

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра открытых горных работ

Составитель Д. Ю. Сирота

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ДИНАМИКА

**Методические материалы к практическим занятиям
и самостоятельной работе**

Рекомендовано учебно-методической комиссией
специальности 21.05.04 Горное дело
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2025

Рецензент: Баёв М. А. – канд. техн. наук, доцент кафедры открытых горных работ ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева»
Марков С. О. – канд. техн. наук, доцент кафедры открытых горных работ ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева»

Сирота Дмитрий Юрьевич

Теоретическая механика. Динамика : методические материалы к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся специальности 21.05.04 Горное дело / Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева ; кафедра открытых горных работ; составитель Д. Ю. Сирота. – Кемерово : КузГТУ, 2025. – 1 файл (2330 Кб). – Текст : электронный.

Приведено содержание практических и самостоятельных работ, материалов, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Теоретическая механика» и организация практических и самостоятельных работ.

© Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева, 2025
© Сирота Д. Ю., составление, 2025

1. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ, ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

В предыдущей главе мы рассматривали частный случай второго закона Ньютона, в котором ускорение равно нулю. В общем случае это, разумеется не так.

ДИНАМИКА – это раздел теоретической механики, в рамках которого изучаются взаимосвязи между приложенными силами и кинематическими характеристиками частиц или тел.

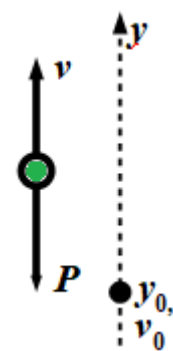
Метод решения задач по динамике частицы основан на использовании векторного равенства

$$\vec{F} = m \times \vec{a}, \quad (1)$$

а также методов статики и кинематики.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим массивное тело, которое движется вверх с начальной скоростью v_0 из положения y_0 . Определить время, за которое тело достигнет своей верхней точки, и расстояние до неё. При численных расчётах взять $t_0 = 5$ с; $y_0 = 2$ м; $v_0 = 7$ м/с; $g = 10$ м/с².

Направим ось координат в ту же сторону, что и предполагаемое движение тела. По аналогии с задачами статики укажем все силы, которые действуют на это тело. В нашем случае это одна сила тяжести $P = m \times g$.



– рисунок 1

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме: $\vec{F} = m \times \vec{a}$. Спроектируем его на ось координат: $-P = m \times a \Rightarrow -g = a$. Таким образом, в вакууме тело движется замедленно с ускорением свободного падения.

Используя методику решения задач кинематики, найдём выражение для скорости:

$$-g = a \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow dv = -g \times dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = -g \times \int_{t_0}^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - v_0 = -g \times (t - t_0) \Rightarrow v = v_0 - g \times (t - t_0)$$

Затем найдём выражение для перемещения:

$$v - v_0 = -g \times (t - t_0) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -g \times (t - t_0) + v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = [-g \times (t - t_0) + v_0] dt \Rightarrow \int_{y_0}^y dy = \int_{t_0}^t [-g \times (t - t_0) + v_0] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_0 = -\frac{g}{2} \times (t - t_0)^2 + v_0 \times (t - t_0).$$

Так как тело движется вверх, то в некоторый момент времени оно остановится, его скорость будет равна нулю. Тогда время определится как $v_1 = 0 \Rightarrow 0 - v_0 = -g \times (t_1 - t_0) \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} + t_0$ секунд, а

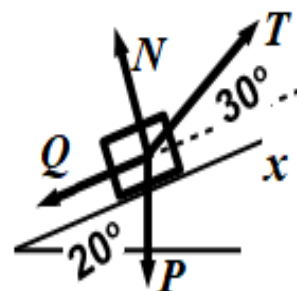
$$\text{пройденный путь } y_1 = y_0 - \frac{g}{2} \times \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2 \times g} + y_0.$$

Подставим сюда числовые данные:

$$t_1 = \frac{v_0}{g} + t_0 = 5,7 \text{ с}, \quad y_1 = \frac{v_0^2}{2 \times g} + y_0 = 4,45 \text{ м}.$$

ПРИМЕР 2. Неподвижное тело весом 50 кг располагается на наклонной в 20° шероховатой поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0,3$. На тело действует сила $T = 400$ Н под углом в 30° к поверхности. Определить скорость тела через 3 с после старта.

Направим оси координат в ту же сторону, что и предполагаемое движение тела: вправо и вверх. По аналогии с задачами статики укажем все силы, которые действуют на это тело. В нашем случае это сила тяжести $P = m \times g = 500$ Н, сила тяги $T = 400$ Н, реакция опоры N Н и сила трения $Q = \mu \times N$ Н.



– рисунок 2

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме: $\vec{F} = m \times \vec{a}$, где F – это равнодействующая всех сил, которые действуют на тело.

Спроектируем векторное равенство на оси координат.

$$\begin{aligned} T \times \cos(30^\circ) - Q - P \times \cos(70^\circ) &= m \times a_x \Rightarrow 175,4 - Q = 50 \times a_x \\ T \times \sin(30^\circ) + N - P \times \sin(70^\circ) &= m \times a_y \Rightarrow N - 269,8463 = 50 \times a_y \end{aligned}$$

Так как движения вдоль оси Oy нет, то ускорение $a_y = 0$. Тогда из второго уравнения $N = 269,8463$, а из первого – $a_x = 1,8889$.

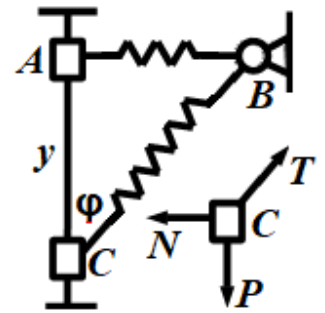
Найдём выражение для скорости:

$$a_x = 1,8889 \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 1,8889 \Rightarrow dv_x = 1,8889 \times dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^v dv_x = 1,8889 \times \int_0^t dt \Rightarrow v = 1,8889 \times t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v|_{t=3} = 1,8889 \times 3 = 5,6668 \text{ м/с.}$$

ПРИМЕР 3. Ползун массой 2 кг перемещается из состояния покоя вдоль гладкой вертикальной направляющей из точки «А» в точку «С». Для управления скоростью движения используют пружину с жёсткостью $k = 3 \text{ Н/м}$. Определить ускорение и реакцию направляющей опоры в точке «С», если расстояние $AB = 0,75 \text{ м}$, а $AC = 1 \text{ м}$.



– рисунок 3

Укажем силы, которые будут приложены к ползуну в точке «С». В нашем случае это сила упругости пружины $T = k \times s_{BC}$, сила тяжести $P = 20 \text{ Н}$, сила реакции направляющей N .

Направим вертикальную ось координат в ту же сторону, что и предполагаемое движение тела – вниз, а горизонтальную – вправо.

Спроектируем векторное равенство на оси координат.

$$\begin{aligned} -T \times \cos(\varphi) + P &= m \times a_y \Rightarrow -3 \times s_{BC} \times \cos(\varphi) + 20 = 2 \times a_y \\ +T \times \sin(\varphi) - N &= m \times a_x \Rightarrow 3 \times s_{BC} \times \sin(\varphi) - N = 2 \times a_x. \end{aligned}$$

Так как движения вдоль оси Ox нет, то ускорение $a_x = 0$.

$$\text{Найдём угол } \varphi: \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{AB}{AC} = 0,75 \Rightarrow \varphi = 36,8699^\circ.$$

$$\text{Найдём длину растянутой пружины: } BC^2 = 1^2 + 0,75^2 = 1,25^2.$$

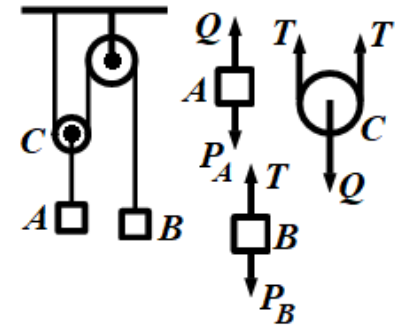
$$\text{Найдём деформацию пружины: } s_{BC} = 1,25 - 0,75 = 0,5 \text{ м.}$$

Тогда из второго уравнения получим реакцию направляющей $N = 3 \times s_{BC} \times \sin(\varphi) = 0,9 \text{ Н}$, а из первого уравнения – ускорение ползуна $a_y = -1,5 \times s_{BC} \times \cos(\varphi) + 10 = 9,4 \text{ м/с}^2$.

Отметим здесь, что если бы мы хотели определить скорость ползуна, то нам пришлось бы решать весьма сложное дифференциальное уравнение. В этом как раз и заключается **недостаток** методов решения задач динамики, основанный на непосредственном применении второго закона Ньютона.

ПРИМЕР 4. Тело «А» массой 100 кг движется из состояния покоя. Определить скорости тела «В» массой 20 кг и тела «А» через 2 секунды после начала движения.

Напрямую применить формулу второго закона Ньютона к исходной схеме полиспаста нельзя. Поэтому разобьём всю конструкцию на части: «А», «В», «С».



– рисунок 4

Тело «А»: $-Q + P_A = m_A \times a_A$. Тело «В»: $T - P_B = m_B \times a_B$.

Тело «С»: $-T - T + Q = m_C \times a_C$.

Так как масса блока «С» равна нулю, то $Q = 2 \times T$. Получим систему из двух уравнений: $-2 \times T + P_A = m_A \times a_A$; $T - P_B = m_B \times a_B$.

Взаимосвязь между ускорениями определим, исходя из кинематики плоского движения: $v_B = 2 \times v_A \Rightarrow a_B = 2 \times a_A$.

После подстановки числовых значений система примет вид

$$\begin{aligned} -2 \times T + 1000 &= 100 \times a_A \Rightarrow -2 \times T + 1000 = 100 \times a_A \Rightarrow \\ T - 200 &= 40 \times a_A \Rightarrow 2,5 \times T - 500 = 100 \times a_A \Rightarrow \\ 4,5 \times T &= 1500 \Rightarrow T = 333,333 \\ \Rightarrow a_A &= 3,3333 \Rightarrow a_B = 6,6667. \end{aligned}$$

Скорости блоков «А» и «В» определим по аналогии с ПРИМЕРОМ 2:

$$v_A = a_A \times t = 3,3333 \times t \Rightarrow v_A|_{t=2} = 3,3333 \times 2 = 6,6667 \text{ м/с.}$$

$$v_B = a_B \times t = 6,6667 \times t \Rightarrow v_B|_{t=2} = 6,6667 \times 2 = 13,3334 \text{ м/с.}$$

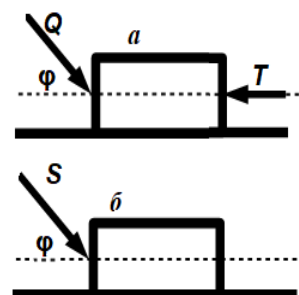
ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК Д1. ДИНАМИКА: ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Задача 1. На вал диаметром 20 см намотана верёвка, к свободному концу которой подвешен груз весом 800 Н. Угловая скорость вращения вала $\omega = 30 \times t$ 1/с. Определить натяжение верёвки, когда груз поднимается и опускается.

Ответ: а) 1040 Н, б) 560 Н.

Задача 2. На тело массой 10 кг действуют силы, указанные на рисунке. Определить скорость и перемещение через 2 секунды после начала движения, если начальная скорость равна нулю. Величины сил: $Q = 500$ Н, $T = 300$ Н, $S = 20 \times t$ Н. Угол φ такой, что $\cos(\varphi) = 0,8$.

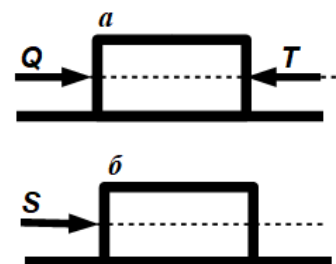


Ответ: а) $v = 20$ м/с; $s = 20$ м. б) $v = 3,2$ м/с; $s = 2,136$ м.

Задача 3. Из кабины вертолѐта во время его движения вверх со скоростью 10 м/с на высоте 200 метров от поверхности Земли выброшен груз без начальной относительной скорости. Определить скорость и время при приземлении груза.

Ответ: $v = 63,639$ м/с; $t = 7,364$ с.

Задача 4. На тело массой 10 кг действуют силы, указанные на рисунке. Определить скорость после перемещения на 8 метров после начала движения, если начальная скорость равна 3 м/с. Величины сил: $Q = 40$ Н, $T = 30$ Н, $G = 200$ Н, $S = 2,5 \times s$ Н.



Ответ: а) $v = 5$ м/с; б) $v = 5$ м/с.

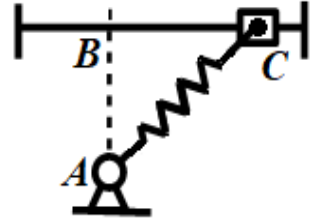
Задача 5. Кран поднимает груз весом 2,5 тонны вертикально вверх с помощью силы $F = 28 + 3 \times s^2$ кН. Определить скорость груза после перемещения на 3 метра?

Ответ: $v = 5,692$ м/с.

Задача 6. Из орудия, которое стоит на горе, вылетает снаряд в горизонтальном направлении с начальной скоростью 800 м/с. Определить высоту горы, если цель находилась на расстоянии 8 км по горизонтали?

Ответ: $T = 10$ с; $H = 500$ м.

Задача 7. Ползун массой 10 кг сдвинут вправо на расстояние $BC = 4$ м. Определить начальное ускорение ползуна при движении его влево. Длина пружины до деформации равна 1 метр, коэффициент жёсткости $k = 10$ Н/м, расстояние $AB = 3$ м.



Ответ: $a = 3,2$ м/с².

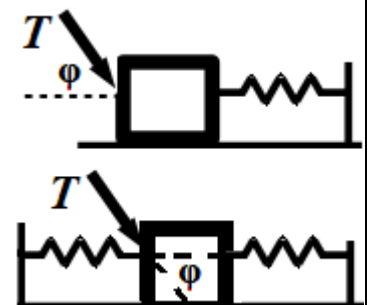
Задача 8. Под каким углом к горизонту надо выстрелить из орудия, поставленного в начале координат, чтобы попасть в цель. Координаты цели: $x = 1$ км, $y = 0,5$ км. Начальная скорость 1000 м/с. Также определить время долёта.

Ответ: $\alpha_1 = 26,8676^\circ$, $\alpha_2 = 89,713^\circ$, $T_1 = 1,121$, $T_2 = 199,497$.

Задача 9. Лебёдка поднимает тело массой 20 кг с помощью каната по наклонной ($\alpha = 30^\circ$) шероховатой ($\mu = 0,3$) поверхности. Определить натяжение каната после первых 3 секунд движения, если оно прошло расстояние 6 метров из состояния покоя.

Ответ: $T = 178,628$ Н.

