МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра строительных конструкций, водоснабжения и водоотведения

Составитель
С. А. Сидельников

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления
подготовки 08.03.01 Строительство
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

Покатилов А. В. – председатель учебно-методической комиссии направления подготовки 08.03.01 Строительство

Сидельников Сергей Александрович

Основы технической механики: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 08.03.01 Строительство всех форм обучения / сост. С. А. Сидельников; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

В методических материалах представлено содержание практических занятий и самостоятельной работы, в том числе и расчетно-графических работ. Использование студентами методических указаний позволит закрепить методы определения деформаций, напряжений и перемещений применительно к расчетам элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, самостоятельно выполнить типовые расчеты и расчетно-графические работы.

© КузГТУ, 2019
© Сидельников С. А.,
составление, 2019

Содержание

1. Практическое занятие № 1.
Геометрические характеристики плоских сечений……..... 4
2. Практическое занятие № 2.
Расчет статически определимого ступенчатого стержня…..... 21
3. Практическое занятие № 3.
Расчет шарнирно-стержневых статически неопределимых систем при растяжении-сжатии (расчет от внешней нагрузки)……... 32
4. Практическое занятие № 4.
Расчет шарнирно-стержневых статически неопределимых систем при растяжении-сжатии (температурный расчет)…... 41
5. Практическое занятие № 5.
Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе балок…… 50
6. Практическое занятие № 6.
Напряжения при изгибе. Условие прочности при изгибе. Подбор поперечного сечения балок…….. 58
7. Практическое занятие № 7.
Определение перемещений методом начальных параметров при изгибе балок…….. 75
8. Практическое занятие № 8.
Расчет сжатых стержней на устойчивость……... 92
9. Приложения..... 108
10. Список литературы……... 119

Практическое занятие № 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения геометрических характеристик плоских сечений.

При решении задач сопротивления материалов, связанных с изучением поведения стержневого элемента (бруса), обычно задают систему отсчета в виде трех осей – продольной (здесь и далее z) и двух поперечных (x и y). Эти оси для прямого бруса показаны (см. рис. 1.1).

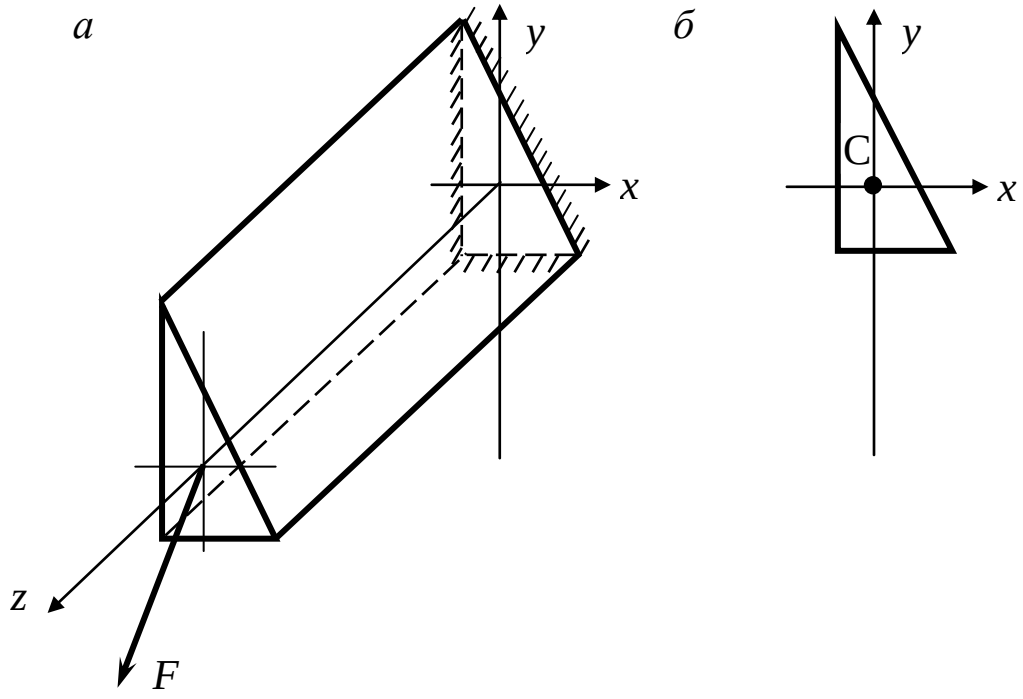


Рис. 1.1. Расположение координатных осей:
а – в прямом стержне; *б* – в поперечном сечении

Практика расчетов и эксплуатации стержневых конструкций показывает, что поведение их сильно зависит от ориентации нагрузки относительно выбранных осей. Одновременно, при решении задач сопротивления материалов в расчетных моделях конструкций используются различные величины, зависящие от формы и размеров поперечного сечения стержня. Эти величины обобщенно называются геометрическими характеристиками.

Простейшими и очевидными геометрическими характеристиками являются площадь поперечного сечения стержня и его центр тяжести. Однако наряду с ними существует еще целый ряд геометрических характеристик, которые до этого не использовались и имеют не столь очевидный смысл. Этими характеристиками являются моменты инерции поперечного сечения. Особую важность имеет тот факт, что в любом поперечном сечении всегда существуют оси с особыми свойствами, которые называются главными. Расчетные модели стержневых конструкций, созданные с использованием главных осей, наиболее просты и поэтому всегда предпочтительны. Поэтому при расчетах деформируемых стержневых систем всегда используются главные центральные оси поперечных сечений, а любая задача механики стержневых конструкций обычно содержит этап определения главных центральных осей поперечного сечения и моментов инерции относительно этих осей. Содержание этого этапа является предметом данного методического указания.

При выполнении расчетно-графического типового расчета, связанного с определением геометрических характеристик поперечных сечений, необходимо определить:

1) положение центра тяжести сечения;
2) положение главных центральных осей сечения;
3) величины главных моментов инерции.

Сведения из теории геометрических характеристик поперечных сечений стержней

Статические моменты и центр тяжести сечения

Статические моменты тел и связанные с ними свойства впервые рассматриваются в курсе теоретической механики. В случае плоского сечения (плоской фигуры) произведение произвольного элемента dA на его координату x относительно некоторой оси y (рис. 1.2, *а*) называется статическим моментом этого элемента $dS_y = dA\,x$ относительно оси y. Сумма таких статических моментов, определенная для всего сечения, называется статическим моментом площади сечения A относительно оси y. Статические моменты сечения относительно осей x и y можно найти по формулам

$$S_x = \int_0^A x dA\,; \quad S_y = \int_0^A x dA. \qquad (1.1)$$

Среди бесконечного множества осей параллельных осям x и y существуют оси, относительно которых статические моменты (1.1) равны нулю. Такие оси называются центральными, а точка их пересечения – центром тяжести сечения (фигуры).

В теоретической механике доказано, что если известны площадь сечения A и координаты его центра тяжести x_c и y_c, то статические моменты сечения могут быть определены следующим образом

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c. \tag{1.2}$$

Из этих выражений следуют формулы для определения положения центра тяжести

$$x_c = S_y/A; \quad y_c = S_x/A. \tag{1.3}$$

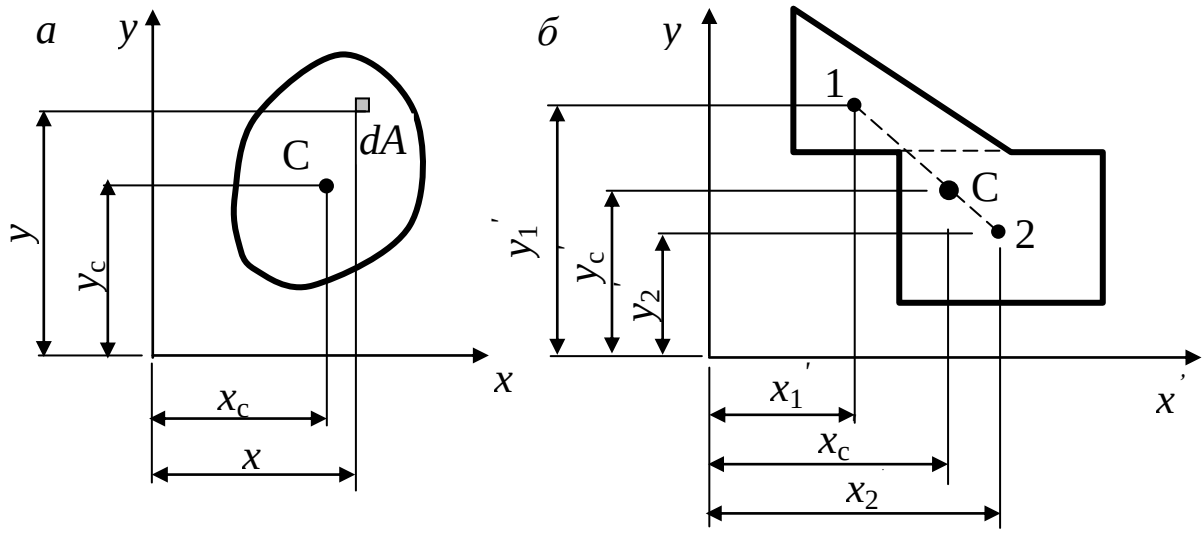


Рис. 1.2. К определению: *а* – статического момента сечения; *б* – центра тяжести сечения

Определение статических моментов сечения, площади сечения и всех других геометрических характеристик подчиняется принципу суммирования (аддитивности). Это значит, что любая геометрическая характеристика сложной фигуры может быть найдена как сумма геометрических характеристик ее частей.

Например, для сечения (рис. 1.2, *б*) статические моменты сечения могут быть записаны в виде: $S_x' = A_1y_1' + A_2y_2'$; $S_y' = A_1x_1' + A_2x_2'$, а выражения (1.3) в общем виде приобретут следующую форму

$$x_c = \frac{\Sigma A_i x_i'}{\Sigma A_i}; \quad y_c = \frac{\Sigma A_i y_i'}{\Sigma A}. \qquad (1.4)$$

На основании всего сказанного определение центра тяжести можно выполнить в следующей последовательности:

1. задается некоторая произвольная вспомогательная система осей x' и y';

2. сечение разбивается на элементы (части) для которых возможно простое определение площадей и положений их центров тяжести;

3. определяются по справочным данным (см. Приложение 1) площади F_i и координаты центров тяжести x_i'; y_i' во вспомогательной системе координат;

4. вычисляются по формулам (1.4) координаты центра тяжести С всего сечения x_c' и y_c' во вспомогательной системе координат и производится его построение на эскизе сечения.

Моменты инерции и главные оси

Как сказано выше, при решении задач изгиба, кручения и устойчивости важную роль играют новые геометрические характеристики – главные оси поперечного сечения и связанные с ними моменты инерции.

