Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
**А. В. Чередниченко**
**Г. А. Казунина**

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

## Методические указания к контрольной работе для магистрантов заочной формы обучения

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления
подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника»
в качестве электронного издания
для самостоятельной работы

Кемерово 2017

Рецензенты

Николаева Е. А. – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики

**Чередниченко Алла Валериевна**
**Казунина Галина Алексеевна**
**Дополнительные главы математики** [Электронный ресурс]: методические указания к контрольной работе для магистрантов направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» заочной формы обучения / сост.: А. В. Чередниченко, Г. А. Казунина; КузГТУ. – Кемерово, 2017.

Приведены задания, правила оформления и выбора контрольной работы и список литературы. Выполнение заданий позволит магистранту качественно подготовиться к экзамену.

© КузГТУ, 2017
© Чередниченко А. В.,
Казунина Г. А., составление, 2017

## Методические указания по выполнению контрольной работы

Условия контрольной работы магистранты получают во время установочной сессии. Выполненная и оформленная по установленным формам контрольная работа сдается на кафедру математики, где она регистрируется.

Выбор варианта в каждом задании осуществляется по последней цифре шифра зачетной книжки.

**Работа магистранта, решившего не свои задачи, к проверке не допускается и возвращается не проверенной.**

После проверки контрольная работа возвращается магистранту с пометкой на обложке тетради «Работа допущена к защите» или «Работа не допущена к защите», с подписью преподавателя и датой проверки. В первом случае работа может быть защищена (объяснение хода решения задач в форме беседы с преподавателем). Работа, не допущенная к защите, подлежит переработке с учетом указанных в ней замечаний. При повторном выполнении контрольной работы на проверку подаются оба экземпляра.

Магистрант, не выполнивший контрольную работу, не допускается к сдаче промежуточной аттестации.

Приступить к выполнению контрольной работы следует лишь после изучения соответствующего теоретического материала.

Контрольная работа состоит из 5 заданий:

1. Ряд Фурье. Преобразования Фурье.
2. Преобразования Лапласа. Решение линейных дифференциальных уравнений операторным методом.
3. Решение задачи параболического типа: метод разделения переменных, метод собственных значений, метод интегральных преобразований.
4. Решение задачи гиперболического типа: метод разделения переменных, метод собственных значений, метод интегральных преобразований.
5. Решение задачи эллиптического типа: метод разделения переменных, метод собственных значений, метод интегральных преобразований. Распределение температуры в трубе квадратного сечения.

## Контрольная работа

## Задание 1. Ряд Фурье. Преобразование Фурье

1. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–2, 2) функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in(-2,0)\\ 2x, & \text{если } x\in(0,2)\end{cases};$$

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

2. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–3, 3) функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in(-3,0)\\ x-3, & \text{если } x\in(0,3)\end{cases};$$

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

3. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–2, 2) функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in(-2,0)\\ 2-x, & \text{если } x\in(0,2)\end{cases};$$

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

4. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–2, 2) функцией

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{если } x\in(-2,0)\\ 2-x, & \text{если } x\in(0,2)\end{cases};$$

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

5. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–2, 2) функцией $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in(-2,0)\\ 2x, & \text{если } x\in(0,2)\end{cases}$;

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

6. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–2, 2) функцией

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in(-2,0)\\ 2-x, & \text{если } x\in(0,2)\end{cases};$$

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

7. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–2, 2) функцией $f(x)=2x$.

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

8. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–3, 3) функцией $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in(-3,0)\\ 3x, & \text{если } x\in(0,3)\end{cases}$;

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

9. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–4, 4) функцией

$f(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x\in(-4,0)\\ 4-x, & \text{если } x\in(0,4)\end{cases}$; б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

10. а) Найдите спектральную плотность временного процесса, заданного на интервале (–4, 4) функцией

$$f(x)=\begin{cases}x-4, & \text{если } x\in(-4,0)\\ 4-x, & \text{если } x\in(0,4)\end{cases};$$

б) для периодического продолжения этой функции получите разложение в ряд Фурье.

