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

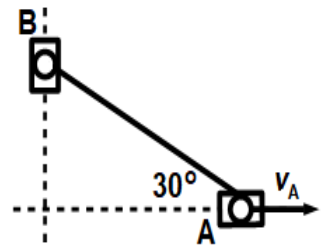
Задача 1. Для увеличения своей скорости водный лыжник «А» меняет траекторию своего движения относительно катера «В». Определить все скоростные кинематические характеристики лыжника «А», если скорость катера 60 км/ч, расстояние $AB = 10$ м.



Ответ: $v_A = 80,838$ км/ч, $\omega_{AB} = 0,887$ 1/с., $v_{AB} = 31,926$ км/ч.

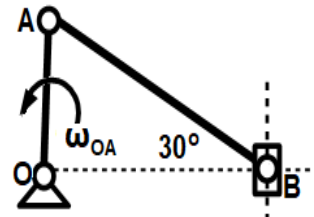
Задача 2. Ползун «А» движется со скоростью $v_A = 3$ м/с. Определить угловую скорость шатуна «АВ» и скорость ползуна «В», если длина шатуна $AB = 3$ м.

Ответ: $v_B = 5,196$ м/с. $v_{AB} = 6$ м/с. $\omega_{AB} = 4$ 1/с.



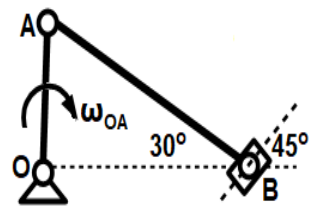
Задача 3. Кривошип «ОА» длиной 0,3 м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 12$ 1/с. Определить угловую скорость шатуна «АВ» и скорость ползуна «В», если длина шатуна $AB = 0,6$ м.

Ответ: $v_B = 6,235$ м/с. $v_{AB} = 7,1998$ м/с. $\omega_{AB} = 12$ 1/с.



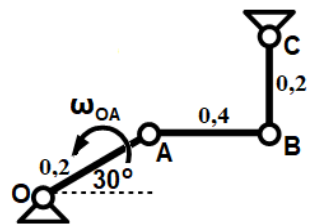
Задача 4. Кривошип «ОА» длиной 3 м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ 1/с. Определить угловую скорость шатуна «АВ» и скорость ползуна «В», если длина шатуна $AB = 5$ м.

Ответ: $v_B = 1,7932$ м/с. $v_{AB} = 5,801$ м/с. $\omega_{AB} = 1,16$ 1/с.



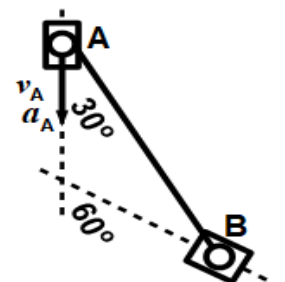
Задача 5. Кривошип «ОА» вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ 1/с и приводит в движение четырёхзвенник «ОАВС». Определить скорости всех его элементов.

Ответ: $v_B = 1$ м/с. $v_{AB} = 1,7321$ м/с. $\omega_{AB} = 4,3301$ 1/с, $\omega_{BC} = 5$ 1/с.



Задача 6. Ползун «А» движется со скоростью $v_A = 4$ м/с и ускорением $a_A = 6$ м/с². Определить все кинематические характеристики элементов механизма, если $AB = 0,6$ м.

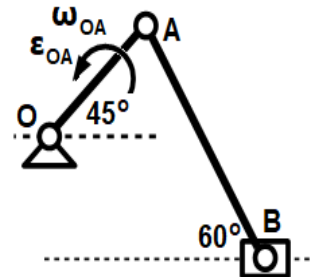
Ответ: $v_B = 4$ м/с; $v_{AB} = 4$ м/с;
 $\omega_{AB} = 6,667$ 1/с; $a_B = 1,381$ м/с²; $\varepsilon_{AB} = 6,151$ 1/с².



Задача 7. Для условий задачи 4 найти ускорения всех элементов механизма.

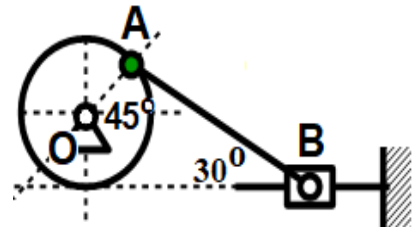
Ответ: $a_A = 12 \text{ м/с}^2$; $a_B = 2,817 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_{AB} = 1,534 \text{ 1/с}^2$.