Осевыми моментами инерции сечения называются суммы произведений элементарных площадей сечения dA на квадраты их координат относительно этих осей (рис. 1.3, *а*)

$$J_x = \int_0^A y^2 dA\,; \;\; J_y = \int_0^A x^2 dA\,. \qquad (1.5)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей называется сумма произведений элементарных площадей сечения dA на их координаты относительно этих осей

$$J_{xy} = \int_0^A xy dA. \qquad (1.6)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно точки (полюса) называется сумма произведений элементарных площадей сечения dA на квадрат их расстояний до этой точки (полярного радиуса ρ)

$$J_\rho = \int_0^A \rho^2 dA = \int_0^A (x^2 + y^2) dA = J_x + J_y. \qquad (1.7)$$

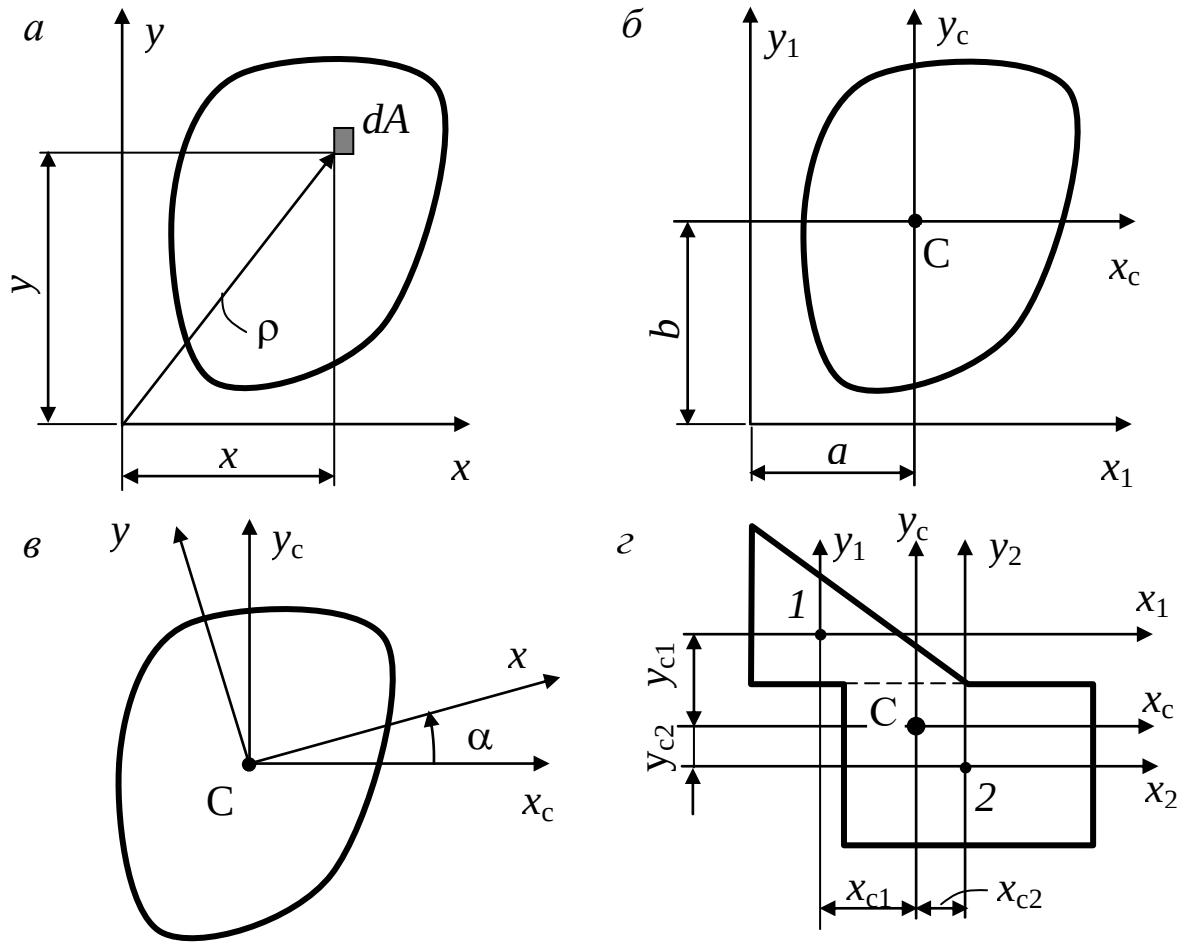


Рис. 1.3. К определению: *а* – моментов инерции сечения;
б – изменения моментов инерции при параллельном переносе осей;
в – изменения моментов инерции при вращательном переносе осей;
г – моментов инерции составных сечений

Моменты инерции измеряются в единицах длины в четвертой степени (см^4, м^4 и т. п.). Осевые и полярные моменты инерции могут быть только положительными, а знак центробежного момента инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от положения сечения относительно выбранной системы координат.

В теории геометрических характеристик, которая является частным случаем разработанной Х. Гюйгенсом теории моментов инерции твердых тел, доказываются две теоремы об изменении моментов инерции при переносе системы осей.

Первая теорема говорит о том, что при параллельном переносе центральных осей x_c и y_c в положения x_1 и y_1 соответственно

(рис. 1.3, *б*), значения моментов инерции относительно новых осей могут быть найдены по формулам

$$J_{x_1} = J_{x_c} + A \cdot b^2;$$
$$J_{y_1} = J_{y_c} + A \cdot a^2; \qquad (1.8)$$
$$J_{x_1 y_1} = J_{x_c y_c} + A \cdot a \cdot b,$$

где J_{x_c}, J_{y_c}, $J_{x_c y_c}$ – моменты инерции относительно центральных («старых») осей; $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}$ – моменты инерции относительно перенесенных («новых») осей; a и b – величины переносов центральных осей, которые трактуются как координаты центра тяжести сечения в новых осях, т. е. учитываются со знаками.

Формулы (1.8) дают возможность определять моменты инерции сложных сечений, используя принцип суммирования. Для этого сечение разбивается на простые элементы, и моменты инерции отдельных элементов суммируются по правилам (1.8). Тогда для сложного сечения (рис. 1.3, г) справедливы формулы

$$J_{x_c} = \Sigma J_{x_i} + \Sigma(A_i y_{c_i}^2);$$
$$J_{y_c} = \Sigma J_{y_i} + \Sigma(A_i x_{c_i}^2); \qquad (1.9)$$
$$J_{x_c y_c} = \Sigma J_{x_i y_i} + \Sigma(A_i x_{c_i} y_{c_i}),$$

где x_i, y_i – центральные оси простых элементов параллельные центральным осям x_c и y_c всего сечения; x_{c_i}, y_{c_i} – координаты центров тяжести простых элементов в осях x_c, y_c.

Здесь и далее под простыми элементами сечения понимаются такие фигуры, для которых все необходимые в расчете геометрические характеристики могут быть найдены по справочным данным.

Вторая теорема описывает изменение моментов инерции при повороте системы осей на угол α. Все сказанное ниже может быть отнесено к любой системе осей. Однако для целей данной работы будут обсуждаться только системы центральных осей для всего сечения. Например, для моментов инерции относительно повернутых на угол α осей x и y (рис. 1.3, в) справедливы зависимости

$$J_x = J_{x_c} cos^2\alpha + J_{y_c} sin^2\alpha - J_{x_c y_c} sin2\alpha;$$
$$J_y = J_{x_c} sin^2\alpha + J_{y_c} cos^2\alpha + J_{x_c y_c} sin2\alpha; \qquad (1.10)$$
$$J_{xy} = 0{,}5\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right) sin2\alpha + J_{x_c y_c} cos2\alpha.$$

Зависимости (1.10) порождают ряд замечательных свойств множества систем осей (x;y), проходящих через одну точку (в нашем случае через центр тяжести всего сечения):

1. функции $J_x(\alpha)$, $J_y(\alpha)$, $J_{xy}(\alpha)$ являются гладкими и периодическими;

2. среди множества центральных осей x, y всегда существует хотя бы одна система осей, для которой выполняются условия

$$J_{xy} = 0; J_x = J_{max};\ J_y = J_{min};$$

3. такие оси называются главными центральными, и их определение является одной из основных целей данной работы;

4. осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными центральными моментами инерции, и их определение есть другая основная цель данной работы.

Угол поворота α_0 одной из главных осей относительно произвольной оси x можно определить из решения тригонометрического уравнения

$$tg\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}}, \qquad (1.11)$$

где J_{x_c}, J_{y_c}, $J_{x_c y_c}$ – моменты инерции относительно произвольной центральной системы осей.

Значения максимальных моментов инерции J_{max}, J_{min} могут быть определены подстановкой угла α_0 в две первые формулы (1.10). Второй способ определения величин главных моментов инерции состоит в использовании формулы

$$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)^2 + 4J_{x_c y_c}^2}. \qquad (1.12)$$

При использовании выражения (1.12) возникает проблема определения типа экстремума задаваемого углом α_0 (максимума или минимума). Для этого можно использовать стандартное правило математического анализа: если $\frac{d^2 J_{x_c}(\alpha)}{d\alpha^2} < 0$ при $\alpha = \alpha_0$, то угол α_0 задает ось max.

В случаях, когда $J_{x_c} \neq J_{y_c}$, может быть полезным следующее свойство: если $J_{x_c} > J_{y_c}$, то ось max повернута относительно оси x_c на меньший (по модулю) угол, чем ось min. Иногда, когда габаритные размеры сечения в направлении главных осей визуально ощутимо отличаются, может быть полезно свойство вытянутости сечения вдоль оси min и сжатости вдоль оси max.

В некоторых практически важных и часто встречающихся случаях задача определения главных центральных осей и главных моментов инерции существенно упрощается. К ним относятся се-

чения, у которых есть оси или центр симметрии. У таких сечений центр тяжести расположен на осях симметрии или в центре симметрии. Центробежный момент инерции сечения, найденный с использованием оси симметрии, всегда равен нулю. Это значит, что любая ось симметрии не только центральная, но и главная. Очевидно, что всегда надо использовать оси симметрии как центральные и главные, а вычисления по формулам (1.11) и (1.12) в этих случаях теряют смысл.

Нахождение положения главных центральных осей и величин главных центральных моментов инерции можно выполнить в следующем порядке:

1) после определения центра тяжести всего сечения надо показать центральные всего сечения оси x_c и y_c;

2) с помощью справочных данных (см. Приложение 1) определить моменты инерции простых элементов сечения J_{x_i}, J_{y_i}, $J_{x_i y_i}$ относительно их собственных центральных осей x_i и y_i;

3) по справочным данным и результатам нахождения центра тяжести С всего сечения определить координаты центров тяжести простых элементов сечения x_{c_i} и y_{c_i} относительно центральных осей всего сечения x_c и y_c;

4) определить моменты инерции всего сечения J_{x_c}, J_{y_c}, $J_{x_c y_c}$ по формулам (1.9);

5) решить уравнение (2.11) и найти угол поворота α_0 главной оси max (или min) относительно оси x_c;

6) определить какую главную ось (max или min) задает угол α_0;

7) с помощью формул (1.11) или (1.12) определить величины главных центральных моментов инерции $J_{\max}$ и $J_{\min}$.

Примеры расчетов геометрических характеристик

Несимметричное сечение

Для расчета принято составное сечение (рис. 1.4) из стандартных прокатных профилей:

1) неравнополочного уголка № 10/6,3 с толщиной стенки 8 мм (ГОСТ 8510-86);

2) полосы из листовой стали с сечением 200×20 мм;

3) швеллера № 18 (ГОСТ 8240-97).

Значения геометрических характеристик неравнополочного уголка и швеллера взяты из Приложения 1.2. На эскизе сечения (рис. 1.4) показаны центры тяжести элементов и их центральные оси x_i и y_i, направление которых может не совпадать с направлением осей на эскизах в сортаментах. Это обстоятельство надо иметь в виду и тщательно контролировать при выборке справочных значений.

Для неравнополочного уголка (см. Приложение 1.2.3): $A_1 = 12{,}6$ см^2; $J_{x_1} = 127$ см^4; $J_{y_1} = 39{,}2$ см^4; $J_{x_1y_1} = 40{,}5$ см^4; расстояния до центра тяжести $x_{0_1} = 15$ мм $= 1{,}5$ см, $y_{0_1} = 33{,}2$ мм $= 3{,}32$ см.

Для швеллера (см. Приложение 1.2.2): $A_3 = 20{,}7$ см^2; $J_{x_3} = 86{,}0$ см^4; $J_{y_3} = 1090$ см^4; $J_{x_3y_3} = 0$; расстояние до центра тяжести $y_{0_3} = 19{,}5$ мм $= 19{,}5$ см.