Задача 10. Пружина жёсткостью 500 Н/м связана с телом массой 10 кг. На тело действует внешняя сила $T = 500$ Н. Определить скорость тела после перемещения на 0,5 м. Движение началось из состояния покоя, пружина была недеформированная. Угол φ такой, что $\cos(\varphi) = 0,8$.

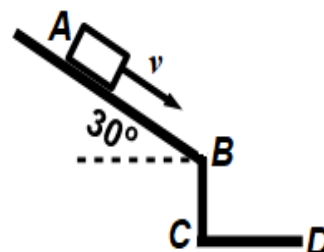


Ответ: $v_I = 5,244$ м/с, $v_{II} = 3,873$ м/с.

Задача 11. На тело массой 50 кг, которое стоит на горизонтальной шероховатой ($\mu = 0,3$) поверхности, действует сила $F = 100 \times t^{1,5}$ Н. Определить скорость и перемещения тела через 5 секунд после начала движения.

Ответ: $s = 50,3877$ м; $v = 29,7214$ м/с.

Задача 12. Тело массой 60 кг движется по наклонной шероховатой поверхности. Начальная скорость 2 м/с. Коэффициент трения 0,2. Определить все кинематические параметры движения тела, если $AB = 5$ м, $BC = 2,5$ м.



Ответ: $t_B = 1,2412$ с, $v_B = 6,0564$ м/с;
 $t_D = 0,4664$ с, $CD = 2,4462$ м; $v_D = 9,3101$ м/с.

Задача 13. Тело массой 2 кг, брошенное вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое равно $R = 0,4 \cdot v$ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: $t = 1,71$ с.

Задача 14. Тело массой 10^7 кг движется со скоростью 16 м/с. Сопротивление среды $R = 3 \times 10^5 \times v^2$ Н. Корабль достиг скорости 4 м/с. Найти пройденный путь и затраченное время.

Ответ: $S = 46,2$ м, $T = 6,25$ с.

Задача 15. Тело массой $m = 1,5 \times 10^5$ кг преодолевает сопротивление среды $R = 1200 \times v^2$ Н. Сила тяги равна $T = 1,2 \times 10^6 \times (1 - v/33)$ Н. Найти скорость движения и пройденный путь тела через 1 и 10 секунд, если $v_0 = 2$ м/с.

Ответ: $v_1 = 2,739$ м/с и $v_{10} = 8,444$ м/с.

$s_1 = 2,365$ м и $s_{10} = 53,886$ м.

Задача 16. Частица, брошенная с начальной скоростью 2 м/с под углом 60° к горизонту, движется под действием силы тяжести и сопротивления среды $R = 0,125 \times v$. Определить максимальную высоту подъема и пройденный путь до него. Определить координаты частицы в момент времени $t = 0,324529$ с.

Ответ: $H = 0,131$ м, $S = 0,1424$ м, $x = 0,2664$ м, $y = 0,0$ м.

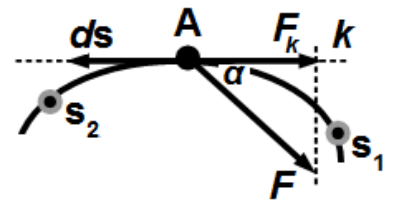
2. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ, ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Недостаток непосредственного использования второго закона Ньютона при решении задач динамики связан с необходимостью решать дифференциальные уравнения первого или второго порядков. В большинстве случаев сделать это в аналитической форме затруднительно. Поэтому были изобретены многочисленные методы численного решения дифференциальных уравнений. Их недостаток заключается в необходимом использовании какого-либо расчётного программного комплекса для увеличения скорости расчётов.

Альтернативой этому подходу является разработка методов, которые бы использовали не всё движение в целом, а лишь отдельные значения каких-либо динамических характеристик механического воздействия и вызванного им движения частицы или тела.

Принципиально возможны лишь две такие характеристики, связанные либо с пространством, либо со временем.

Рассмотрим первую, **пространственную** характеристику. Пусть частица движется по криволинейной траектории. Рассмотрим касательное силовое воздействие на неё и бесконечно малое перемещение вдоль касательной к траектории.



– рисунок 5

$$\bar{F} = m \times \bar{a} \Rightarrow F_k = m \times a_k \Rightarrow F_k \times ds = m \times a_k \times ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_k \times ds = m \times \frac{dv}{dt} \times ds \Rightarrow F_k \times ds = m \times v \times dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \times \cos \alpha \times ds = m \times v \times dv.$$

Величина, которая стоит в левой части равенства, получила название **элементарной работы** силы при элементарном перемещении, а величина из правой части – **элементарной кинетической энергии**, которую накопит тело при движении с заданной скоростью на элементарном перемещении.

Проинтегрируем последнее равенство при условии, что $v(s_1) = v_1$ и $v(s_2) = v_2$:

$$\int_{s_1}^{s_2} F \times \cos \alpha \times ds = \int_{v_1}^{v_2} m \times v \times dv \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_x \times dx + F_y \times dy = \frac{m \times v^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2}$$

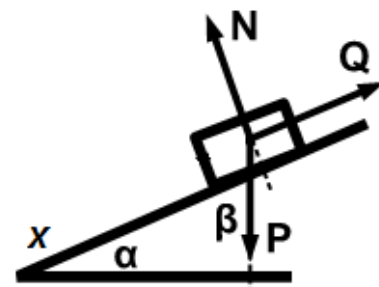
Получили теорему об изменении кинетической энергии тела, которая в общем случае имеет вид

$$\sum_k A_k = E_{II} - E_I. \quad (2)$$

ПРИМЕР 5. Тело массой 1000 кг начало двигаться вниз со скоростью 20 м/с по наклонной шероховатой поверхности с углом наклона $\alpha = 10^\circ$ и коэффициентом трения $\mu = 0,5$. Определить пройденный путь до остановки, ускорение и силу торможения.

Найдём изменение кинетической энергии:

$$E_{II} - E_I = \frac{m \times v_{II}^2}{2} - \frac{m \times v_I^2}{2} = -200000, \text{ Дж.}$$



– рисунок 6

Найдём работу всех сил, которые действуют на тело:

Сила тяжести: $A_P = P \times s \times \cos(\beta) = 1736,4818 \times s, \text{ Дж};$

Сила трения: $A_Q = -Q \times s = -\mu \times P \times \sin(\beta) \times s = -4924,0388 \times s, \text{ Дж.}$

Сумма всех сил: $\sum_k A_k = A_P + A_Q = -3187,557 \times s, \text{ Дж.}$

Из уравнения (2) получаем, что перемещение до остановки равно $\sum_k A_k = E_{II} - E_I \Rightarrow -3187,557 \times s = -200000 \Rightarrow s = 62,744, \text{ м.}$

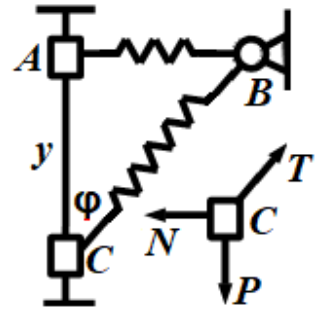
Теперь запишем выражение (2) в общем виде и продифференцируем его:

$$\begin{aligned} \sum_k A_k = E_{II} - E_I &\Rightarrow -3187,557 \times s = 500 \times v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3187,557 \times v = 500 \times 2 \times v \times a \Rightarrow a = -3,1876 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6. Ползун массой 2 кг перемещается из состояния покоя вдоль гладкой вертикальной направляющей из точки «А» в точку «С». Для управления скоростью движения используют пружину с

жёсткостью $k = 3 \text{ Н/м}$. Определить ускорение и реакцию направляющей опоры в точке «С», если расстояние $AB = 0,75 \text{ м}$, а $AC = 1 \text{ м}$.

Укажем силы, которые будут приложены к ползуну в точке «С». В нашем случае это сила упругости пружины $T = k \times s_{BC}$, сила тяжести $P = 20 \text{ Н}$, сила реакции направляющей N .



– рисунок 7

Найдём изменение кинетической энергии:

$$E_{II} - E_I = \frac{m \times v^2}{2} - \frac{m \times v_1^2}{2} = v^2, \text{ Дж.}$$

Найдём работу всех сил, которые действуют на тело:

Сила тяжести: $A_P = P \times h = 20 \times h, \text{ Дж};$

Сила упругости: $A_T = -\frac{k \times s^2}{2} = -\frac{k \times (AB^2 + h^2)}{2}, \text{ Дж.}$

Сумма всех сил: $\sum_k A_k = A_P + A_T = 20 \times h - 1,5 \times (AB^2 + h^2), \text{ Дж.}$

Найдём производные от левой и правой частей теоремы:

$$20 \times v - 3 \times h \times v = 2 \times v \times a \Rightarrow a = 10 - 1,5 \times h = 8,5 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, получили значение ускорения меньшее, чем в предыдущем решении. Вопрос: какое решение правильное и где ошибка?

Рассмотрим вторую, **временную** характеристику. Пусть частица движется по криволинейной траектории. Рассмотрим силовое воздействие на неё за бесконечно малый промежуток времени.

$$\vec{F} = m \times \vec{a} \Rightarrow \vec{F} \times dt = m \times \vec{a} \times dt \Rightarrow \vec{F} \times dt = m \times d\vec{v}.$$

Величина, которая стоит в левой части равенства, получила название **элементарный импульс** силы за элементарный промежуток времени, а величина из правой части – **элементарное количество движения**, которое совершит тело при движении с заданной скоростью за элементарный промежуток времени.

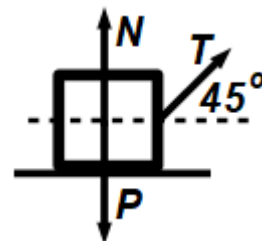
Проинтегрируем последнее равенство при условии, что $v(t_1) = v_1$ и $v(t_2) = v_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{F} \times dt = \int_{v_1}^{v_2} m \times d\overline{v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} \times dt = m \times \overline{v} \Big|_{v_1}^{v_2}.$$

Получили теорему об изменении количества движения тела, которая в общем случае имеет вид

$$\sum_k \overline{S}_k = \overline{Q}_{II} - \overline{Q}_I. \quad (3)$$

ПРИМЕР 7. Тело массой 100 кг находится в состоянии покоя на гладкой поверхности. Пусть к нему прикладывают силу $T = 200$ Н под углом $\alpha = 45^\circ$ в течение 10 секунд. Определить скорость и реакцию опоры в конце временного интервала. Используя теорему об изменении кинетической энергии, определить ускорение и пройденный путь за это время.



– рисунок 8

Разложим векторное равенство (3) на компоненты:

$$T \times \cos(45^\circ) \times (t_2 - t_1) = m \times (v_x^{II} - v_x^I),$$

$$[N - P + T \times \sin(45^\circ)] \times (t_2 - t_1) = m \times (v_y^{II} - v_y^I).$$

Тогда из первого равенства найдём скорость:

$$v_{II} = \frac{T \times \cos(45^\circ) \times (t_2 - t_1)}{m} = 14,14 \text{ м/с},$$

а из второго найдём реакцию опоры:

$$N = \frac{m \times (v_y^{II} - v_y^I)}{(t_2 - t_1)} + P - T \times \sin(45^\circ) = 858,6 \text{ Н}.$$

Найдём пройденное расстояние:

$$\sum_k A_k = E_{II} - E_I \Rightarrow T \times \cos(45^\circ) \times s = \frac{m \times v_{II}^2}{2} \Rightarrow s = 70,7 \text{ м}.$$

Найдём пройденное расстояние:

$$\begin{aligned} \sum_k A_k = E_{II} - E_I \Rightarrow T \times \cos(45^\circ) \times s &= \frac{m \times v^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow T \times \cos(45^\circ) \times v &= m \times v \times a \Rightarrow a = 1,412 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

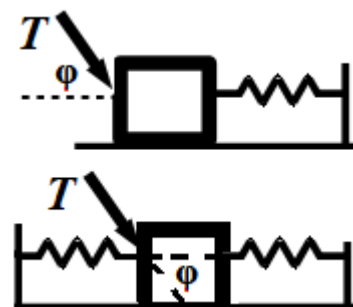
БЛОК Д2. ДИНАМИКА: ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Задача 1. Кран поднимает груз весом 2,5 тонны вертикально вверх с помощью силы $F = 28 + 3 \times s^2$ кН. Определить скорость груза после перемещения на 3 метра?

Ответ: $v = 5,692$ м/с.

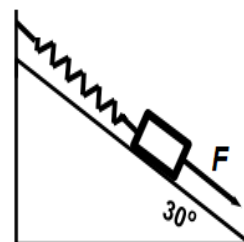
Задача 2. Лебёдка поднимает тело массой 20 кг с помощью каната по наклонной ($\alpha = 30^\circ$) шероховатой ($\mu = 0,3$) поверхности. Определить скорость тела после перемещения на 10 метров, если сила натяжения каната – 300 Н. **Ответ:** $v = 17,169$ м/с

Задача 3. Пружина жёсткостью 500 Н/м связана с телом массой 10 кг. На тело действует внешняя сила $T = 500$ Н. Определить скорость тела после перемещения на 0,5 м. Движение началось из состояния покоя, пружина была недеформированная. Угол φ такой, что $\cos(\varphi) = 0,8$.



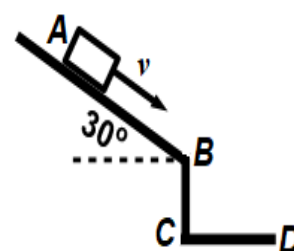
Ответ: $v_I = 5,244$ м/с, $v_{II} = 3,873$ м/с.

Задача 4. Груз массой 10 кг движется вниз по гладкой поверхности под действием внешней силы $F = 100$ Н. Торможение тела осуществляется с помощью пружины с коэффициентом упругости $k = 200$ Н/м. Определить пройденный путь до остановки, если начальная скорость была равна 5 м/с, а пружина была недеформированная.



Ответ: $s = 2,096$ м.

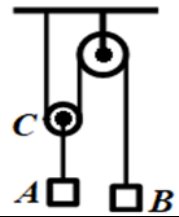
Задача 5. Тело массой 60 кг движется по наклонной шероховатой поверхности. Начальная скорость 2 м/с. Коэффициент трения 0,2. Определить скорости в точках «В» и «D», если $AB = 5$ м, $BC = 2,5$ м.



Ответ: $v_B = 6,0564$ м/с; $v_D = 9,3101$ м/с.

Задача 6. Тело «А» массой 100 кг движется из состояния покоя. Определить скорости тела «В» массой 20 кг и тела «А» через 2 секунды после начала движения.

Ответ: $v_A = 6,6667$ м/с; $v_B = 13,3334$ м/с.



Задача 7. На тело массой 25 кг действует сила $F = 20 \times t^2$ Н, параллельная плоскости движения тела. Определить скорость тела через 4 секунды после начала движения, если коэффициент трения $\mu = 0,3$.

