

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра общей электротехники

Т. М. Черникова

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

**Методические указания к практическим занятиям
для студентов очной формы обучения**

Рекомендованы учебно-методической комиссией специализации
21.05.04.10 «Электрификация и автоматизация горного
производства» в качестве электронного издания
для использования в учебном процессе

Кемерово 2017

Рецензенты

Дабаров В. В. – кандидат технических наук, доцент кафедры общей электротехники

Буялич Г. Д. – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой горных машин и комплексов, председатель учебно-методической комиссии направления подготовки специализации 21.05.04.10 «Электрификация и автоматизация горного производства»

Черникова Татьяна Макаровна

Теория электрических цепей: методические указания к практическим занятиям [Электронный ресурс]: для студентов направления подготовки 21.05.04 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства», очной формы обучения / Т. М. Черникова; КузГТУ. – Кемерово, 2017.

Даны краткие теоретические положения, облегчающие подготовку к занятиям, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, список необходимой литературы.

© КузГТУ, 2017

© Черникова Т. М., 2017

Содержание

Содержание	3
ВВЕДЕНИЕ	5
Занятие 1	6
РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА. КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА	6
Основные положения и соотношения	6
Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом	7
Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом	8
Контрольные вопросы.....	8
Задачи.....	9
Классический метод	9
Операторный метод	13
Занятие 2	16
АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ	16
Основные положения и соотношения	17
Контрольные вопросы.....	20
Пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля.....	20
Пример расчета переходного процесса в цепи переменного тока классическим методом	26
Пример расчета переходного процесса в цепи переменного тока операторным методом	30
Задачи.....	32
Занятие 3	33
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССАМ	33
Занятие 4	34
АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ	34
Основные положения и соотношения	34
Контрольные вопросы.....	41
Задачи.....	42

Занятие 5.....	48
 АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И	
 МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	48
 Основные положения и соотношения	48
 Контрольные вопросы.....	51
 Задачи.....	51
 Пример расчета нелинейной цепи графическим методом	51
 Примеры расчета аналитическим методом	53
 Пример расчета магнитной цепи	53
Занятие 6.....	58
 РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА.....	58
 Основные положения и соотношения	58
 Контрольные вопросы.....	61
 Задачи.....	61
 Графический и графоаналитический методы расчета	61
 Аналитический метод расчета.....	65
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	69

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория электрических цепей» состоит из лекционных, практических и лабораторных занятий. На практических занятиях предусмотрено решение задач с целью лучшего усвоения теоретических знаний и получения навыков расчета задач, с которыми будущие специалисты могут встретиться в своей практической деятельности.

Методические указания содержат краткие теоретические положения, охватывающие основные разделы теоретического курса: нелинейные цепи постоянного тока, нелинейные цепи переменного тока, переходные процессы в линейных цепях с сосредоточенными параметрами, четырехполюсники.

Методические указания рассчитаны на студентов, уже проработавших соответствующие разделы курса.

В ходе решения задач не следует изменять однажды принятые направления токов и наименования узлов, сопротивлений.

Занятие 1

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА. КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий переходных процессов в электрических цепях постоянного тока, применение основных соотношений для расчета переходных процессов.

Основные положения и соотношения

Процессы, протекающие в электрических цепях при переходе от одного состояния к другому, называются переходными.

Переходные процессы могут сопровождаться перенапряжением или сверхтоками на отдельных участках цепи. Кроме того, целый ряд устройств автоматики и радиотехники работают длительное время в переходном режиме. Поэтому изучение этих процессов весьма важно для инженерной практики.

Переходный процесс возникает в результате коммутации. Коммутацией называют включения, отключения и переключения ветвей электрической схемы, приводящие к изменению схемы или ее параметров. Считается, что коммутация происходит мгновенно.

При наличии в цепи накопителей энергии: катушек индуктивности и конденсаторов переходный процесс имеет длительность во времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию электрической цепи соответствует определенный запас энергии на индуктивностях и емкостях. Переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием энергии накопителей. При конечной мощности энергия может изменяться только непрерывно.

Здесь рассматриваются переходные процессы в линейных электрических цепях. Поэтому исключаются из рассмотрения случаи, когда при коммутации возникает электрическая дуга (нелинейный элемент).

Если нет специального указания, будем считать, что коммутация проходит в момент времени $t = (0-)$.

Из непрерывности энергии накопителей вытекают законы коммутации.

1. Ток и потокосцепление индуктивности непосредственно перед коммутацией и сразу же после коммутации одинаковы

$$i_L(+0) = i_L(-0), \quad \psi(+0) = \psi(-0).$$

2. Напряжение на емкости и ее заряд также не меняют своего значения в момент коммутации

$$u_C(+0) = u_C(-0), \quad q(+0) = q(-0).$$

Токи и напряжения в переходном процессе называют переходными величинами (функциями). Переходная величина определяется полным решением дифференциального уравнения относительно этой функции. Решение дифференциального уравнения может осуществляться различными методами.

Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом

Расчет переходных процессов классическим методом рекомендуется по следующей алгоритмической схеме:

1. Составить систему уравнений энергетического состояния цепи по любому известному методу, описывающую процесс в цепи после коммутации.

2. Найти принужденную составляющую искомой величины, используя для расчета любой известный метод.

3. Записать с точностью до постоянных выражение для свободной составляющей искомой величины. Для этого:

- a) сформировать характеристическое уравнение;
- b) определить его корни;
- c) записать решение.

4. Записать с точностью до постоянных полное решение для искомой величины как сумму принужденной и свободной составляющих.

5. Определить постоянные интегрирования. Для этого:

a) записать выражения для искомой величины и ее $(n - 1)$ производной (где n – порядок характеристического уравнения) при $t = 0$;

b) расчетом установившегося режима в цепи до коммутации

и на основе законов коммутации определить независимые начальные условия $i_L(0) = i_L(0+)$; $u_C(0) = u_C(0+)$;

с) с помощью независимых начальных условий и системы уравнений п.1, записанной для $t = 0$, определить зависимые начальные условия (значения искомой величины и ее $(n - 1)$ производной при $t = 0$);

д) определить постоянные интегрирования, содержащиеся в общем решении для свободной составляющей полного решения.

6. Записать окончательное решение для искомой переходной функции.

Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом

1. Рассчитать цепь до коммутации и рассчитать независимые начальные условия: $i_L(0) = i_L(0-)$ и $u_C(0) = u_C(0-)$.

2. Составить операторную схему. Изображения заданных э.д.с. (токов) найти по таблице соответствия между оригиналами и изображениями. Ненулевые независимые начальные условия учесть введением внутренних ЭДС. В ветвях, содержащих индуктивные элементы, внутренние ЭДС равны $Li_L(0)$ и по направлению совпадают с положительным направлением тока. В ветвях с емкостными элементами внутренние ЭДС равны $\frac{U_C}{p}$ и противоположны положительным направлениям $u_C(0)$.

3. Определить по операторной схеме изображение искомой величины любым методом (метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод эквивалентного источника и т. д.)

4. Найти оригинал искомой величины, пользуясь теоремой разложения или таблицами соответствия оригиналов и изображений.

Контрольные вопросы

1. Какой процесс называют переходным?
2. Сформулируйте законы коммутации.
3. В чем заключается классический метод расчета переходных процессов?
4. Какие начальные условия называют независимыми?
5. Какие начальные условия называют зависимыми?

6. Как связаны изображения и оригиналы в формуле разложения?

Задачи

Классический метод

Задача 1.1. В цепи с постоянной ЭДС замыкается одно из последовательных соединений (рис. 1.1)

$$E = 100 \text{ В}, R = 3 \text{ Ом}, r = 2 \text{ Ом}, L = 0,01 \text{ Гн.}$$

Определить ток и напряжение на индуктивности в переходном режиме, построить график тока.

Решение

1. Записываем дифференциальное уравнение послекоммутационной схемы

$$ri + L \frac{di}{dt} = E.$$

2. Полное решение для тока (непрерывной величины) представляем в виде

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = i_{\text{пр}} + Ae^{pt},$$

3. Принужденный ток при постоянной э.д.с. совпадает с установившимся конечным током (рис. 1.1, в)

$$i_{\text{пр}} = i_{\text{уст}} = \frac{E}{r} = \frac{100}{2} = 50 \text{ А.}$$

При постоянном токе $i_{\text{пр}} = \text{const}$ индуктивность равносильна коротке $u_{L\text{пр}} = L \frac{di_{\text{пр}}}{dt} = 0$ и на величину тока не влияет.

4. Начальное ($t = +0$) значение тока индуктивности согласно закону коммутации равно предкоммутационному ($t = -0$).

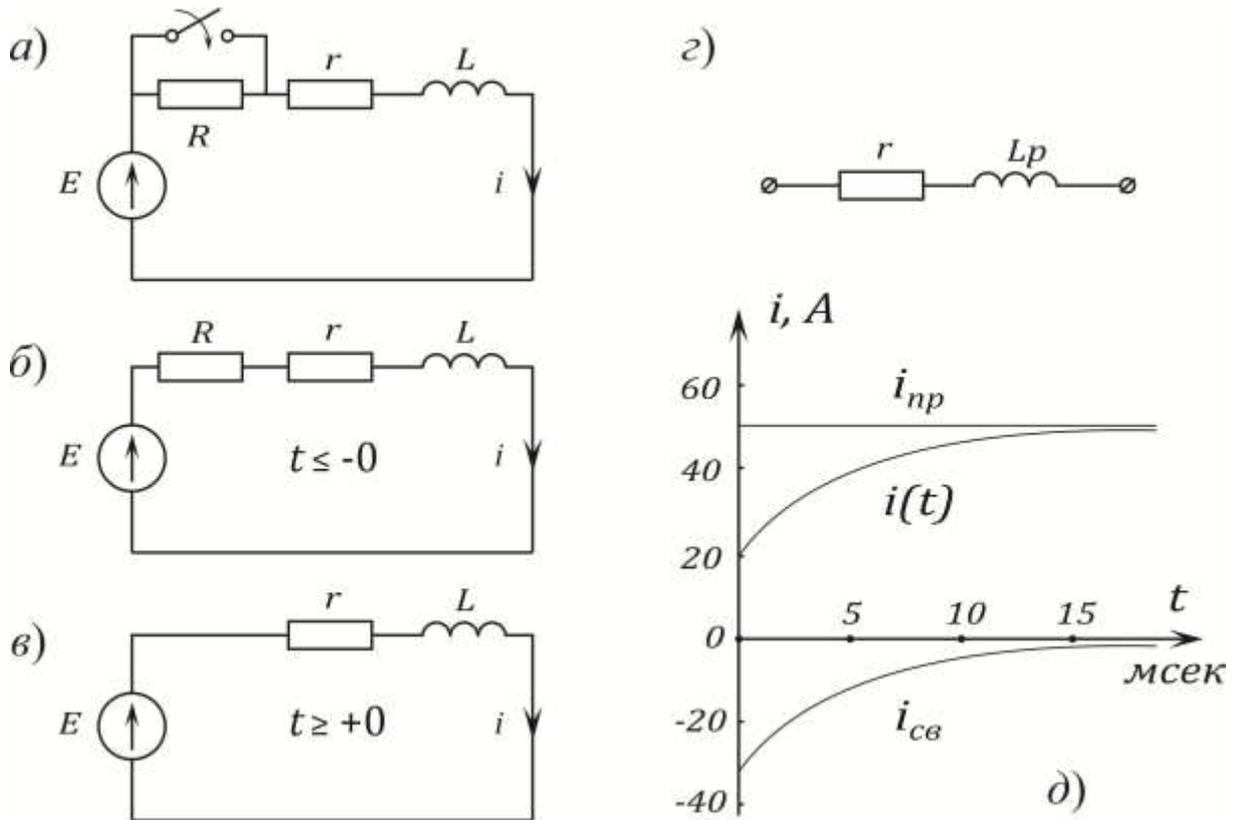


Рисунок 1. 1

Находим его из схемы б, полагая режим установившимся

$$i(+0) = i(-0) = \frac{E}{r + R} = \frac{100}{2 + 3} = 20 \text{ A.}$$

5. Для определения постоянной A подставим начальное значение тока в выражение полного тока

$$i(0) = i_{np}(0) + Ae^0, \quad 20 = 50 + A, \quad A = -30.$$

6. Составим характеристическое уравнение:

а) по дифференциальному уравнению послекоммутационной схемы, заменяя di/dt на p , i на 1, правую часть E – нулем

$$r + Lp = 0;$$

б) по входному операторному сопротивлению послекоммутационной схемы: $Z(p) = r + pL = 0$.

Находим корень уравнения: $p = -rL = -200 \text{ сек}^{-1}$.

7. Итак, $i(t) = 50 - 30e^{-200t}$ А. Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0,01 \cdot (-30) \cdot (-200)e^{-200t} = 60e^{-200t} \text{ В.}$$

8. Для построения графика $i(t)$ определяем постоянную времени цепи τ (время, в течение которого свободный ток изменится в e раз, $e \approx 2,72$)

9.

$$\tau = \frac{L}{r} = \left| \frac{1}{p} \right| = \frac{1}{200} = 0.005 \text{ сек} = 5 \text{ мсек.}$$

Решение можно записать через τ .

$$i(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 50 - 30e^{-\frac{t}{0,005}} \text{ А.}$$

Задаваясь временами $0\tau, \tau, 2\tau, 3\tau$, находим

$$i_{\text{св}}(0) = -30e^0 = -30,$$

$$i_{\text{св}}(\tau) = -30e^{-1} = -\frac{30}{2,72} = -11,$$

$$i_{\text{св}}(2\tau) = -\frac{11}{2,72} = 4,06,$$

$$i_{\text{св}}(3\tau) = -\frac{4,06}{2,72} = -1,5.$$

По точкам строим $i_{\text{св}}, i_{\text{пр}}$ и суммируем ординаты алгебраически для получения графика полного тока (рис. 1.1, δ).

Задача 1.2. В цепь с сопротивлением $R = 10$ Ом, и конденсатором $C = 10^{-4}$ Ф, заряженным до напряжения $U_0 = 20$ В, включается постоянная ЭДС $E = 100$ В (рис. 1.2).

Найти ток переходного процесса $i(t)$. Определить время, в течение которого ток уменьшится в 2 раза. Рассчитать тепловую энергию, выделяющуюся в сопротивлении R за первую миллисекунду переходного процесса.

Решение

Постоянный ток через конденсатор не течет, поэтому принужденный ток $i_{пр} = 0$. Полный ток через конденсатор равен свободному

$$i(t) = i_{св} = Ae^{pt}.$$

Начальное значение тока (зависимой величины) находим из послекоммутационной схемы для $t = +0$, используя известное значение непрерывной величины $u_c(0)$

$$Ri(0) + u_c(0) = E, \quad i(0) = \frac{1}{R} [E - u_c(0)] = 8 \text{ А.}$$

Подставляем в решение начальное значение тока $i(0) = Ae^0$, $A = 8$. Характеристическое уравнение, его корень и постоянная времени цепи

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = 0, \quad p = -\frac{1}{RC}, \quad \tau = RC, \quad p = -1000 \text{ сек}^{-1}.$$

Ток переходного процесса $i(t) = 8e^{-1000t} \text{ А.}$

Начальный ток, после уменьшения в 2 раза будет равным $\frac{8}{2} = 4 \text{ А.}$ Время t_1 такого изменения находим из уравнения

$$4 = 8e^{-1000t} \text{ А.}$$

Логарифмируя это равенство, определяем

$$t_1 = 0,692 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

Находим тепловую энергию, выделяющуюся в сопротивлении за первую миллисекунду переходного процесса

$$W = \int_{t=0}^{0,001} Ri^2(t)dt = \int_0^{0,001} 10 \cdot (8e^{-1000t})^2 dt = 0.277 \text{ Дж.}$$

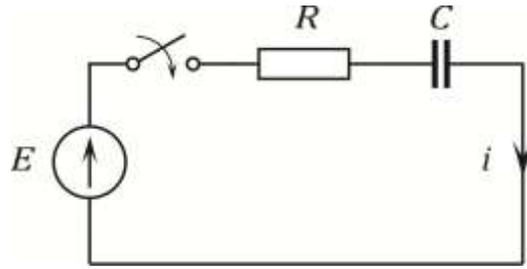


Рисунок 1.2

Операторный метод

Задача 1.3. Дана цепь (рис. 1.3)

$$U_1 = 300 \text{ В}, U_2 = 100 \text{ В}, R_1 = 30 \text{ Ом}, R_2 = 20 \text{ Ом}, L = 12 \text{ мГн.}$$

В момент $t = 0$ замыкается рубильник. Определить уравнение тока индуктивности.