Для прямоугольной полосы (см. Приложение 1.1): $A_2 = 20{\cdot}2 = 40$ см^2; $J_{x_2} = 2{\cdot}20^3/12 = 1333$ см^4;
$J_{y_2} = 20{\cdot}2^3/12 = 13{,}3$ см^2;
$J_{x_2y_2} = 0$.

Решение:

I. Определение центра тяжести сечения

Определяются координаты центров тяжести элементов сечения 1, 2, 3 во вспомогательных осях x', y' (рис. 1.4):

$$x_1' = 6{,}3 - 1{,}5 = 4{,}8 \text{ см}; \quad y_1' = 3{,}32 \text{ см};$$
$$x_2' = 6{,}3 + 1 = 7{,}3 \text{ см}; \quad y_2' = 10 \text{ см};$$
$$x_3' = 6{,}3 + 2 + 9 = 17{,}3 \text{ см}; \quad y_3' = 20 - 1{,}95 = 18{,}05 \text{ см}.$$

Отметим, что (см. рис. 1.4) все размеры указаны в сантиметрах, то есть в единицах, в которых ведутся вычисления.

По формулам (1.4) определим координаты центра тяжести всего сечения C во вспомогательных осях x', y':

$$x_c' = \frac{\Sigma A_i x_i'}{\Sigma A} = \frac{12{,}6 \cdot 4{,}8 + 40 \cdot 7{,}3 + 20{,}7 \cdot 17{,}3}{12{,}6 + 40 + 20{,}7} = \frac{707{,}1}{73{,}1} = 9{,}71 \text{ см};$$

$$y_c' = \frac{\Sigma A_i y_i'}{\Sigma A_i} = \frac{12{,}6 \cdot 3{,}32 + 40 \cdot 10 + 20{,}7 \cdot 18{,}05}{12{,}6 + 40 + 20{,}7} = \frac{812}{73{,}1} =$$
$$= 11{,}1 \text{ см}.$$

Положение центра тяжести сечения С (см. рис. 1.4).

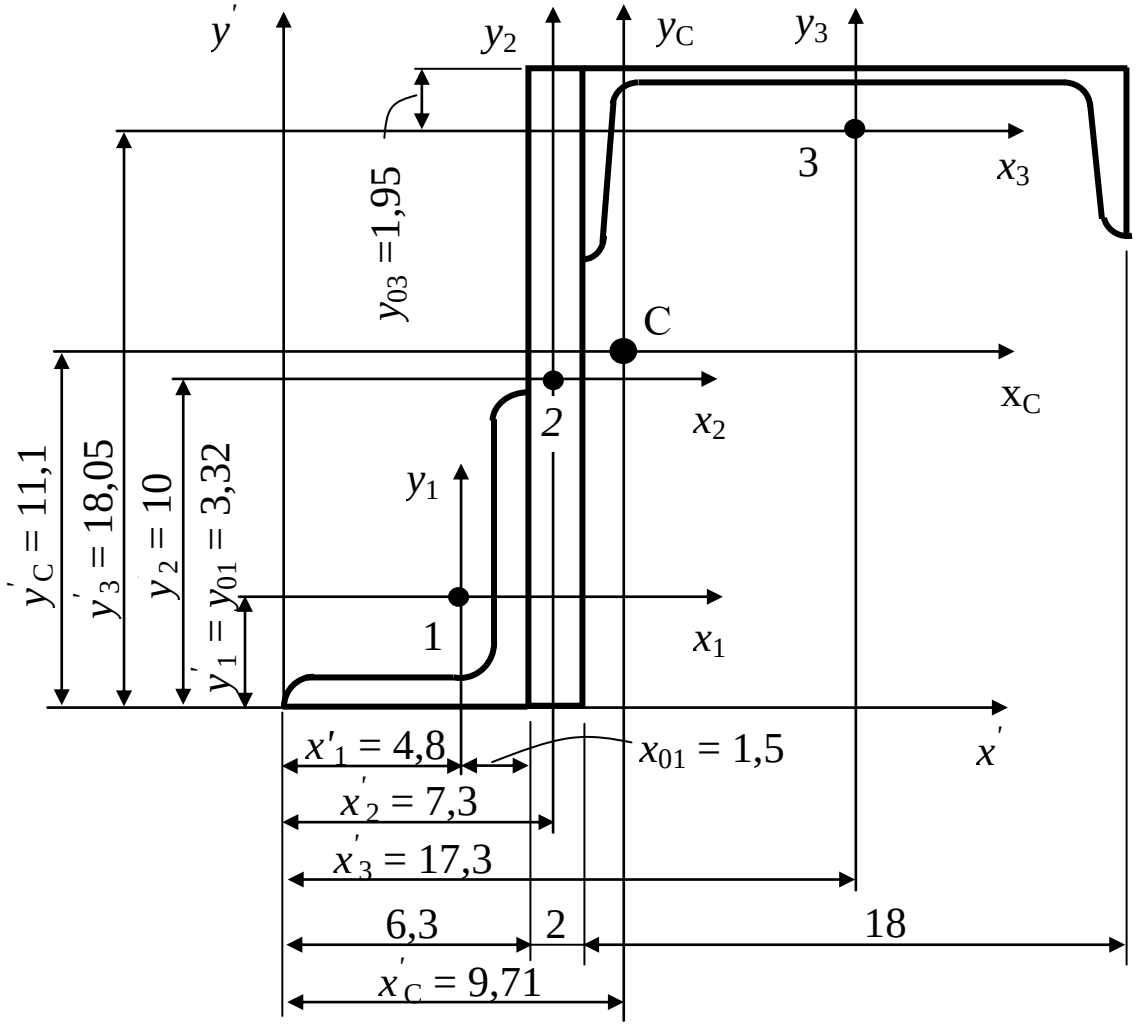


Рис. 1.4. Определение центра тяжести несимметричного сечения

Для возможностей визуальной проверки результатов расчетов настойчиво рекомендуем изображать все исходные размеры и полученные координаты на эскизе сечения в одном масштабе. Отметим, что в рассматриваемом примере точка С должна находиться внутри треугольника с вершинами 1, 2, 3.

II. Определение главных центральных осей и главных моментов инерции.

Эскиз сечения (рис. 1.5), иллюстрирует этот этап вычислений.

Моменты инерции простых элементов (уголка, полосы, швеллера) приведены выше. Укажем на то, что в сортаментах на уголковые профили (Приложения 1.2.3 и 1.2.4) центробежные моменты инерции задаются по модулю. Но, как говорилось ранее,

центробежные моменты инерции могут быть положительными и отрицательными. Их знаки зависят от направления осей x_i, y_i. Для определения знака центробежного момента инерции может быть использовано следующее свойство: если преобладающая часть сечения имеет координаты одного знака, то центробежный момент инерции будет положительным.

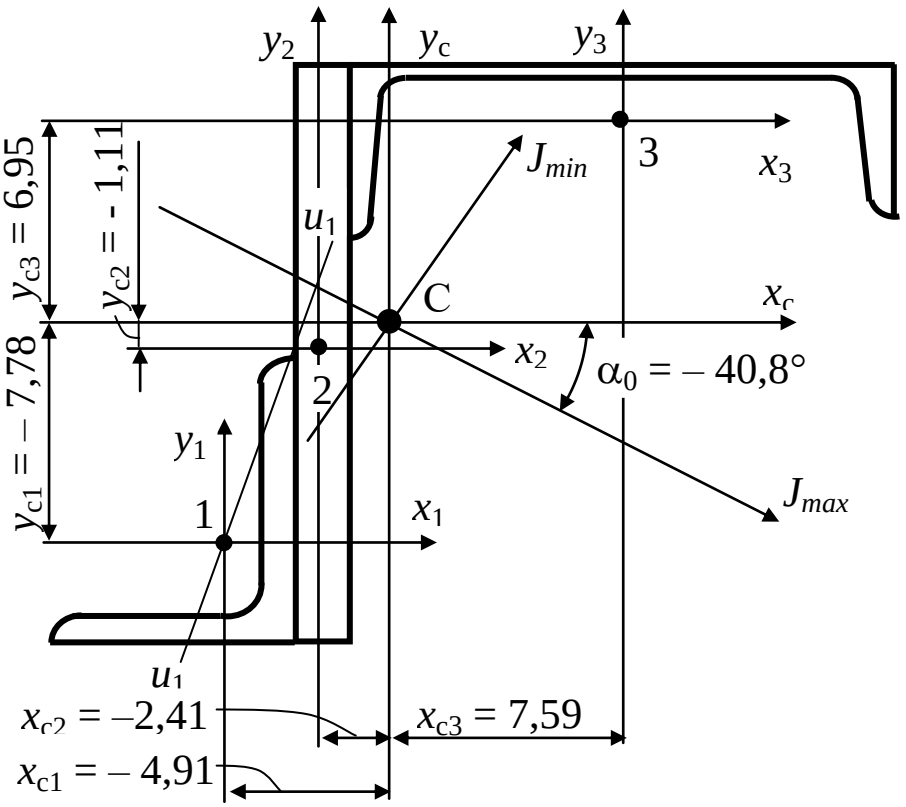


Рис. 1.5. Определение главных центральных осей и главных моментов инерции несимметричного сечения

На рис. 1.6 показаны простые сечения – прямоугольный треугольник, четверть круга, неравнополочный и равнополочный прокатные уголки, наиболее часто встречающиеся при определении геометрических характеристик. Там же показаны выделенные штриховкой преобладающие части сечений и соответствующие им знаки центробежных моментов инерции.

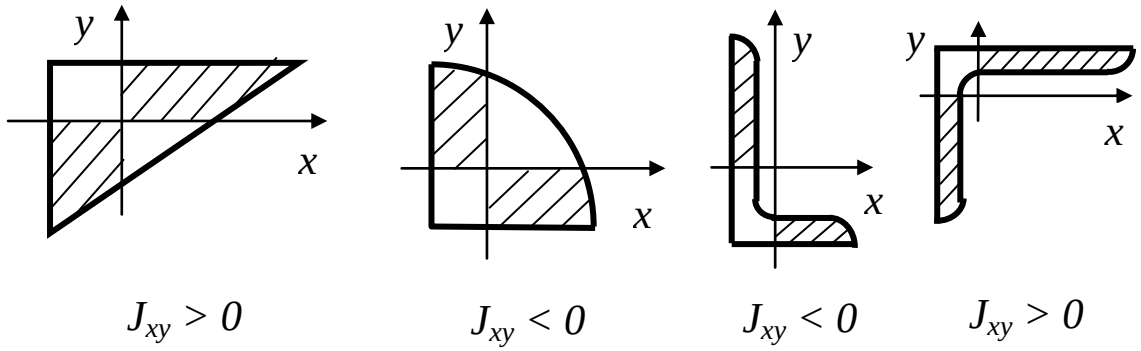


Рис. 1.6. Примеры нахождения знаков центробежных моментов инерции

В более ранних источниках сведения о значениях центробежных моментов инерции уголковых профилей отсутствовали. В этих случаях значения центробежных моментов инерции можно определить по формулам:

– для неравнополочного уголка

$$J_{xy} = \pm\sqrt{(J_x - J_u)(J_y - J_u)}; \qquad (1.13)$$

– для равнополочного уголка

$$J_{xy} = \pm 0{,}5\left(J_{x_0} - J_{y_0}\right), \qquad (1.14)$$

где J_x, J_y, J_u – осевые моменты инерции неравнополочного уголка относительно его осей x, y и u (min) (Приложение 1.3); J_{x_0}, J_{y_0} – осевые моменты инерции равнополочного уголка относительно его осей x_0 (max) и y_0 (min) (см. Приложение 1.3).