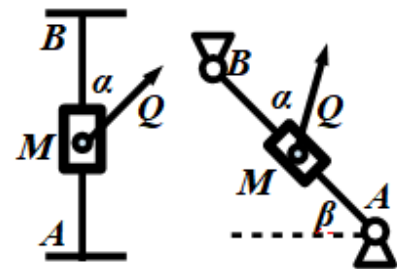
Ответ: $v = 5,0667$ м/с.

Задача 8. На тело массой 200 кг воздействует через блок сила $T = 400 \times t^{1/2}$ Н. Определить скорость тела через 4 секунды, если коэффициент трения равен $\mu = 0,3$.



Ответ: $v = 9,3333$ м/с.

Задача 9. Ползун массой 20 кг перемещается вдоль направляющей «АВ» под действием силы $Q = 700$ Н, направленной под углом $\alpha = 60^\circ$. Определить время, в течение которого скорость увеличится на 2 м/с, если коэффициент трения $\mu = 0,2$, а угол $\beta = 45^\circ$.

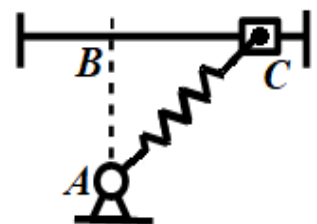


Ответ: а) $t = 1,391$ с; б) $t = 0,108$ с.

Задача 10. Гвоздь вбивается в стену, которая оказывает сопротивление 700 Н. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется в стену на длину 0,15 см. Определить массу молотка, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость 1,5 м/с.

Ответ: 1,344 кг

Задача 11. Ползун массой 10 кг сдвинут вправо на расстояние $BC = 4$ м. Длина пружины до деформации равна 1 метр, коэффициент жёсткости $k = 10$ Н/м, расстояние $AB = 3$ м. Определить скорость тела в момент прохождения положения равновесия.



Ответ: $v = 3,464$ м/с.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Д-1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

Таблица 1

Группа данных, которая соответствует
1-й цифре номера зачётной книжки

<p>0.</p>	<p>1.</p>
<p>2.</p>	<p>3.</p>
<p>4.</p>	<p>5.</p>
<p>6.</p>	<p>7.</p>
<p>8.</p>	<p>9.</p>

Таблица 2
Группа данных, которая соответствует
2-й цифре номера зачётной книжки

№	m , кг	v_A , м/с	Q , Н	R , Н	l , м	t_{AB} , с	F_x , Н
0	2	20	6	$0,4 \times v$	нет	2,5	$2 \times \sin(4 \times t)$
1	2,4	12	6	$0,8 \times v^2$	1,5	нет	$2 \times \cos(4 \times t)$
2	4,5	24	9	$0,5 \times v$	нет	3	$3 \times \sin(2 \times t)$
3	6	14	22	$0,6 \times v^2$	5	нет	$3 \times \cos(2 \times t)$
4	1,6	18	4	$0,4 \times v$	нет	2	$-6 \times \sin(2 \times t)$
5	8	10	16	$0,5 \times v^2$	4	нет	$-6 \times \cos(2 \times t)$
6	1,8	24	5	$0,3 \times v$	нет	2	$-8 \times \sin(4 \times t)$
7	4	12	12	$0,8 \times v^2$	2,5	нет	$-8 \times \cos(4 \times t)$
8	3	22	9	$0,5 \times v$	нет	3	$2 \times \cos(2 \times t)$
9	4,8	10	12	$0,2 \times v^2$	4	нет	$-6 \times \sin(4 \times t)$

Груз «D» массой m , получив в точке «A» начальную скорость v_A , движется в изогнутой трубе, расположенной в вертикальной плоскости.

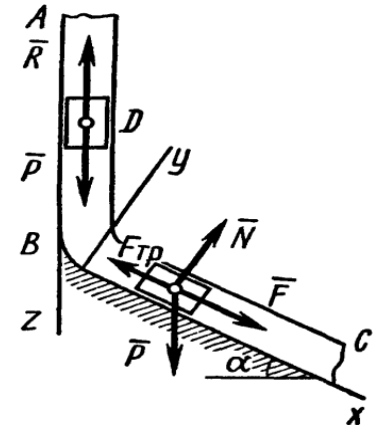
На участке «AB» на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила Q и сила сопротивления среды R . Трением о стенки трубы пренебрегаем.

В точке «B» груз, не меняя своей скорости, переходит в участок «BC», где помимо силы тяжести действует сила трения с коэффициентом $\mu = 0,2$ и переменная сила $F = F(t)$.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_{AB} движения груза от точки «A» до точки «B», найти все кинематические характеристики на участке «AB» в момент прохождения точки «B» и на участке «BC» через 2 секунды после прохождения точки «B».

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ. Масса $m = 2$ кг; сила сопротивления $R = 0,4 \times v^2$, Н; начальная скорость $v_A = 5$ м/с; длина первого отрезка пути $l = 2,5$ м; активная сила $F = 16 \times \sin(4 \times t)$, Н, угол $\alpha = 30^\circ$, сила трения с коэффициентом $\mu = 0,2$.

Рассмотрим участок «AB». Запишем для него второй закон Ньютона: $m \times \bar{a} = \bar{R} + \bar{P}$. Так как тело движется вниз, то направим ось «Oz» так же вниз. Спроектируем векторное равенство на ось, получим дифференциальное уравнение и решим его:



– рисунок ИДЗ_Д-1_1

$$2 \times \frac{dv}{dt} = -0,4 \times v^2 + 20 \Rightarrow \int_5^v \frac{dv}{10 - 0,2 \times v^2} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{2^{1,5}} \times \ln \left| \frac{v + 5\sqrt{2}}{v - 5\sqrt{2}} \right|_5^v = t \Big|_0^t$$

Мы не можем воспользоваться последним выражением, так как не известен момент времени t_{AB} , когда тело «D» проходит точку «B», а значит, мы не можем найти скорость v_B .

Перейдём от функции $v = v(t)$ к функции $v = v(z)$ по формулам $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \times \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} \times v$. Воспользуемся второй из них.

$$2 \times v \times \frac{dv}{dz} = -0,4 \times v^2 + 20 \Rightarrow \int_5^v \frac{2 \times v \times dv}{20 - 0,4 \times v^2} = \int_0^z dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2,5 \times \ln \left| 20 - 0,4 \times v^2 \right|_5^v = z \Big|_0^z \Rightarrow -2,5 \times \ln \left| 20 - 0,4 \times v^2 \right| + 5,7565 = z.$$

Зная, что длина первого отрезка пути $l = 2,5$ м, найдём скорость тела «D» в момент прохождения точки «B», решив уравнение $-2,5 \times \ln \left| 20 - 0,4 \times v_B^2 \right| + 5,7565 = 2,5 \Rightarrow v_B = 6,38771$ м/с.

Теперь, зная эту скорость, можно найти время, за которое тело «D» прошло отрезок «AB»: $\frac{1}{2^{1,5}} \times \ln \left| \frac{v + 5\sqrt{2}}{v - 5\sqrt{2}} \right|_5^{v_B} = t \Big|_0^{t_B} \Rightarrow t_B = 4,23282$.

Рассмотрим участок «BC». Запишем для него второй закон Ньютона: $m \times \bar{a} = \bar{N} + \bar{P} + \bar{F} + \bar{F}_{\text{тр}}$. Так как тело движется вниз, то

направим ось «Ох» также вниз. Спроектируем векторное равенство на оси координат, получим два дифференциальных уравнения:

$$m \times \frac{dv_x}{dt} = F + P \times \cos(60^\circ) - \mu \times N, \quad m \times \frac{dv_y}{dt} = N - P \times \cos(30^\circ).$$

Так как движения вдоль оси «Оу» нет, то $\frac{dv_y}{dt} = 0$ и как следствие $N = P \times \cos(30^\circ) = 17,3205 \text{ Н}$.

С учётом этой информации решим первое уравнение:

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{dv_x}{dt} &= 16 \times \sin(4 \times t) + 6,536 \Rightarrow dv_x = [8 \times \sin(4 \times t) + 3,268] \times dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{v_B}^v dv_x &= \int_0^t [8 \times \sin(4 \times t) + 3,268] \times dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow v - v_B = [-2 \times \cos(4 \times t) + 3,268 \times t]_0^t \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= -2 \times \cos(4 \times t) + 3,268 \times t + 2 + v_B. \end{aligned}$$

Далее найдём выражение для пройденного пути:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2 \times \cos(4 \times t) + 3,268 \times t + 8,38771 \Rightarrow \\ &\Rightarrow dx = [-2 \times \cos(4 \times t) + 3,268 \times t + 8,38771] \times dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^s dx &= \int_0^t [-2 \times \cos(4 \times t) + 3,268 \times t + 8,38771] \times dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow s = -0,5 \times \sin(4 \times t) + 1,634 \times t^2 + 8,38771 \times t. \end{aligned}$$

По условию тело «D» двигалось 2 секунды после прохождения точки «В». Тогда

$$v|_{t=2} = [-2 \times \cos(4 \times t) + 3,268 \times t + 8,38771]_{t=2} = 15,2147 \text{ м/с}.$$

$$s|_{t=2} = [-0,5 \times \sin(4 \times t) + 1,634 \times t^2 + 8,38771 \times t]_{t=2} = 22,8167 \text{ м}.$$

Применим две основные разобранные теоремы для проверки правильности сделанных расчётов.

Рассмотрим участок «АВ». Применим теорему об **изменении кинетической энергии**.

Найдём работу каждой из двух сил:

$$A_P = P \times h = m \times g \times s_{AB} = 50, \text{ Дж.}$$

$$A_R = - \int_0^{2,5} R(z) \times dz = \int_0^{2,5} \left[e^{(2,3026-0,4 \times z)} - 20 \right] \times dz =$$

$$= - \frac{1}{0,4} \times e^{(2,3026-0,4 \times z)} - 20 \times z \Big|_0^{2,5} = -59,1971 + 25,0004 = -34,1967, \text{ Дж.}$$

Тогда общая работа $A = A_P + A_R = 15,8033, \text{ Дж.}$

Найдём изменение кинетической энергии движения:

$$\Delta_E = E_{II} - E_I = \frac{m \times v_{II}^2}{2} - \frac{m \times v_I^2}{2} = v_B^2 - v_A^2 = 15,8028, \text{ Дж.}$$

Погрешность расчётов составила $\delta = |\Delta_E - A| = 5 \times 10^{-4}, \text{ Дж.}$

Рассмотрим участок «ВС». Применим теорему об **изменении количества движения**.

Найдём импульс каждой из сил:

$$S_F = \int_0^2 F(t) \times dt = \int_0^2 16 \times \sin(4 \times t) \times dt = -4 \times \cos(4 \times t) \Big|_0^2 = 4,5820,$$

$$S_P = P \times \cos(60^\circ) \times \Delta t = m \times g \times \cos(60^\circ) \times \Delta t = 20,$$

$$S_{TP} = -F_{TP} \times \Delta t = -\mu \times m \times g \times \sin(60^\circ) \times \Delta t = -6,9282.$$

Найдём общий импульс:

$$S = S_F + S_P + S_{TP} = 17,6538.$$

Найдём изменение количества движения:

$$\Delta_Q = Q_{II} - Q_I = m \times v_{II} - m \times v_I = m \times (v_C - v_B) = 17,6540.$$

Погрешность расчётов составила $\delta = |\Delta_Q - S| = 2 \times 10^{-4}.$

Таким образом, основной расчёт сделан верно.

4. ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

В предыдущих двух разделах мы рассматривали динамику одной частицы, даже в том случае, когда эти частицы были объединены в систему. При этом мы пренебрегали многими аспектами: формой тел, детальной кинематикой тел, внутренними процессами, которые происходили внутри тела или системы тел.

По аналогии с динамикой точки и опираясь на знание о кинематике движения тела можно записать дифференциальные уравнения движения тела:

а) поступательное движение тела:

$$\bar{F} = m \times \bar{a}_C, \quad (4)$$

б) вращательное движение тела вокруг неподвижной оси «О»:

$$M_O = I_O \times \varepsilon = I_O \times \frac{d\omega}{dt} = I_O \times \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (5)$$

в) плоское движение тела

$$\bar{F} = m \times \bar{a}_C, \quad (6)$$

$$M_C = I_C \times \varepsilon = I_C \times \frac{d\omega}{dt} = I_C \times \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

где «О» – неподвижная ось вращения тела; «С» – центр масс тела; \bar{F} – главный вектор внешних сил, которые действуют на тело; M – главный момент всех сил, которые действуют на тело, относительно оси вращения; I_C – момент инерции тела относительно оси вращения.

Рассмотрим отдельно вопрос геометрических характеристик плоских тел (пластин), к которым относятся центр масс и момент инерции. Дадим соответствующие определения и способы их расчёта.

Статические моменты площади пластины относительно осей координат определяются по формулам

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA, \quad (7)$$

где x, y – координаты точек тела относительно выбранных осей координат.

Получим конкретные расчётные формулы статических моментов площади для основных плоских фигур

а) Прямоугольник:

$$S_x = \int_A y dA = \int_A y dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y dy = \frac{a \times b^2}{2},$$

$$S_y = \int_A x dA = \int_A x dx dy = \int_0^a x dx \int_0^b dy = \frac{a^2 \times b}{2}.$$

б) Прямоугольный треугольник:

$$S_x = \int_A y dA = \int_A y dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{h \times (a-x)}{a}} y dy = \int_0^a dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{h \times (a-x)}{a}} =$$

$$= \frac{h^2}{2 \times a^2} \int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{h^2}{2 \times a^2} \times \left[\frac{(a-x)^3}{-3} \right]_0^a = \frac{h^2 \times a}{6}$$

$$S_y = \int_A x dA = \int_A x dx dy = \int_0^h dy \int_0^{\frac{a \times (h-y)}{h}} x dx = \int_0^h dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{a \times (h-y)}{h}} =$$

$$= \frac{a^2}{2 \times h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy = \frac{a^2}{2 \times h^2} \times \left[\frac{(h-y)^3}{-3} \right]_0^h = \frac{a^2 \times h}{6}$$

в) сектор круга:

$$S_x = \int_A y dA = \int_A r \sin(\varphi) r dr d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\varphi) d\varphi = 0,$$

$$S_y = \int_A x dA = \int_A r \cos(\varphi) r dr d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\varphi) d\varphi = \int_0^R r^2 dr [\sin(\varphi)]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \frac{2 \times R^3 \times \sin(\alpha)}{3}$$

Получим формулы расчёта статических моментов относительно осей параллельных данным:

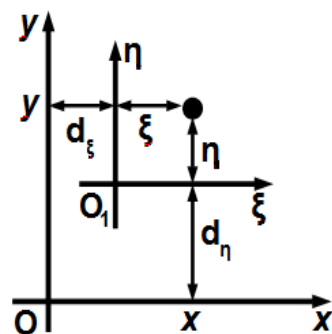
$$S_{\xi} = \int_A \eta dA = \int_A (y - d_{\eta}) dA = \int_A y dA - d_{\eta} \times \int_A dA = S_x - d_{\eta} \times A,$$

$$S_{\eta} = \int_A \xi dA = \int_A (x - d_{\xi}) dA = \int_A x dA - d_{\xi} \times \int_A dA = S_y - d_{\xi} \times A.$$

Таким образом, получаем первую группу формул Штайнера:

$$S_{\xi} = S_x - d_{\eta} \times A, \quad S_{\eta} = S_y - d_{\xi} \times A, \quad (8)$$

где d_{η}, d_{ξ} – координаты точки « O_I » относительно точки « O »: $O_I(d_{\xi}, d_{\eta})$.