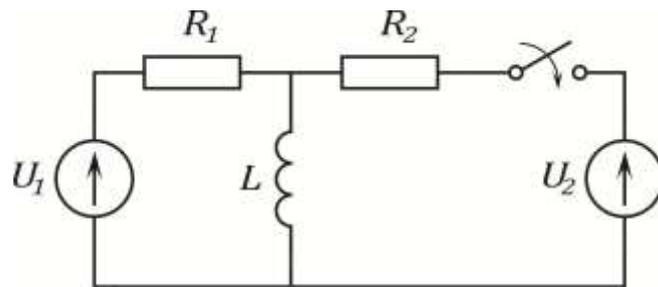


Рисунок 1.3

Решение

Операторная схема замещения изображена на рис. 1.4. Рассматриваемая цепь имеет только одну пару узлов, поэтому $I_L(p)$ проще определить методом узловых напряжений.

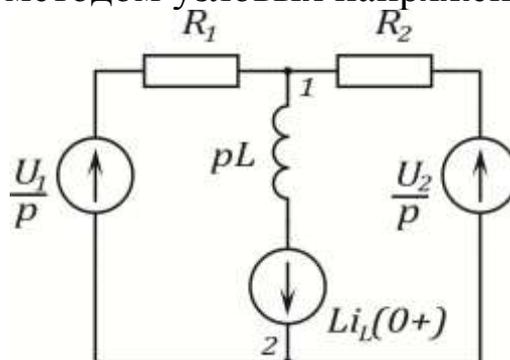


Рисунок 1.4

Принимаем $U^{(2)}(p) = 0$, тогда

$$Y_{11}(p)U^{(1)}(p) = I_{11}(p),$$

где

$$Y_{11}(p) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Lp} = \frac{(R_1 + R_2)Lp + R_1R_2}{R_1R_2Lp},$$

$$I_{11}(p) = \frac{U_1}{R_1p} + \frac{U_2}{R_2p} - \frac{Li_L(0+)}{Lp}.$$

Так как $i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{U_1}{R_1}$, что легко установить по схеме до коммутации, то $I_{11}(p) = \frac{U_2}{R_2L}$.

Определяем

$$U^{(1)}(p) = \frac{R_1LU_2}{(R_1 + R_2) + Lp + R_1R_2}.$$

Операторное выражение тока индуктивности находим из соотношения

$$\begin{aligned} I_L(p) &= \frac{U^{(1)}(p) + L\frac{U_1}{R_1}}{Lp} = \frac{U_1\frac{R_1 + R_2}{R_1}Lp + U_1R_2 + U_2R_1}{(R_1 + R_2)L\left[p + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}\right]p} = \\ &= \frac{1}{(R_1 + R_2)L} \cdot \frac{M(p)}{pN(p)}. \end{aligned}$$

Находим корень уравнения $N(p) = 0$

$$p_1 = -\frac{R_1R_2}{L(R_1 + R_2)} = -1000 = -\beta.$$

Переходя к оригиналу функции по теореме разложения, получим

$$i_L(t) = \frac{1}{(R_1 + R_2)L} \cdot \left| \frac{M(0)}{N(0)} + \frac{M(p_1)}{p_1 N'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right| =$$

$$= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_2}{R_2} e^{-\beta t} = 15 - 5e^{-10^3 t}.$$

Задача 1.4. Определить токи во второй и третьей ветвях при размыкании ключа в первой ветви (рис. 1.5), если $E = 120$ В; $I = 6$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом; $L = 0,05$ Гн.

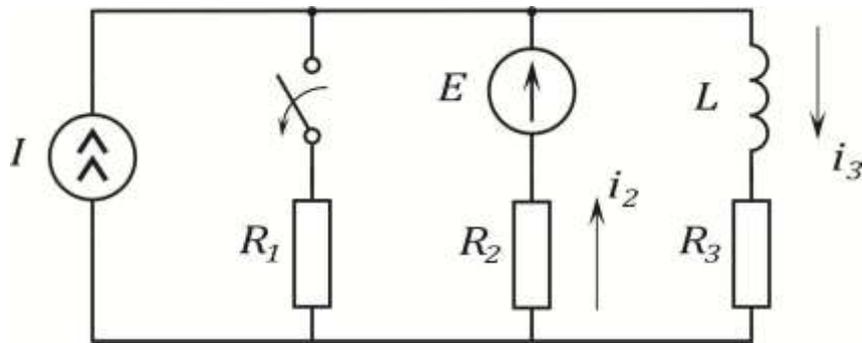


Рисунок 1.5

Ответ:

$$i_2 = 3 - 3e^{-400t} \text{ А.}$$

$$i_3 = 9 - 3e^{-400t} \text{ А.}$$

Задача 1.5. В цепи (рис. 1. 6) отключается источник с э.д.с. $E = 120$ В с внутренним сопротивлением $R_1 = 10$ Ом.

Рассчитать и построить зависимости напряжения U_C на конденсаторе $C = 20$ мкФ и тока i в резисторе $R = 50$ Ом.

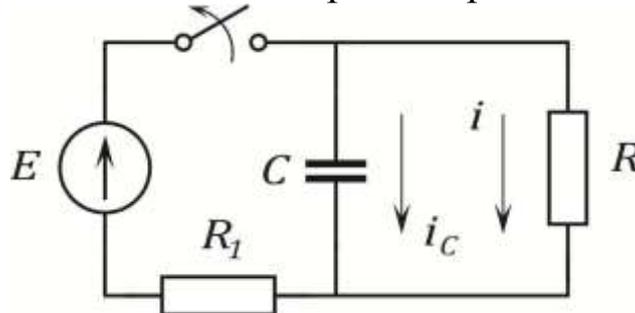


Рисунок 1. 6

Ответ:

$$U_C = 100e^{-1000t} \text{ В.}$$

$$i = \frac{U_C}{R} = 2e^{-1000t} \text{ А.}$$

Задача 1.6. В цепи (рис. 1. 7) с параметрами: $I = 0,3 \text{ А}$; $R_1 = 500 \text{ Ом}$; $C = 10 \text{ мкФ}$; $R = 250 \text{ Ом}$ происходит размыкание ключа. Найти $U_C(t)$ и $i(t)$.

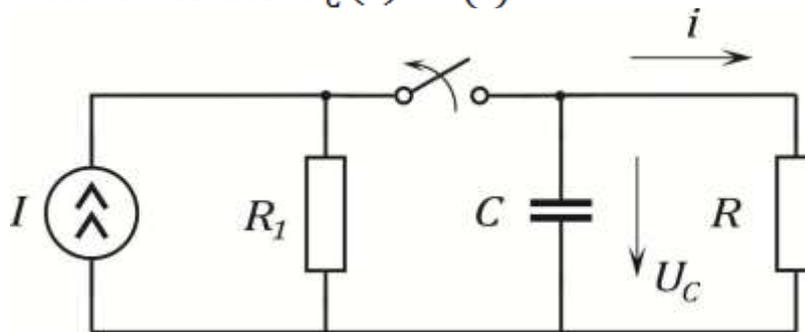


Рисунок 1.7

Ответ:

$$U_C = 50e^{-400t} \text{ В.}$$

$$i(t) = 0,2e^{-400t} \text{ А.}$$

Литература: [1], § 8.1–8.21; [2], § 14.1–14.8; [8], § 3.1–3.6.

Занятие 2

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий переходных процессов в электрических цепях переменного тока, применение основных соотношений для расчета переходных процессов.

Основные положения и соотношения

1. Расчет переходных процессов в цепях переменного тока также проводят с использованием классического и операторного методов.

2. Для расчета переходного процесса при воздействии на электрическую цепь источников напряжения или тока произвольной формы можно применить формулы Дюамеля.

3. Переходная проводимость.

Используя метод наложения, можно показать, что ток в любой ветви схемы может быть представлен в виде

$$i_k = g_{km} U_m,$$

где g_{km} — собственная ($k = m$) или взаимная ($k \neq m$) проводимость.

Это соотношение, трансформированное в уравнение

$$i_k(t) = g_{km}(t) U_m, \quad (2.1)$$

будет иметь силу и в переходном режиме, т. е. когда замыкание ключа в m -й ветви подключает к цепи находящийся в этой ветви источник постоянного напряжения U_m . При этом $g_{km}(t)$ является функцией времени и называется переходной проводимостью.

В соответствии с (2.1) переходная проводимость численно равна току в ветви при подключении цепи к постоянному напряжению $U_m = 1\text{В}$.

4. Переходная функция по напряжению.

Переходная функция по напряжению наиболее часто используется при анализе четырёхполюсников.

Если линейную электрическую цепь с нулевыми начальными условиями подключить к источнику постоянного напряжения U , то между произвольными точками m и n цепи возникнет напряжение

$$u_{km}(t) = h(t)U,$$

где $h(t)$ — переходная функция по напряжению, численно равная напряжению между точками m и n схемы при подаче на ее вход постоянного напряжения $U = 1\text{В}$.

Переходную проводимость $g(t)$ и переходную функцию по напряжению $h(t)$ можно найти расчетным или экспериментальным (осциллографирование) путями.

В качестве примера определим эти функции для цепи на рис. 2.1

В этой схеме

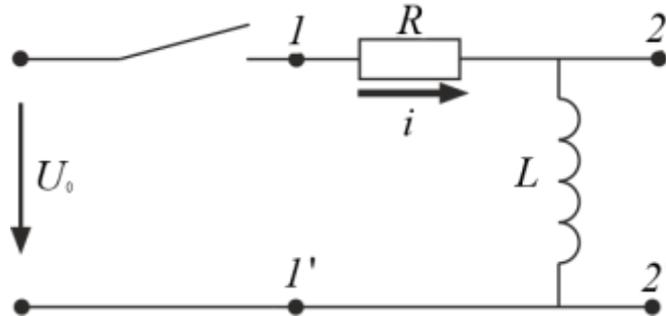


Рисунок 2.1

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}),$$

где $\tau_L = \frac{L}{R}$,

Тогда переходная проводимость

$$g(t) = \frac{i(t)}{U_0} = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}).$$

Переходная функция по напряжению

$$h(t) = \frac{U_{22'}(t)}{U_0} = \frac{L \frac{di}{dt}}{U_0} = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

5. Расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля.

Зная реакцию цепи на единичное возмущающее воздействие, т. е. функцию переходной проводимости $g(t)$ или (и) переходную функцию по напряжению $h(t)$, можно найти реакцию цепи на воздействие произвольной формы. В основе метода – метода расчета с помощью интеграла Дюамеля – лежит принцип наложения.

При использовании интеграла Дюамеля для разделения переменной, по которой производится интегрирование, и переменной, определяющей момент времени, в который определяется ток в цепи, первую принято обозначать как τ , а вторую – как t .

$$i(t) = U(0)g(t) - \int_0^t u'(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (2.2)$$

Соотношение (2.2) называется интегралом Дюамеля.

Следует отметить, что с использованием интеграла Дюамеля можно определять также напряжение. При этом в (2.2) вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция по напряжению.

6. Алгоритм расчета с использованием интеграла Дюамеля.

1. Определение функции $g(t)$ (или $h(t)$) для исследуемой цепи.
2. Запись выражения $g(t - \tau)$ (или $h(t - \tau)$) путем формальной замены t на $(t - \tau)$.
3. Определение производной $u'(\tau)$.
4. Подстановка найденных функций в (1) и интегрирование определенного интеграла.

В качестве примера использования интеграла Дюамеля определим ток в цепи рис. 2.2

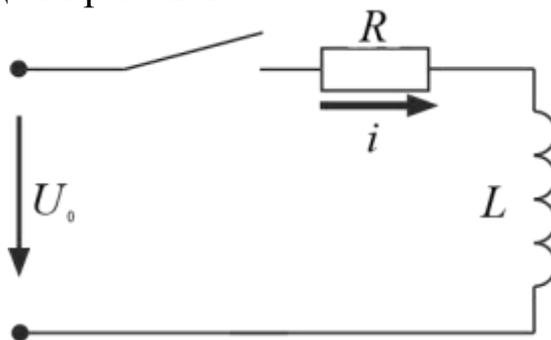


Рисунок 2.2

Исходные данные для расчета: $u(t) = 1000e^{-5t}B$,
 $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$.

1. Переходная проводимость

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 0,1(1 - e^{-10t}).$$

$$2. \quad g(t - \tau) = 0,1(1 - e^{-10t} e^{10\tau}).$$

$$3. \quad u'(t) = -5000e^{-5t}.$$

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau) g(t - \tau) d\tau = \\ &= 100(1 - e^{-10t}) - 500 \int_0^t e^{5\tau} d\tau + 500e^{-10t} \int_0^t e^{5\tau} d\tau = \\ &= 100(1 - e^{-10t}) + 100 \Big|_0^t e^{-5\tau} + 100e^{-10t} \Big|_0^t e^{5\tau} = \\ &= 200(e^{-5t} - e^{-10t})A. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях расчет переходного процесса проводят с использованием интеграла Дюамеля?
2. Чему равна переходная проводимость?
3. Чему равна переходная функция по напряжению?
4. Запишите формулу интеграла Дюамеля.

Пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля

Методом интеграла Дюамеля, для схемы рис. 2.3 найти и построить $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, а также напряжение на индуктивности $U_L(t)$. Напряжение источника ЭДС

$$e(t) = E_m \cdot 1(t), e(t) = E_m \cdot t \cdot 1(t).$$

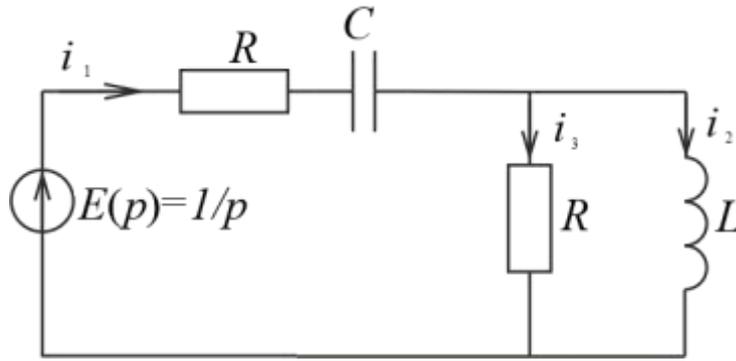


Рисунок 2.3

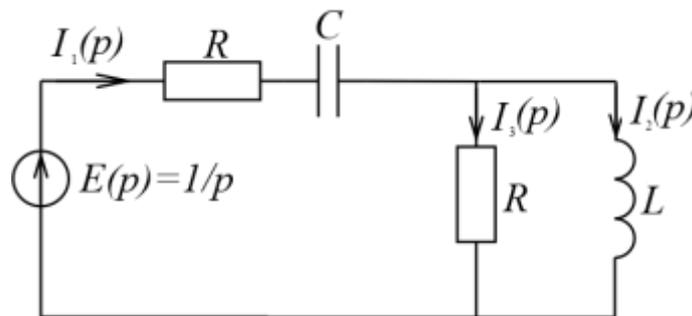


Рисунок 2.4

Будем искать ток в индуктивности в переходном режиме. Остальные токи определим по выражению тока i_2 , используя уравнения (2.3), составленные по законам Кирхгофа

$$i_1 = i_2 + i_3; u_L = l \frac{di_2}{dt} = r \cdot i_3, \quad (2.3)$$

1. Определяем переходную проводимость Y_{21} операторным методом при н.н.у., как ток $I_2(p)$ при воздействии единичной ЭДС (рис 2.4)

Операторное изображение $I_1(p)$

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{R + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{R \cdot pL}{R + pL}} = \frac{1}{p \cdot \left(R + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{R \cdot pL}{R + pL} \right)} =$$

$$= \frac{(R + pL) \cdot C}{2 \cdot R \cdot p^2 L \cdot C + R^2 \cdot p \cdot C + p \cdot L + R}.$$

По формуле разброса токов операторное изображение $I_2(p)$:

$$I_2(p) = \frac{R \cdot I_1(p)}{R + pL} = \frac{R \cdot C}{2 \cdot R \cdot p^2 L \cdot C + R^2 p \cdot C + p \cdot L + R}.$$