Задача 8. В некоторый момент времени кривошип вращается так, что $\omega_{OA} = 4 \text{ 1/с}$, $\varepsilon_{OA} = 6 \text{ 1/с}^2$. Определить все кинематические характеристики элементов механизма, если $OA = 0,5 \text{ м}$; $AB = 1 \text{ м}$.



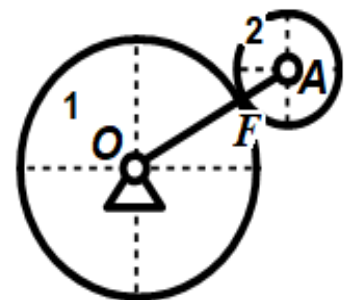
Ответ: $v_B = 3,864 \text{ м/с}$; $v_{AB} = 2,828 \text{ м/с}$;
 $\omega_{AB} = 2,828 \text{ 1/с}$; $a_B = 17,654 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_{AB} = 6,785 \text{ 1/с}^2$.

Задача 9. Дан ползунно-барабанный механизм. Ползун «В» движется влево вдоль направляющей со скоростью 15 см/с и ускорением $7,5 \text{ м/с}^2$. Определить кинематические характеристики элементов механизма, если длины $OA = 12,5 \text{ см}$, $AB = 50 \text{ см}$.



Ответ: $v_A = 13,449 \text{ см/с}$; $\omega = 1,076 \text{ 1/с}$; $v_{AB} = 20,87 \text{ см/с}$;
 $\omega_{AB} = 0,417 \text{ 1/с}$; $\varepsilon = 0,492 \text{ 1/с}^2$; $\varepsilon_{AB} = 0,236 \text{ 1/с}^2$, $a_A = 15,726 \text{ см/с}^2$,
 $a_{AB} = 14,675 \text{ см/с}^2$.

Задача 10. Большая шестерня вращается против часовой стрелки с постоянной скоростью 10 1/с . Кривошип «ОА» вращается по часовой стрелки с угловой скоростью $\omega = 3 \times t + 3 \text{ 1/с}$. Определить кинематические характеристики малой шестерни в момент времени $t = 1 \text{ с}$, если $r_1 = 0,3 \text{ м}$; $r_2 = 0,2 \text{ м}$.



Ответ: $v_A = 3 \text{ м/с}$; $v_F = 3 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 30 \text{ 1/с}$;
 $a_F = 162 \text{ м/с}^2$, $a_A = 18,064 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_2 = 7,5 \text{ 1/с}^2$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

К-3. Определение кинематических характеристик элементов механизмов при его плоском движении.

Плоский механизм состоит из нескольких стержней и двух ползунов. Длины стержней $l_1 = 0,4$ м; $l_2 = 1,2$ м; $l_3 = 1,4$ м; $l_4 = 0,6$ м. Закон вращения первого стержня имеет вид $\omega = 2 \times a \times t + b$ 1/с. Величины углов и выбранный момент времени приведены в таблице 1. Условные схемы механизмов приведены в таблице 2. Построение истинных чертежей надо начинать с того стержня, к которому относится угол α ; длины стержней откладывать в выбранном масштабе.

Для указанного в таблице 1 момента времени определить:

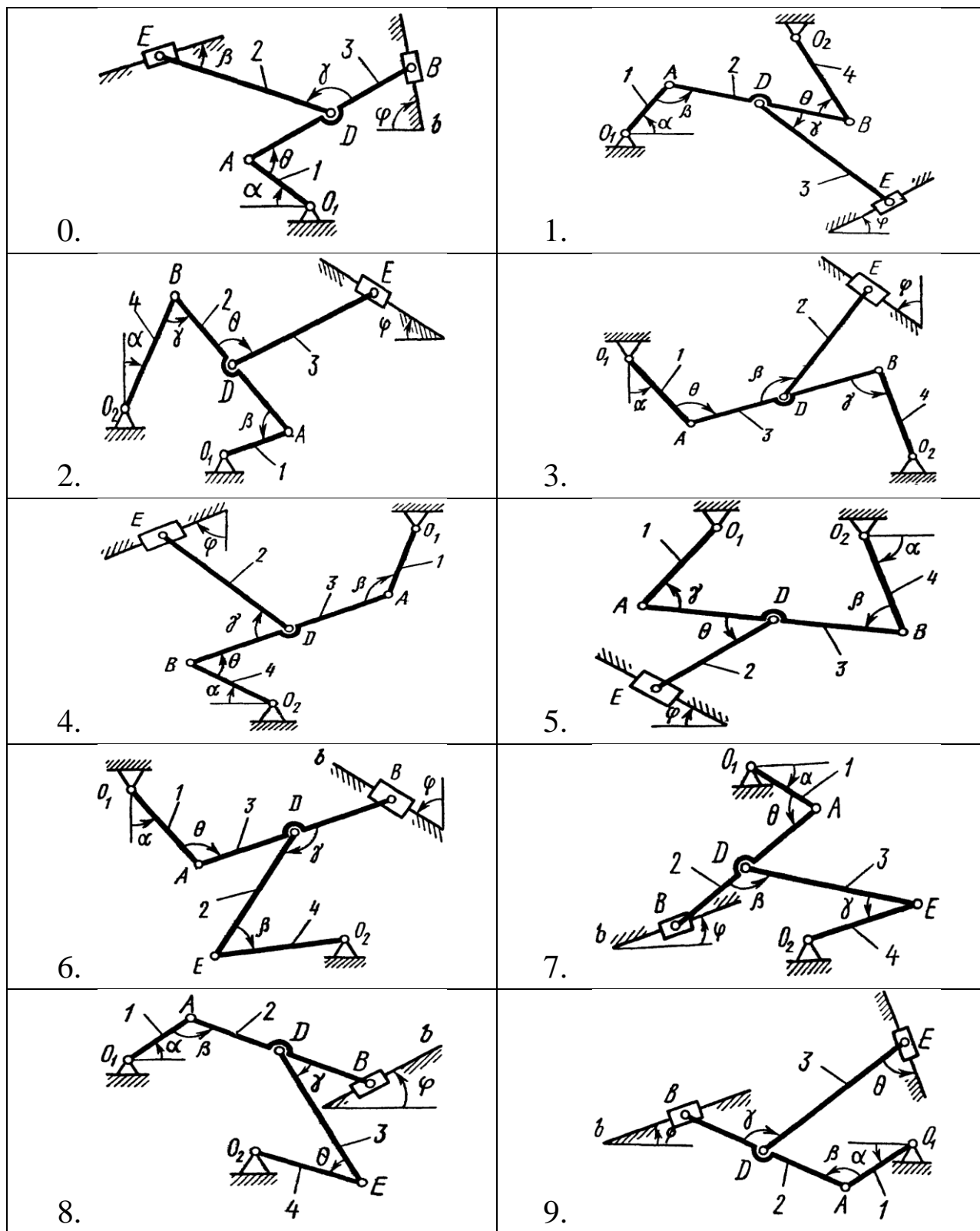
- 1) скорости всех указанных на рисунках точек;
- 2) угловые скорости всех стержней механизма;
- 3) ускорение точек «А» и «В».

Первая цифра с конца номера зачётки соответствует данным таблицы 1. Вторая цифра с конца номера зачётки соответствует данным таблицы 2.

Таблица 1
Числовые данные для задания К-3

№	α	β	γ	φ	θ	a	b	t
0	120	30	30	45	150	1	-1	1
1	45	60	50	65	120	1,5	-2	2
2	60	70	30	75	30	2	-1	1
3	30	50	30	35	60	2,5	-3	2
4	30	60	120	45	60	3	-4	1
5	50	40	90	55	60	1	-3	2
6	70	55	90	75	120	1,5	-2	1
7	30	30	30	45	60	2	-5	2
8	90	65	120	65	150	2,5	-4	1
9	60	40	60	35	30	3	-8	2

Таблица 2.
Схемы механизмов для задания К-3



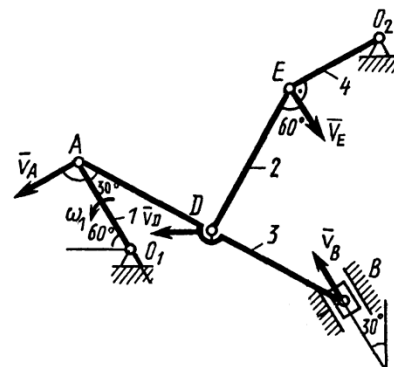
ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ. Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$. Длины стержней $l_1 = 0,4$ м; $l_2 = 1,2$ м; $l_3 = 1,4$ м; $l_4 = 0,6$ м. Закон вращения первого стержня $\omega_1 = 2 \times a \times t + b$ 1/с, где $a = 3,5$, $b = -5$, $t = 1$ с.

Для указанного момента времени определить:

1) скорости всех указанных на рисунке точек;

2) угловые скорости всех стержней механизма;

3) ускорения элементов стержня «AB».