– рисунок 9

ПРИМЕР 8. Рассчитать статический момент относительно центральных осей прямоугольника двумя способами: непосредственно по формулам (7) и по формулам (8).

РЕШЕНИЕ. По формулам (7):

$$S_{\xi} = \int_A \eta dA = \int_A \eta d\xi d\eta = \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-b/2}^{b/2} \eta d\eta = 0,$$

$$S_{\eta} = \int_A \xi dA = \int_A \xi d\xi d\eta = \int_{-a/2}^{a/2} \xi d\xi \int_{-b/2}^{b/2} d\eta = 0.$$

По формулам (8): $S_{\xi} = S_x - d_{\eta} \times A = \frac{a \times b^2}{2} - \frac{b}{2} \times a \times b = 0;$

$$S_{\eta} = S_y - d_{\xi} \times A = \frac{a^2 \times b}{2} - \frac{a}{2} \times a \times b = 0.$$

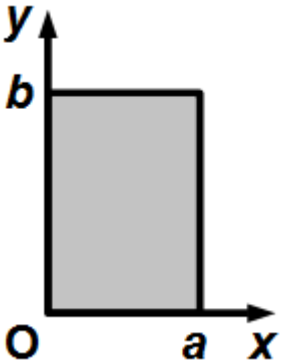
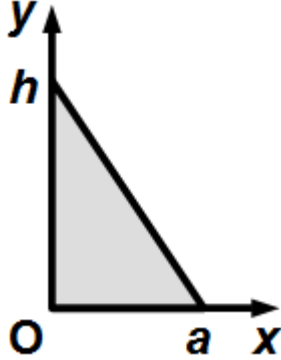
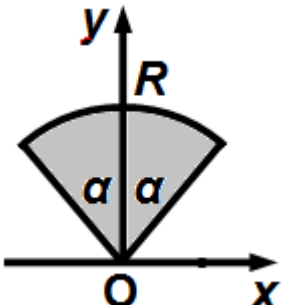
Из всего многообразия параллельных осей можно выделить одну, относительно которой статический момент площади будет равен нулю. Пересечение этих осей определит точку – центр масс пластины. Таким образом, из формул (8) получим

$$S_x = y_C \times A, \quad S_y = x_C \times A, \quad (9)$$

где x_C, y_C – координаты точки « C » относительно старой системы координат.

Сгруппируем расчётные формулы для статических моментов и центра масс основных типов фигур в таблице:

Таблица 1
Геометрические характеристики основных фигур

 $S_x = \frac{a \times b^2}{2},$ $S_y = \frac{a^2 \times b}{2}.$ $x_C = a/2, y_C = b/2$	 $S_x = \frac{h^2 \times a}{6},$ $S_y = \frac{a^2 \times h}{6},$ $x_C = a/3, y_C = h/3$	 $S_x = 0,$ $S_y = \frac{2 \times R^3 \times \sin(\alpha)}{3},$ $x_C = 0, y_C = \frac{2 \times R \times \sin(\alpha)}{3 \times \alpha}$
--	--	--

В случае сложной составной пластины координаты её центра масс определяются по формулам

$$x_C = \frac{x_1 \times A_1 + \dots + x_n \times A_n}{A_1 + \dots + A_n}, \quad y_C = \frac{y_1 \times A_1 + \dots + y_n \times A_n}{A_1 + \dots + A_n}, \quad (10)$$

где x_k, y_k – координаты центра масс частей пластины; A_k – площади частей тела.

ПРИМЕР 9. Найти координаты центра масс пластины, которая показана на чертеже (рис. 11).

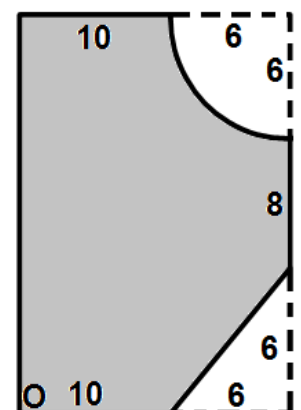
Найдём площадь и координаты центра масс всей пластины:

$$A_B = 20 \times 16 = 320 \text{ см}^2; \quad x_B = 8 \text{ см}; \quad y_B = 10 \text{ см}.$$

Найдём площадь и координаты центра масс четверти (сектора) круга:

$$A_C = \frac{\pi \times 5^2}{4} = 19,6349 \text{ см}^2;$$

$$x_C = 16 - \frac{2 \times 6 \times 4 \times \sin(45^\circ)}{3 \times \pi} \times \cos(45^\circ) = 13,454 \text{ см};$$



– рисунок 11

$$y_C = 20 - \frac{2 \times 6 \times 4 \times \sin(45^\circ)}{3 \times \pi} \times \cos(45^\circ) = 14,454 \text{ см.}$$

Найдём площадь и координаты центра масс треугольника:

$$A_T = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \text{ см}^2; \quad x_T = 16 - \frac{6}{3} = 14 \text{ см}; \quad y_T = \frac{6}{3} = 2 \text{ см.}$$

Найдём координаты центра масс пластины

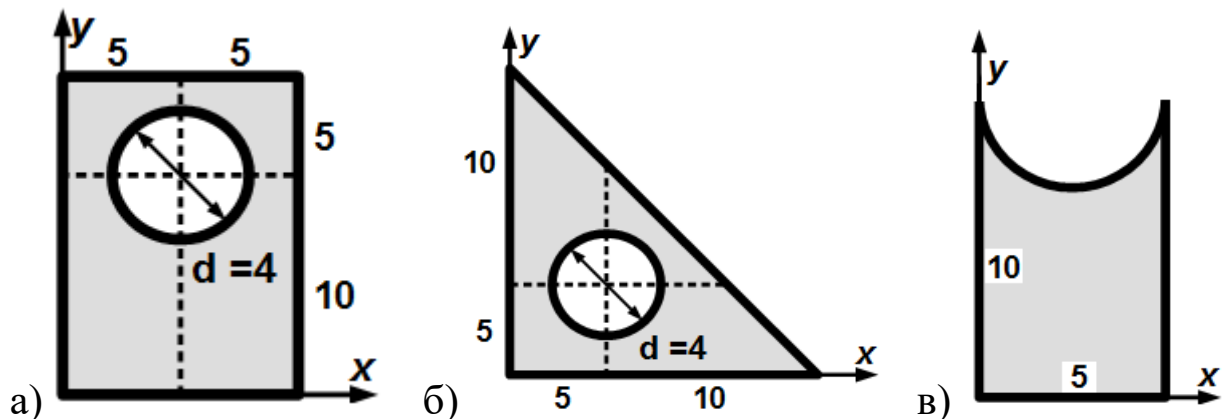
$$x_C = \frac{x_B \times A_B - x_C \times A_C - x_T \times A_T}{A_B - A_C - A_T} = 7,238, \text{ см,}$$

$$y_C = \frac{y_B \times A_B - y_C \times A_C - y_T \times A_T}{A_B - A_C - A_T} = 10,2, \text{ см.}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

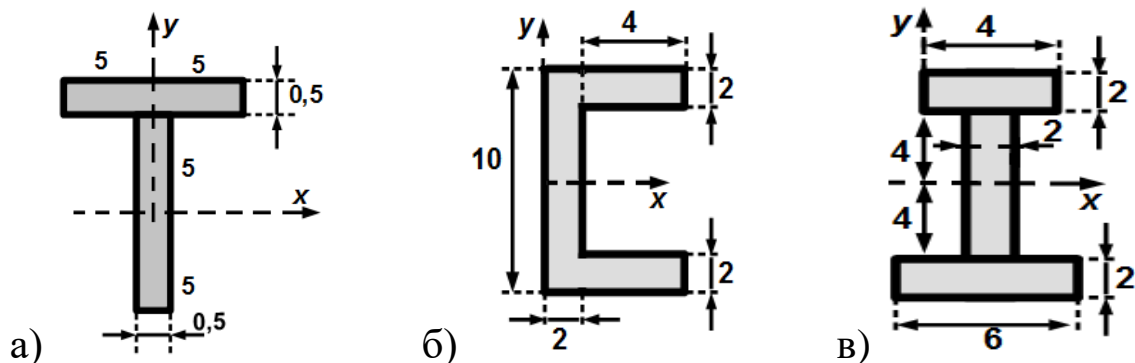
БЛОК Д3. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА МАСС

Задача 1. Найти центры масс пластин.



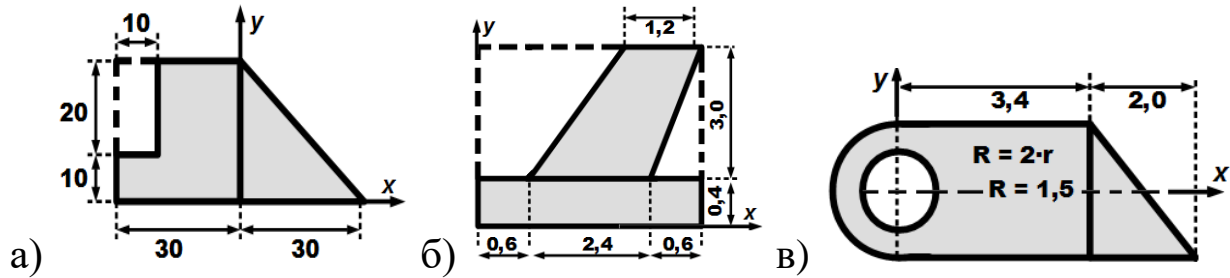
Ответ: а) $x_C = 5$, $y_C = 7,391$; б) $x_C = 5$, $y_C = 5$; в) $x_C = 2,5$, $y_C = 8,94$

Задача 2. Найти статические моменты пластин.



Ответ: а) $S_y = 0$, $S_x = 26,25$; б) $S_y = 0$, $S_x = 20$; в) $S_y = 72$, $S_x = -20$

Задача 3. Найти статические моменты и центры масс пластин.



Ответ: а) $x_C = -3,45$, $y_C = 12,17$; б) $x_C = 4,65$, $y_C = 0,50$;

в) $x_C = 5,2$, $y_C = 2,94$

а) $S_y = -4000$, $S_x = 14000$; б) $S_y = 27,61$, $S_x = 2,99$;

в) $S_y = 13$, $S_x = 36$

Осевые моменты площади пластины относительно осей координат определяются по формулам

$$\mathfrak{I}_x = \int_A y^2 dA, \quad \mathfrak{I}_y = \int_A x^2 dA. \quad (11)$$

Полярный момент инерции (относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластины) определяется по формуле

$$\mathfrak{I}_\rho = \int_A \rho^2 dA = \mathfrak{I}_x + \mathfrak{I}_y \quad (12)$$

Получим формулы расчёта моментов инерции для основных плоских фигур из таблицы 1:

а) Прямоугольник:

$$\mathfrak{I}_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{a \times b^3}{3},$$

$$\mathfrak{I}_y = \int_A x^2 dA = \int_A x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{a^3 \times b}{3},$$

$$\mathfrak{I}_\rho = \int_A \rho^2 dA = \mathfrak{I}_x + \mathfrak{I}_y = \frac{a \times b \times (b^2 + a^2)}{3}.$$

б) Прямоугольный треугольник:

$$\mathfrak{I}_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{h \times (a-x)}{a}} y^2 dy = \int_0^a dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{h \times (a-x)}{a}} =$$

$$= \frac{h^3}{3 \times a^3} \int_0^a (a-x)^3 dx = \frac{h^3}{2 \times a^3} \times \left[\frac{(a-x)^4}{-4} \right]_0^a = \frac{h^3 \times a}{8}$$

$$\mathfrak{I}_y = \int_A x^2 dA = \int_A x^2 dx dy = \int_0^h dy \int_0^{\frac{a \times (h-y)}{h}} x^2 dx = \int_0^h dy \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{a \times (h-y)}{h}} =$$

$$= \frac{a^3}{3 \times h^3} \int_0^h (h-y)^3 dy = \frac{a^3}{2 \times h^3} \times \left[\frac{(h-y)^4}{-4} \right]_0^h = \frac{a^3 \times h}{8}$$

$$\mathfrak{I}_\rho = \int_A \rho^2 dA = \mathfrak{I}_x + \mathfrak{I}_y = \frac{a \times h \times (h^2 + a^2)}{8}.$$

в) сектор круга:

$$\mathfrak{I}_x = \int_A y^2 dA = \int_A r^2 \sin^2(\varphi) r dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4} \times \left[\alpha - \frac{\sin(2 \times \alpha)}{2} \right]$$

$$\mathfrak{I}_y = \int_A x^2 dA = \int_A r^2 \cos^2(\varphi) r dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4} \times \left[\alpha + \frac{\sin(2 \times \alpha)}{2} \right]$$

$$\mathfrak{I}_\rho = \int_A \rho^2 dA = \mathfrak{I}_x + \mathfrak{I}_y = \frac{\alpha \times R^4}{2}.$$

Получим формулы расчёта моментов инерции относительно осей параллельных данным:

$$\mathfrak{I}_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y - d_\eta)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2 \times d_\eta \times \int_A y dA + d_\eta^2 \times \int_A dA =$$

$$= \mathfrak{I}_x - 2 \times d_\eta \times S_x + d_\eta^2 \times A,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_\eta &= \int_A \xi^2 dA = \int_A (x - d_\xi)^2 dA = \int_A x^2 dA - 2 \times d_\xi \times \int_A x dA + d_\xi^2 \times \int_A dA = \\ &= \mathfrak{I}_y - 2 \times d_\xi \times S_y + d_\xi^2 \times A.\end{aligned}$$

В частном случае, когда старые оси проходят через центр масс, статические моменты площадей относительно них будут равны нулю. Таким образом, получаем вторую группу формул Штайнера:

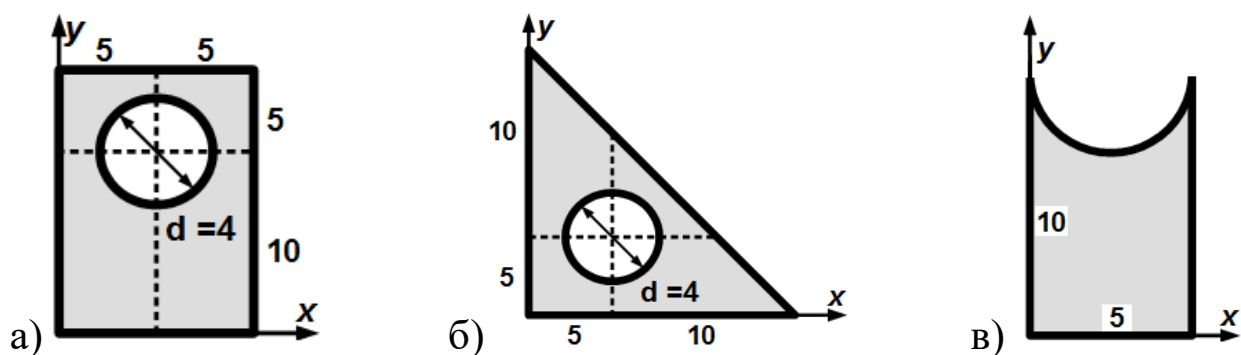
$$\mathfrak{I}_\xi = \mathfrak{I}_{x_c} + y_C^2 \times A, \quad \mathfrak{I}_\eta = \mathfrak{I}_{y_c} + x_C^2 \times A, \quad (13)$$

где x_C^2, y_C^2 – квадраты расстояний между осями.