Подставим значения параметров в изображение для тока и преобразуем его так, чтобы получить табличное изображение

$$I_2(p) = \frac{50}{p^2 + 1000p + 500000} =$$

$$= 0,1 \cdot \frac{500}{(p + 500)^2 + 500^2} \div 0,1 e^{-500t} \sin 500 \cdot t = i_2(t)$$

2. Следовательно, переходная проводимость
 $h_{21}(t - \tau) = 0,1 \cdot e^{-500(t-\tau)} \sin (500 \cdot (t - \tau)).$

Сначала найдем все реакции при воздействии

$$e(t) = E_m \cdot 1(t), \text{ а затем при } e(t) = E_m \cdot t \cdot 1(t).$$

Сначала найдем все реакции при воздействии

$$e(t) = E_m \cdot 1(t).$$

- 3.1 Определяем $U'(t)$

$$U'(t) = \frac{d}{dt}(E_m) = 0.$$

- 4.1 Так как $U'(t) = 0$, то второе слагаемое в формуле выпадает

$$i_2(t) = U(0) \cdot h_{21}(t) = 100\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot e^{-500t} \sin 500t =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot e^{-500t} \sin 500t, A$$

Находим остальные токи

$$i_3(t) = \frac{L di_2}{r dt} =$$

$$= 10^{-3}(10\sqrt{2})(-500e^{-500t}\sin 500t + 500e^{-500t}\cos 500t) =$$

$$= 5\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t - \sin 500t), A$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot e^{-500t}\sin 500t + 5\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t - \sin 500t) =$$

$$= 5\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t + \sin 500t), A$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_2}{dt} = R \cdot i_3(t) = 50\sqrt{2}e^{-500t}(\cos 500t - \sin 500t), A$$

Найдем все реакции при воздействии $e(t) = E_m \cdot t \cdot 1(t)$:

3.2. Определяем $U'(\tau)$

$$U'(t) = \frac{d}{dt}(E_m \cdot t) = E_m = 100\sqrt{2}.$$

4.2. Так как $U(0) = 0$, то первое слагаемое в формуле выпадает

$$i_2(t) = \int_0^t U'(t) \cdot h_{21}(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t 100\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot e^{-500(t-\tau)} \sin(500 \cdot (t - \tau)) d\tau =$$

$$= 10\sqrt{2} \int_0^t e^{-500(t-\tau)} \sin(500 \cdot (t - \tau)) d\tau =$$

$$= -\frac{10\sqrt{2}}{500} \int_{-500t}^0 e^x \sin x dx = -\frac{1}{25\sqrt{2}} \left(\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) \right) \Big|_{-500t}^0 =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{25\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}(0-1) - \left(\frac{e^{-500t}}{2} (\sin(-500t) - \cos(-500t)) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} (\sin 500t + \cos 500t), A
\end{aligned}$$

Находим остальные токи

$$\begin{aligned}
i_3(t) &= \frac{L di_2}{r dt} = \\
&= 10^{-3} \left(-\frac{1}{25\sqrt{2}} \right) (-500 e^{-500t} (\sin 500t + \cos 500t) + \\
&\quad + 500 e^{-500t} (\sin 500t - \cos 500t)) = \\
&= \frac{1}{50\sqrt{2}} e^{-500t} (-(\sin 500t + \cos 500t) + (\cos 500t - \sin 500t)) = \\
&= \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} \sin 500t, \\
i_1(t) &= i_2(t) + i_3(t) = \\
&= \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} (\sin 500t + \cos 500t), A
\end{aligned}$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = R \cdot i_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{5} e^{-500t} \sin 500t.$$

На рис. 2.5 построены графики всех токов и напряжения на индуктивности при $e(t) = E_m \cdot \delta_1(t)$.

На рис. 2.6 построены графики всех токов и напряжения на индуктивности при $e(t) = E_m \cdot t \cdot \delta_1(t)$.

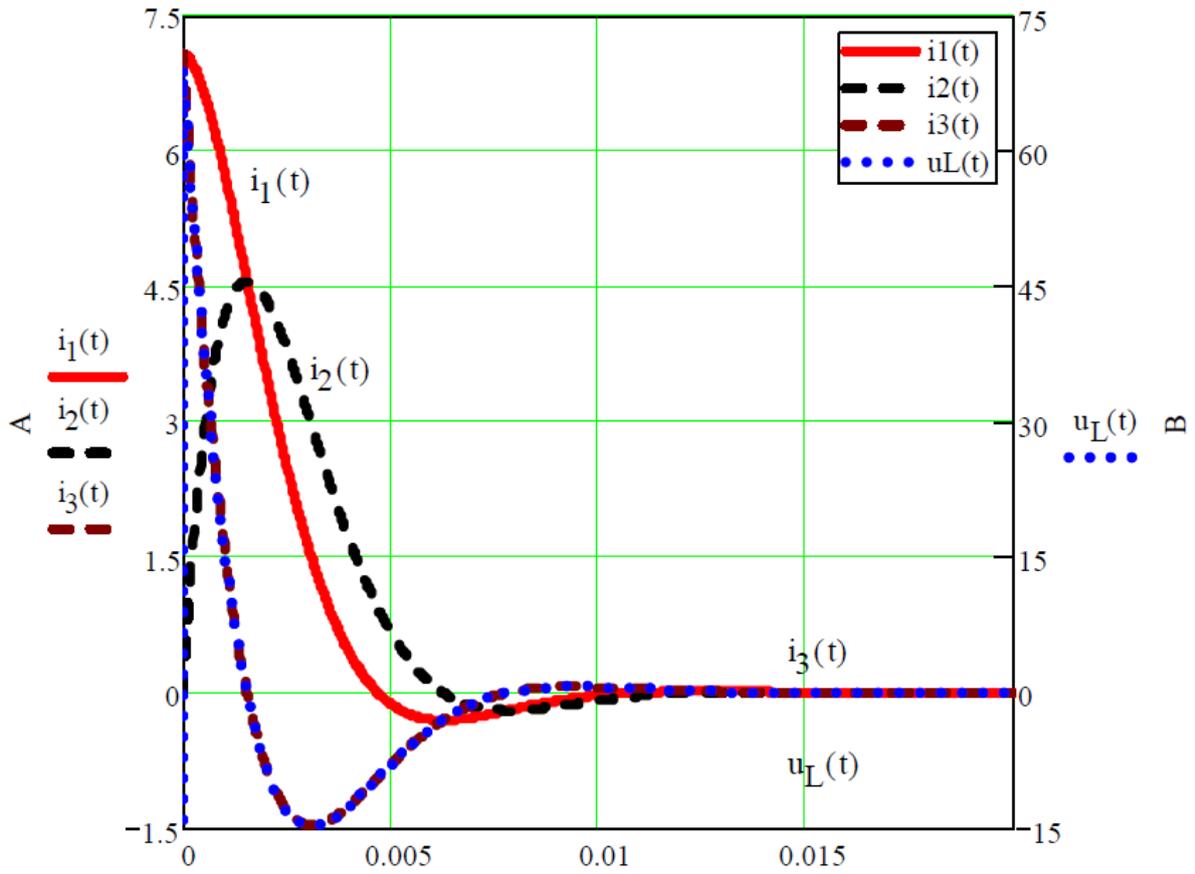


Рисунок 2.5

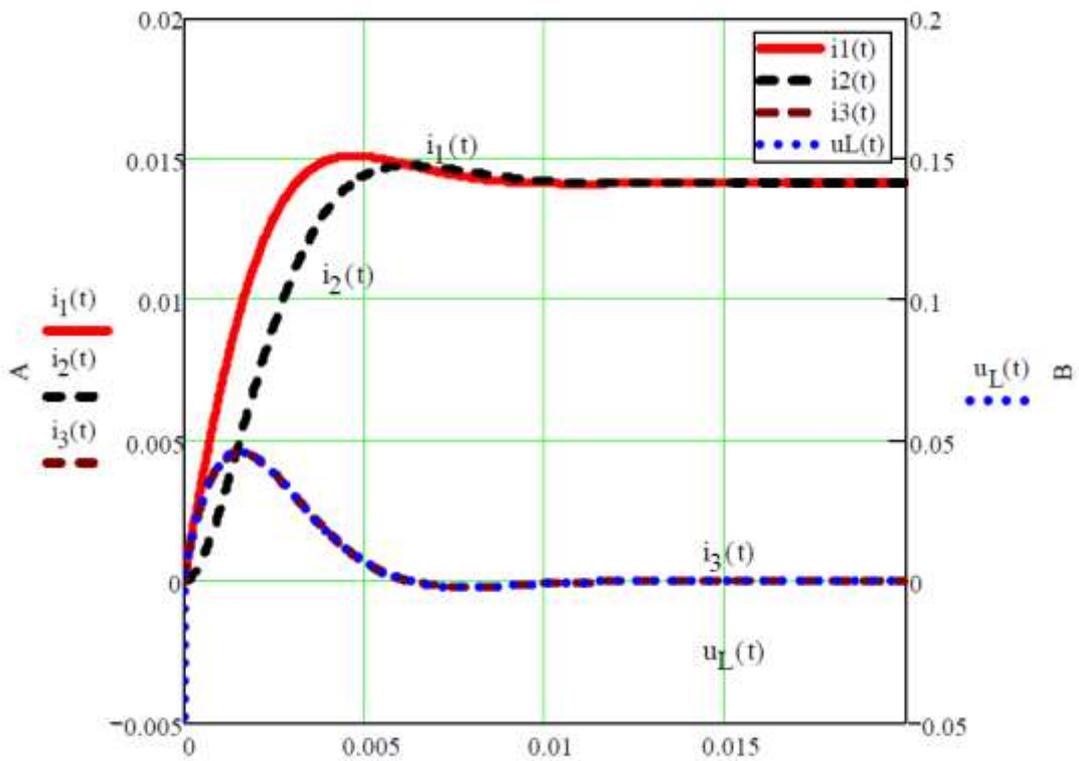


Рисунок 2.6

Пример расчета переходного процесса в цепи переменного тока классическим методом

В цепи рис. 2.7 размыкается ключ К. При этом начинается процесс перехода от одного установившегося режима к другому. Параметры элементов: $e = 100\sqrt{2}$ В, $\omega = 1000\text{с}^{-1}$, $L = 0,01$ Гн, $C = 0,0001$ Ф, $R = 10$ Ом.

Определить переходные функции токов

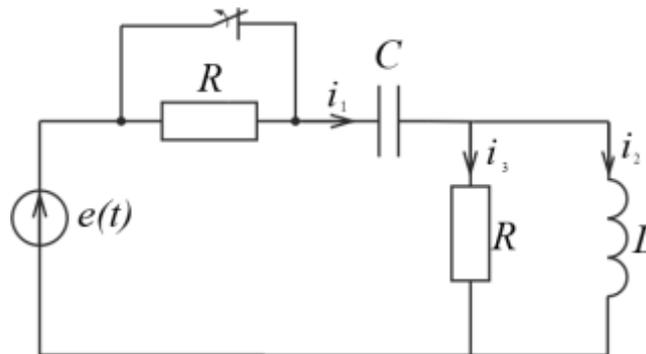


Рисунок 2.7

Решение

Составим систему уравнений электрического состояния цепи для послекоммутационной схемы

$$i_1 = i_2 + i_3, Ri_1 + U_c + L \frac{di_2}{dt} = e(t), U_L = L \frac{di_2}{dt} = Ri_3.$$

Будем искать ток в индуктивности в переходном режиме. Остальные токи определим по выражению тока, используя уравнение (2.3).

Рассчитываем принужденную составляющую тока i_2 . Воспользуемся для расчета комплексным методом. Для комплексной схемы рис. 2.8 имеем

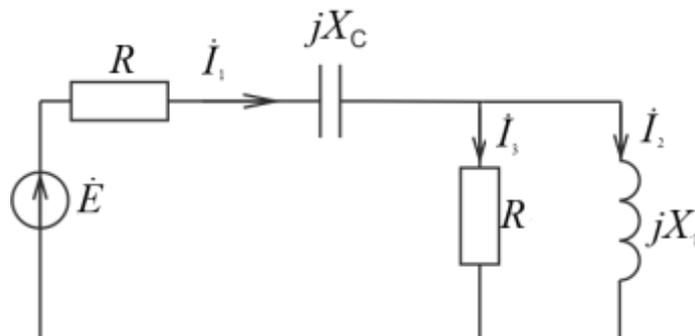


Рисунок 2.8

$$\underline{Z}_1 = r - jX_C = 10 - j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = jX_L = 10j \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 R}{\underline{Z}_2 + R} = 5 + j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 15 + j15 \text{ Ом};$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{E} Z_{23}}{Z_3 Z_2} = \frac{\dot{E} R}{Z_1 Z_2 + Z_2 R + R Z_1} = 4,45 e^{-j26,6^\circ};$$

$$i_2(t) = 6,3 \sin(\omega t - 26,6^\circ) \text{ А.}$$

Сформируем характеристическое уравнение.

Входное сопротивление для схемы рис. 2.8 равно

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R}.$$

Из условия $Z(p) = 0$ получаем уравнение

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

где

$$\delta = \frac{R^2 C + L}{4RLC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2LC}.$$

Определяем значение корней

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\omega' = -500 \pm j500.$$

Корни характеристического уравнения получились комплексными. Выражение для свободной составляющей тока i_2 запишем в виде

$$i_{2\text{св}} = e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

Запишем полное решение для тока i_2 и выражение произ-

водной по времени от тока i_2

$$i_2(t) = i_{2\text{пр}}(t) + i_{2\text{св}}(t) =$$

$$= 6,3 \sin(\omega t - 26,6^\circ) + e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = 6,3 \sin(\omega t - 26,6^\circ) - e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t) +$$

$$+ e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

Для определения постоянных интегрирования нужно знать начальные условия

$$i_2(0) \text{ и } \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}.$$

Определим независимые начальные условия. Для этого считаем установившийся режим в цепи до коммутации (рис. 2.9)

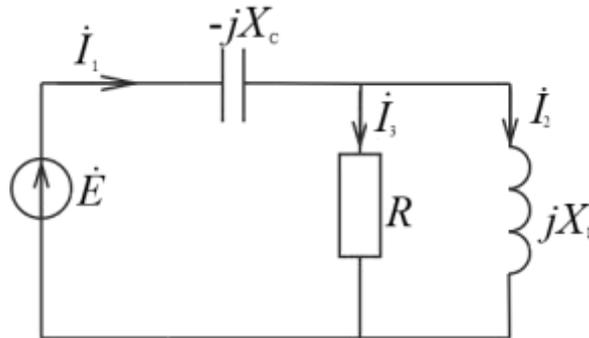


Рисунок 2.9

$$\underline{Z}_1 = -jX_C; \quad \underline{Z}_2 = jX_L;$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 R}{\underline{Z}_2 + R}; \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23};$$

$$\dot{U}_c = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_3} \underline{Z}_1 = 100 - j100; \quad u_c(0) = \sqrt{2} \text{Im}(\dot{U}_c) = 141 \text{ В.}$$

$$i_2 = \frac{\dot{E} Z_{23}}{Z_3 Z_2} = 10; \quad i_2(0) = \sqrt{2} \operatorname{Im}(i_2) = 0 \text{ А.}$$

Запишем систему уравнений (1) для момента времени $t = 0$

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0); \quad Ri_1(0) + u_c(0) + L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = e(0),$$

$$L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = Ri_3(0).$$

Отсюда находим

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{e(0) - Ri_2(0) - u_c(0)}{2L} = 0,707 \cdot 10^4 \text{ А/с.}$$

Подставляя начальные условия $i_2(0)$ и $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0}$ в выражения для искомой величины i_2 , и ее производной $\frac{di_2(t)}{dt}$, получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования

$$\begin{aligned} 0 &= -2,81 + A_2, \\ 7070 &= 56000 - 500A_2 + 500A_1. \end{aligned}$$

Отсюда $A_1 = 5,67$ и $A_2 = 2,81$.