Определим координаты центров тяжести простых элементов сечения в произвольных центральных осях всего сечения x_c, y_c (рис. 1.5):

$$x_{c_1} = x_1' - x_c' = 4{,}8 - 9{,}71 = -4{,}91 \text{ см};$$
$$y_{c_1} = y_1' - y_c' = 3{,}32 - 11{,}1 = -7{,}78 \text{ см}.$$

Далее аналогично находим:

$$x_{c_2} = 7{,}3 - 9{,}71 = -2{,}41 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 10 - 11{,}1 = -1{,}11 \text{ см};$$
$$x_{c_3} = 17{,}3 - 9{,}71 = 7{,}59 \text{ см}; \quad y_{c_3} = 18{,}05 - 11{,}1 = 6{,}95 \text{ см}.$$

По формулам (1.9) вычисляем моменты инерции относительно произвольных центральных осей всего сечения:

$$J_{x_c} = 127 + 1333 + 86 + 12{,}6(-7{,}78)^2 +$$
$$+40(-1{,}11)^2 + 20{,}7 \cdot 6{,}95^2 = 3374 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = 39{,}2 + 13{,}3 + 1090 + 12{,}6(-4{,}91)^2 + 40(-2{,}41)^2 + \\ +20{,}7 \cdot 7{,}59^2 = 2870 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c} = 40{,}4 + 0 + 0 + 12{,}6(-4{,}91)(-7{,}78) + 40(-2{,}41)(-1{,}11) \\ + 20{,}7 \cdot 7{,}59 \cdot 6{,}95 = 1720 \text{ см}^4.$$

Отметим, что найденный центробежный момент инерции $J_{x_c y_c}$ не равен нулю. Это значит, что центральные оси сечения не являются главными.

Определим угол поворота одной из главных центральных осей с помощью уравнения (2.11):

$$2tg\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 1720}{3374 - 2870} = -6{,}82;$$

$$2\alpha_0 = -81{,}66^\circ;$$

$$\alpha_0 = -40{,}8^\circ.$$

По условию $J_{x_c} = 3374 \text{ см}^4 > J_{y_c} = 2870 \text{ см}^4$ устанавливаем, что угол α_0 задает положение оси max (см. рис. 1.5).

Величины главных центральных моментов инерции определим с помощью формулы (1.12):

$$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)^2 + 4J_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{3374 + 2870}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3374 - 2870)^2 + 4 \cdot 1720^2} =$$

$$= 3122 \pm 1738;$$

$$J_{\max} = 4860 \text{ см}^4;\ J_{\min} = 1384 \text{ см}^4.$$

Для проверки полученных результатов вычислим центробежный момент инерции относительно главных центральных осей с помощью третьей формулы (1.10)

$$J_{\max,\min} = 0{,}5\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)\sin 2\alpha + J_{x_c y_c} cos 2\alpha \\ = 0{,}5(3374 - 2870)\sin(-81{,}66^\circ) + \\ + 1720\cos(-81{,}66^\circ) = 252(-0{,}989) + 1720 \cdot 0{,}145 = \\ = -249 + 249 = 0.$$

Равенство нулю центробежного момента инерции относительно главных осей является достаточным для проверки правильности решения.

Симметричное сечение

Рассмотрим эскиз сечения с вертикальной осью симметрии (рис. 1.7).

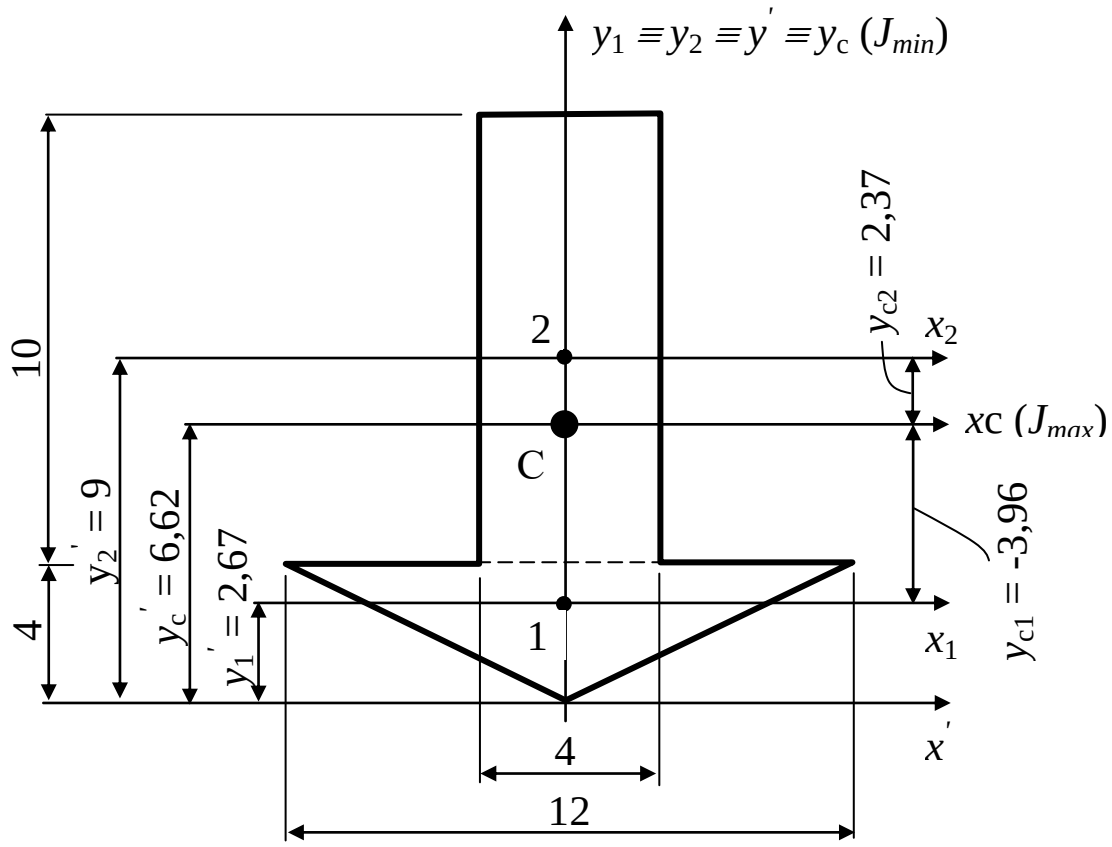


Рис. 1.7. Эскиз симметричного сечения

Сечение разбито на два простых элемента: равнобедренный треугольник 1 и прямоугольник 2.

Геометрические характеристики простых элементов (см. Приложение 1.1):

Для равнобедренного треугольника: $A_1 = 4{\cdot}12/2 = 24$ см^2; $J_{x_1} = 12{\cdot}4^3/36 = 21{,}33$ см^4; $J_{y_1} = 4{\cdot}12^3/48 = 144$ см^4; $J_{x_1y_1} = 0$.

Для прямоугольника: $A_2 = 4{\cdot}10 = 40$ см^2; $J_{x_2} = \frac{4{\cdot}10^3}{12} = 333$ см^4; $J_{y_2} = 10{\cdot}4^3/12 = 53{,}3$ см^4; $J_{x_2y_2} = 0$.

Вспомогательные оси x', y' для определения положения центра тяжести всего сечения включают вертикальную ось симметрии (см. рис. 1.7). В этом случае имеет смысл определять только вертикальную координату центра тяжести y_c'.

I. Определение центра тяжести сечения

Координаты центров тяжести простых элементов относительно оси x':

$$y_1' = 2 \cdot 4/3 = 2{,}67 \text{ см}; \quad y_2' = 4 + 10/2 = 9 \text{ см}.$$

Определяем вертикальную координату центра тяжести всего сечения по второй формуле (1.4):

$$y_c' = \frac{24 \cdot 2{,}67 + 40 \cdot 9}{24 + 40} = \frac{424}{64} = 6{,}62 \text{ см}.$$

II. Определение положения главных центральных осей и главных моментов инерции.

Координаты центров тяжести простых элементов относительно центральной оси x_c всего сечения

$$y_{c_1} = 2{,}67 - 6{,}62 = -3{,}95 \text{ см};$$

$$y_{c_2} = 9 - 6{,}62 = 2{,}38 \text{ см}.$$

Определяем по формулам (1.9) моменты инерции относительно центральных осей сечения x_c и y_c, которые одновременно являются главными осями

$$J_{x_c} = 21{,}3 + 333 + 24 \cdot (-3{,}95)^2 + 40 \cdot 2{,}38^2 = 955 \text{ см}^4 \equiv J_{\max};$$

$$J_{y_c} = 144 + 53{,}3 = 197{,}5 \text{ см}^4 \equiv J_{\min}.$$

Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графической работы (РГР № 1) «Геометрические характеристики сечений» из табл. 1.1 необходимо выбрать расчетную схему, а из табл. 1.2 взять необходимые данные.