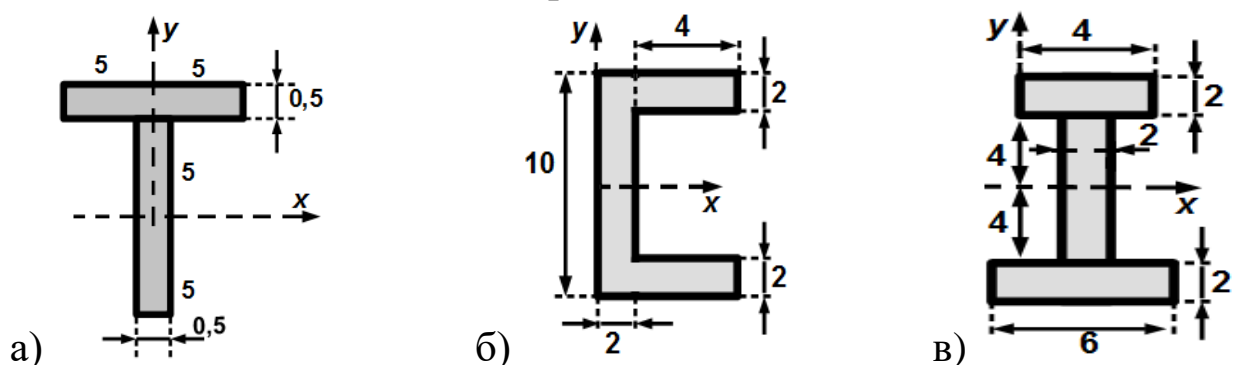
ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК Д4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛАСТИН

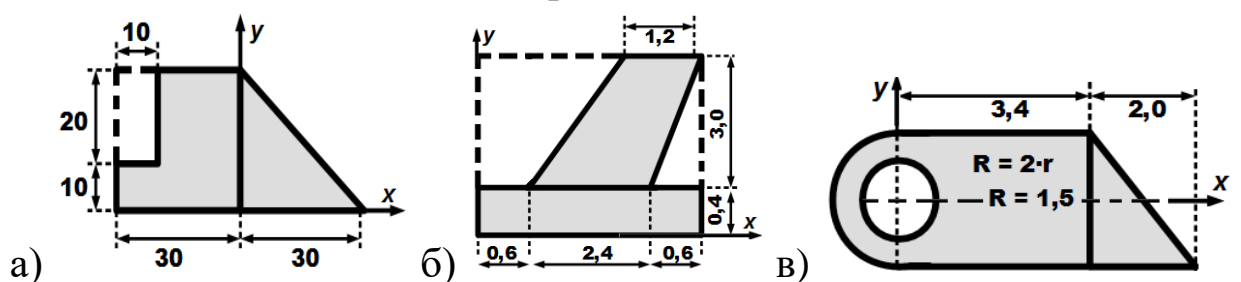
Задача 1. Найти моменты инерции пластин.



Задача 2. Найти моменты инерции пластин.



Задача 3. Найти моменты инерции пластин.

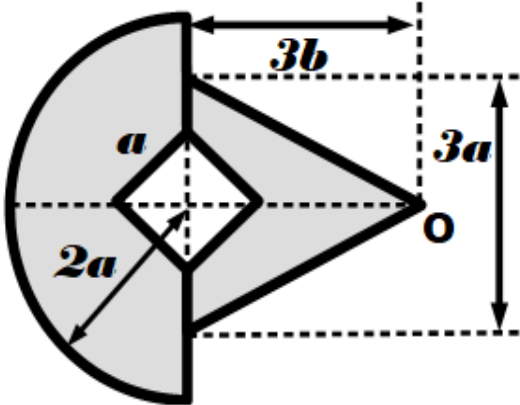
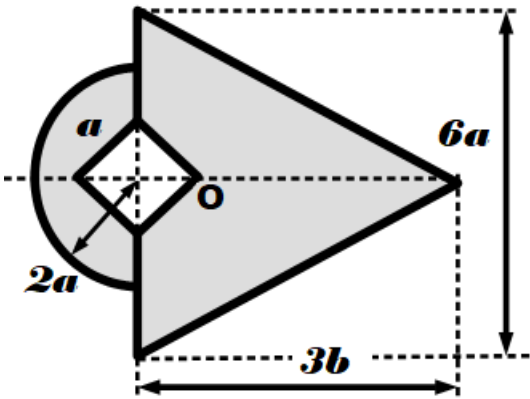
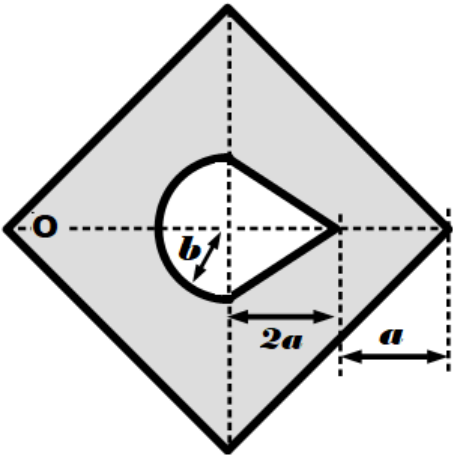
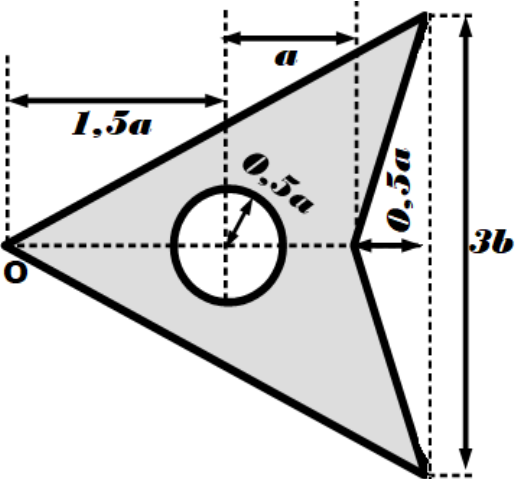
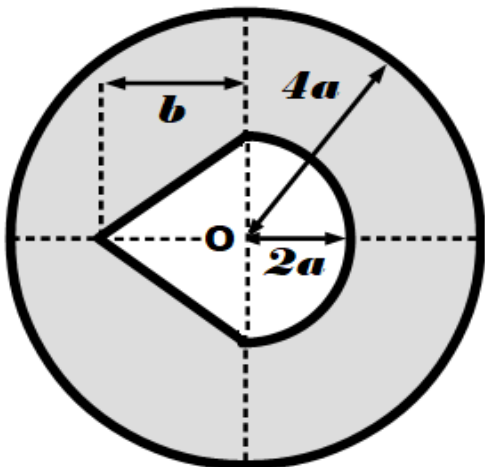
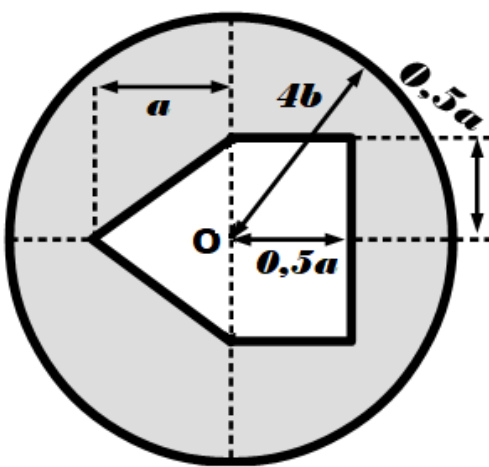


ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Д-2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИН

Таблица 1.

Группа данных, которая соответствует 1-й цифре
номера зачётной книжки

<p>0.</p> 	<p>1.</p> 
<p>2.</p> 	<p>3.</p> 
<p>4.</p> 	<p>5.</p> 

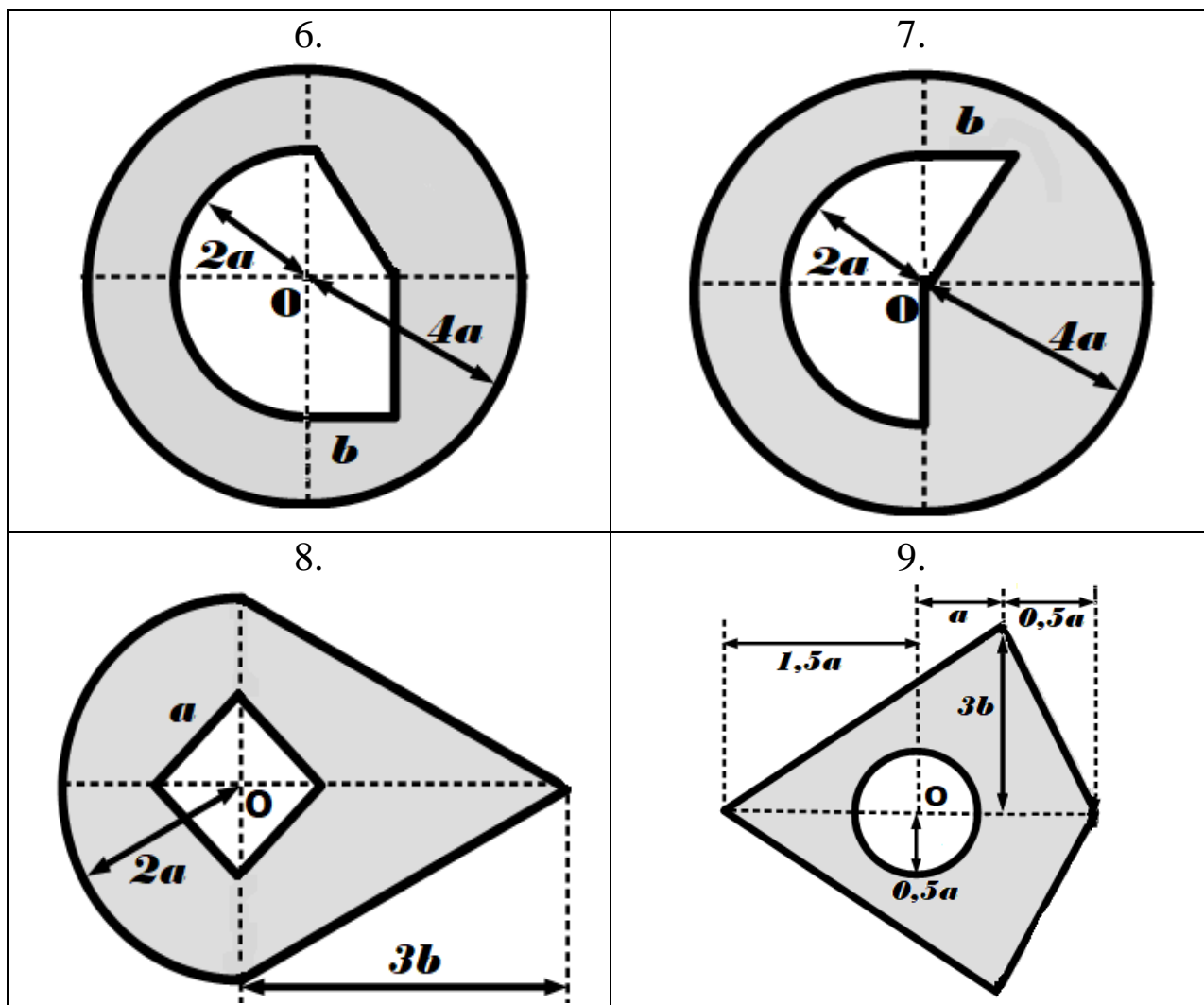


Таблица 2
Группа данных, которая соответствует
2-й цифре номера зачётной книжки

№	a	b	№	a	B
0	5,0	4,5	5	4,5	3,5
1	4,9	4,3	6	4,4	3,3
2	4,8	4,1	7	4,3	3,1
3	4,7	3,9	8	4,2	2,9
4	4,6	3,7	9	4,1	2,7

Определить геометрические характеристики пластин, указанных в таблице 1, данные для которых взять в таблице 2.

В случае если пластина является однородной и массивной, то в формулах моментов инерции площадь можно заменить на массу. В частности в рамках динамики часто используется полярный момент инерции, формулы которого примут вид:

а) стержень: $\mathfrak{I}_C = \int_A \rho^2 dA = \mathfrak{I}_x + \mathfrak{I}_y = \frac{m \times L^2}{3},$

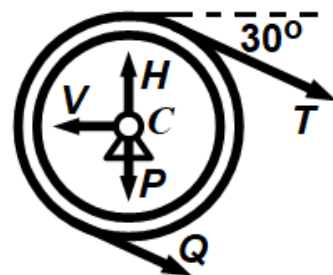
б) круглый диск $\mathfrak{I}_D = \int_A \rho^2 dA = \mathfrak{I}_x + \mathfrak{I}_y = \frac{m \times R^2}{2},$

в) кольцо. $\mathfrak{I}_K = \frac{\alpha \times (R^4 - r^4)}{2} = \frac{\alpha \times (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}{2} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}.$

В случае если пластина имеет нестандартную форму, которую нельзя свести к сумме простейших фигур, то для неё экспериментально определяется так называемый **радиус инерции** – расстояние до воображаемой точки, в которой сконцентрирована вся масса тела. Формула расчёта полярного момента инерции в этом случае имеет вид

$$\mathfrak{I}_\rho = m \times \rho^2. \quad (14)$$

ПРИМЕР 10. Натяжения ветвей ремня, который приводит во вращение шкив, равны $T=40$ Н и $Q=20$ Н. Параметры шкива: вес $P=80$ Н, радиус $r=0,3$ м, радиус инерции – $\rho=0,25$ м. Шкив вращается по направлению часовой стрелки.