Итак, имеем

$$i_2(t) = 6,3 \sin(\omega t - 26,6^\circ) + 6,32e^{-500t} \sin(\omega' t + 26,36^\circ) \text{ А.}$$

Токи i_1 и i_3 найдем из уравнений (2.1):

$$u_L = Ri_3 = L \frac{di_2}{dt};$$

$$i_3 = \frac{L}{R} \frac{di_2}{dt} = 6,3 \sin(\omega' t + 63,5^\circ) - 4,45e^{-\delta t} \sin(\omega' t - 18,5^\circ), \text{ А.}$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 8,9 \sin(\omega' t + 18,5^\circ) + 4,47 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + 71^\circ), \text{ A.}$$

Пример расчета переходного процесса в цепи переменного тока операторным методом

Рассчитать переходную функцию в схеме рис. 2.7 операторным методом. Из расчета цепи до коммутации (в предыдущем примере) получили независимые начальные условия

$$i_2(0) = 0 \text{ A}; u_c(0) = -141 \text{ В.}$$

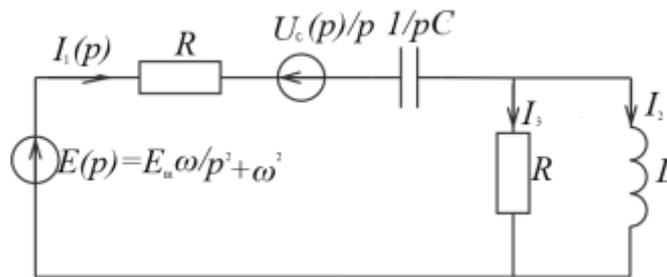


Рисунок 2.10

Составляем операторную схему замещения (рис. 2.10) Воспользуемся для расчета операторным изображением комплекса мгновенной ЭДС

$$e(t) \div E(p) = \frac{E_m (p \cdot \sin(\psi_E) + \omega \cos(\psi_E))}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{или} \quad e(t) \div E(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Внутренняя э.д.с. $Li_2(0)$ отсутствует, так как $i_2(0) = 0$. По закону Ома

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{U(p)}{Z(p)}; \\ U(p) &= E(p) - \frac{U_c(0)}{p} = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{U_c(0)}{p} = \\ &= \frac{-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2}{p \cdot (p^2 + \omega^2)}; \end{aligned}$$

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R} = \frac{2RLCp^2 + (R^2C + L)p + R}{p(LCp + RC)};$$

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{(-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2) \cdot p(LCp + RC)}{p \cdot (p^2 + \omega^2) \cdot (2RLCp^2 + (R^2C + L)p + R)} = \\ &= \frac{(-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2) \left(\frac{1}{2R}p + \frac{1}{2L}\right)}{(p - j\omega)(p + j\omega)(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \delta = \frac{R^2C + L}{4RLC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2LC}.$$

Подставим значения параметров в изображение для тока

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{7,05 \cdot p^3 + 14121 \cdot p^2 + 14121068 \cdot p + 7050000000}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)} = \\ &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \end{aligned}$$

Здесь $p_{1,2} = \pm j\omega = \pm j1000$; $p_{3,4} = -\delta \pm j\omega' = -500 \pm j500$.

Применим теорию разложения

$$\begin{aligned} F_2'(p) &= 4 \cdot p^3 + 3000 \cdot p^2 + 3000000 \cdot p + 1000000000; \\ F_1(p_1) &= -7,07 \cdot 10^9 + j7,07 \cdot 10^9; \quad F_2'(p_1) = -2 \cdot 10^9 - j10^9; \end{aligned}$$

$$F_1(p_3) = 1,752 \cdot 10^9 + j1,763 \cdot 10^9; \quad F_2'(p_3) = 5 \cdot 10^8 + j \cdot 10^9;$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right) + 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} \right) = \\ &= 2 \cdot \operatorname{Re} (4,47 e^{-j71,5^\circ} e^{j1000t}) + 2 \cdot \operatorname{Re} (2,22 e^{-j18,2^\circ} e^{500t} e^{-j500t}) = \\ &= 8,9 \cdot \cos(1000 \cdot t - 71,5^\circ) + 4,4 \cdot e^{-500t} \cos(500t - 18,2^\circ). \end{aligned}$$

Окончательно, после преобразования, получим
 $i_1(t) = 8,9 \sin(\omega t + 18,5) + 4,4e^{-500t} \cos(\omega' t - 71) \text{ А.}$

Задачи

Задача 2.1. В цепи на рис. 2.11 при $t = 0,2 \text{ с}$ напряжение на входе цепи мгновенно падает до нуля. Определить ток в цепи.

Ответ: $i = 200(e^{5t} - e^{10t}) \text{ А,}$
 при $t < 0,2 \text{ с; } i = 344e^{10t} \text{ А}$ при $t \geq 0,2 \text{ с.}$

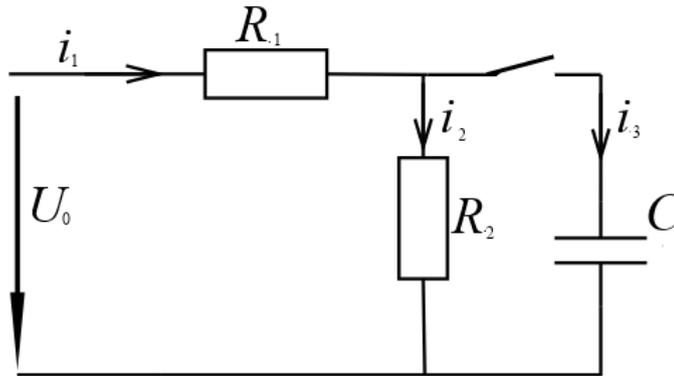


Рисунок 2.11

Задача 2.2. Цепь (рис. 2.12) включается под действием напряжения $u = 100 \sin 314t$; $R_1 = 5 \text{ Ом; } R_2 = 10 \text{ Ом; } C = 318 \text{ мкФ.}$

Определить уравнения токов всех участков цепи при переходном процессе.

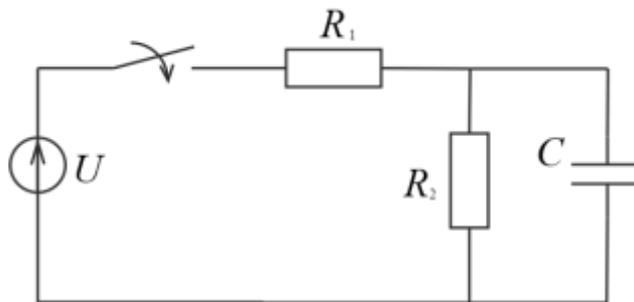


Рисунок 2.12

Ответ: $i_1 = 8,95 \sin(314t + 26,5^\circ) - 4e^{-945t};$
 $i_2 = 6,32 \sin(314t - 18,42^\circ) + 2e^{-945t};$
 $i_3 = 6,32 \sin(314t + 71,58^\circ) - 6e^{-945t}.$

Задача 2.3. Участок с параметрами $R_2 = 300 \text{ Ом; } L = 0,04 \text{ Гн}$ неразветвленной цепи переменного тока, в которой действует

ЭДС $e = 100 \sin(2500t + 60^\circ)$ В, замыкается накоротко (рис. 2.13). Определить ток i на участке цепи с параметрами $R_1 = 20$ Ом, $C = 0,04$ мкФ и напряжение u_c на конденсаторе.

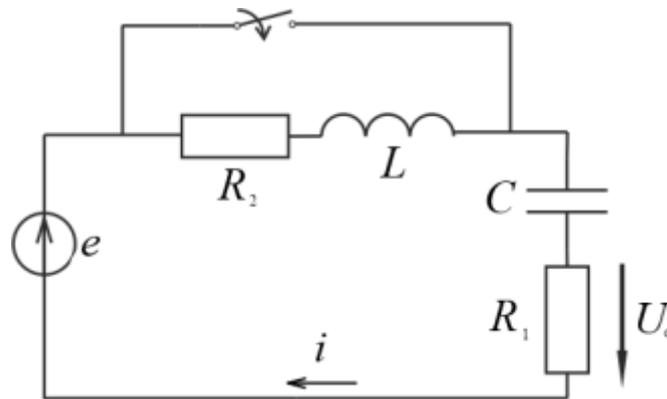


Рисунок 2.13

Ответ: $u_c = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) - 173,6e^{-12500t}$ В,
 $i = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) + 8,68e^{-12500t}$ А.

Литература: 1, § 8.1–8.21, 10.51–1055; [2], § 14.1–14.8; [8], § 3.1–3.6.]

Занятие 3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССАМ

Цель занятия: проверка знаний и умений по расчету переходных процессов в электрических цепях.

Приводится вариант контрольной работы:

Задана схема электрической цепи, в которой происходит коммутация (рис. 11.1).

Дано: $R = 2$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 50$ мкФ, $E = 10$ В.

Найти токи.

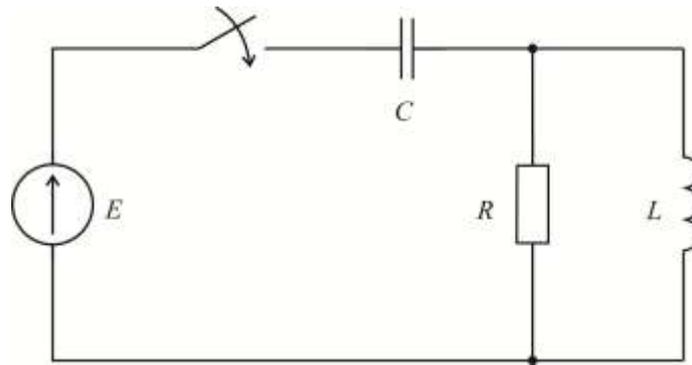


Рисунок 3.1.

Занятие 4

АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий четырехполюсников, применение основных соотношений для расчета четырехполюсников.

Основные положения и соотношения

1. Между напряжениями и токами на входе линейного пассивного четырехполюсника (рис. 4.1) существуют определенные зависимости, которые могут быть записаны в различных формах

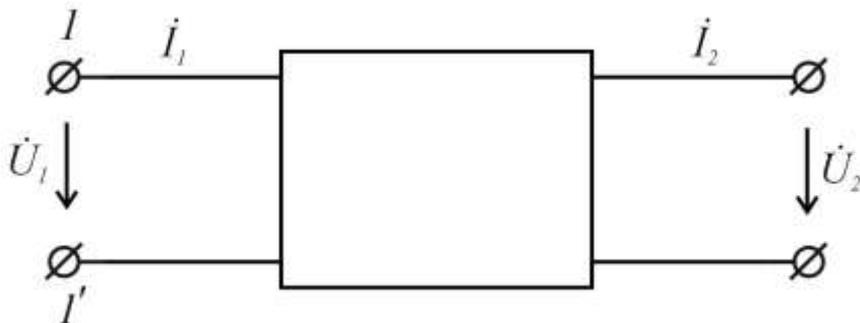


Рисунок 4.1

Уравнения четырехполюсника в наиболее употребительных формах: в форме А

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2,$$

или

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,\end{aligned}$$

в форме Z

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{U}_2 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= Z_{21}\dot{U}_2 + Z_{22}\dot{I}_2,\end{aligned}$$

в форме Y

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Y_{11}\dot{U}_2 + Y_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= Y_{21}\dot{U}_2 + Y_{22}\dot{I}_2,\end{aligned}$$

в форме H

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{U}_2 + H_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= H_{21}\dot{U}_2 + H_{22}\dot{I}_2,\end{aligned}$$

Коэффициенты A , Z , Y и H (называемые так же постоянными четырехполюсников или параметрами четырехполюсников) в общем случае являются комплексными величинами.

Связь между коэффициентами различных форм уравнений четырехполюсников приведена в табл. 4.1.

Здесь для краткости записи величинами $|Z|$, $|Y|$, $|H|$ обозначены определители, составленные из коэффициентов соответствующих матриц, например $|Z| = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$.

2. Способ определения коэффициентов четырехполюсника зависит от того, что известно о четырехполюснике.

а) При известной внутренней схеме и параметрах ее элементов можно составить уравнения по законам Кирхгофа. После необходимых преобразований их составляют с соответствующими уравнениями четырехполюсника и определяют коэффициенты последних.

Если уравнения составить по методу контурных токов, то вычислив определитель систем уравнений Δ и соответствующие алгебраические дополнения Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} и Δ_{22} можно найти необ-

ходимые коэффициенты. Так коэффициенты четырехполюсника A, B, C, D определяются по формулам

$$A = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}; \quad B = \frac{\Delta}{\Delta_{12}}; \quad C = \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta \Delta_{12}}; \quad D = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}.$$

Между коэффициентами четырехполюсника существует связь $AD - BC = 1$, поэтому только три коэффициента являются независимыми.

Если по схеме четырехполюсника и ее параметрам определить сопротивление холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника со стороны первичных зажимов $(\underline{Z}_{10}, \underline{Z}_{1k})$ и со стороны вторичных зажимов $(\underline{Z}_{20}, \underline{Z}_{2k})$, то по этим величинам можно также найти коэффициенты четырехполюсника. Для формы A

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2k}}} = \frac{\underline{Z}_{10}}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k})}}; \quad C = \frac{1}{\underline{Z}_{10}} \cdot A;$$

$$B = \underline{Z}_{2k} \cdot A = \underline{Z}_{1k} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k}}}; \quad D = \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}} \cdot A.$$

Таблица 4.1

		<i>Матрицы четырехполюсников, выраженные через различные параметры</i>						
		<i>A</i>	<i>Z</i>		<i>Y</i>		<i>H</i>	
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$-\frac{ Z }{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$-\frac{ H }{H_{21}}$	$\frac{H_{11}}{H_{21}}$
	<i>C</i>	<i>D</i>	$\frac{1}{Z_{21}}$	$-\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{ Y }{Y_{21}}$	$\frac{Y_{11}}{Z_{21}}$	$-\frac{H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{1}{H_{21}}$
<i>Z</i>	$\frac{A}{C}$	$-\frac{1}{C}$	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{Y_{22}}{ Y }$	$-\frac{Y_{12}}{ Y }$	$\frac{ H }{H_{22}}$	$\frac{H_{12}}{H_{22}}$
	$\frac{1}{C}$	$-\frac{D}{C}$	Z_{21}	Z_{22}	$-\frac{Y_{21}}{ Y }$	$\frac{Y_{11}}{ Y }$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}}$	$\frac{1}{H_{22}}$

<i>Матрицы четырехполюсников, выраженные через различные параметры</i>								
	A		Z		Y		H	
Y	$\frac{D}{B}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{Z_{22}}{ Z }$	$-\frac{Z_{12}}{ Z }$	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{1}{H_{11}}$	$-\frac{H_{12}}{H_{11}}$
	$\frac{1}{B}$	$-\frac{A}{B}$	$-\frac{Z_{21}}{ Z }$	$\frac{Z_{11}}{ Z }$	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{ H }{H_{11}}$
H	$\frac{B}{D}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{ Z }{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	H_{11}	H_{12}
	$\frac{1}{D}$	$-\frac{C}{D}$	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{11}}$	H_{21}	H_{22}

б) Если внутренняя схема данного четырехполюсника неизвестна, коэффициенты четырехполюсника могут быть определены по данным опытов холостого хода и короткого замыкания. Если в результате опытов будут найдены сопротивления холостого хода и короткого замыкания, коэффициенты четырехполюсника определяются по приведенным выше формулам. Если в результате опытов будут найдены комплексные напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника, то коэффициенты

$$A = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}}; \quad B = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{2k}}; \quad C = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}}; \quad D = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_{2k}}.$$

3. Пассивный четырехполюсник характеризуется только тремя независимыми параметрами, поэтому простейшая схема замещения четырехполюсника содержит три элемента.