– рисунок ИДЗ_К-3_1

Шаг 1. Найдём значения угловой скорости первого стержня в заданный момент времени:

$$\omega_1|_{t=1} = 2 \times a \times t + b = 2 \text{ 1/с};$$

Шаг 2. Найдём скорость точки «А»:

$$v_A = O_1A \times \omega_1 = 0,8 \text{ м/с}.$$

Шаг 3. Найдём кинематические характеристики элементов стержня «AB». Спроектируем основное векторное равенство $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$ на оси координат, одна из которых проходит через ось «AB»:

$$v_B \times \cos(30^\circ) = v_A \times \cos(60^\circ) \Rightarrow v_B = 0,462 \text{ м/с}.$$

$$v_B \times \sin(30^\circ) = -v_A \times \sin(60^\circ) + v_{AB} \Rightarrow v_{AB} = 0,924 \text{ м/с}.$$

Найдём угловую скорость вращения шатуна «AB» вокруг точки «А»:

$$v_{AB} = AB \times \omega_3 \Rightarrow \omega_3 = 0,66 \text{ 1/с}.$$

Шаг 4. Найдём величину и направление вектора скорости точки «D». Учитывая, что $v_{AD} = AD \times \omega_3 = 0,462$ м/с, из векторного равенства: $\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{AD}$ получим проекции на ось:

$$v_D \times \sin(\xi) = v_A \times \sin(60^\circ) - v_{AD} = 0,2308$$

$$v_D \times \cos(\xi) = v_A \times \cos(60^\circ) = 0,4$$

Тогда, деля первое выражение на второе, получим, что

$$\operatorname{tg}(\xi) = 0,577 \Rightarrow \xi = 30^\circ \Rightarrow v_D = 0,462 \text{ м/с, где}$$

ξ – угол между вектором \vec{v}_D и осью «АВ».

Шаг 5. Найдём кинематические характеристики элементов стержня «DE». Спроектируем векторное равенство $\vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_{ED}$ на оси координат, одна из которых проходит через ось «DE»:

$$v_D \times \cos(60^\circ) = v_E \times \cos(60^\circ) \Rightarrow v_E = 0,462 \text{ м/с.}$$

$$v_D \times \sin(60^\circ) = -v_E \times \sin(60^\circ) + v_{DE} \Rightarrow v_{DE} = 0,8 \text{ м/с.}$$

Найдём угловую скорость вращения шатуна «DE» вокруг точки «E»:

$$v_{DE} = DE \times \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 0,667 \text{ 1/с.}$$

Шаг 6. Найдём угловую скорость четвёртого стержня:

$$v_E = O_2E \times \omega_4 \Rightarrow \omega_4 = 0,77 \text{ 1/с.}$$

Шаг 7. Найдём значения углового ускорения первого стержня в заданный момент времени:

$$\varepsilon_1|_{t=1} = 2 \times a = 7 \text{ 1/с}^2.$$

Шаг 8. Найдём ускорение точки «А»:

$$a_A^n = O_1A \times \omega_1^2 = 1,6 \text{ м/с}^2; a_A^k = O_1A \times \varepsilon_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; a_A = 3,225 \text{ м/с}^2.$$

Шаг 9. Найти ускорения элементов стержня «АВ».

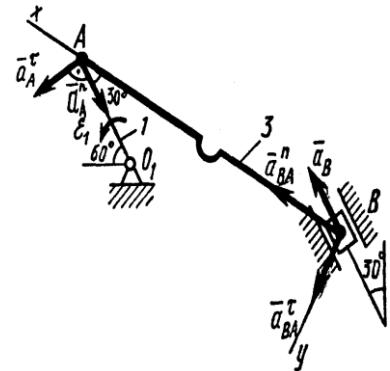
Так как элементы механизма совершают вращательное движение: кривошип «ОА» вокруг точки «О» и шатун «АВ» вокруг подвижной точки «В», то основное векторное равенство для ускорений представим в развернутой форме: $\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^k + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^k$. Дальнейшее решение связано с проектированием этого равенства на оси координат, одну из которых также направим вдоль прямой «АВ».

$$a_B \times \cos(30^\circ) = -a_A^n \times \cos(30^\circ) + a_A^k \times \cos(60^\circ) + a_{AB}^n;$$

$$-a_B \times \sin(30^\circ) = +a_A^n \times \sin(30^\circ) + a_A^k \times \sin(60^\circ) + a_{AB}^k$$

Найдём элементы системы уравнений.