– рисунок 12

Определить реакции шарнира и угловую скорость через 2 минуты после начала движения.

В данном примере тело совершает чистое вращательное движение относительно неподвижной оси «С».

Момент всех сил, что действуют на тело, равен

$$M_C = T \times r - Q \times r = 6, \text{ Н.}$$

Найдём момент инерции относительно центра масс для тела сложной формы с известным **радиусом инерции** $\rho=0,5$ м:

$$\mathfrak{I}_C = m \times \rho^2 = 0,5, \text{ кг} \times \text{м}^2.$$

Тогда дифференциальное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_C \times \frac{d\omega}{dt} = M_C \Rightarrow 0,5 \times \frac{d\omega}{dt} = 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\omega} d\omega = 12 \times \int_0^{120} dt \Rightarrow \omega|_0^{\omega} = 12 \times t|_0^{120} \Rightarrow \omega = 1440, 1/\text{сек.} \end{aligned}$$

Для поиска реакций шарнира необходимо предположить, что блок может двигаться с некоторым ускорением. Тогда дифференциальные уравнения движения тела имеют вид

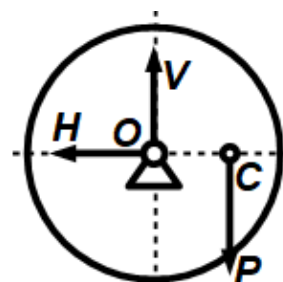
$$\begin{aligned} T \times \cos 30^\circ + Q \times \cos 30^\circ - V = m \times a_x^C, \\ -T \times \sin 30^\circ - Q \times \sin 30^\circ + H - P = m \times a_y^C. \end{aligned}$$

Так как точка «С» неподвижна, то ускорение $a_C = 0$, и как следствие реакции шарнира:

$$V = T \times \cos 30^\circ + Q \times \cos 30^\circ = 51,962, \text{ Н.}$$

$$H = T \times \sin 30^\circ + Q \times \sin 30^\circ + P = 110, \text{ Н.}$$

ПРИМЕР 11. Блок массой $m = 50$ кг со смещённым на $d = 0,15$ м центром масс начинает вращаться из состояния покоя вокруг шарнира «О». Радиус инерции блока $\rho = 0,18$ м. Определить реакции шарнира и угловое ускорение блока момент начала движения.



– рисунок 13

В данном примере можно рассмотреть два взгляда на движение тела.

Тело совершает **чистое вращательное движение** относительно неподвижной оси «О».

Момент всех сил, что действуют на тело, равен $M_O = P \times d = 75, \text{ Н.}$

Найдём момент инерции относительно оси вращения для тела сложной формы с известным радиусом инерции $\rho = 0,18$ м по **теореме Штайнера**: $\mathfrak{I}_O = \mathfrak{I}_C + m \times d^2 = m \times \rho^2 + m \times d^2 = 2,745, \text{ кг} \times \text{м}^2.$

Тогда дифференциальное уравнение вращения тела имеет вид $\mathfrak{I}_O \times \varepsilon = M_O \Rightarrow 2,745 \times \varepsilon = 75 \Rightarrow \varepsilon = 27,322 \text{ 1/с}^2.$

Для поиска реакций шарнира необходимо предположить, что блок может поступательно перемещаться с некоторым ускорением. Так как центр масс «С» движется по окружности вокруг оси «О», то его ускорение раскладывается на две компоненты:

$$a_n^C = d \times \omega^2 = 0, \quad a_k^C = d \times \varepsilon = 0,15 \times \varepsilon.$$

Тогда дифференциальные уравнения поступательного движения тела вместе с центром масс имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{F} = m \times \vec{a}_C \Rightarrow \begin{cases} F_n = m \times a_n^C \\ F_k = m \times a_k^C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -H = 0 \\ -V + P = 7,5 \times \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда реакции: $H = 0$, КН; $V = 500 - 7,5 \times \varepsilon = 0,295$, КН.

Тело совершает **плоское движение** вокруг точки «О».

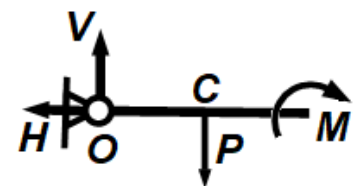
Момент всех сил, что действуют на тело, относительно центра масс равен $M_C = V \times d = 0,15 \times V$, Н.

Найдём момент инерции относительно центра масс для тела сложной формы с известным **радиусом инерции** $\rho = 0,18$ м:

$$\mathfrak{I}_C = m \times \rho^2 = 1,62, \text{ кг} \times \text{м}^2.$$

Тогда дифференциальное уравнение вращения вокруг центра масс имеет вид: $\mathfrak{I}_C \times \varepsilon = M_C \Rightarrow 1,62 \times \varepsilon = 0,15 \times V$. Отсюда угловое ускорение $\varepsilon = 27,322 \text{ 1/с}^2$. Дальнейшие вычисления такие же, как и выше.

ПРИМЕР 12. Стержень длиной $L = 3$ м и массой $m = 20$ кг вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega = 5 \text{ 1/с}$ под действием пары сил с моментом $M = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить угловое ускорение стержня в заданном положении.



– рисунок 14

Применим методику анализа **плоского движения** тела.

Для поиска реакций шарнира необходимо предположить, что блок может поступательно перемещаться с некоторым ускорением. Так как центр масс «С» движется по окружности вокруг оси «О», то его ускорение раскладывается на две компоненты:

$$a_n^C = \omega^2 \times 0,5 \times L = 37,5, \quad a_k^C = \varepsilon \times 0,5 \times L = 1,5 \times \varepsilon.$$

Тогда дифференциальные уравнения поступательного движения тела вместе с центром масс имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{F} = m \times \vec{a}_C \Rightarrow \begin{aligned} F_n &= m \times a_n^C \Rightarrow -H = 750 \Rightarrow H = -750 \\ F_k &= m \times a_k^C \Rightarrow -V + P = 30 \times \varepsilon \Rightarrow V = 200 - 30 \times \varepsilon \end{aligned} \end{aligned}$$

Момент всех сил, что действуют на тело, относительно центра масс равен $M_C = V \times 0,5 \times L + M = 1,5 \times V + 60$, Н.

Найдём момент инерции относительно центра масс для стержня: $\mathfrak{I}_C = \frac{m \times L^2}{12} = 15$, кг \times м².

Тогда дифференциальное уравнение вращения вокруг центра масс имеет вид: $\mathfrak{I}_C \times \varepsilon = M_C \Rightarrow 15 \times \varepsilon = 1,5 \times V + 60$.

Отсюда угловое ускорение $\varepsilon = 6$ 1/с² и реакция $V = 20$ Н.

ПРИМЕР 13. Груз весом $P_A = 100$ Н, спускаясь по наклонной шероховатой поверхности с коэффициентом $\mu = 0,3$, приводит в движение барабан весом $P_B = 70$ Н, радиуса $r = 0,125$ м. Определить угловое ускорение вращения барабана, реакции его крепёжного шарнира и натяжение каната.



– рисунок 15

В данном случае имеется система двух взаимосвязанных тел. Разобьём её на части, для каждой из которых составим дифференциальное уравнение движения.

Тело «А» совершает поступательное движение. Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\vec{F} = m_A \times \vec{a}_A \Rightarrow \begin{aligned} F_x &= m_A \times a_x^A \Rightarrow P_A \times \cos(60^\circ) - T - F_{\text{тр}} = m_A \times a_x^A \\ F_y &= m_A \times a_y^A \Rightarrow -P_A \times \sin(60^\circ) + N = m_A \times a_y^A \end{aligned}$$

Так как движения вдоль оси «Оу» нет, то $a_y^A = 0$, и, как следствие, $N = P_A \times \sin(60^\circ) = 86,6025$, Н. Тогда величина силы трения будет равна $F_{\text{тр}} = \mu \times N = \mu \times P_A \times \sin(60^\circ) = 25,981$, Н. Первое уравнение примет вид $24,019 - T = 10 \times a_x^A$.

Тело «В» совершает чистое вращательное движение.

Момент всех сил, что действуют на тело, равен
 $M_C = T \times r = 0,125 \times T$, Н.

Найдём момент инерции относительно центра масс для цилиндра с равномерно распределённой массой:

$$\mathfrak{I}_O = 0,5 \times m_B \times r^2 = 0,0547, \text{ кг} \times \text{м}^2.$$

Тогда дифференциальное уравнение имеет вид

$$\mathfrak{I}_O \times \varepsilon = M_O \Rightarrow 0,0547 \times \varepsilon = 0,125 \times T.$$

Так как тела «А» и «В» связаны верёвкой, то ускорение a_x^A является касательным ускорением для колеса: $a_x^A = \varepsilon \times r = 0,125 \times \varepsilon$. Решая совместно два уравнения, получим $\varepsilon = 14,233 \text{ 1/с}$, а натяжение каната $T = 32,524 \text{ Н}$.

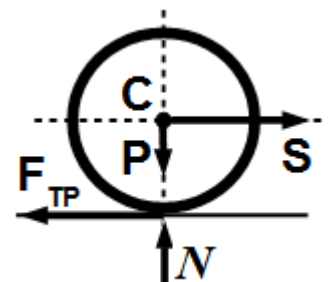
Для поиска реакций шарнира необходимо предположить, что блок может двигаться с некоторым ускорением. Тогда дифференциальные уравнения движения тела имеют вид

$$\begin{aligned} -T \times \cos 30^\circ + H &= m_B \times a_x^O, \\ -T \times \sin 30^\circ + V - P_B &= m_B \times a_y^O. \end{aligned}$$

Так как точка «О» неподвижна, то ускорение $a_O = 0$, и как следствие реакции шарнира:

$$\begin{aligned} H &= T \times \cos 30^\circ = 28,166, \text{ Н}; \\ V &= T \times \sin 30^\circ + P_B = 86,262, \text{ Н}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 14. Колесо веса $P = 100 \text{ Н}$ и радиуса $r = 0,14 \text{ м}$ катится прямолинейно без скольжения по горизонтальной плоскости под действием внешней силы $S = 400 \text{ Н}$, которая приложена к центру колеса «С». Определить реакцию опоры, силу трения скольжения, ускорение центра колеса «С».



– рисунок 16

Произвести расчёт с учётом пар сил трения качения с коэффициентом $\delta = 0,001 \text{ м}$.

Тело совершает плоское движение – качение без скольжения. Это означает, что помимо указанных в условиях сил, на тело также действует и сила трения. Так как в противном случае тело соверша-

ло бы поступательное прямолинейное движение. Кроме этого, это означает, что между его кинематическими характеристиками существует взаимосвязь: $a_C = r \times \varepsilon$.

Составим дифференциальные уравнения движения:

$$\begin{aligned} F_x &= m \times a_C & S - F_{\text{ТР}} &= m \times a_C & 400 - F_{\text{ТР}} &= 10 \times a_C \\ F_y &= 0 & \Rightarrow & N - P = 0 & \Rightarrow & N = P = 100 \\ M_C &= \mathfrak{I}_C \times \varepsilon & F_{\text{ТР}} \times r &= \frac{m \times r^2}{2} \times \frac{a_C}{r} & F_{\text{ТР}} &= 5 \times a_C \end{aligned}$$

Тогда ускорение центра колеса $a_C = 26,667 \text{ м/с}^2$, а сила трения $F_{\text{ТР}} = 133,333 \text{ Н}$.

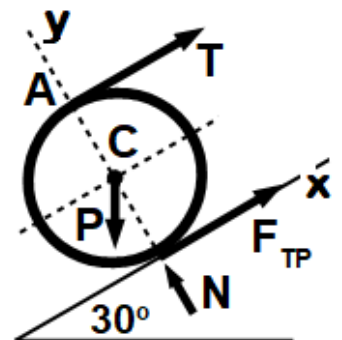
Добавим к указанным силам пару сил трения качения, момент которой определяется по формуле $M_\delta = \delta \times N$, и направлена в противоположную сторону от направления качения. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} F_x &= m \times a_C & S - F_{\text{ТР}} &= m \times a_C & 400 - F_{\text{ТР}} &= 10 \times a_C \\ F_y &= 0 & \Rightarrow & N - P = 0 & \Rightarrow & N = P = 100 \\ M_C &= \mathfrak{I}_C \times \varepsilon & F_{\text{ТР}} \times r - \delta \times N &= \frac{m \times r^2}{2} \times \frac{a_C}{r} & F_{\text{ТР}} \times 0,14 - 0,1 &= 0,7 \times a_C \end{aligned}$$

Тогда ускорение центра колеса $a_C = 26,619 \text{ м/с}^2$, а сила трения $F_{\text{ТР}} = 133,809 \text{ Н}$. Как видим, отличие от предыдущего расчёта незначительное.

ПРИМЕР 15. Колесо массой 10 кг и радиуса $r = 0,14 \text{ м}$ катится вверх по наклонной под углом $\alpha = 30^\circ$ поверхности под действием силы T . Определить необходимую величину внешней силы T , которой будет достаточно для перемещения колеса. Вычислить ускорение центра колеса.

Тело совершает плоское движение. Система дифференциальных уравнений для его движения имеет вид:



– рисунок 17

$$\begin{aligned}
F_x &= m \times a_C & T - P \times \cos 60^\circ + F_{\text{ТР}} &= m \times a_C \\
F_y &= 0 & \Rightarrow & N - P \times \sin 60^\circ = 0 \\
M_C &= \mathfrak{I}_C \times \varepsilon & T \times r - F_{\text{ТР}} \times r &= \mathfrak{I}_C \times \frac{a_C}{r}
\end{aligned}$$

Из второго уравнения получим, что $N = P \times \sin 60^\circ = 86,603$, Н, откуда следует, что $F_{\text{ТР}} = \mu \times N = 86,603 \times \mu$, Н.

Значит первое уравнение примет вид

$$T - 50 + 86,603 \times \mu = 10 \times a_C.$$

Пусть масса колеса распределена равномерно по его ободу, тогда момент инерции $\mathfrak{I}_C = m \times r^2$ и, значит, третье уравнение примет вид $T - 86,603 \times \mu = 10 \times a_C$. Видим, что единственное возможное значение коэффициента трения, при котором есть решение системы уравнений, равно $\mu = 0,2887$.

Пусть масса колеса распределена равномерно по всему колесу, тогда момент инерции $\mathfrak{I}_C = \frac{m \times r^2}{2}$ и, значит, третье уравнение примет вид: $T - 86,603 \times \mu = 5 \times a_C$. Решение системы уравнений в виде выражений, которые зависят от коэффициента μ , будут иметь вид $T = 259,809 \times \mu - 50$ и $a_C = 34,641 \times \mu - 10$.

Если поверхность гладкая, то $\mu = 0$ и сила T и ускорение a_C будут направлены в противоположную сторону, что невозможно по условию.