На рис. 4.2 приведена T-образная схема замещения четырехполюсника, параметры которой определяются по коэффициентам A, B, C, D четырехполюсника

$$\underline{Z}_1 = \frac{A - 1}{C}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{D - 1}{C}; \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{C}.$$

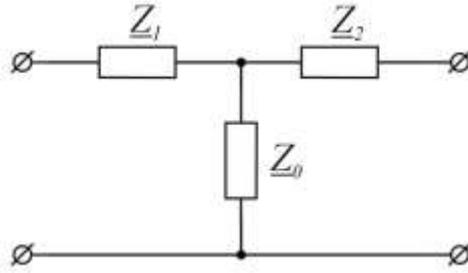


Рисунок 4.2

Параметры П-образной схемы замещения (рис. 4.3) определяются

$$\underline{Z}_1 = \frac{B}{D-1}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{B}{A-1}; \quad \underline{Z}_0 = B.$$

Если четырехполюсник состоит из трех элементов \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 и \underline{Z}_0 , образующих Т-образную схему (рис. 4.2), то коэффициенты формы А будут равны

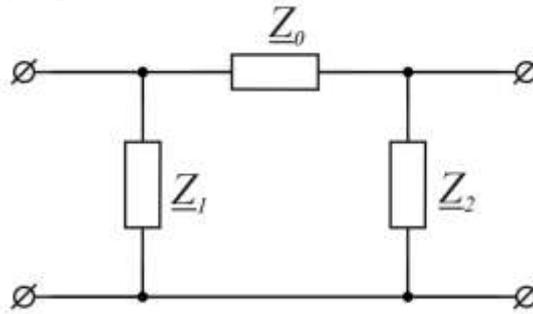


Рисунок 4.3

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}; \quad C = \frac{1}{\underline{Z}_0};$$

$$B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}; \quad D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}.$$

При П-образной схеме (рис. 4.3)

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_2}; \quad C = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2};$$

$$B = \underline{Z}_0; \quad D = 1 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1}.$$

4. Входное сопротивление четырехполюсника зависит от нагрузки, включенной к его выходным зажимам. Оно может быть определено так

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\underline{Z}_H + B}{AC_H + D} = \underline{Z}_{10} \frac{\underline{Z}_{2k} + \underline{Z}_H}{\underline{Z}_{20} + \underline{Z}_H}.$$

5. Четырехполюсник называется симметричным, если при перемене местами его входных и выходных зажимов не изменяются токи и напряжения в цепи, с которого он соединен. Этому соответствует равенство коэффициентов четырехполюсника

$$A = D = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_k}}.$$

Связь между коэффициентами симметричного четырехполюсника

$$A^2 - BC = 1.$$

Симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя независимыми параметрами, поэтому в схемах замещения такого четырехполюсника $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

Входное сопротивление симметричного четырехполюсника

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{A\underline{Z}_H + B}{AC_H + A} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_k + \underline{Z}_H}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_H}.$$

6. В теории симметричных четырехполюсников кроме коэффициентов А, В, С широко применяются так называемые характеристические параметры – характеристическое сопротивление \underline{Z}_C и коэффициент распространения (постоянная передачи) γ .

Характеристическое сопротивление \underline{Z}_C обладает следующим свойством: входное сопротивление симметричного четырехполюсника, нагруженного сопротивлением \underline{Z}_C , равно сопротивлению \underline{Z}_C .

Характеристическое сопротивление может быть определено по коэффициентам четырехполюсника или по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания

$$Z_{ex} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{Z_0 \cdot Z_k}.$$

Коэффициентом передачи называется комплексное число
 $\gamma = \alpha + j\beta,$

вещественная часть α называется коэффициентом затухания, а мнимая β коэффициентом фазы.

Коэффициент затухания α показывает, как изменяется величина напряжения и тока при прохождении через четырехполюсник

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}.$$

Коэффициент затухания измеряется в неперах.

Коэффициент фазы β показывает, как изменяется фаза напряжения или тока при прохождении через четырехполюсник

$$\beta = \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \psi_{I_1} - \psi_{I_2}.$$

Коэффициент фазы измеряется в радианах.

Коэффициент распространения может быть определен по коэффициентам четырехполюсника

$$\gamma = \alpha + j\beta = \ln(A + \sqrt{BC}).$$

или по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания

$$e^{2\gamma} = e^{2(\alpha + j\beta)} = \frac{1 + th\gamma}{1 - th\gamma},$$

где

$$th\gamma = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_0}}.$$

7. Режим симметричного четырехполюсника, при котором сопротивление нагрузки $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$, называется согласованным. При согласованном режиме работы уравнения симметричного четырехполюсника могут быть записаны так

$$\dot{U}_1 = e^\gamma \cdot \dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = e^\gamma \cdot \dot{I}_2.$$

8. Коэффициенты A, B, C симметричного четырехполюсника могут быть выражены через характеристические параметры

$$A = D = ch\gamma,$$

$$B = \underline{Z}_C sh\gamma,$$

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh\gamma.$$

Поэтому при любом режиме работы симметричного четырехполюсника вместо уравнения в форме А можно применять уравнения в гиперболических функциях

$$\dot{U}_1 = ch\gamma \cdot \dot{U}_2 + \underline{Z}_C sh\gamma \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh\gamma \cdot \dot{U}_2 + ch\gamma \dot{I}_2.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется четырехполюсником?
2. Записать уравнения четырехполюсника в различных формах.
3. Как определить коэффициенты четырехполюсника по его схеме?
4. Как определить коэффициенты по опытам холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника?
5. Какая существует связь между коэффициентами четырехполюсника A, B, C, D ?
6. Начертить схемы замещения четырехполюсника.

7. В каких пределах изменится входное сопротивление четырехполюсника при изменении режима на вторичных зажимах от холостого хода до короткого замыкания?

8. Объяснить различие между симметричным и несимметричным четырехполюсником.

9. Можно ли по схеме четырехполюсника определить, что он симметричен?

10. Почему симметричный четырехполюсник можно характеризовать только двумя независимыми параметрами?

11. Какой режим работы симметричного четырехполюсника называется согласованным?

12. Как определить коэффициенты уравнений симметричного четырехполюсника в форме A по известным характеристическому сопротивлению и коэффициенту распространения и наоборот?

13. Записать уравнения симметричного четырехполюсника с характеристическими параметрами при работе на нагрузку и в частном случае работы на согласованную нагрузку.

14. Привести примеры симметричных четырехполюсников, используемых в технике.

Задачи

Задача 4.1. Определить коэффициенты четырехполюсника A , B , C , D (рис. 4.4) используя метод контурных токов, если $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $X_2 = 18 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$, $X_3 = 30 \text{ Ом}$, $R_4 = 24 \text{ Ом}$, $X_4 = -20 \text{ Ом}$.

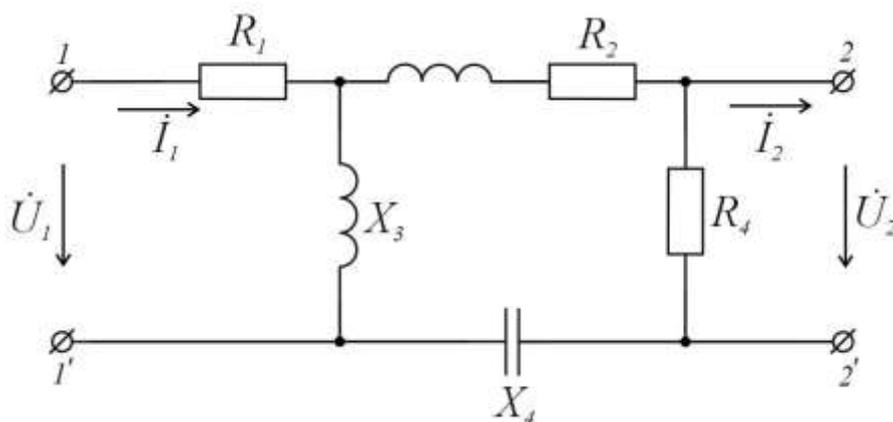


Рисунок 4.4

Решение

1. Поскольку \dot{U}_1 равно электродвижущей силе идеального источника, включенного к зажимам **1-1'**, а \dot{U}_2 является напряжением на нагрузке, включенной к зажимам **2-2'**, для трех контуров с контурными токами \dot{I}_I , \dot{I}_{II} и \dot{I}_{III} (рис. 4.4, а) уравнения будут

$$(R_1 + jX_3)\dot{I}_I + (-jX_3)\dot{I}_{III} = \dot{U}_1;$$

$$(R_4 + \underline{Z}_H)\dot{I}_{II} + (-R_4)\dot{I}_{III} = 0;$$

$$(-jX_3)\dot{I}_I + (-R_4)\dot{I}_{II} + (jX_3 + jX_2 + R_2 + R_4 - jX_4)\dot{I}_{III} = 0.$$

2. После подстановки числовых значений и учитывая, что $\underline{Z}_H \dot{I}_{II} = \dot{U}_2$, можно получить

$$(30 + j30)\dot{I}_I + (-j30)\dot{I}_{III} = \dot{U}_1;$$

$$24\dot{I}_{II} + (-24)\dot{I}_{III} = -\dot{U}_2;$$

$$(-j30)\dot{I}_I + (-24)\dot{I}_{II} + (39 + j28)\dot{I}_{III} = 0.$$

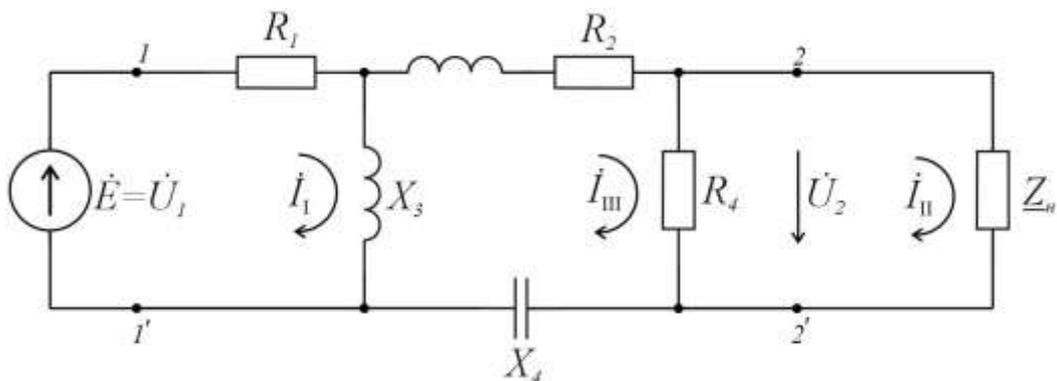


Рисунок 4.4, а

3. Определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 + j30 & 0 & -j30 \\ 0 & 24 & -24 \\ -j30 & -24 & 39 + j28 \end{vmatrix} = 33400e^{j68,33^\circ}$$

4. Алгебраические дополнения

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ -j30 & 39 + j28 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} = j720;$$

$$\Delta_{21} = \Delta_{12} = j720;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 39 + j28 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} = 764e^{j61,83^\circ};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 30 + j30 & -j30 \\ -j30 & 39 + j28 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+2} = 2350e^{j58,50^\circ}.$$

5. Коэффициенты четырехполюсника

$$A = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} = \frac{2350e^{j58,50^\circ}}{720e^{j90^\circ}} = 3,27e^{-j31,52^\circ};$$

$$B = \frac{\Delta}{\Delta_{12}} = \frac{33400e^{j68,33^\circ}}{720e^{j90^\circ}} = 46,5e^{-j21,67^\circ} \text{ Ом};$$

$$C = \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} =$$

$$= \frac{764e^{j61,83^\circ} \cdot 2350e^{j58,50^\circ} - 720e^{j90^\circ} \cdot 720e^{j90^\circ}}{33400e^{j68,33^\circ} \cdot 720e^{j90^\circ}} =$$

$$= 0,066e^{-j54^\circ} \text{ См};$$

$$D = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{764e^{j61,83^\circ}}{720e^{j90^\circ}} = 1,06e^{-j28,17^\circ}.$$

6. Проверка по уравнению $AD - BC = 1$ подтверждает правильность решения.

Задача 4.2. По данным опытов были определены сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника $\underline{Z}_{10} = 40 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{20} = 20 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{2k} = 10 \text{ Ом}$. Определить параметры Т-образной схемы замещения четырехполюсника. Определить соотношение между токами на входе и выходе при коротком замыкании на вторичных зажимах четырехполюсника.

Решение

1. Определение коэффициентов А – формы четырехполюсника

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2k}}} = \sqrt{\frac{40}{20 - 10}} = 2,$$

$$B = \underline{Z}_{2k} \cdot A = 10 \cdot 2 = 20 \text{ Ом},$$

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_{10}} A = \frac{1}{40} \cdot 2 = 0,05 \text{ См},$$

$$D = \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}} A = \frac{20}{40} \cdot 2 = 1.$$

2. Определение соотношения между токами. При коротком замыкании $\dot{U}_2 = 0$, поэтому

$$\dot{I}_{1k} = D\dot{I}_{2k}, \quad \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_{2k}} = D = 1$$

3. Определение параметров Т-образной схемы замещения

$$\underline{Z}_1 = \frac{A - 1}{C} = \frac{2 - 1}{0,05} = 20 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{D - 1}{C} = 0;$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{C} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ Ом}.$$

Схема замещения изображена на рис. 4.5

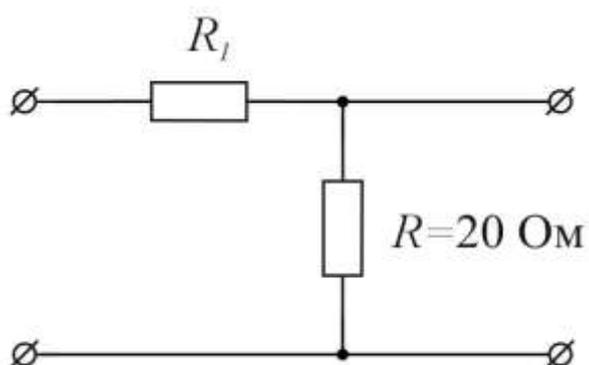


Рисунок 4.5

Задача 4.3. Составить П-образную схему замещения симметричного четырехполюсника, если известны его коэффициенты $A = 5, B = j4 \text{ Ом}$.

Решение

1. Определяем параметры П-образной схемы замещения

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{B}{A - 1} = \frac{j4}{5 - 1} = j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_0 = B = j4 \text{ Ом}.$$

2. Схема замещения приведена на рис. 4.6

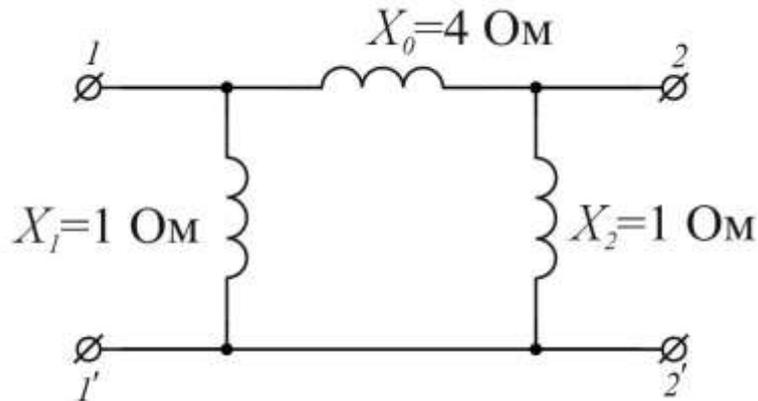


Рисунок 4.6

Задача 4.4. Определить коэффициенты A , B , C , D четырехполюсника (рис. 4.7) по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания, которые нужно предварительно вычислить, если дано: $X_1 = 10 \text{ Ом}$, $X_3 = 5 \text{ Ом}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$.

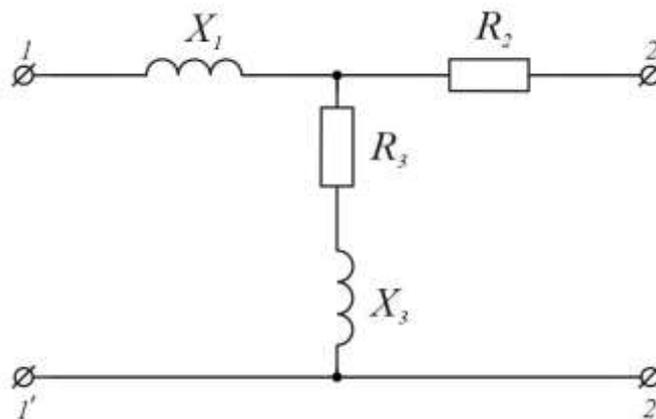


Рисунок 4.7

Ответ:

$$A = 2 + j; \quad B = (20 + j20) \text{ Ом};$$

$$C = (0,1 - j0,1) \text{ См}; \quad D = 2 - j.$$

Задача 4.5. Определить параметры Т-образной схемы замещения симметричного четырехполюсника, если известны его коэффициенты $B = 0$; $C = -j0,25 \text{ См}$.

Ответ: $\underline{Z}_0 = j4 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 0$.