Найдём компоненты ускорения точки «В» при повороте вокруг точки «А»:



– рисунок ИДЗ_K-1_2.

$$a_{AB}^n = AB \times \omega_3^2 = 0,609 \text{ м/с}^2, a_{AB}^k = AB \times \varepsilon_3 = 1,4 \times \varepsilon_3 \text{ м/с}^2.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$a_B \times 0,866 = 0,6234 \Rightarrow a_B = 0,719;$$

$$-a_B \times 0,5 = 3,225 + a_{AB}^k \Rightarrow a_{AB}^k = -3,585 \Rightarrow \varepsilon_3 = -2,56 \text{ 1/с}^2.$$

Найдём ускорение точки «D». Применим основное равенство к этой точке: $\bar{a}_D = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^k + \bar{a}_{AD}^n + \bar{a}_{AD}^k$. В качестве осей выберем те же, что и выше. В результате получим систему уравнений вида:

$$a_D^x = -a_A^n \times \cos(30^\circ) + a_A^k \times \cos(60^\circ) + a_{AD}^n;$$

$$a_D^y = a_A^n \times \sin(30^\circ) + a_A^k \times \sin(60^\circ) + a_{AD}^k;$$

где $a_{AD}^n = AD \times \omega_3^2 = 0,305 \text{ м/с}^2$, $a_{AD}^k = AD \times \varepsilon_3 = -1,28 \text{ м/с}^2$.

Тогда $a_D^x = 0,319 \text{ м/с}^2$, $a_D^y = 1,945 \text{ м/с}^2$, $a_D = 1,971 \text{ м/с}^2$.

Сделаем **проверку**. Составим кинематический многоугольник для векторного равенства $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$. Из чертежа видно, что образовался прямоугольный треугольник. Проверим выполнение теоремы Пифагора:

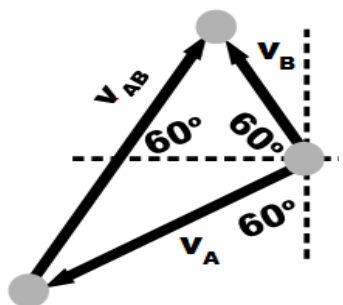
$$v_A^2 + v_B^2 = 0,8^2 + 0,462^2 = 0,924^2 \approx v_{AB}^2.$$

Составим кинематический многоугольник для векторного равенства $\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{AD}$. Из чертежа видно, что образовался тупоугольный треугольник. Проверим выполнение теоремы косинусов:

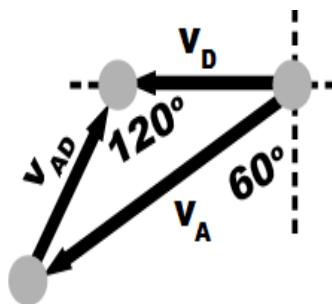
$$v_D^2 + v_{AD}^2 + 2 \times v_D \times v_{AD} \times \cos(120^\circ) \approx 0,8002^2 \approx v_A^2$$

Составим кинематический многоугольник для векторного равенства $\bar{v}_D = \bar{v}_E + \bar{v}_{ED}$. Проверим выполнение теоремы косинусов:

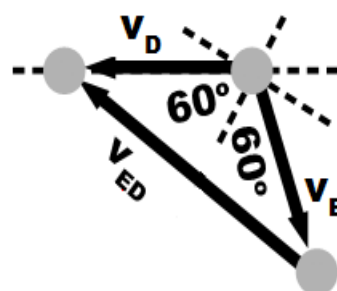
$$v_D^2 + v_E^2 + 2 \times v_D \times v_E \times \cos(120^\circ) \approx 0,8002^2 \approx v_{DE}^2.$$



– рисунок ИДЗ_К-3_2.



– рисунок ИДЗ_К-3_2.



– рисунок ИДЗ_К-3_2.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика : учебное пособие для студентов технических вузов и колледжей / В. А. Хямяляйнен ; Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – 3-е изд. – Кемерово : КузГТУ, 2020. – 1 файл (3,4 Мб). – URL:

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=91800&type=utchposob:common> (дата обращения: 17.03.2025). – Текст : электронный.

2. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский ; под редакцией В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 52-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 448 с. – ISBN 978-5-8114-4190-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL:

<https://e.lanbook.com/book/115729> (дата обращения: 17.03.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Простов, С. М. Теоретическая механика: учебное пособие для студентов специальностей 130400 «Горное дело» и 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / С. М. Простов; Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – Кемерово : КузГТУ, 2013. – 1 файл (24,2 Мб). – URL:

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90975&type=utchposob:common> (дата обращения: 17.03.2025). – Текст : электронный.

4. Диевский, В. А. Теоретическая механика. Интернет-тестирование базовых знаний : учебное пособие / В. А. Диевский, А. В. Диевский. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 144 с. – ISBN 978-5-8114-1058-3. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/167738> (дата обращения: 17.03.2025). – Режим доступа: для авториз. пользователей.