Пусть $\mu = 0,2887$, тогда $T = 25,007$ Н и $a_C = 0$ м/с².

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

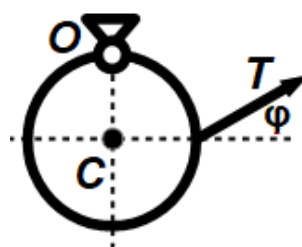
БЛОК ДЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Задача 1. Колесо радиусом 0,6 м и равномерно распределённой массой 100 кг начинает вращаться из состояния покоя под действие постоянной силы $T = 100$ Н. Определить реакции шарнира и угловую скорость через 3 с.



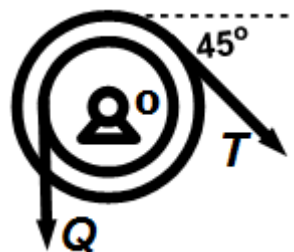
Ответ: $\omega = 10$ 1/с; $H = 100$ Н; $V = 1000$ Н.

Задача 2. Колесо радиусом 0,3 м и равномерно распределённой массой 30 кг вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ 1/с. Определить реакции шарнира «О» и угловое ускорение колеса, если $\cos(\varphi) = 0,8$ и $T = 50$ Н.



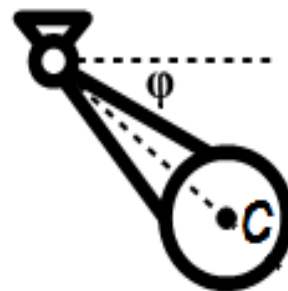
Ответ: $\varepsilon = 5,185$ 1/с²; $H_O = 6,665$ Н; $V_O = 1,170$ Н.

Задача 3. Составной блок с равномерно распределённым весом $P = 322$ Н и радиусами $r = 12$ см и $R = 24$ см служит для подъёма груза $Q = 644$ Н с помощью активной силы $T = 400$ Н. Определить ускорение груза и натяжение троса Q , реакции опорного шарнира «О».



Ответ: $\varepsilon = 16,916$ 1/с²; $H = 282,8$ Н; $V = 1248,8$ Н.

Задача 4. Маховик массой 7,5 кг с центром масс «С» на расстоянии $r = 0,25$ м от оси вращения «О» и радиусом инерции $\rho = 0,295$ м. Определить угловые кинематические характеристики и величину реакции Q шарнира «О» в тот момент, когда угол поворота маховика $\varphi = 60^\circ$.

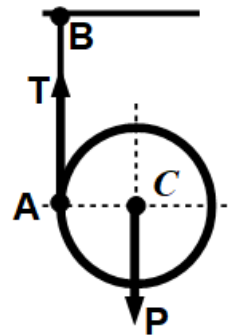


Ответ: $Q = 155,6$ Н; $\varepsilon = 14,1$ 1/с²; $\omega = 6,986$ 1/с.

Задача 5. Колесо радиуса 6 см и равномерно распределённой массой начинает катиться из состояния покоя по наклонной шероховатой поверхности с углом $\alpha = 20^\circ$ и коэффициентом трения качения $\delta = 0,001$. Определить коэффициент трения скольжения, угловое ускорение и время, за которое центр колеса пройдёт путь 10 м.

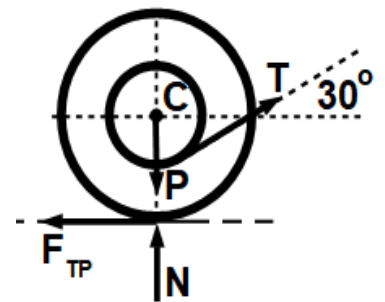
Ответ: $\mu = 0,132$, $\varepsilon = 36,267 \text{ 1/c}^2$; $t = 3,032 \text{ с}$.

Задача 6. Тяжёлый круглый цилиндр «А» массы 30 кг обмотан нитью, конец которой «В» закреплён неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость точки «С» оси цилиндра после того, как она переместилась на расстояние $h = 0,5 \text{ м}$. Найти силу натяжения нити.



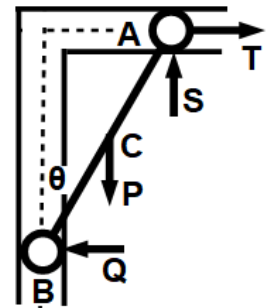
Ответ: $v = 2,582 \text{ м/с}$; $T = 100 \text{ Н}$.

Задача 7. На барабан однородного составного катка массы $m = 10 \text{ кг}$ и радиуса $R = 0,24 \text{ м}$, лежащего на горизонтальном шероховатом полу, намотана нить, к которой приложена сила $T = 100 \text{ Н}$ под углом $\alpha = 30^\circ$. Радиус барабана $r = 0,1 \text{ м}$, радиус инерции $\rho = 0,2 \text{ м}$. Найти величину пройденного пути центром катка «О» за 5 секунд с момента старта из состояния покоя.



Ответ: $x = 33,148 \text{ м}$; $v = 13,259 \text{ м/с}$.

Задача 8. Шатун «АВ» весом $P = 60 \text{ Н}$ и длиной 4 метра движется за счёт приложенной силы $T = 30 \text{ Н}$. Определить угловое ускорение шатуна и реакции в точках «А» и «В» в момент времени, когда угол $\theta = 30^\circ$



Ответ: $\varepsilon = 3,137 \text{ 1/c}^2$; $S = 41,178 \text{ Н}$, $Q = -2,599 \text{ Н}$

4. ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Для тела или системы тел по аналогии с одной частицей можно сформулировать точно такие же теоремы об изменении кинетической энергии и количества движения.

Отличительная особенность в их использовании будет заключаться в определении кинетической энергии тела. Как и для уравнения движения тела рассмотрим три случая:

а) поступательное движение тела:

$$E = \frac{m \times v_C^2}{2}, \quad (15)$$

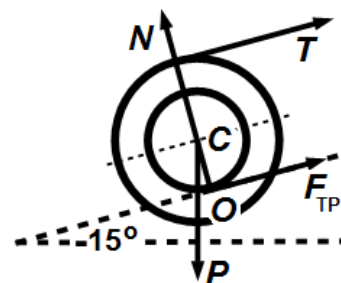
б) вращательное движение тела вокруг неподвижной оси «О»:

$$E = \frac{I_O \times \omega^2}{2}, \quad (16)$$

в) плоское движение тела с центром масс в точке «С»

$$E = \frac{m \times v_C^2}{2} + \frac{I_C \times \omega^2}{2}. \quad (17)$$

ПРИМЕР 12. Колесо массой 40 кг, размерами $R = 2 \times r = 0,2$ м и радиусом инерции $\rho = 0,15$ м катится вверх под действием силы $T = 100$ Н по наклонной поверхности величиной $\alpha = 15^\circ$. Определить угловую скорость колеса после того, как его центр прошёл 3 м.



– рисунок 18

Особенность данной задачи заключается в том, что из всех сил, приложенных к колесу, совершают работу сила тяжести P и сила тяги T . Происходит это потому, что точка приложения двух других сил (точка касания колеса) оказывается неподвижной в каждый момент времени.

Определим работу действующих на блок сил:

а) силы тяжести $P = 40 \times 10 = 400$ Н:

$$A_P = -P \times \cos 75^\circ \times s_C = -310,58285 \text{ Дж.}$$

б) внешняя сила $T = 100$ Н:

$$A_T = M_O(\bar{T}) \times \varphi = \frac{T \times (R + r) \times s_C}{r} = \frac{100 \times (0,2 + 0,1) \times 3}{0,1} = 900 \text{ Дж.}$$

Тогда работа приложенных сил равна:

$$A = A_p + A_T = 589,41715 \text{ Дж.}$$

Так как тело движется из состояния покоя, то изменение кинетической энергии совпадёт с её конечным значением. Используя **теорию плоского движения** для определения взаимосвязи между скоростью центра масс и угловой скоростью тела, получим, что:

$$\begin{aligned} E_{II} - E_I &= \frac{m \times v_C^2}{2} + \frac{I_C \times \omega^2}{2} = \frac{m \times (r \times \omega)^2}{2} + \frac{m \times \rho^2 \times \omega^2}{2} = \\ &= \frac{40 \times (0,1 \times \omega)^2}{2} + \frac{40 \times 0,15^2 \times \omega^2}{2} = 0,65 \times \omega^2. \end{aligned}$$

Из условия равенства двух величин получим, что $\omega = 30,113 \text{ 1/с.}$

ПРИМЕР 13. Блок весом 30 кг с равномерно распределённой массой радиуса $r = 0,2 \text{ м}$ вращается из состояния покоя под действием пары сил с постоянным моментом $M = 5 \text{ Н} \times \text{м}$. Определит угол поворота блока в тот момент, когда угловая скорость блока достигнет значения 2 1/с . Жёсткость пружины $k = 10 \text{ Н/м}$.

Определим работу действующих на блок сил:

а) пары сил с моментом $M = 5$:

$$A_M = M \times \varphi = 5 \times \varphi;$$

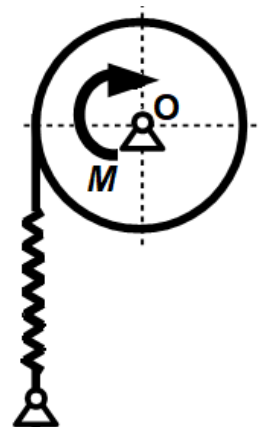
б) силы упругости пружины $F_Y = -10 \times s$:

$$A_Y = -10 \times \int_0^s s \times ds = -5 \times s^2 = -5 \times (0,2 \times \varphi)^2 = -0,2 \times \varphi^2.$$

Тогда полная работа $A = A_M + A_Y = 5 \times \varphi - 0,2 \times \varphi^2$.

Так как блок совершает **вращательное движение** из состояния покоя, то изменение кинетической энергии совпадёт с её конечным значением:

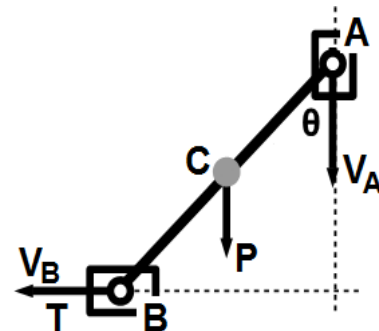
$$E_{II} - E_I = \frac{I_O \times \omega^2}{2} = \frac{m \times r^2 \times \omega^2}{4} = 1,2 \text{ Дж.}$$



– рисунок 19

Приравнивая эти величины, найдём величину угла поворота блока $\varphi = 13,9^\circ$.

ПРИМЕР 14. Шатун массой 10 кг и длиной 0,8 м движется за счёт скольжения двух ползунов в своих направляющих под действием горизонтальной силы $T = 50$ Н. Определить угловую скорость шатуна в тот момент, когда угол $\theta = 45^\circ$, если движение началось из вертикального положения.



– рисунок 20

Определим работу действующих на шатун сил:

а) Внешней силы $T = 50$ Н:

$$A_T = T \times s_B = T \times 0,8 \times \cos 45^\circ = 28,284 \text{ Дж.}$$

б) Силы тяжести $P = 10 \times 10 = 100$ Н:

$$A_P = P \times s_C = P \times 0,4 \times \cos 45^\circ = 28,284 \text{ Дж.}$$

Тогда полная работа $A = A_P + A_T = 56,5685$ Дж.

Используя теорию плоского движения, найдём взаимосвязь между скоростью центра масс и угловой скоростью тела.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB} \Rightarrow \begin{cases} v_B \times \cos 45^\circ = v_A \times \cos 45^\circ \\ v_B \times \sin 45^\circ = -v_A \times \sin 45^\circ + v_{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_B = v_A \\ v_{AB} = \sqrt{2} \times v_A \end{cases}.$$

$$v_{AB} = \omega_{AB} \times AB \Rightarrow \omega_{AB} = 1,25 \times \sqrt{2} \times v_A.$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC} \Rightarrow \begin{cases} v_C^x = v_A \times \cos 45^\circ = 0,4 \times \omega_{AB} \\ v_C^y = -v_A \times \sin 45^\circ + v_{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_C = 0,4 \times \omega_{AB}.$$

Так как тело движется из состояния покоя, то изменение кинетической энергии совпадёт с её конечным значением:

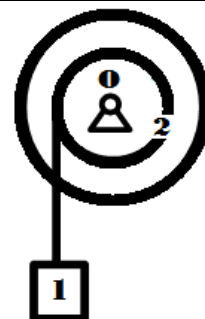
$$\begin{aligned} E_{II} - E_I &= \frac{m \times v_C^2}{2} + \frac{I_C \times \omega_{AB}^2}{2} = \\ &= \frac{m \times (0,4 \times \omega_{AB})^2}{2} + \frac{m \times L^2 \times \omega_{AB}^2}{12 \times 2} = 1,0667 \times \omega^2. \end{aligned}$$

Из равенства работы и энергии получаем, что $\omega_{AB} = 7,2823$ 1/с.

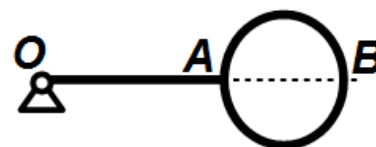
ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

БЛОК Д4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Задача 1. Дан блок массой $m = 40$ кг, радиусами $r = 0,3$ м и $R = 0,5$ м и радиусом $\rho = 0,3$ м. Определить перемещение груза массой $M = 10$ кг в тот момент времени, когда угловая скорость блока достигла значения $\omega = 15$ 1/с. Также определить силу натяжения троса. **Ответ:** $s = 5,16$ м; $T = 78,5$ Н.



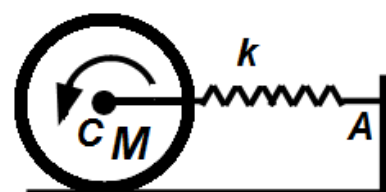
Задача 2. Маховик состоит из стержня длиной 2 метра и массой 3 кг и диска диаметром 0,8 метра и массой 10 кг. Если маховик движется из состояния покоя, то определить угловую скорость после поворота на 90° под действием пары сил с моментом 30 Н·м. **Ответ:** $\omega = 3,16$ 1/с.



Задача 3. Диск радиуса 0,5 м с равномерно распределённой массой катится под действием пары сил с моментом $M = \varphi - 4$ Н·м.

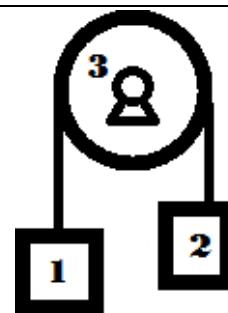
На диск действует пружина жёсткостью $k = 200$ Н/м. Определить пройденный путь до остановки.

Ответ: $s_C = 0,892$ м.