или $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = -j8 \text{ Ом}$. (Условию задачи удовлетворяют две схемы).

Задача 4.6. Сопротивление холостого хода и короткого замыкания симметричного четырехполюсника равны $\underline{Z}_0 = 1 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_k = 3 \text{ Ом}$. Начертить T-образную схему замещения.

Ответ: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 2 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_0 = 2 \text{ Ом}$.

Литература: [1], § 4.1–6.8; [2], § 9.1–9.14; [6], § 8.1–8.8.

Занятие 5

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий нелинейных электрических и магнитных цепей постоянного тока, применение основных соотношений для расчета нелинейных цепей.

Основные положения и соотношения

1. Для расчета нелинейных цепей постоянного тока применяются графические, аналитические, графоаналитические и численные методы. При расчете целесообразно предварительно провести преобразование схемы таким образом, чтобы упростить уравнение цепи. В частности, для цепи с одним нелинейным элементом можно преобразовать линейную часть схемы, применяя теорему об активном двухполюснике.

Для графического расчета цепи нужно характеристики всех ветвей записать в функцию одного и того же аргумента. В этом случае система уравнений цепи приводится к одному уравнению с одним неизвестным. Решение часто целесообразно проводить методом пересечений, при котором нелинейное уравнение разбивается на две части

$$f_1(x) = f_2(x),$$

после чего строятся характеристики $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и решение определяется точкой их пересечения.

При аналитическом методе расчета можно рекомендовать аппроксимацию характеристик нелинейных элементов полиномом второй и третьей степени. В этом случае расчет сводится к решению квадратного или кубического уравнения.

Характеристики нелинейных элементов (резисторов), рассматриваемых в задачах приведены на рис. 5.1–5.2.

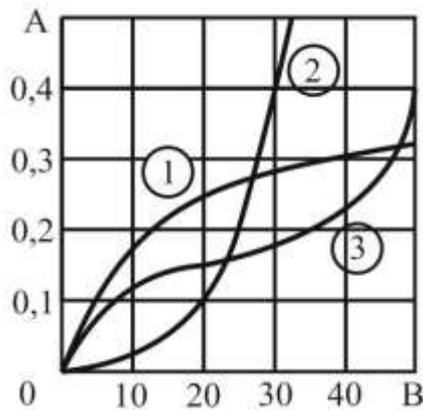


Рисунок 5.1

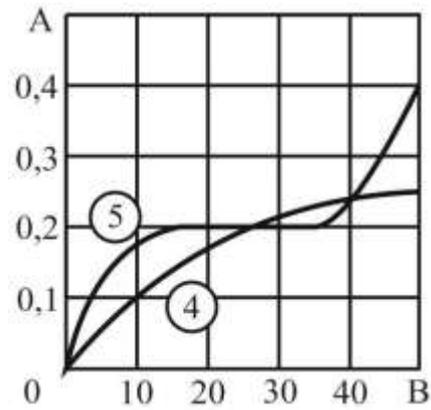


Рисунок 5.2

2. Для участка магнитной цепи магнитная индукция

$$B = \Phi/S,$$

где Φ – магнитный поток; S – поперечное сечение участка; магнитное напряжение

$$U_m = Hl = \Phi R_m,$$

где H – напряженность магнитного поля; l – средняя длина участка; магнитное сопротивление участка

$$R_m = l/\mu_r\mu_0S,$$

где μ_r – относительная магнитная проницаемость материала участка; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, Гн/м.

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля участка связаны соотношением

$$B = \mu_r\mu_0H.$$

При расчете магнитных цепей при постоянных потоках зависимость между B и H для ферромагнитных участков задается кривой намагничивания (табл. 5.1). Для воздуха и для воздушных

зазоров $\mu_r = 1$, следовательно,

$$H = B/\mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 \text{ В},$$

где H в амперах на метр, а B в теслах.

Если H измеряется в квадратных единицах, А/см, то

$$H = 0,8 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Магнитодвижущая сила (м.д.с.)

$$F = Iw,$$

где I – ток в обмотке; w – число витков обмотки.

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия:

Электрические цепи	Магнитные цепи
Ток I , А	Поток Φ , Вб
ЭДС E , В	М.д.с. F , А
Сопротивление R , Ом	Магнитное сопротивление R_m 1/Гн
Проводимость g , См	Магнитная проводимость g_m , Гн
Напряжение U , В	Магнитное напряжение U_m , А

Эта формальная аналогия распространяется и на методы расчета магнитных цепей.

Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи

$$\sum \Phi = 0$$

и второй

$$\sum F = \sum U_m = \sum Hl = \sum \Phi R_m.$$

В большинстве случаев магнитные цепи – нелинейные, и их расчет аналогичен расчету нелинейных электрических цепей.

Аналогом вольт – амперной характеристики $U(I)$ является вебер – амперная характеристика $\Phi(U_m)$, которая рассчитывается по заданным кривым намагничивания $B(H)$ и геометрическим размерам участков магнитной цепи.

Вебер – амперная характеристика (часто называют магнитной характеристикой) рассчитывается в следующем порядке: задают индукцию B , вычисляют поток $\Phi = BS$, по кривой $B(H)$ определяют H и находят $U_m = Hl$.

В слабых полях $\mu_r \approx \text{const}$, следовательно, и $R_m \approx \text{const}$, поэтому магнитная цепь рассчитывается как линейная.

Для наглядности можно составить эквивалентную электрическую схему, при помощи которой выполняется расчет.

Контрольные вопросы

1. Какая цепь называется нелинейной?
2. В чем заключается графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока?
3. Как определяются магнитная индукция, магнитное напряжение, магнитное сопротивление?
4. Каким соотношением связаны магнитная индукция и напряженность магнитного поля?
5. Сформулируйте законы Кирхгофа для магнитных цепей.

Задачи

Пример расчета нелинейной цепи графическим методом

Задача 5.1. Нелинейный двухполюсник (рис. 5.3) состоит из последовательно включенных линейного резистора с сопротивлением $R = 8 \text{ Ом}$ и нелинейного резистора, характеристика которого приведен на рис 5.1.

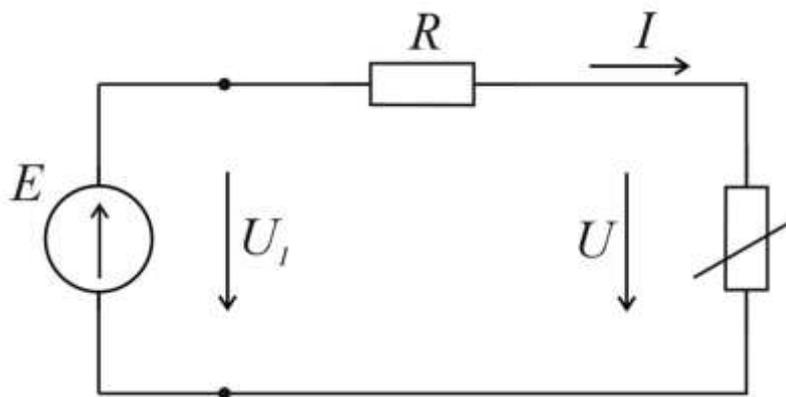


Рисунок 5.3

Построить:

- 1) вольт – амперную характеристику двухполюсника $I(U_1)$;
- 2) зависимость напряжения U на нелинейном элементе от входного напряжения U_1 . Определить ток I при ЭДС $E = 40$ В.

Решение

1. Цепь описывается уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа,

$$U_1(I) = rI + U(I) = U_r(I) + U(I), \quad (5.1)$$

т. е алгебраическим выражением вольт – амперной характеристики пассивного двухполюсника. Построение этой характеристики приведено на рис. 5.4, а. Здесь 1 – характеристика $U_r(I)$ линейного резистора; 2 – характеристика нелинейного резистора $U(I)$; 3 – характеристика, полученная суммированием характеристик согласно уравнению (1), которая является искомой вольт – амперной характеристикой двухполюсника $U_1(I)$.

2) Отмечая напряжение на входе цепи U_1 (кривая 3) и на нелинейном элементе U (кривая 2) при одинаковых значениях тока, строим зависимость $U(U_1)$, показанную на рис. 5.4, б.

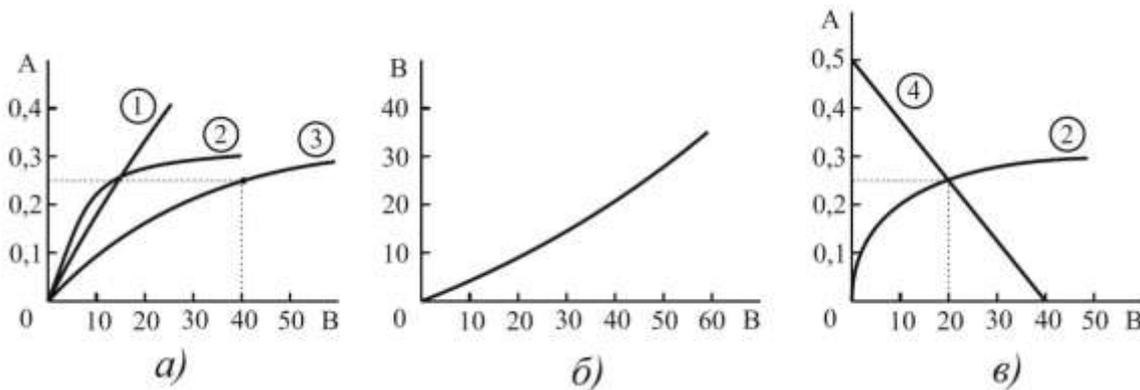


Рисунок 5.4

При $E = U_1 = 40$ В ток $I = 0,25$ А определим непосредственно по построенной вольт – амперной характеристики двухполюсника – кривой 3 на рис. 5.4, а.

Если вольт – амперная характеристика двухполюсника не строится, то ток может быть найден методом пересечений. Запи-

шем уравнение цепи в виде

$$U(I) = E - rI$$

и построим (рис. 5.4,в) характеристики левой (кривая 2) и правой (прямая 4) частей этого уравнения. Равенство левой и правой частей соответствует точке их пересечения. В точке пересечения $I = 0,25 \text{ A}$ ($U = 20 \text{ В}$).

Примеры расчета аналитическим методом

Задача 5.2. Цепь состоит из последовательно соединенных линейного резистора с сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$ и нелинейного резистора, подключенных к источнику ЭДС $E = 18 \text{ В}$ (см. рис. 5.3). Вольт – амперная характеристика нелинейного резистора при положительных значениях тока и напряжения $I \geq 0$, $U \geq 0$ может быть аппроксимирована зависимостью

а) $U = aI + bI^2$, где $a = 6 \text{ В/А}$; $b = 2 \text{ В/А}^2$;

б) $I = \alpha U + \beta U^2$, где $\alpha = 0,05 \text{ А/В}$, $\beta = 0,003 \text{ А/В}^2$.

Определить ток в цепи.

Решение

а) Запишем уравнение цепи по второму закону Кирхгофа

$$rI + U(I) = E.$$

После подстановки $U(I)$ получим квадратное уравнение

$$bI^2 + (r + a)I - E = 0$$

или при заданных числовых значениях $2I^2 + 16I - 18 = 0$, откуда находим $I = 1 \text{ А}$.

Решение

$I = -9 \text{ А}$ не удовлетворяет условиям аппроксимации и поэтому не имеет смысла.

Пример расчета магнитной цепи

Задача 5.3. Магнитная цепь, изображенная на рис. 5.5 выполнена из электротехнической стали 1211 и имеет следующие размеры: $l_1 = 60 \text{ см}$; $l_2 = 20 \text{ см}$; $l_{\text{в}} = 0,1 \text{ см}$; $l_3 = 80 \text{ см}$; $S_1 = S_2 = S_3 = 10 \text{ см}^2$. Магнитные потоки в крайних стержнях

$$\Phi_1 = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ Вб} \text{ и } \Phi_3 = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Найти МДС $F_1 = I_1 w_1$ и $F_3 = I_3 w_3$; указать направление токов обмотках.

Решение

По первому закону Кирхгофа для магнитной цепи

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Индукция стержня

$$B_1 = \Phi_1 / S_1 = 0,25 \text{ Тл}; B_2 = \Phi_2 / S_2 = 1,56 \text{ Тл};$$

$$B_3 = \Phi_3 / S_3 = 1,31 \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания для стали 1211 (см. табл. 5.1) находим: $H_1 = 0,6 \text{ А/см}; H_2 = 20 \text{ А/см}; H_3 = 6 \text{ А/см.}$

По второму закону Кирхгофа определяем МДС

$$F_1 = I_1 w_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_B l_B \approx 1,56 \text{ А};$$

$$F_3 = I_3 w_3 = H_3 l_3 + H_2 l_2 + H_B l_B \approx 2130 \text{ А.}$$

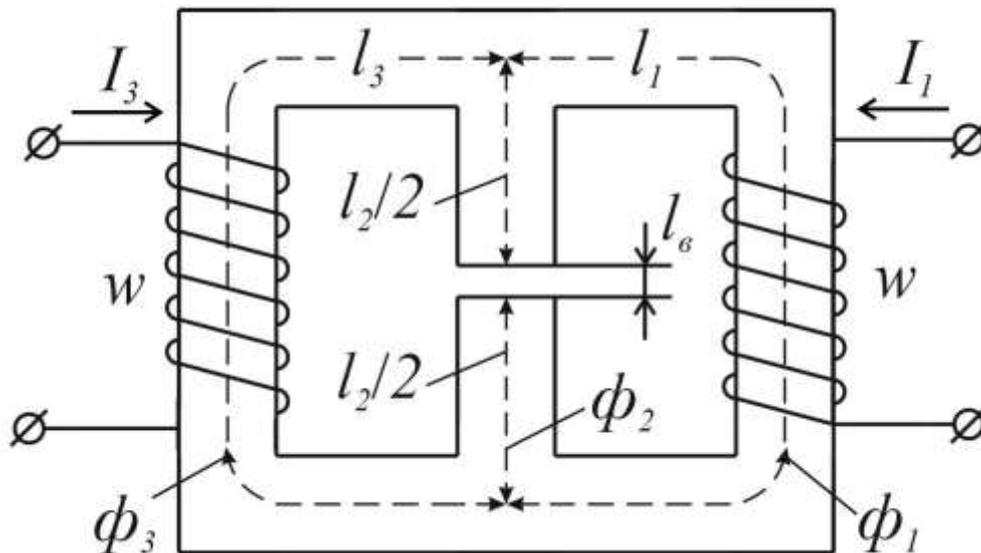


Рисунок 5.5

Таблица 5.1

Кривые намагничивания сталей 1211, 1411, 1512, 1561

Марка стали, индукция	<i>H, A/cm</i>																		
	0,	0,2	0,4	1	1,4	1,8	2,4	4	6	8	10	12	14	18	22	24	40	80	120
1211, <i>B</i> , Тл	0	0,03	0,11	0,53	0,73	0,90	1,10	1,23	1,32	1,38	1,42	1,45	1,48	1,54	1,57	1,59	1,64	1,75	1,83
1411, <i>B</i> , Тл	0	0,04	0,18	0,67	0,81	0,92	1,05	1,14	1,23	1,30	1,38	1,42	1,46	1,50	1,53	1,55	1,59	1,69	1,78
1512, <i>B</i> , Тл	0	0,11	0,35	0,73	0,87	0,96	1,06	1,16	1,25	1,32	1,37	1,40	1,44	1,48	1,50	1,51	1,57	1,68	1,78
1561, <i>B</i> , Тл	0	0,20	0,44	0,75	0,88	0,98	1,11	1,20	1,27	1,32	1,37	1,40	1,42	1,44	1,46	1,47	1,54	1,65	1,74

Задача 5.4. В схеме рис. 5.6 $R = 100 \text{ Ом}$, характеристика нелинейного элемента (симметричная) дана на рис. 5.2 (кривая 5).

Построить зависимость напряжения на выходе цепи U_2 от входного напряжения U_1 .