## Задание 2. Преобразование Лапласа. Решение линейных дифференциальных уравнений операторным методом

а) Найдите изображение по оригиналу, используя таблицу и свойства преобразований Лапласа

1. $\sin^4 t$, 2. $\operatorname{ch} t \cos 2t$, 3. $\int_0^t \frac{1-\operatorname{ch}\tau}{\tau} d\tau$,

4. $e^{-4t}(\sin 3t \cos 2t)$, 5. $te^{-t}\sin(\omega t)$, 6. $\frac{e^{4t}-e^{3t}}{t}$,

7. $\int_0^t \frac{\cos 3\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$, 8. $\frac{e^{-at}\sin \omega t}{t}$, 9. $\int_0^t \frac{\cos 3\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$,

10. $\frac{e^{-t}\sin 4t}{t}$,

б) Восстановите оригинал по изображению.

| № | $F(p)$ | № | $F(p)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{p^2-3p+2}$ | 6 | $\frac{p^2+2}{p^2(p+1)^2}$ |
| 2 | $\frac{p+1}{p(p^2+1)}$ | 7 | $\frac{p^2+4}{(p^2+9)^2}$ |
| 3 | $\frac{p+1}{p(p^2+1)}$ | 8 | $\frac{p^2+3}{p^2-2p+2}$ |
| 4 | $\frac{1}{(p^2+1)^2}$ | 9 | $\frac{\omega e^{-3p}}{p^2+9}$ |
| 5 | $\frac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$ | 10 | $\frac{e^{-5p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p^2+9}$ |

в) Решите дифференциальные уравнения.

| | |
|---|---|
| 1 | $y'' + y = \sin 2t$<br>$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 2 | $y''' + y' = 5\sin 2t$<br>$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ |
| 3 | $y^{(4)} - y = e^t$<br>$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ |
| 4 | $y'' - 5y' + 6y = 2\cos 3t$<br>$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 5 | $y'' + 2y' + y = x(t)$<br>$y(0) = y'(0) = 0$<br>$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty; 0) \\ 1, & t \in [0; 2] \\ 3, & t \in (2; \infty) \end{cases}$ |
| 6 | $Ty' + y = x'$<br>$y(0) = 0$<br>$x(t)$ – прямая, заданная на отрезке $[0; T_1]$<br>$x(0) = -2, \quad x(T_1) = -4$ |
| 7 | $y'' - 2y' + 1y = \cos 2t$<br>$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 8 | $y'' - 5y' + 6y = \sin 2t$<br>$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 9 | $y'' - 4y' + 5y = e^t$<br>$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 10 | $y'' + 4y' + 5y = \sin 3t$<br>$y(0) = y'(0) = 0$ |

## Задание 3. Решение задачи параболического типа: метод разделения переменных, метод собственных значений, метод интегральных преобразований

1. Найдите распределение температуры в проводнике длиной 2 м с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, что внутри действует постоянный распределенный источник тепла мощностью 60 Дж, а концы поддерживаются при нулевой температуре. Распределение температуры в начальный момент времени задается функцией $\varphi(x) = x - 2$.

2. На передающем конце телефонного провода длины $l$ = 10 м поддерживается постоянный потенциал 20 вольт, а на приемном конце – 12 вольт. В момент $t = 0$ приемный конец заземляется. Найти напряжение и ток спустя $t$ секунд. Проводимостью изоляции и индуктивностью пренебречь.

3. Найдите распределение температуры в проводнике длиной 4 м с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, что внутри действует постоянный распределенный источник тепла мощностью 40 Дж, а концы поддерживаются при нулевой температуре. Распределение температуры в начальный момент времени задается функцией $\varphi(x) = x + 2$.

4. На концах стержня длиной 10 см поддерживается температура 0 °С и 100 °С соответственно до достижения стационарного режима. Внезапно температура на холодном конце увеличивается до 20 градусов, а на горячем конце уменьшается до 60 градусов. Найти распределение температуры в стержне в любой момент времени.

5. Линия передачи длиной 1000 км находится изначально в установившемся режиме с потенциалом 1200 вольт на передающем конце ($x = 0$) и 1000 вольт на приемной конце ($x = 1000$). Приемный конец линии внезапно заземляется, но на источнике сохраняется потенциал 1200 вольт. Предполагая индуктивность и

проводимость изоляции пренебрежимо малыми, найти потенциал $v(x,t)$.