Таблица 1.1

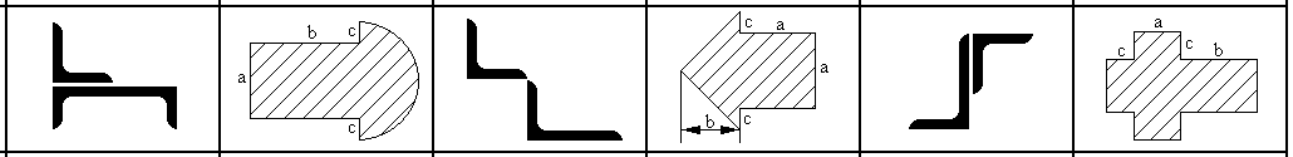
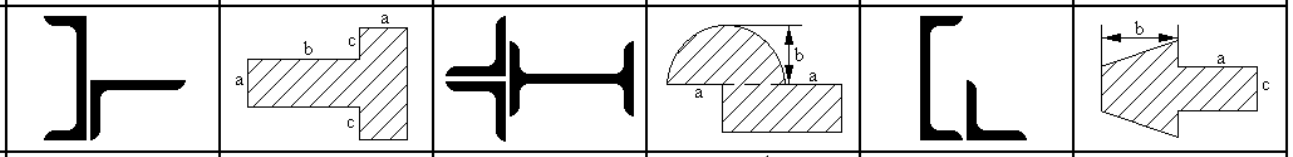
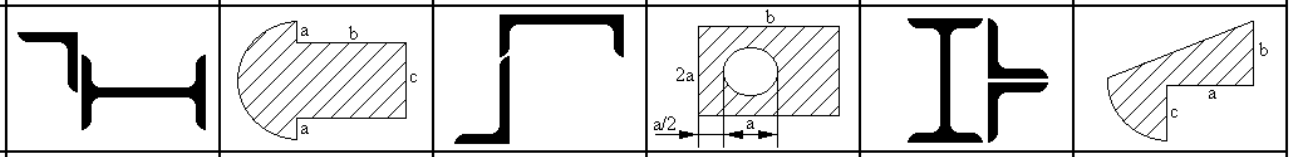
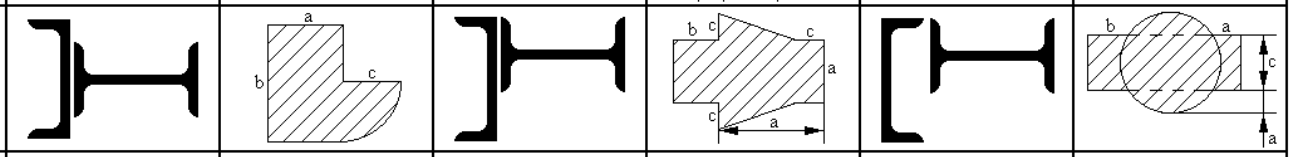
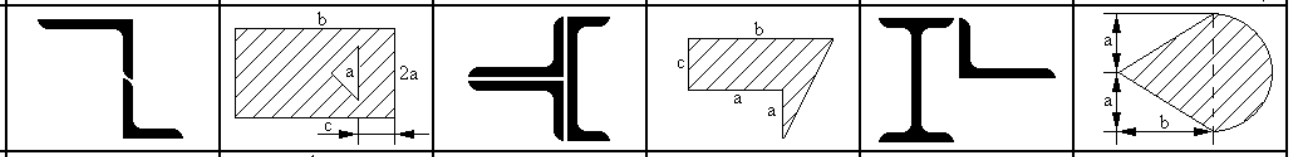
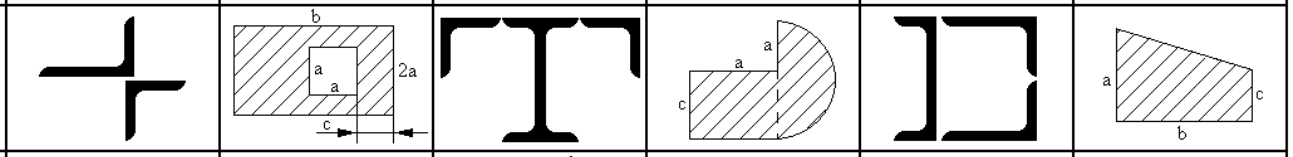
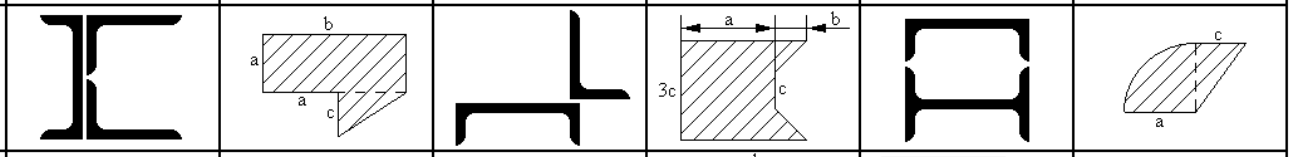
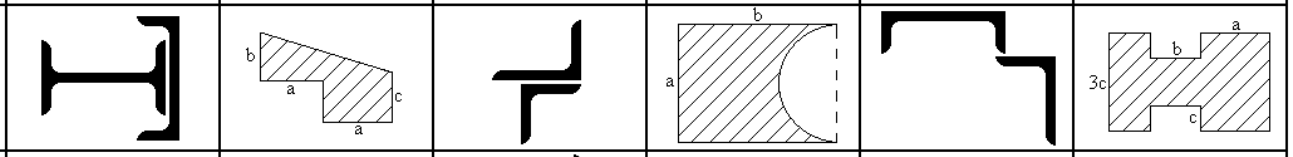
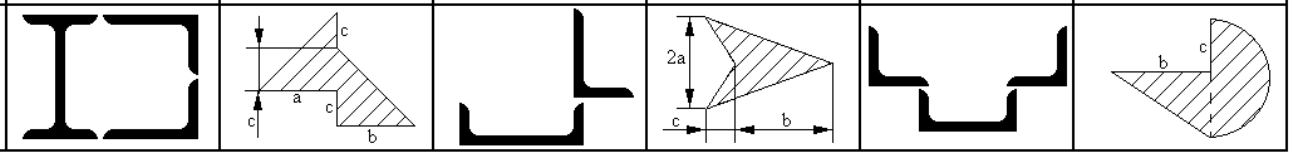
	Геометрические характеристики сечений.					
	A		**B**		**C**	
	I	II	I	II	I	II
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

Таблица 1.2

№	Двутавр №	Швеллер №	Уголок равнобокий	Уголок неравнобо-кий	*a*, см	*b*, см	*c*, см
1	18	8	80×8	70×45×5	10	22	4
2	16	24	70×6	80×50×6	12	21	5
3	12	26	63×5	75×50×6	15	17	7
4	14	10	80×3	110×70×8	16	18	6
5	10	12	100×10	140×90×8	14	23	8
6	18а	14	90×8	125×80×12	13	16	3
7	22	20	100×8	100×63×7	11	18	5
8	24	18	125×10	110×70×7	13	19	6
9	27	22	100×12	100×63×6	9	24	7

Практическое занятие № 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОГО СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного выполнения расчета на прочность и жесткость статически определимого ступенчатого стержня.

Теоретические положения

Продольные силы

При центральном растяжении или сжатии стержней (рис. 2.1, а) в поперечных сечениях имеет место лишь один внутренний силовой фактор – продольная сила N (рис. 2.1, б), уравновешивающая действие нагрузок, приложенных к рассматриваемой отсеченной части стержня. Сила N приложена в центре тяжести поперечного сечения и перпендикулярна его плоскости. Поэтому силу N также называют нормальной силой.

Величина внутренней продольной силы N в поперечном сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (нагрузок), расположенных по одну (любую) сторону от сечения, на его продольную ось z.

$$N = \sum_{\text{лев}} F_{iz} = \sum_{\text{прав}} F_{iz} \qquad (2.1)$$

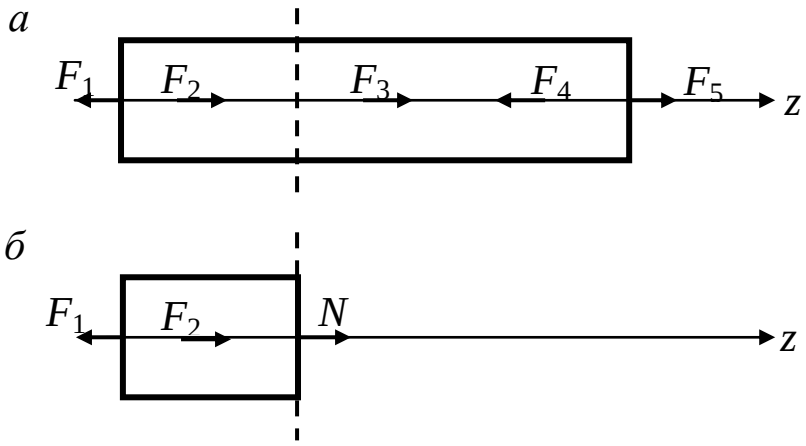


Рис. 2.1: *а* – Центрально растянутый стержень;
б – уравновешенная отсеченная часть стержня

В рассматриваемом случае внутренняя продольная сила равна алгебраической сумме нагрузок F_1 и F_2, приложенных к левой отсеченной части стержня, хотя может быть найдена как алгебраическая сумма нагрузок F_3, F_4 и F, проложенных к правой отсеченной части стержня.

При растяжении внутренняя продольная сила положительна и направлена от поперечного сечения, а при сжатии – отрицательна и направлена к поперечному сечению.

Нормальные напряжения

Исходя из *гипотезы плоских сечений* (поперечные сечения стержней, плоские и нормальные к продольной оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации), подтверждающейся результатами экспериментов, можно показать, что величина нормальных напряжений, равномерно распределенных по поперечному сечению, определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (2.2)$$

Знак нормальных напряжений определяется знаком внутренней продольной силы N, т. е. при растяжении являются положительными, а при сжатии – отрицательными (рис. 2.2)

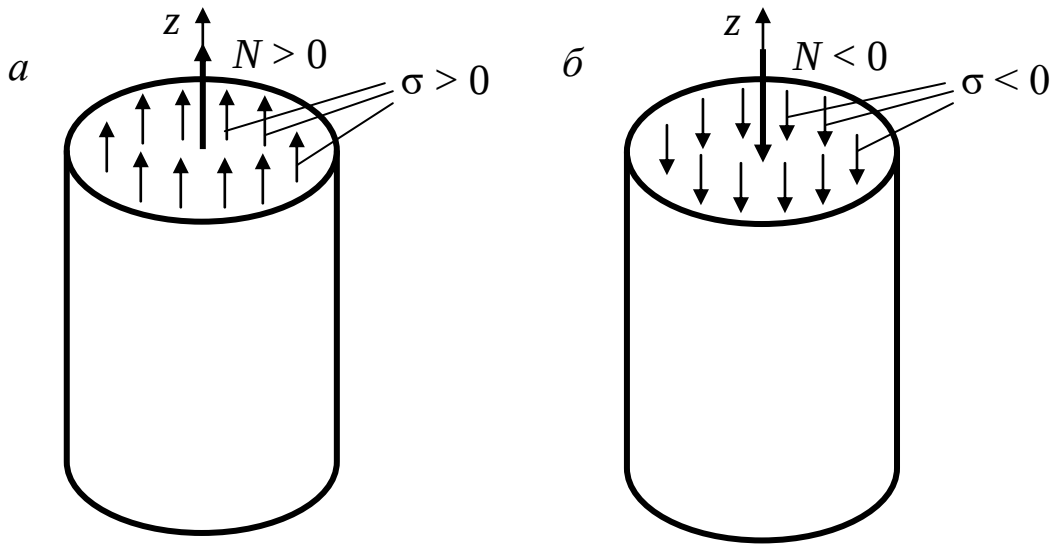


Рис. 2.2. Нормальные напряжения:
а – при растяжении; *б* – при сжатии

При центральном растяжении стержня его продольный размер (длина) увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются (рис. 2.3), а при центральном сжатии стержня продольный размер (длина) уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются.

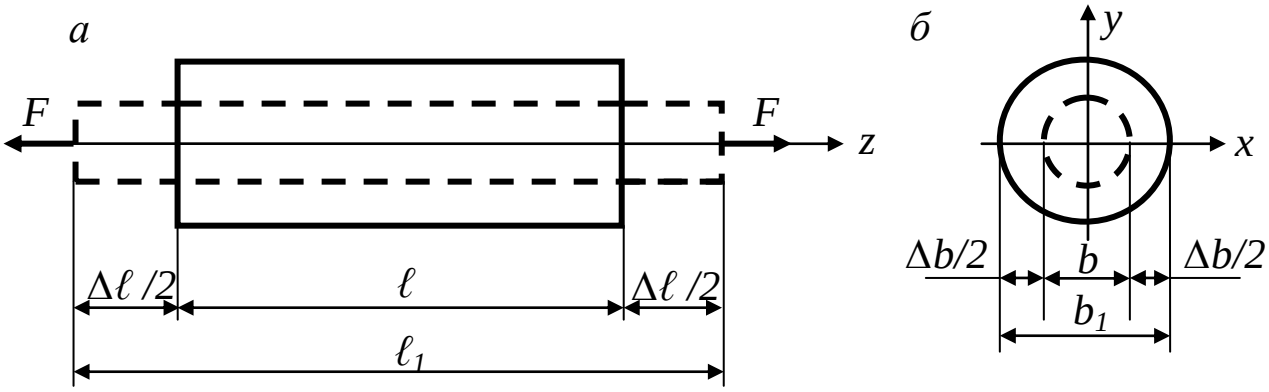


Рис. 2.3. Изменение размеров растянутого стержня:
а – продольного; *б* – поперечного

Абсолютное изменение размеров стержня характеризуется абсолютной линейной деформацией. При этом различают *абсолютную продольную деформацию*

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell, \tag{2.3}$$

где ℓ и b – начальные продольный и поперечный размеры стержня;

и *абсолютную поперечную деформацию*

$$\Delta b = b_1 - b, \tag{2.4}$$

где ℓ_1 и b_1 – окончательные продольный и поперечный размеры стержня.

Кроме абсолютных линейных деформаций существуют относительные линейные деформации. При этом различают *относительную продольную деформацию*

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}, \tag{2.5}$$

и *относительную поперечную деформацию*

$$\varepsilon' = \frac{\Delta\ell}{\ell}. \tag{2.6}$$

Закон Гука

Между нормальными напряжениями и относительной продольной деформацией до определенного предела нагружения существует следующая зависимость (*закон Гука*)

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2.7}$$

где E – модуль продольной упругости (модуль упругости I рода, модуль Юнга).