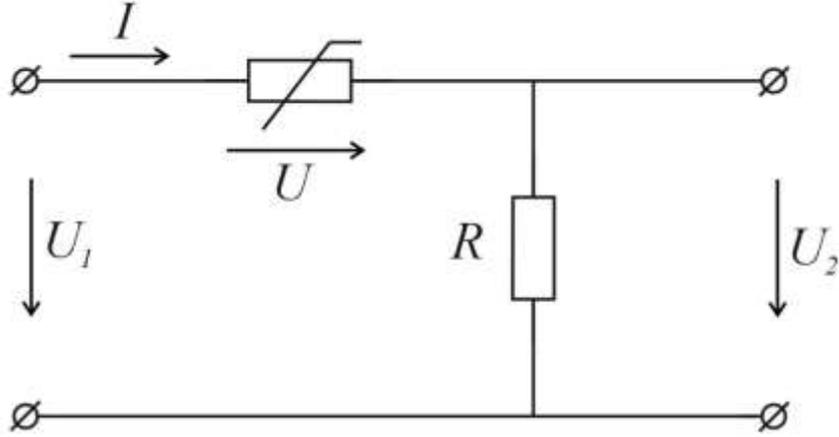


Рисунок 5.6

Задача 5.5. В схеме рис. 5.7 $R_1 = 4 \text{ Ом}$; $R_2 = 1,33 \text{ Ом}$; $E = 6 \text{ В}$. Вольт – амперная характеристика нелинейного резистора может быть при $U \geq 0$, $I \geq 0$ аппроксимирована зависимостью:

а) $I = aU^2$, где $a = 0,5 \text{ Ф/В}^2$;

б) $U = bI^2$, где $b = 4 \text{ В/А}^2$.

Определить все токи и напряжение на линейном резисторе U .

Ответ: 0,50 А; 1,25 А; 0,75 А; 1 В.

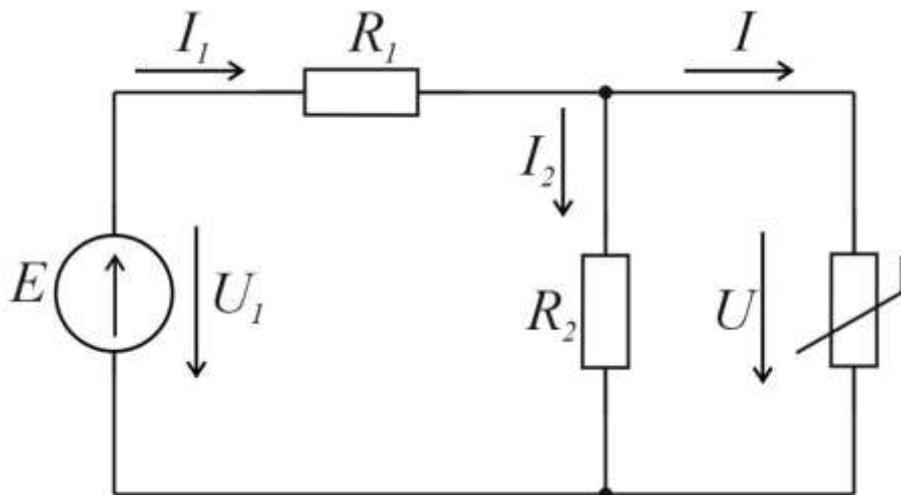


Рисунок 5.7

Задача 5.6. В воздушном зазоре электромагнита, выполненного из стали 1411 (рис. 5.8), необходимо создать индукцию $B = 0,05$ Тл.

Определить МДС, необходимую для создания магнитного потока с заданной индукцией, если $l_c + l_я = 100$ см, суммарный воздушный зазор $2l_в = 1$ мм, сечение магнитопровода одинаково по всей длине электромагнита и равно 16 см².

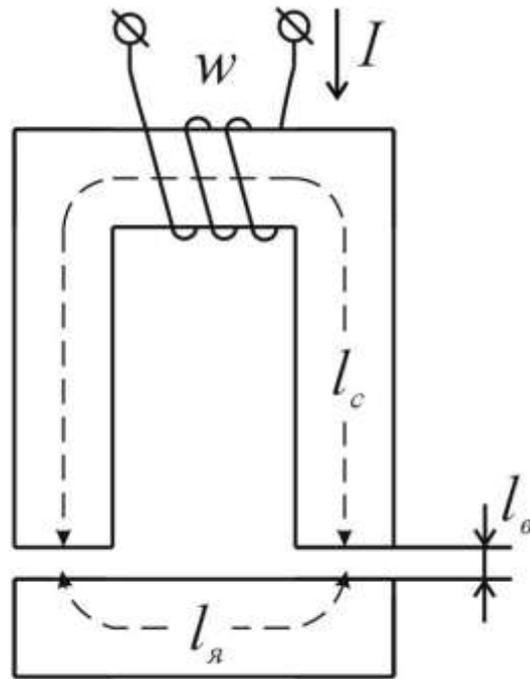


Рисунок 5.8

Ответ: $F = 1080$ А

Задача 5.7. Магнитная цепь на рис. 5.9 выполнена из электротехнической стали 1561 и имеет следующие размеры: $l_1 = 40$ см; $l_2 = 12$ см; $l_3 = 30$ см; $S_1 = S_3 = 4$ см²; $S_2 = 2$ см². Магнитодвижущая сила $F = 1800$ А, поток в первом стержне

$$\Phi_1 = 5,94 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Определить длину воздушного зазора $l_в$.

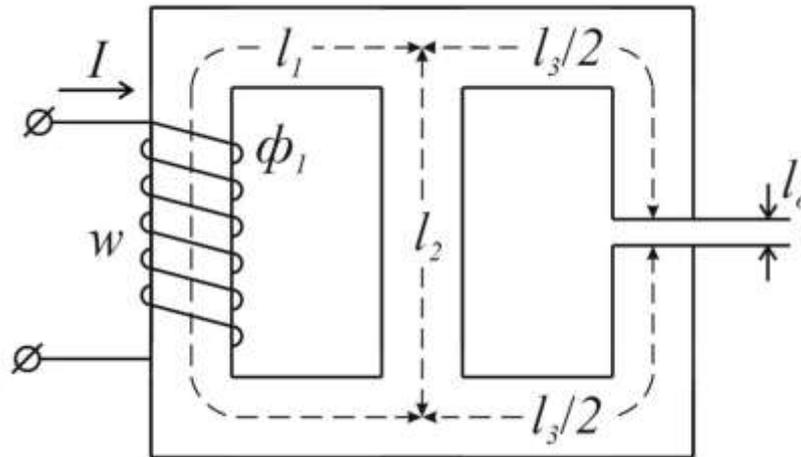


Рисунок 5.9

Ответ: $l_B = 1,3$ мм.

Литература: [1, §13.1–13.13; 3, §1.1–1.7; 6, §23.1; 5, § 2.1–2.6].

Занятие 6

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий нелинейных цепей переменного тока, применение основных соотношений для расчета нелинейных цепей переменного тока.

Основные положения и соотношения

1. Установившиеся процессы в нелинейных цепях переменного тока рассчитываются графическими, аналитическими и графо – аналитическими методами.

Графические и графо – аналитические методы целесообразно применять для решения задач, в которых характеристики нелинейных элементов могут быть приближенно представлены в виде кусочно-линейных функций. При этом на каждом из линейных участков характеристики задача решается как линейная, и определяются координаты точек перехода с одного линейного участка на другой (углы отсечки).

Применение аналитических методов расчета требует аппроксимации характеристики нелинейного элемента какой-либо

достаточно простой функцией – чаще всего полиномом. Простейший аналитический метод состоит в непосредственном решении уравнения цепи (когда это возможно).

2. Сущность *метода гармонической линеаризации* заключается в том, что при воздействии на нелинейный элемент гармонического сигнала в отклике учитывается только основная гармоника, высшие гармоники отбрасываются, и для расчета можно применять комплексный метод. Нелинейный элемент характеризуется нелинейным комплексным сопротивлением-отношением комплексов первых гармоник напряжения и тока нелинейного элемента, причем в общем случае нелинейное комплексное сопротивление зависит от амплитуды и частоты тока. Например, при вольт-амперной характеристике нелинейного резистора

$$u(i) = ai + bi^3$$

нелинейное комплексное сопротивление (активное)

$$\underline{Z}_H = R_H = a + \frac{3}{4} b I_m^2,$$

где I_m – амплитуда синусоидального тока. После определения сопротивления нелинейного элемента уравнения цепи решаются алгебраическими методами.

3. Расчет нелинейных цепей переменного тока *по действующим значениям* токов и напряжений дает возможность приближенно учесть гистерезис и вихревые токи в магнитопроводах. Несинусоидальные токи и напряжения заменяются эквивалентными синусоидами. Потери на гистерезис и вихревые токи определяются по экспериментальным данным – либо непосредственно по показаниям ваттметра, либо по экспериментально полученным кривым удельных потерь в стали. Для эквивалентных синусоид тока и напряжения уравнения цепи можно записать и решать в комплексной форме и пользоваться векторными диаграммами.

При известном амплитудном значении потока в магнитопроводе Φ_m действующее значение соответствующего напряжения рассчитывается по формуле

$$\dot{U}_\Phi = j4,44fw\Phi_m,$$

где f – частота; w – число витков.

4. Анализ нелинейных цепей по мгновенным значениям. При заданном напряжении на линейном элементе $u(t) = e(t)$ ток может быть найден путем переноса изображающей точки из временной диаграммы напряжения $u(t)$ посредством характеристики $u(i)$ на временную диаграмму тока $i(t)$, (см. рис. 6.1). Указанную операцию отображения обозначим записью

$$u(t) \rightarrow u(i) \rightarrow i(t).$$

Если задан ток $i(t) = J(t)$, то осуществляется обратное отображение.

В цепи с нелинейной индуктивностью или емкостью такому отображению предшествует или сопутствует аналитическое или графическое дифференцирование либо интегрирование.

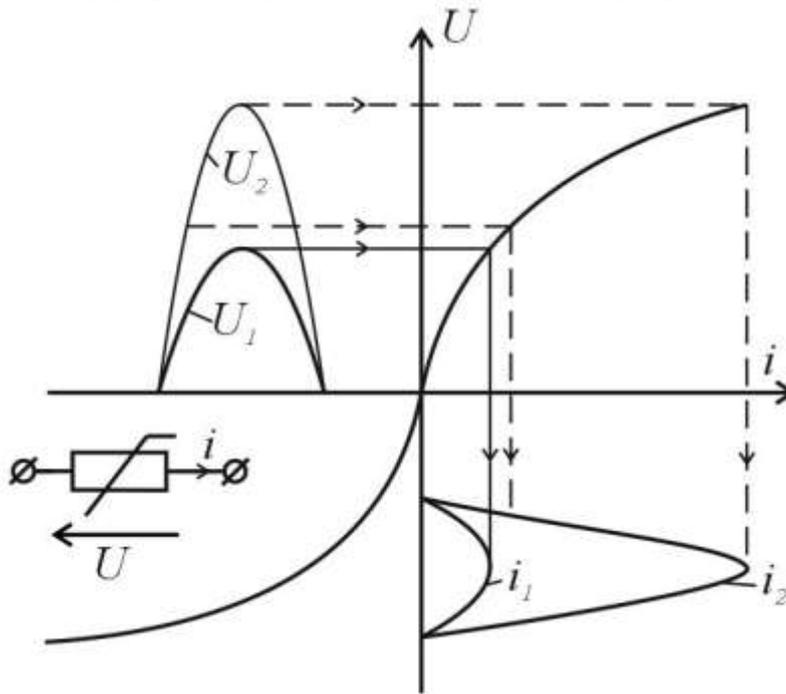


Рисунок 6.1

а) В частности, если задано напряжение на индуктивности $a\Psi/dt = e(t)$, то потокосцепление и ток находятся в результате интегрирования и отображения

$$\Psi(t) = \int e(t)dt, \Psi(t) \rightarrow \Psi(i) \rightarrow i(t).$$

При заданном токе индуктивности отображением находится потокосцепление, затем путем дифференцирования - напряжение

$$i_L(t) \rightarrow \Psi(i) \rightarrow \Psi(t), u_L = d\Psi/dt.$$

б) Аналогично при заданном напряжении на емкости $U(t) = e(t)$ заряд и ток находятся отображением и дифференцированием

$$u(t) \rightarrow q(u) \rightarrow q(t), i = dq/dt.$$

Если же задан ток через емкость $i_c(t) = J(t)$, то заряд и напряжение определяется интегрированием и отображением

$$q(t) = \frac{1}{c} \int i dt, q(t) \rightarrow q(u) \rightarrow u(t).$$

Из рис. 6.1 видно, что изменение только амплитуды воздействия приводит к изменению формы реакции и ее гармонического состава: при большей амплитуде напряжения ($U_{2m} > U_{1m}$) кривая тока i_2 оказалась более вытянутой, чем i_1 , процент высших гармоник в ней выше.

Контрольные вопросы

1. Перечислите существующие методы расчета цепей переменного тока.
2. В чем заключается графический метод расчета цепей переменного тока?
3. В чем заключается расчет нелинейных цепей по действующим значениям?
4. Как проводится анализ нелинейных цепей по мгновенным значениям?

Задачи

Графический и графоаналитический методы расчета

Задача 6.1. Резистор с сопротивлением $R = 1$ кОм подключен к источнику синусоидальной ЭДС $e = 150 \sin \omega t$, В (рис. 6.2, а) через диод D , вольт – амперная характеристика которого дана на рис. 6.2, б.

Построить график тока $i(t)$, определить среднее I_0 и действующее I значения тока цепи; найти мощность P источника и

мощность P_r потерь в резисторе.

Решение. При расчете диод может быть представлен резистором, эквивалентное сопротивление $R_{\text{ЭКВ}}$ которого различно при прямом и обратном направлении тока. Эквивалентная схема цепи приведена на рис. 6.3, а.

Эквивалентное сопротивление диода определяется по характеристике рис. 6.2, б и равно в прямом направлении $100/0,2 = 500 \text{ Ом}$ и в обратном направлении $200/0,05 = 4000 \text{ Ом}$. Ток в цепи в прямом i_1 и обратном i_2 направлениях представляет собой отрезки синусоид, амплитуды которых $I_m = E_m / (R + R_{\text{ЭКВ}})$ и равны соответственно $0,1 \text{ А}$ в прямом и $0,03 \text{ А}$ в обратном направлении. Зависимость $i(t)$ показана на рис. 6.3, б.

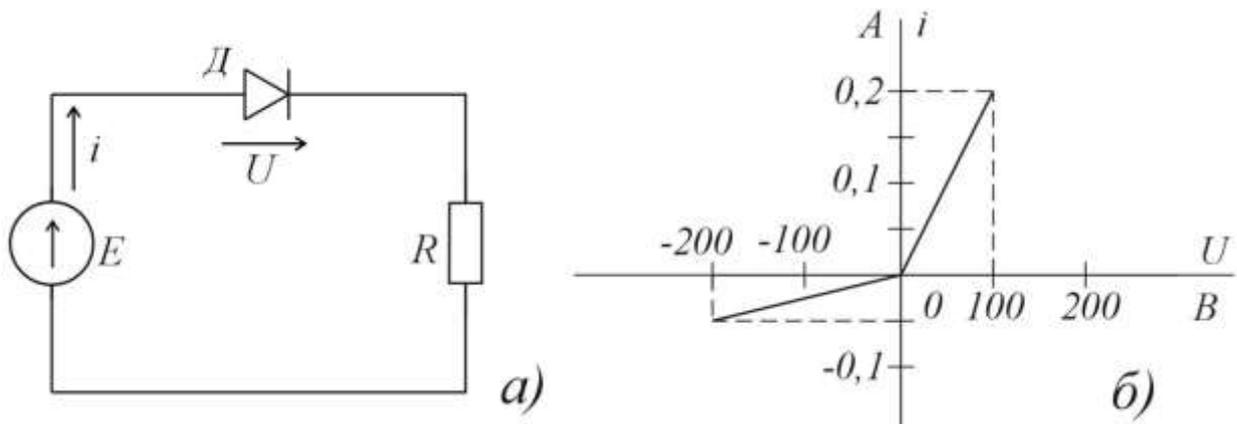


Рисунок 6.2

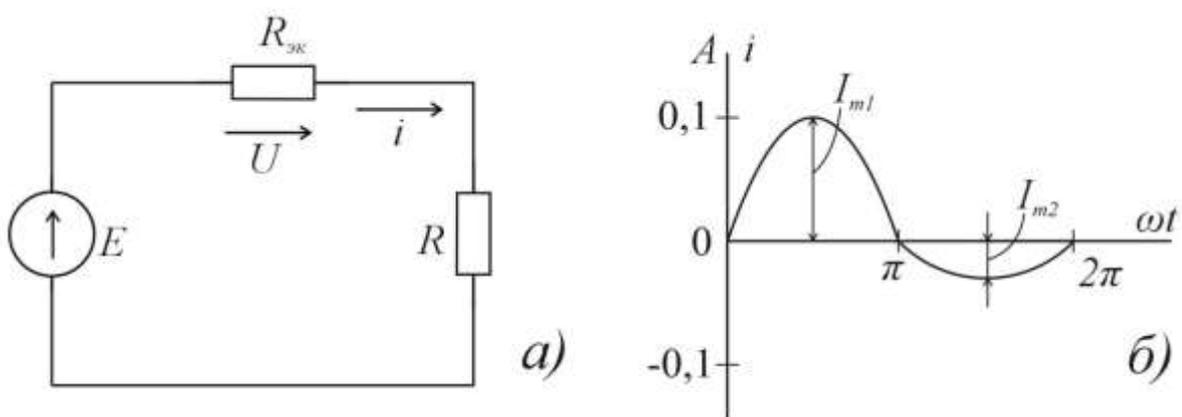


Рисунок 6.3

Среднее значение тока $I_0 = I_{01} - I_{02}$, где $I_{01} = I_{m1}/\pi$; $I_{02} = I_{m2}/\pi$. Таким образом, $I_0 = (0,1 - 0,03)/\pi = 0,0222 \text{ А}$.