6. На одном конце стержня длиной 50 см с изолированной боковой поверхностью поддерживается температура 0 °С, а на другом – 100 °С до достижения стационарного режима. Внезапно оба конца изолируют, так что на них градиент температуры становится нулевым на все последующее время. Найти распределение температуры в стержне.

7. На одном конце стержня длиной 100 см с изолированной боковой поверхностью поддерживается температура 0 °С, а на другом – 200 °С до достижения стационарного режима. Внезапно оба конца изолируют, так что на них градиент температуры становится нулевым на все последующее время. Найти распределение температуры в стержне.

8. На концах однородного стержня из проводящего материала поддерживается постоянная нулевая температура. Распределение температуры в начальный момент времени имеет вид $U(x,0)=\begin{cases} x, 0\le x\le 50 \\ 100-x, 50\le x\le 100 \end{cases}$.
Найти температуру в любой момент времени.

9. Пользуясь преобразованиями Лапласа, найдите решение задачи
$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<L, 0<t<\infty.$

Граничные условия: $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=g(t) \end{cases}$.
Начальные условия: $u(x,0)=0,\ 0\le x\le L.$

10. Пользуясь преобразованиями Фурье, найдите решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L, t > 0.$$

Граничные условия: $u(0,t) = 10$; $0 < x < \infty$.
Начальные условия: $u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L.$

**Задание 4. Решение задачи гиперболического типа: метод разделения переменных, метод собственных значений, метод интегральных преобразований**

1. Туго натянутая струна длины $L$ с закрепленными концами имеет в начальный момент положение, заданное формулой $y = y_0 \sin^2(\frac{\pi x}{L})$. Из состояния покоя в этом положении струну отпускают. Найти смещение $y(x,t)$.

2. Найти решение уравнения радио $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ в случае, когда на конец линии $x = 0$ подается периодическая ЭДС, равная $v_0 \cos(\omega t)$.

3. Концы натянутой гибкой струны длины $l$ закреплены. В момент времени $t = 0$ струне придано положение $\varphi(x) = x(l - x)$. Найти смещение произвольной точки струны в любой момент времени.

4. Концы натянутой гибкой струны длины $l$ закреплены. В момент времени $t = 0$ струна находится в состоянии покоя в равновесном положении. Каждой точке струны придается скорость $\Psi(x) = x(l - x)$ и струна начинает колебаться. Найти смещение произвольной точки струны в любой момент времени.

5. Найти решение уравнения радио $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ в случае, когда на конец $x = 0$ подается периодическая ЭДС, равная $v_0 \sin(pt)$.

6. Туго натянутая струна длины $l$ с закрепленными концами имеет в начальный момент положение, заданное формулой $y = y_0 \sin^3 \frac{\pi x}{L}$. Из состояния покоя струну отпускают. Найти смещение.

7. Между точками $x = 0$ и $x = l$ натянута струна длины $l$. В точке $x = b$, $0 < b \le l$ ее оттянули на малое расстояние $h$ и в момент отпустили из состояния покоя. Найдите закон колебания этой струны. Для решения используйте преобразования Фурье.

8. С помощью преобразований Лапласа решить задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \cos \omega t,\ 0 \le x < \infty, 0 < t < \infty.$$

Граничное условие: $u(0,t) = 0$; и решения ограничены при $x \to \infty$.

Начальные условия: $u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

9. С помощью преобразований Лапласа решить задачу для уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 \le x \le 1, 0 < t < \infty.$$

Граничное условие: $\begin{cases} u(0,t) = 10 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$

Начальные условия: $u(x,0) = \sin \pi x,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -\sin \pi x$.