Это физическая постоянная материала, характеризующая его *жесткость*, т. е. сопротивляемость материала упругой деформации при растяжении–сжатии. Так как относительная продольная деформация является величиной безразмерной, то модуль продольной упругости выражается в тех же единицах, что и напряжение.

Учитывая (2.5) и (2.7) получается другая формула для определения абсолютной продольной деформации стержня

$$\Delta\ell = \frac{N\cdot\ell}{E\cdot A}, \tag{2.8}$$

где EF – жесткость сечения стержня при растяжении–сжатии.

В случае растяжения–сжатия стержня, имеющего несколько участков используется формула

$$\Delta\ell = \sum\frac{N_i\cdot\ell_i}{E\cdot A_i}, \tag{2.9}$$

где N_i – внутренняя продольная сила на i-м участке стержня; ℓ_i – длина i-го участке стержня; EA_i – жесткость сечения при растяжении–сжатии на i-м участке стержня.

Максимальные значения, полученные по формуле (2.9), как и по формуле (2.5), используются в условиях жесткости при растяжении–сжатии

$$\begin{gathered}\Delta\ell_{max} \le [\Delta\ell],\\ \varepsilon_{max} \le [\varepsilon].\end{gathered} \tag{2.10}$$

Величины $[\Delta\ell]$ и $[\varepsilon]$ назначаются с учетом требований к жесткости стержня.

Пример

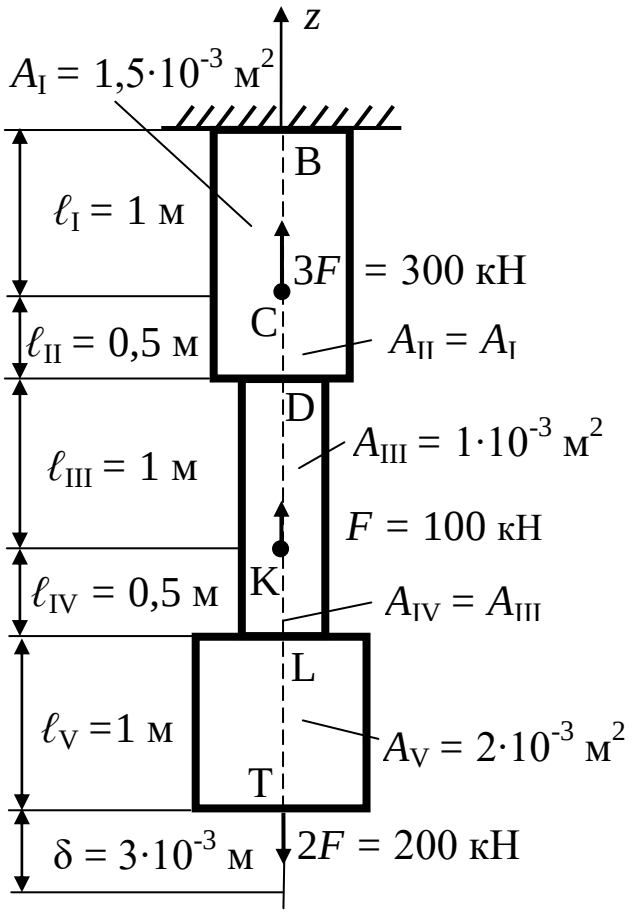


Рис. 2.4. Расчетная схема ступенчатого стержня

Дано:

– расчетная схема ступенчатого стержня (рис. 2.4);

– материал стержня: сталь ВСт3сп5;

– допускаемое напряжение при растяжении

$$[\sigma]^+ = 160\ \text{МПа} = 1600\ \text{кг/см}^2;$$

– допускаемое напряжение при сжатии

$$[\sigma]^- = 120\ \text{МПа} = 1200\ \text{кг/см}^2;$$

– модуль продольной упругости стали

$$E = 2\cdot10^5\ \text{МПа} = 2\cdot10^6\text{кг/см}^2\ ;$$

– минимальный зазор между крайним нижним сечением L и шестерней: $\delta = 3\cdot10^{-3}$м $= 0{,}3$ см.

Задание: проверить стержень на прочность и жесткость.

I. Расчет ступенчатого стержня на прочность:

1. Определяем опорную реакцию R_B в жесткой заделке «В».

Для этого спроецируем на ось z действующие на стержень все внешние известные силы $3F$; F; $2F$ и неизвестную опорную реакцию $R_{\text{В}}$

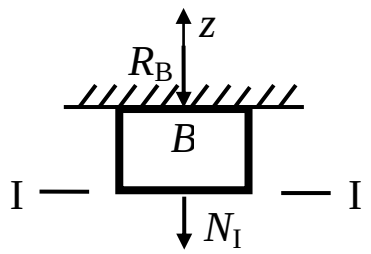
$$\sum z = 0 \rightarrow R_{\text{В}}\,;$$
$$+R_{\text{В}} + 3F + F - 2F = 0;$$
$$+R_{\text{В}} + 300 + 100 - 200 = 0;$$
$$R_{\text{В}} = -200 \text{ кН} = -20 \text{ т.}$$

Знак минус перед числом 200 в ответе показывает, что первоначальное направление опорной реакции $R_{\text{В}}$ вверх было выбрано неверно и поэтому необходимо её направление поменять на противоположное (как в теоретической механике). На рисунке с расчетной схемой стержня первоначально показанную опорную реакцию $R_{\text{В}}$ необходимо зачеркнуть и направить в противоположном направлении.

2. Определяем внутренние продольные силы N на участках стержня, пользуясь методом сечений:

Участок *B–C*

Сечением I–I между точкам *B* и *C* отсекаем от стержня верхнюю часть стержня и заменяем действие отброшенной нижней части стержня внутренней продольной силой N_{I}, направленной вниз (от сечения I–I)



$$\Sigma z = 0 \rightarrow N_{\text{I}};$$
$$-N_{\text{I}} - R_{\text{В}} = 0;$$
$$-N_{\text{I}} - 200 = 0;$$
$$N_{\text{I}} = -200 \text{ кН} = -20 \text{ т.}$$

Знак минус перед числом 200 в ответе показывает, что первоначальное направление внутренней продольной силы N_{I} было выбрано неверно и её направление необходимо поменять на противоположное, т. е. направить вверх (к сечению I–I).

После исправления направления силы N_{I}, если расчет по ее определению повторить, то сила N_{I} будет иметь тоже числовое значение, но уже со знаком плюс

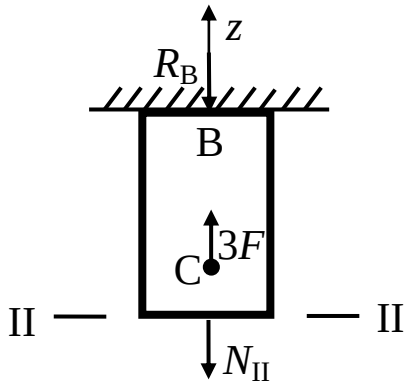
$$N_{\mathrm{I}} = 200 \text{ кН} = 20 \text{ т } \Theta.$$

Направление силы N_{I} (от сечения) указывает на то, что у стержня рассматриваемый участок B–C сжимается и сила N_{I} в этом случае считается сжимающей (отрицательной). Поэтому после числа следует указать знак минус Θ;

Знаки плюс ⊕, указанные после чисел в ответах означают, что у стержня в отличие от участка B–C участки C–D, D–K, K–L, L–T растягиваются.

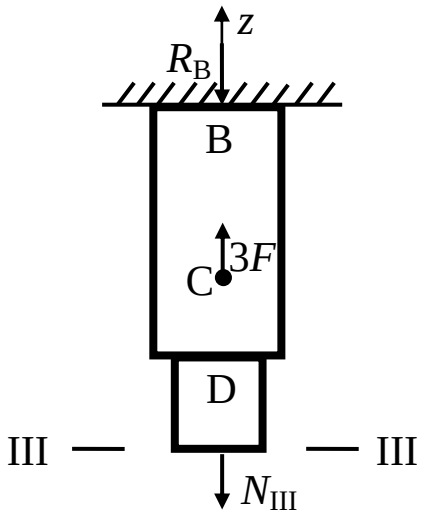
По полученным значениям строим эпюру внутренних продольных сил N (рис. 2.5, б).

Участок C–D



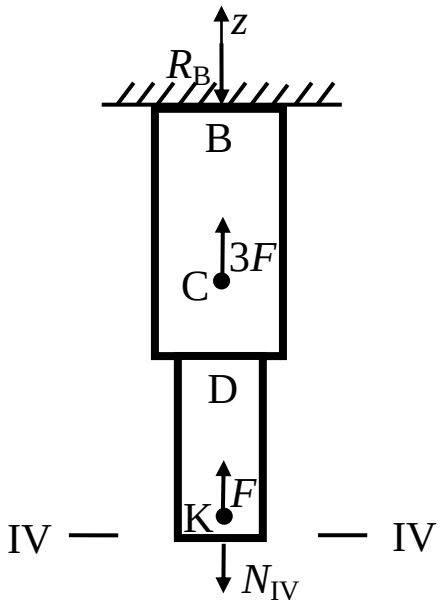
$$\Sigma z = 0 \rightarrow N_{\mathrm{II}};$$
$$-N_{\mathrm{II}} + 3F - R_{\mathrm{B}} = 0;$$
$$-N_{\mathrm{II}} + 300 - 200 = 0;$$
$$N_{\mathrm{II}} = 100 \text{ кН} = 10 \text{ т } \oplus.$$

Участок D–K



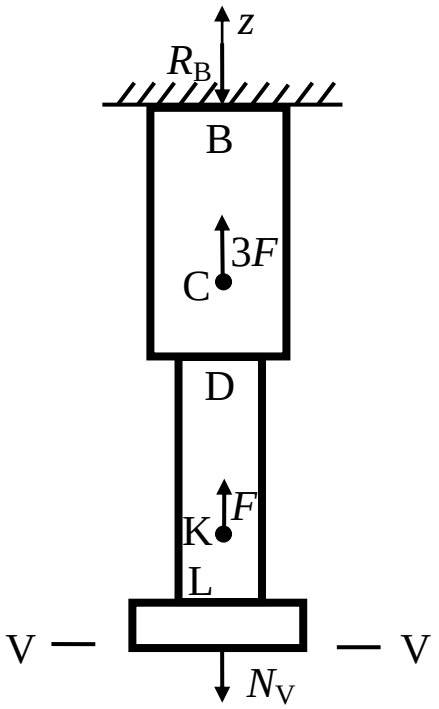
$$\Sigma z = 0 \rightarrow N_{\mathrm{III}};$$
$$-N_{\mathrm{III}} + 3F - R_{\mathrm{B}} = 0;$$
$$-N_{\mathrm{III}} + 300 - 200 = 0;$$
$$N_{\mathrm{III}} = 100 \text{ кН} = 10 \text{ т } \oplus;$$

Участок K–L



$$\Sigma z = 0 \rightarrow N_{IV};$$
$$-N_{IV} + F + 3F - R_B = 0;$$
$$-N_{IV} + 100 + 300 - 200 = 0;$$
$$N_{IV} = 200 \text{ кН} = 20 \text{ т} \oplus;$$

Участок L–T



$$\Sigma z = 0 \rightarrow N_V;$$
$$-N_V + F + 3F - R_B = 0;$$
$$-N_V + 100 + 300 - 200 = 0;$$
$$N_V = 200 \text{ кН} = 20 \text{ т} \oplus.$$

3. Определяем нормальные напряжения σ для каждого участка ступенчатого стержня с использованием формулы

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i},$$

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{N_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}} = \frac{(-200)\cdot 10^3}{1{,}5\cdot 10^{-3}} = 1{,}33\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2 = -\,133\ \text{МПа} =$$
$$= 1330\ \text{кг/см}^2\ \Theta;$$
$$\sigma_{\mathrm{II}} = \frac{N_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{II}}} = \frac{100\cdot 10^3}{1{,}5\cdot 10^{-3}} = 0{,}67\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2 = 67\ \text{МПа} =$$
$$= 670\ \text{кг/см}^2\ \oplus;$$
$$\sigma_{\mathrm{III}} = \frac{N_{\mathrm{III}}}{A_{\mathrm{III}}} = \frac{100\cdot 10^3}{1\cdot 10^{-3}} = 1\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2 = 100\ \text{МПа} =$$
$$= 1000\ \text{кг/см}^2\ \oplus;$$
$$\sigma_{\mathrm{IV}} = \frac{N_{\mathrm{IV}}}{A_{\mathrm{IV}}} = \frac{200\cdot 10^3}{1\cdot 10^{-3}} = 2\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2 = 200\ \text{МПа} =$$
$$= 2000\ \text{кг/см}^2\ \oplus;$$
$$\sigma_{\mathrm{V}} = \frac{N_{\mathrm{V}}}{A_{\mathrm{V}}} = \frac{200\cdot 10^3}{2\cdot 10^{-3}} = 1\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2 = 100\ \text{МПа} =$$
$$= 1000\ \text{кг/см}^2\ \oplus.$$

Знак плюс показывает, что участок растягивается и напряжения σ здесь растягивающие, знак минус показывает, что участок сжимается и напряжения σ здесь сжимающие.