Действующие значения тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} I_{m1}^2 \sin^2 \omega t d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} I_{m2}^2 \sin^2 \omega t d\omega t \right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{0,1^2 + 0,03^2} = 0,052 \text{ А.}$$

Мощность источника

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} ei d\omega t = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} ei_1 d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} ei_2 d\omega t \right) =$$

$$= \frac{E_m}{4} (I_{m1} + I_{m2}) = \frac{150}{4} (0,1 + 0,03) = 4,9 \text{ Вт.}$$

Мощность потерь в резисторе

$$P_r = RI^2 = 1000 \cdot 0,052^2 = 2,7 \text{ Вт.}$$

Примечание. Мощность источника нельзя определить как произведение действующих значений напряжения и тока, поскольку ток несинусоидален.

Задача 6.2. Две катушки с числом витков $w_1 = 2000$ и $w_2 = 400$ намотаны на магнитопровод, сечение которого $S = 0,2 \text{ см}^2$ и средняя длина магнитной линии $l = 10 \text{ см}$ (рис. 6.4, а). Кривая намагничивания материала дана на рис. 6.4, б.

Построить зависимость потока Φ в магнитопроводе и напряжения u на вторичной обмотке от времени при питании цепи от источника синусоидального тока $i = 0,6 \sin 1000t, \text{ А}$.

Решение

Построим кривую намагничивания в координатах Φ и i (рис. 6.5, а), учитывая, что поток (в веберах)

$$\Phi = BS = B \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ и ток (в амперах)}$$

$$i = Hl/w_1 = H \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ (закон полного тока).}$$

Построение зависимости потока от времени (от ωt) приведено на рис. 6.5, а–в.

Напряжение на вторичной обмотке

$$u = w_2 d\Phi/dt = w_2(\partial\Phi/\partial i) di/dt. \quad (6.1)$$

Зависимость магнитного потока от тока получена в виде кусочно-линейной функции (рис. 6.5, а), поэтому можно рассчитать напряжение на отдельных участках. На первом участке ($0 \leq \Phi \leq 0,03$ мВб), как следует из рис. 6.5, а, производная $\partial\Phi/\partial i = 3 \cdot 10^{-4}$ Вб/А и напряжение

$$u = 400 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 1000 \cos 1000t = 72 \cos 1000t, \text{ В.} \quad (6.2)$$

Угол отсечки θ , соответствующий точке перелома кривой намагничивания при токе $i = 0,1$ А, определяется из соотношения $0,1 = 0,6 \sin \theta$, откуда $\theta = 0,17$ и $t = \theta/\omega = 0,17 \cdot 10^{-3}$ с. В момент $t = 0$ по (6.2) напряжение $u = 72$ В и в момент $t = 0,17 \cdot 10^{-3}$ с напряжением $u = 72 \cos 0,17 = 71$ В.

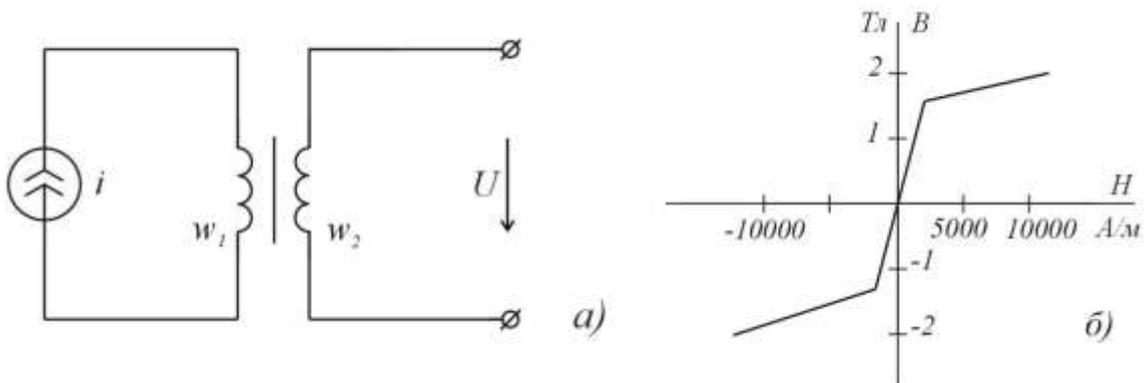


Рисунок 6.4

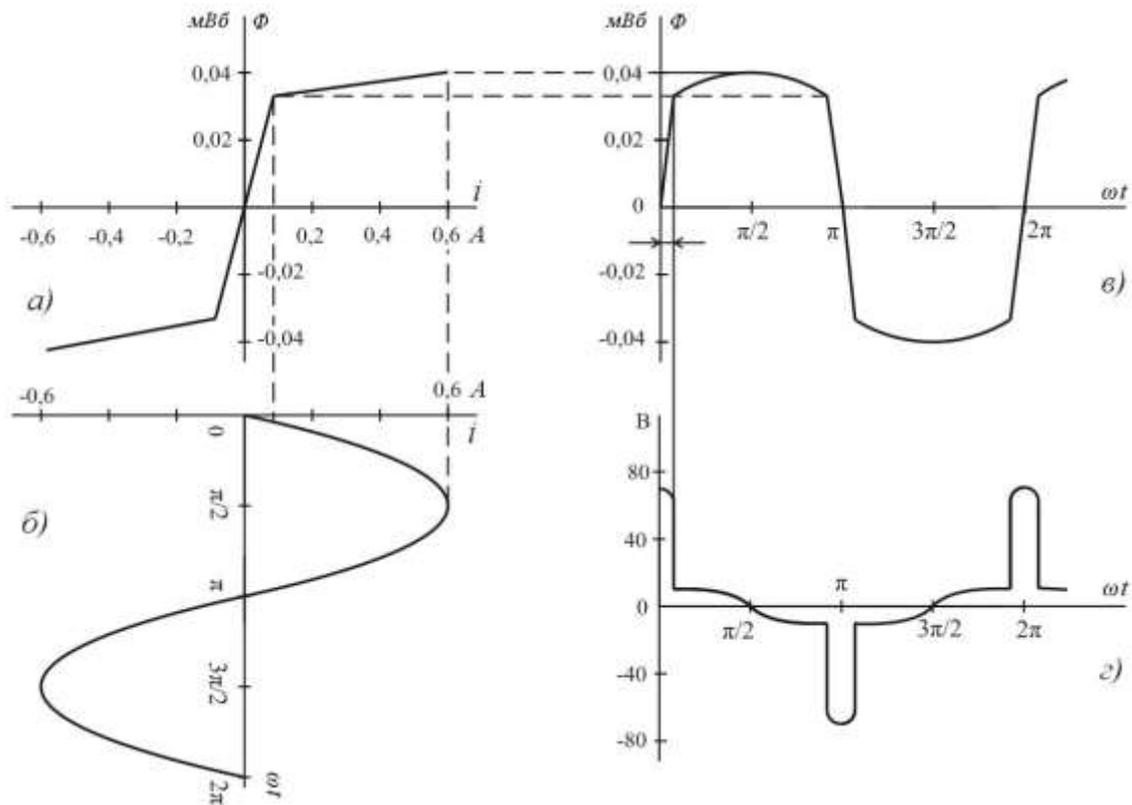


Рисунок 6.5

На втором участке ($0,03 < \Phi \leq 0,04$ мВб) производная $\partial\Phi/\partial i = 0,2 \cdot 10^{-4}$ Вб/А и напряжение

$$u = 400 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 \cos 1000t = 4,8 \cos 1000t \text{ В.} \quad (6.3)$$

В момент времени $t = 0,17 \cdot 10^{-3}$ с по (6.3) напряжение $u = 4,8 \cos 0,17 = 4,7$ В и в момент $t = (\pi/2) \cdot 10^{-3}$ с напряжение $u = 0$. Зависимость $u(\omega t)$ показана на рис. 6.5, г.

Аналитический метод расчета

Задача 6.3. Катушка, имеющая 500 витков, намотана на стальной магнитопровод, кривая намагничивания которого может быть аппроксимирована полиномом $H = 100 \text{ В} + 200 \text{ В}^3$, где напряженность магнитного поля в амперах на метр, магнитная индукция в теслах. Сечение магнитопровода $S = 10^{-3} \text{ м}^2$, средняя длина $l = 0,5$ м.

Катушка соединена параллельно с конденсатором емкостью 4 мкФ и подключена к источнику синусоидального напряжения

и с частотой 50 Гц.

Определить, при каком действующем значении напряжения в цепи возможен резонанс токов на частоте первой гармоники, найти действующее значение всех токов в этом режиме.

Решение

Составляем по заданной кривой H (В) зависимость $i_L(\Psi)$, где Ψ – потокосцепление, учитывая, что (закон полного тока)

$$B = \frac{\Psi}{wS} = \frac{\Psi}{500 \cdot 10^{-3}} = 2\Psi; \quad H = \frac{wi_L}{l} = \frac{500}{0,5} i_L = 1000i_L$$

Подставив эти зависимости в заданное выражение кривой намагничивания, получим

$$i_L = 0,2\Psi + 1,6\Psi^3, \quad (6.4)$$

где ток в амперах, потокосцепление в веберах.

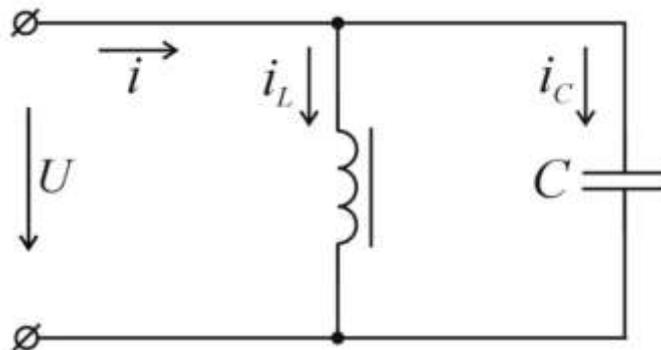


Рисунок 6.6

При резонансе токов в контуре 1-ая гармоника i_1 общего тока i должна равняться нулю

$$i_1 = i_{L1} + i_{C1} = 0. \quad (6.5)$$

При несинусоидальном напряжении u потокосцепление катушки также синусоидальное, так как $u = d\psi/dt$, и может быть выбрано с нулевой начальной фазой

$$\Psi = \Psi_m \sin \omega t. \quad (6.6)$$

Ток катушки найдем по (6.4)

$$i_L = \left(0,2\Psi_m + \frac{3}{4}1,6\Psi_m^3\right) \sin \omega t - \frac{1}{4}1,6\Psi_m^3 \sin 3\omega t = \quad (6.7)$$

$$= (0,2\Psi_m + 1,2\Psi_m^3) \sin \omega t - 0,4\Psi_m^3 \sin 3\omega t.$$

Ток конденсатора

$$i_C = C du/dt = C d^2\Psi/dt^2 = -\omega^2 C\Psi_m \sin \omega t = \quad (6.8)$$

$$= -0,394\Psi_m \sin \omega t$$

Из условия резонанса (6.5) получим

$$(0,2\Psi_m + 1,2\Psi_m^3) \sin \omega t - 0,4\Psi_m^3 \sin 3\omega t = 0,$$

откуда

а) $\Psi_m = 0$ – тривиальное решение или

б) $1,2\Psi_m^2 + 0,2 - 0,394 = 0$ и $\Psi_m = 0,402$ Вб.

Напряжение $u = d\Psi/dt = \omega\Psi_m \cos \omega t$. Поэтому в режиме резонанса токов действующее значение напряжения

$$U = \omega\Psi_m/\sqrt{2} = 314 \cdot 0,402/\sqrt{2} = 89 \text{ В.}$$

Мгновенное значение тока в катушке по (6.7)

$$i_L = 0,1584 \sin \omega t - 0,026 \sin 3\omega t, \text{ А.}$$

Действующее значение тока в катушке

$$I_L = \sqrt{0,1584^2/2 + 0,026^2/2} = 0,114 \text{ А.}$$

Действующее значение тока в конденсаторе по (6.8)

$$I_C = 0,394 \Psi_m/\sqrt{2} = 0,394 \cdot 0,402/\sqrt{2} = 0,112 \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока источника

$$i = i_L + i_C = -0,04\Psi_m^3 \sin 3\omega t = -0,026 \sin 3\omega t, \text{ А.}$$

Действующее значения тока с источника

$$I = 0,026/\sqrt{2} = 0,0184 \text{ А.}$$

Задача 6.4. Цепь состоит из катушки со стальным магнитопроводом, имеющей 100 витков, соединенной последовательно с конденсатором емкостью 8 мкФ и подключенной к источнику синусоидального тока $i = I_m \sin 1000t$ А. Зависимость магнитного потока от тока катушки аппроксимирована полиномом $\Phi = 2 \cdot 10^{-3}i - 10^{-3}i^3$, где поток в веберах, ток в амперах.

Цепь настроена в резонанс на частоте первой гармоники изменением амплитуды тока.

Определить, при какой амплитуде тока наблюдается резонанс.

Ответ: $I_m = 1$ А.

Задача 6.5. Катушка с ферромагнитным сердечником подсоединена к источнику синусоидального напряжения $u = U_m \cos \omega t$, $U_m = 1100$ В, $\omega = 314$ сек⁻¹, число витков обмотки $w = 1000$, сечение магнитопровода $S = 25$ см², длина средней силовой линии $l = 1$ м. Характеристика намагничивания материала сердечника задана таблицей

B , Вб/м ²	0	0,5	1,0	1,5	1,6
H , а/м	0	500	2000	8000	12000

Определить: 1-ю и 3-ю гармоники тока в цепи, пренебрегая активным сопротивлением обмотки и потерями энергии в стали. Решить задачу графически и аналитически.

Ответ: $i \approx 4,1 \sin \omega t - 1,4 \sin 3\omega t$ А.

Указание. Сначала следует построить вебер-амперную характеристику катушки $\Psi(i)$, используя характеристику материала и размеры катушки: $\Psi(t)$ из соотношения $d\Psi/dt = U_m \cos \omega t$. Найти $i(t)$, по $\Psi(t)$ и $\Psi(i)$.

Литература: [1, § 15.4–15.8, 15.57–15.60; 3, § 4.1–4.6; 5, § 3.4–3.12].

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2007. – 701 с.
2. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи / Г. И. Атабеков. – СПб.: Лань, 2009. – 592 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=90
3. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле / Г. И. Атабеков [и др.]. – СПб.: Лань, 2010. – 432 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=644
4. Демирчян, К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин. – СПб.: Питер, 2009. – 512 с.
5. Демирчян, К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2 / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин. – СПб.: Питер, 2009. – 431 с.
6. Зевеке, Г. В. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин. – Л.: Энергия, 1989. – 528 с.
7. Электрические измерения / под ред. А. В. Фремке, Е. М. Душина. – Л.: Энергия, 1980. – 392 с.
8. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / под ред. П. А. Ионкина. – М.: Высш. шк. 1976. – 544 с.