10. Натянутая струна длиной 10 см первоначально находится в покое. Левый конец струны зафиксирован, а ее правый конец

частично свободен и может скользить по вертикальной линии $x = 10$ без трения. Начальные условия $u(x,0) = 10 - x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

## Задание 5. Решение задачи эллиптического типа: метод разделения переменных, метод собственных значений, метод интегральных преобразований. Распределение температуры в трубе квадратного сечения

1. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 20$; $0 \le y \le 20$. На ребре $x = 0$ поддерживается распределение температуры $y(y - 20)$, а на остальных ребрах поддерживается нулевая температура. Все грани изолированы, и внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

2. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 10$; $0 \le y \le 20$. На ребре $y = 0$ поддерживается распределение температуры $x(x - 10)$, а на остальных ребрах поддерживается нулевая температура. Все грани изолированы, и внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

3. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 20$; $0 \le y \le 20$. На ребре $x = 0$ поддерживается распределение температуры $y(y - 20)$, а на ребре $x = 20$ поддерживается нулевая температура. Остальные ребра теплоизолированы. Внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

4. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 20$; $0 \le y \le 20$. На ребре $y = 0$ поддерживается распределение температуры $x(x - 20)$, а на ребре $y = 20$ поддерживается нулевая температура. Остальные

ребра теплоизолированы. Внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

5. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 10$; $0 \le y \le 10$. На ребре $x = 0$ поддерживается распределение температуры $y(y-10)$, а на остальных ребрах поддерживается нулевая температура. Все грани изолированы, и внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

6. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 30$; $0 \le y \le 30$. На ребре $x = 0$ поддерживается распределение температуры $y(y-30)$, а на остальных ребрах поддерживается нулевая температура. Все грани изолированы, и внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

7. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 30$; $0 \le y \le 30$. На ребрах $x = 0$, $y = 0$, $y = 30$ поддерживается нулевая температура, а на ребре $x = 30$ выполняется условие $\dfrac{\partial u(30, y)}{\partial x} = \sin^3 \dfrac{\pi y}{30}$. Внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

8. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 20$; $0 \le y \le 20$. На ребрах $x = 0$, $y = 0$, $y = 20$ поддерживается нулевая температура, а на ребре $x = 20$ выполняется условие $\dfrac{\partial u(20, y)}{\partial x} = \sin^3 \dfrac{\pi y}{20}$. Внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

9. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 30$; $0 \le y \le 30$. На ребрах $x = 0$, $y = 0$, $x = 30$ поддерживается нулевая температура, а на ребре $y = 30$ выполняется условие $\dfrac{\partial u(x,30)}{\partial y} = \sin^3 \dfrac{\pi x}{30}$. Внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

10. Тонкая прямоугольная однородная теплопроводящая пластинка расположена в области $0 \le x \le 5$; $0 \le y \le 5$. На ребре $y = 0$ поддерживается распределение температуры $x(x-5)$, а на остальных ребрах поддерживается нулевая температура. Все грани изолированы, и внутри пластинки нет источников тепла и теплоотводов. Найти стационарное распределение температуры внутри пластинки.

## Список рекомендуемой литературы

1. Дополнительные главы математики: учеб. пособие для аудиторной и самостоятельной работы студентов направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», / Г. А. Казунина, А. В. Чередниченко, Г. А. Липина; КузГТУ. – Кемерово, 2016. – 112 с.

2. Казунина, Г. А. Преобразования Фурье. Преобразования Лапласа [Электронный ресурс]: учеб. пособие / КузГТУ. – Кемерово, 2015. – Режим доступа: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90368&type=utchposob:common

3. Ильин, А. М. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]. – СПб.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с. – Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/book/69318/

4. Емельянов, В. М. Уравнения математической физики: практикум по решению задач [электронный ресурс] / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. – СПб.: Лань-ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 224 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=140

5. Математика: элементы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для вузов [текст] / Г. А. Казунина, Г. А. Липина, Л. В. Пинчина; КузГТУ. – Кемерово, 2003. – 104 с. – Режим доступа: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90175&type=utchposob:common

6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы анализа [текст] / под ред. А. В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 321 с.

7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации, уравнения в частных производных, интегральные уравнения [текст] / под ред. А. В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 302 с.

8. Шарма, Дж. Н. Уравнения в частных производных для инженеров [текст] /Дж. Н. Шарма, К. Сингх. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2002. – 318 с.

9. Дифференциальные уравнения с элементами теории устойчивости: учеб. пособие [электронный ресурс] / Д. В. Алексеев, Г. А. Казунина, Н. В. Трушникова; КузГТУ. – Кемерово,

2010. – Режим доступа:
http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90412&type=utchposob:common

10. Фарлоу, С. Дифференциальные уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 383 с.