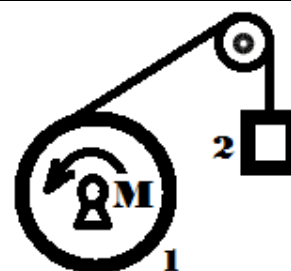


Задача 4. Известны массы грузов и блока $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг и $m_3 = 0,2$ кг. Определить скорость груза 1 после его сдвига вниз на один метр. Также определить ускорение и натяжение нитей.

Ответ: $v = 2,561$ м/с, $a = 3,279$ м/с², $T = 26,883$ Н.



Задача 5. На барабан радиуса 0,1 м и массой 2 кг действует пара сил с моментом $M = 40 + \varphi^2$ Нм. Определить скорость груза массой 40 кг после подъёма на высоту 0,3 м. **Ответ:** $v = 0,6$ м/с.



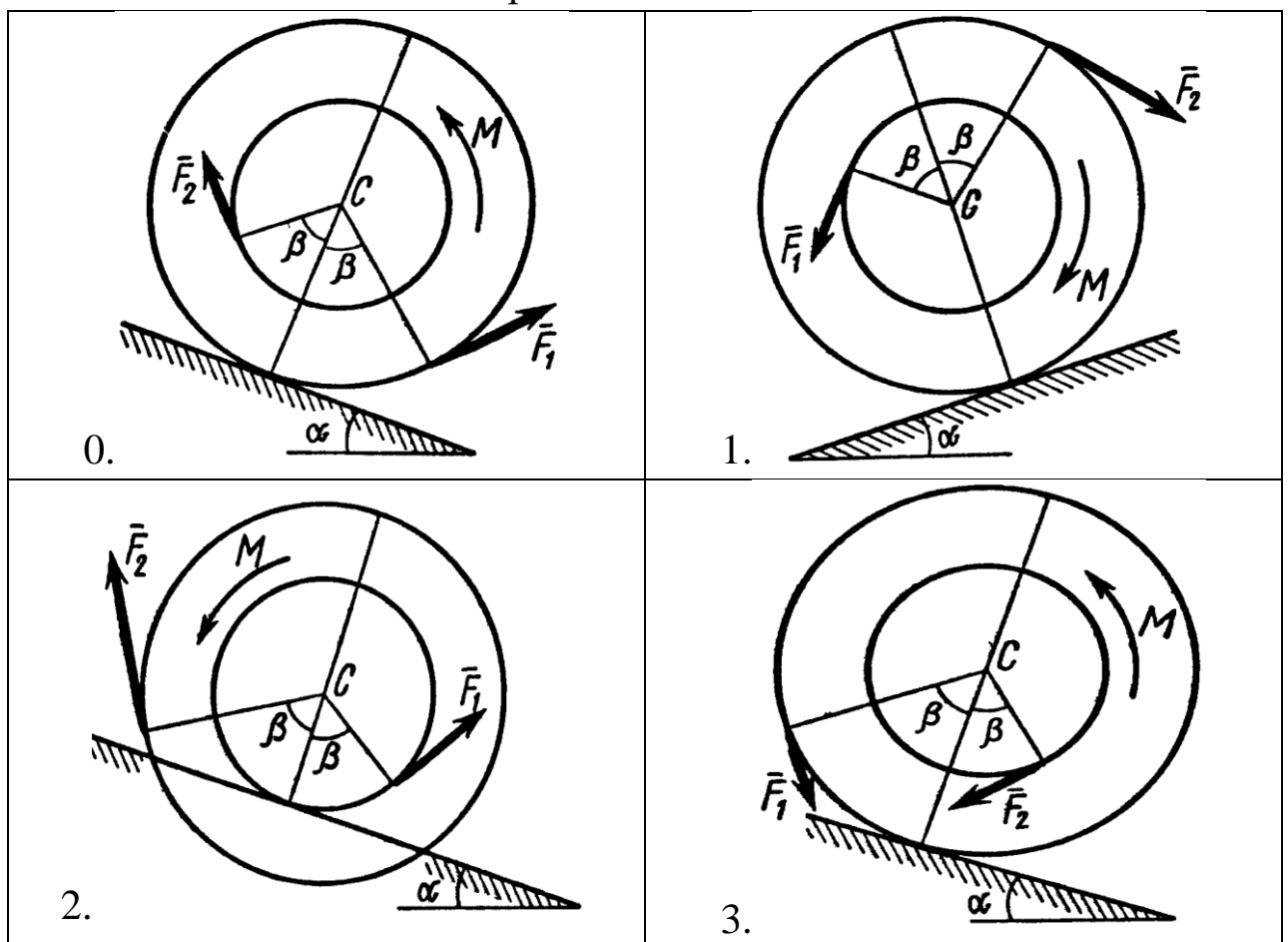
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Д-2. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Барабан радиуса R и веса P имеет выточку радиуса r . К концам на барабан нитей приложены постоянные силы F_1 и F_2 , направления которых определяется углом β . Кроме того на барабан действует пара сил с моментом M . Барабан начинает катиться из состояния покоя по наклонной шероховатой поверхности под углом α . Определить величину пройденного пути и скорость центра барабана, а так же коэффициент трения скольжения поверхности через 5 секунд после начала движения.

Таблица 1.

Группа данных, которая соответствует 1-й цифре
номера зачётной книжки



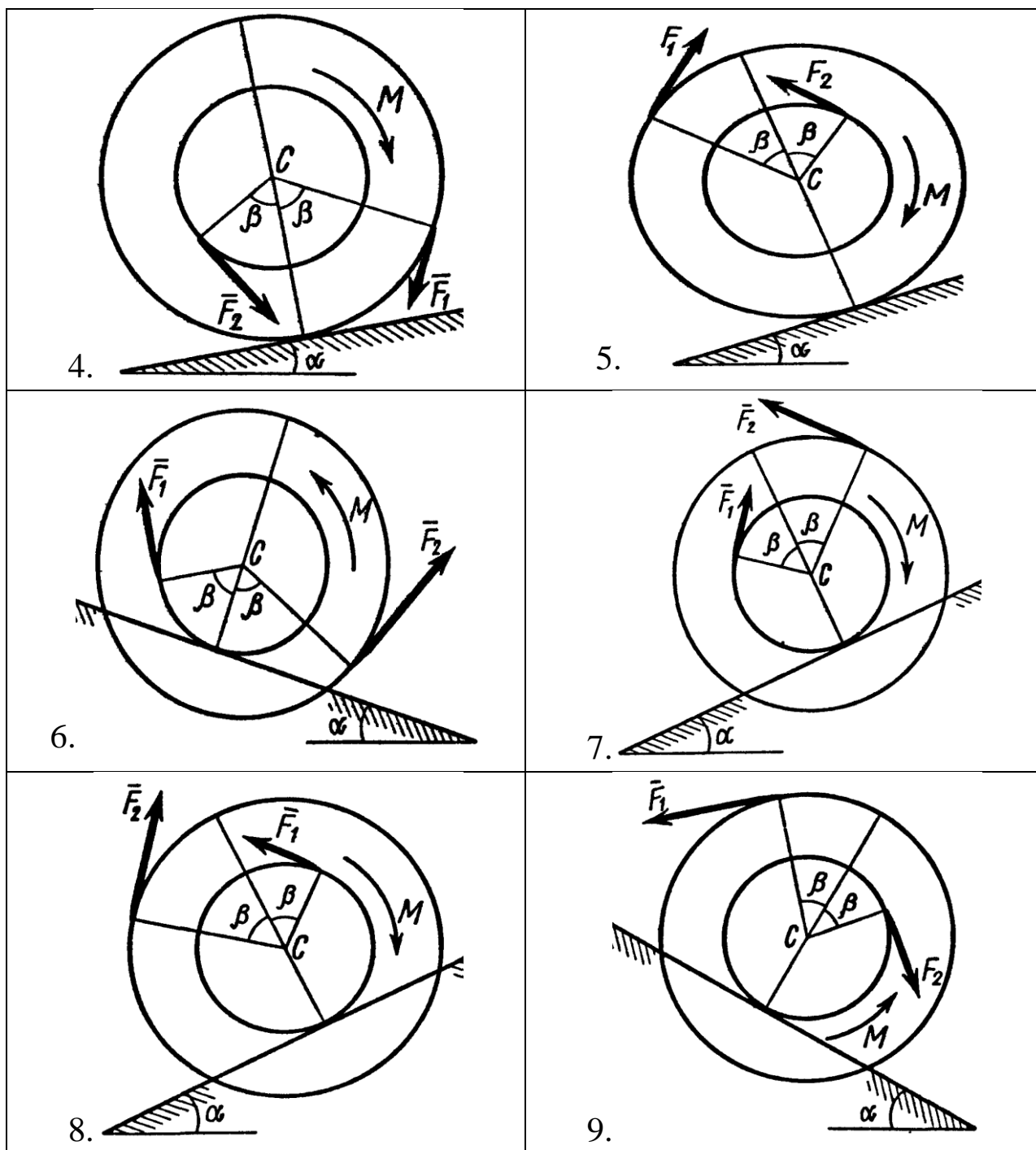


Таблица 2
Группа данных, которая соответствует
2-й цифре номера зачётной книжки

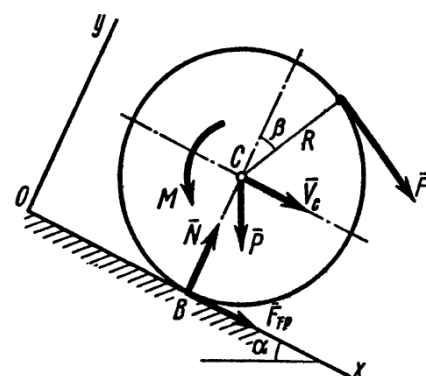
№	α	β	$P, \text{ Н}$	$F_1, \text{ Н}$	$F_2, \text{ Н}$	$M, \text{ Н} \cdot \text{ м}$	$R, \text{ м}$	$r, \text{ м}$
0	30	75	100	10	20	1,23	0,02	0,01
1	35	70	90	27	36	-2,36	0,04	0,02
2	40	65	80	40	48	1,44	0,06	0,02
3	45	60	120	84	87	-3,84	0,08	0,02

№	α	β	$P, \text{ Н}$	$F_1, \text{ Н}$	$F_2, \text{ Н}$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$R, \text{ м}$	$r, \text{ м}$
4	50	55	110	99	22	5,5	0,1	0,03
5	55	50	60	15	24	-4,32	0,12	0,04
6	60	45	70	21	42	6,86	0,14	0,02
7	65	40	80	40	53	-5,24	0,16	0,04
8	70	35	90	63	18	4,58	0,18	0,09
9	75	30	100	75	43	-6,7	0,2	0,05

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ. Барабан радиуса $R = 0,12 \text{ м}$ и весом $P = 4 \text{ Н}$ начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной поверхности с углом $\alpha = 30^\circ$. На барабан действуют сила $F = 3,2 \text{ Н}$ под углом $\beta = 30^\circ$ и пара сил с моментом $M = 0,528 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Определить пройденный пусть и скорость через 2 секунды после старта.

Барабан совершает плоское движение под действием сил $P, N, F, F_{\text{тр}}$ и момента M . Направление сил указано на рисунке. Направление силы трения указываем произвольным образом, так как заранее не известно, в каком направлении движется тело.



– рисунок ИДЗ_Д_2_1

Составим дифференциальные уравнения движения тела, предположив, что колесо будет двигаться вниз и по часовой стрелке:

$$m \times a_C^x = F \times \cos \beta + P \times \sin \alpha + F_{\text{тр}};$$

$$m \times a_C^y = N - P \times \cos \alpha - F \times \sin \beta.$$

$$I_C \times \varepsilon = M_C \Rightarrow \frac{m \times R^2}{2} \times \varepsilon = F \times R - F_{\text{тр}} \times R - M.$$

Дополнительно к этим уравнениям возьмём взаимосвязи из кинематики плоского движения:

$$a_C^x = a_C = R \times \varepsilon \text{ и } a_C^y = 0.$$

Тогда получим систему уравнений:

$$0,048 \times \varepsilon = 4,7713 + F_{\text{тр}}; \quad 0 = N - 5,0641;$$

$$2,88 \times 10^{-3} \times \varepsilon = -0,144 - 0,12 \times F_{\text{тр}}.$$

Отсюда: $\varepsilon = 49,6014 \text{ 1/c}^2$, $F_{\text{тр}} = -2,3904 \text{ Н}$, $N = 5,0641 \text{ Н}$.

Найдём уравнение движения центра колеса:

$$a_C = R \times \varepsilon = 5,9522 \Rightarrow v_C = 5,9522 \times t \Rightarrow x_C = 2,9761 \times t^2.$$

Тогда пройденный путь и скорость через 2 секунды после старта будут равны

$$x_C = 2,9761 \times t^2 = 11,904 \text{ м и } v_C = 5,9522 \times t = 11,904 \text{ м/с.}$$

$$\text{Коэффициент трения скольжения равен: } \mu = \left| \frac{F_{\text{тр}}}{N} \right| = 0,472$$

Сделаем **проверку**, применив теорему об изменении кинетической энергии тела при плоском движении.

$$E_{\text{II}} - E_{\text{I}} = \sum_k A_k.$$

Найдём конечную кинетическую энергию тела.

$$E_{\text{II}} = \frac{I_C \times \omega^2}{2} + \frac{m \times v_C^2}{2} = \left[\begin{array}{l} I_C = \frac{m \times R^2}{2} = 2,88 \times 10^{-3} \\ \omega = \frac{v_C}{R} = 99,2 \end{array} \right] = 42,5116 \text{ Дж.}$$

Найдём работы сил, которые приложены к телу.

а) Силы $F = 3,2 \text{ Н}$:

$$A_M = M_B(\bar{F}) \times \varphi = [M_B(\bar{F}_x) + M_B(\bar{F}_y)] \times \varphi =$$

$$= [F_x \times (R + b) + F_y \times a] \times \frac{x_C}{R} =$$

$$= [F \times \cos \beta \times (R + R \times \cos \beta) + F \times \sin \beta \times R \times \sin \beta] \times \frac{x_C}{R} = \text{— рисунок ИДЗ_Д_2_2}$$

$$= F \times [\cos \beta \times (1 + \cos \beta) + \sin^2 \beta] \times x_C = 71,0826, \text{ Дж.}$$

б) Силы тяжести $P = 4 \text{ Н}$:

$$A_P = P \times \sin \alpha \times x_C = 23,808 \text{ Дж.}$$

в) Пары сил с моментом $M = 0,528 \text{ Н} \times \text{м}$:

$$A_M = -M \times \varphi = \left[\varphi = \frac{x_C}{R} = 99,2 \right] = -52,3776 \text{ Дж.}$$

Тогда полная работа $A = A_M + A_P + A_T = 42,5130 \text{ Дж.}$

$$\text{Погрешность решения составит } \Delta = |A - E_{\text{II}}| = 1,4 \times 10^{-3}.$$