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис. 2.5, в).

4. Проверяем стержень на прочность на опасных участках

Для этого выбираем максимальные значения нормальных растягивающих и сжимающих напряжений σ. В сопротивлении материалов принято обозначать максимальные растягивающие напряжения σ_{max}, а максимальные сжимающие напряжения σ_{min}.

Для проверки прочности стержня необходимо максимальные растягивающие напряжения сравнить с допускаемыми напряжениями на растяжение, а максимальные сжимающие напряжения с допускаемыми напряжениями на сжатие, т. к. на растяжение и на сжатие материал стержня работает различным образом. При расчете стержня на сжатие необходимо еще учитывать его способность терять устойчивость, но этот вопрос будет рассматриваться позже. Поэтому возможная потеря устойчивости стержнем учитывается разными допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие. На растяжение допускаемое напряжение больше, на сжатие меньше.

$$\sigma_{max} = \sigma_{\mathrm{IV}} = +200\ \text{МПа} > [\sigma]^{+} = 160\ \text{МПа};$$
$$\sigma_{min} = \sigma_{\mathrm{I}} = -133\ \text{МПа} > [\sigma]^{-} = 120\ \text{МПа}.$$

Так как фактические напряжения на первом и четвертом участках стержня более чем на 5 % превышают соответствующие допускаемые напряжения, то условия прочности не удовлетворяются и требуется произвести подбор новых площадей сечений для этих участков.

5. Подбираем новые площади сечений для опасных участков стержня

Для этого используем условие прочности стержня при растяжении-сжатии

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma],$$

откуда

$$A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]},$$

$$A_{\mathrm{I}} \geq \frac{|N_{\mathrm{I}}|}{[\sigma]^-} = \frac{200 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 1{,}67 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 16{,}7\ \text{см}^2;$$

$$A_{\mathrm{IV}} \geq \frac{N_{\mathrm{IV}}}{[\sigma]^+} = \frac{200 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 12{,}5\ \text{см}^2.$$

Примем для первого и второго участков стержня полученные площади.

II. Расчет ступенчатого стержня на жесткость:

1. Определяем абсолютные продольные деформации $\Delta\ell_i$ участков стержня, используя для этого закон Гука:

$$\Delta\ell_i = \frac{N_i \cdot \ell_i}{E \cdot A_i},$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{I}} = \frac{N_{\mathrm{I}} \cdot \ell_{\mathrm{I}}}{E \cdot A_{\mathrm{I}}} = \frac{-200 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{5 \cdot} 10^6 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-3}} = -\,6 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = -\,0{,}06\ \text{см}\ \Theta;$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{II}} = \frac{N_{\mathrm{II}} \cdot \ell_{\mathrm{II}}}{E \cdot A_{\mathrm{II}}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{5 \cdot} 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}03\ \text{см}\ \oplus;$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{III}} = \frac{N_{\mathrm{III}} \cdot \ell_{\mathrm{III}}}{\mathrm{E} \cdot A_{\mathrm{III}}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{5 \cdot} 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}05\ \text{см}\ \oplus;$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{IV}} = \frac{N_{\mathrm{IV}} \cdot \ell_{\mathrm{IV}}}{E \cdot A_{\mathrm{IV}}} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{5 \cdot} 10^6 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}04\ \text{см}\ \oplus;$$

$$\Delta\ell_{\mathrm{V}} = \frac{N_{\mathrm{V}} \cdot \ell_{\mathrm{V}}}{E \cdot A_{\mathrm{V}}} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{5 \cdot} 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}05\ \text{см}\ \oplus.$$

2. Определяем перемещения δ_i характерных сечений стержня

Перемещения сечений складываются из абсолютных продольных деформаций участков стержня.

Перемещение сечения B равно нулю, т. к. сечение B является опорным и поэтому не может перемещаться

$$\delta_B = 0;$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta\ell_I = 0 + (-6 \cdot 10^{-4}) = -6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}06 \text{ см } \Theta;$$

сечение *B* перемещается вверх;

$$\delta_D = \delta_C + \Delta\ell_{II} = -6 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4} = -3 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}03 \text{ см } \Theta;$$

сечение *C* перемещается вверх;

$$\delta_K = \delta_D + \Delta\ell_{III} = -3 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}02 \text{ см } \oplus;$$

сечение *D* перемещается вниз;

$$\delta_L = \delta_K + \Delta\ell_{IV} = 2 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}06 \text{ см } \oplus;$$

сечение K перемещается вниз;

$$\delta_T = \delta_L + \Delta\ell_V = 6 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}11 \text{ см } \oplus;$$

сечение T перемещается вниз.

По полученным значениям строим эпюру перемещений сечений стержня δ (рис. 3.2, г).

3. Проверяем стержень на жесткость

При оценке жесткости стержня опасным сечением является сечение T, т. к. при его перемещении вниз может происходить контакт стержня с шестерней. Сечение T, согласно построенной эпюре δ, перемещается вниз и может задеть шестерню, что недопустимо, т. к. это может препятствовать нормальной эксплуатации механизма, в который входит ступенчатый стержень и шестерня. Проверим эту возможность и если перемещение сечения T будет меньше, равно, либо превышать допускаемое перемещение [δ] не более чем на 5 %, то условие жесткости стержня будет удовлетворено.

$$\delta_T = 11 \cdot 10^{-4}\text{м} = 0{,}11 \text{ см} < [\delta] = \frac{\delta}{n} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0{,}15 \text{ см}.$$

Условие жесткости удовлетворяется.

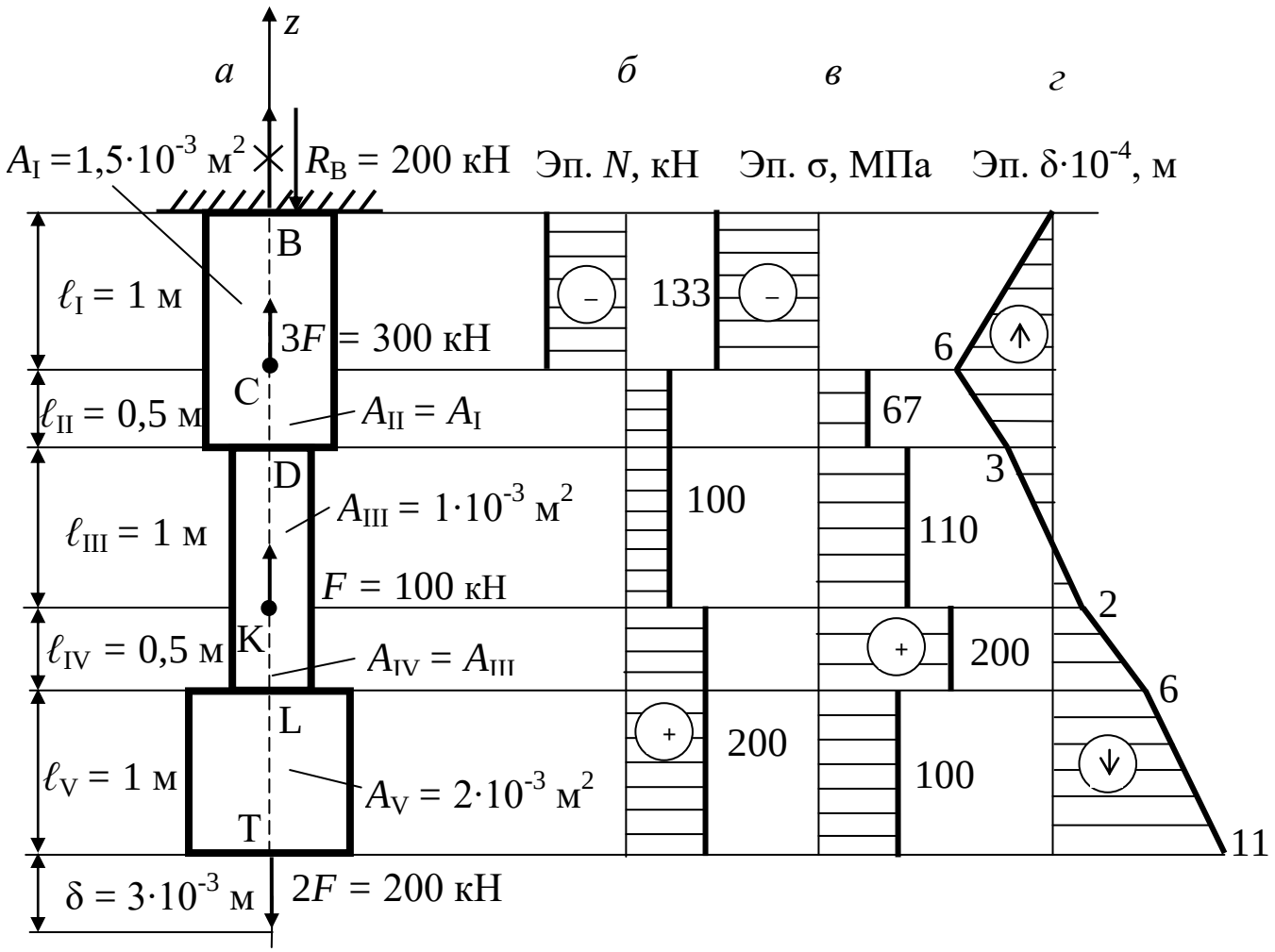


Рис. 3.2: *а* – расчетная схема ступенчатого стержня;
б – эпюра продольных сил N; *в* – эпюра нормальных напряжений σ;
г – эпюра перемещений сечений δ

Практическое занятие № 3

РАСЧЕТ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ (РАСЧЕТ ОТ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ)

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного расчета статически неопределимых шарнирно-стержневых систем на внешнее нагружение.

Статически-неопределимой шарнирно-стержневой системой называется такая, в которой усилия в стержнях и реакции в опорах нельзя определить только из условия равновесия.

Обычный кронштейн (рис. 3.1, *а*), состоит из двух стержней. Усилия N_1 и N_2 в стержнях этого кронштейна легко определяются из условия равновесия системы сходящихся сил, приложенных к вырезанному узлу С, так как два уравнения для этой системы сил с двумя неизвестными решаются.

Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 3.1, *б*), то усилия в стержнях прежним образом уже определены быть не могут, так как для узла С по-прежнему можно составить только два уравнения статического равновесия ($\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0$), а число неизвестных усилий равно трем. Имеем один раз статически неопределимую систему.

Усложняя конструкцию и вводя новые стержни, можно получить два раза статически неопределимую систему (рис. 3.1, *в*), три раза и т. д. Следовательно, под n раз статически неопределимой системой понимается такая система, в которой число связей превышает число независимых уравнений статики на n единиц.

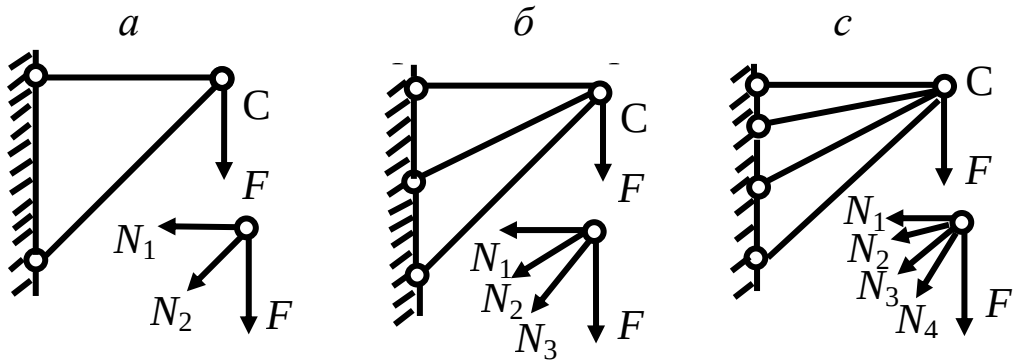


Рис. 3.1: *а* – статически определимая система;
б и *с* – статически неопределимые системы

Необходимые для решения задачи дополнительные уравнения можно найти, рассматривая систему в деформированном состоянии и устанавливая связи между перемещениями и деформациями элементов конструкции. Полученные уравнения называются уравнениями совместимости деформаций.

Рассмотрим схемы некоторых статически неопределимых систем (рис. 3.2).

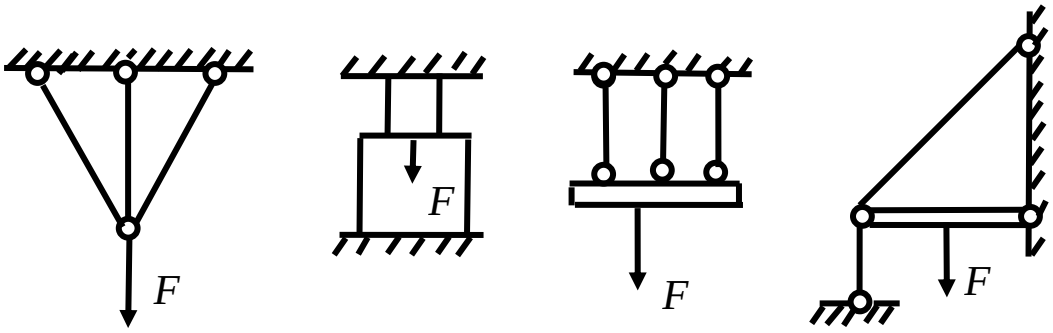


Рис. 3.2. Некоторые виды статически неопределимых систем

При изучении темы «Статически неопределимые шарнирно-стержневые системы» и выполнении соответствующего расчетно-графического типового расчета необходимо усвоить особенности статически неопределимых систем; получить навыки в раскрытии статической неопределимости, в определении усилий в элементах конструкций и подборе площадей поперечных сечений из условия прочности.

В расчетно-графическом типовом расчете необходимо выполнить следующую работу:

– определить усилия в стержнях и подобрать площади поперечных сечений от действия внешних нагрузок;

– определить дополнительные напряжения в стержнях от изменения температуры;

– определить дополнительные монтажные напряжения, вызванные неточностью изготовления стержней;

– подобрать сечения стержней по предельному состоянию.

При решении статически неопределимых задач следует придерживаться следующего порядка:

1. Рассмотреть статическую сторону задачи. Построить план сил и составить уравнения статики.

2. Рассмотреть геометрическую сторону задачи. Построить план перемещений. Составить дополнительные уравнения совместимости деформаций в таком количестве, чтобы можно было найти все неизвестные усилия.

3. Рассмотреть физическую сторону задачи. По законам физики (при температурном расчете) и по закону Гука выразить деформации в уравнениях их совместимости через неизвестные усилия, действующие в стержнях:

$$\Delta\ell^t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta\ell^N = \frac{N^t \cdot \ell}{E \cdot A}. \tag{3.1}$$

4. Произвести совместное решение уравнений статики, геометрии, физики и определить неизвестные усилия.

5. Используя условия прочности при сжатии или растяжении $N/F = [\sigma]$, подбор площадей поперечных сечений стержней.

6. При известных усилиях в стержнях и принятых площадях поперечных сечений вычислить нормальные напряжения по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (3.2)$$

Пример

Дано: Статически неопределимая шарнирно-стержневая система (рис. 3.3) нагружена равномерно распределенной нагрузкой и силой F

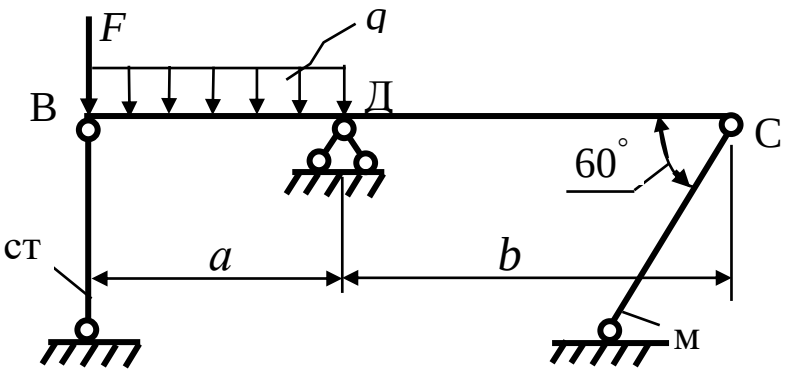


Рис. 3.3. Схема статически неопределимой системы

Таблица 3.1

Исходные данные для расчета

Материал	E, МПа	$[\sigma]^+$, МПа	$[\sigma]^-$, МПа	α, 1/град	ℓ, м	F, кН	q, кН/м	a, м	b, м	$\frac{A_{ст}}{A_м}$
Сталь	$2{\cdot}10^5$	160	120	$125{\cdot}10^{-7}$	1,2	30	1,5	2	4	$\frac{3}{4}$
Медь	$1{\cdot}10^5$	84	42	$165{\cdot}10^{-7}$	1,9					

Требуется:

1. Определить усилия ($N_{ст}$;$N_м$), площади поперечных сечений ($A_{ст}$; $A_м$) и напряжения ($\sigma_{ст}^F$; $\sigma_м^F$) в стальном (ст) и медном (м) стержнях от действия внешних нагрузок F и q.

2. Определить дополнительные напряжения в стержнях ($\sigma_{ст}^t$; $\sigma_м^t$) от изменения температуры на $\Delta t = +20^\circ C$.

3. Определить дополнительные напряжения в стержнях, вызванные неточностью изготовления вертикального стержня $\Delta = 0{,}1$ см.

4. Определить суммарные напряжения в стержнях от действия нагрузок, изменения температуры и неточности изготовления.

Расчет статически шарнирно-стержневой неопределимой системы от внешней нагрузки

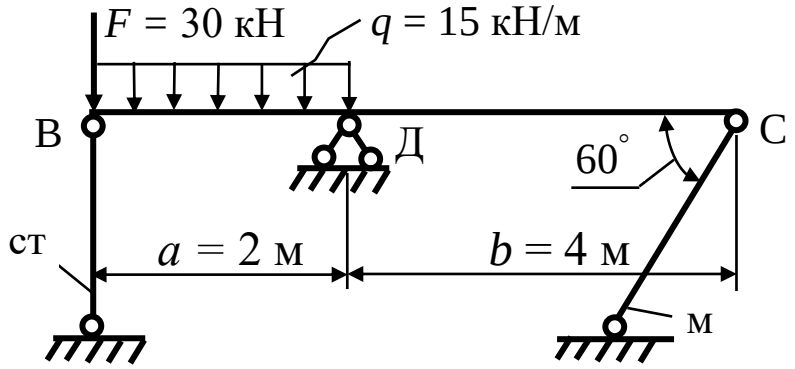


Рис. 3.4. Расчетная схема от внешней нагрузки

Статическая сторона задачи

Статическая сторона задачи рассматривается планом сил (рис. 3.5). План сил – это расчетная схема, на которой показаны все силы (и известные, и неизвестные), приложенные к элементу шарнирно-стержневой системы, равновесие которого рассматривается (в нашем случае это жесткая балка *AB*). Разрежем стальной и медный стержни и отброшенные их нижние части заменим внутренними усилиями.

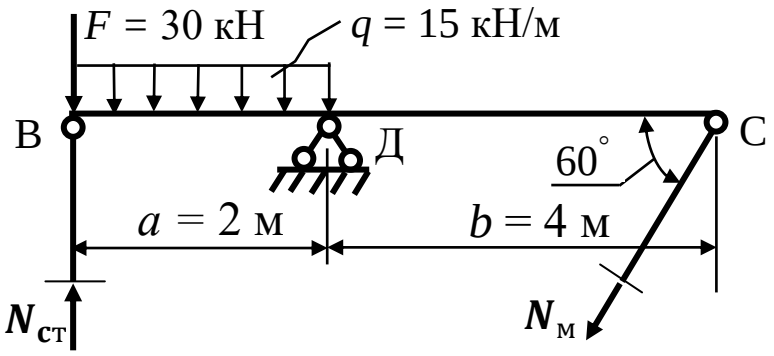


Рис. 3.5. План сил от внешней нагрузки

Из плана сил (рис. 3.5) записываем уравнения статического равновесия. Для ответа на первый вопрос задачи необходимо знать усилия в стержнях – стальном и медном. Реакцию шарнирно-неподвижной опоры вычислять в данном случае нет необходимости. Поэтому из трёх возможных уравнений статики ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0; \Sigma M_{\text{с}} = 0$) записываем такое, в которое не входят реакции шарнирно-неподвижной опоры *C*:

$$\Sigma M_{\text{Д}} = 0;$$

$$-N_{\text{ст}} \cdot a + q\frac{a^2}{2} + P \cdot a - N_{\text{м}} \cdot sin60^{\circ} \cdot b = 0;$$

$$-N_{\text{ст}} \cdot 2 + 15\frac{2^2}{2} + 30 \cdot 2 - N_{\text{м}} \cdot 0{,}866 \cdot 4 = 0.$$

После преобразований уравнение равновесия примет вид

$$N_{\text{ст}} + 1{,}73 \cdot N_{\text{м}} = 45. \qquad (3.3)$$

Геометрическая сторона задачи

Геометрическая сторона задачи рассматривается планом перемещений. План перемещений – это расчётная схема, на которой показано положение шарнирно-стержневой системы до и после нагружения. На плане перемещений указываем перемещения точек балки (BB_1 и BB_1), абсолютные деформации медного и стального стержней ($\Delta\ell_{\text{ст}}$; $\Delta\ell_{\text{м}}$) (рис. 2.6). Причём в силу малых деформаций точки балки перемещаем по вертикали вверх или вниз, а деформации наклонных стержней отмечаем перпендикуляром.

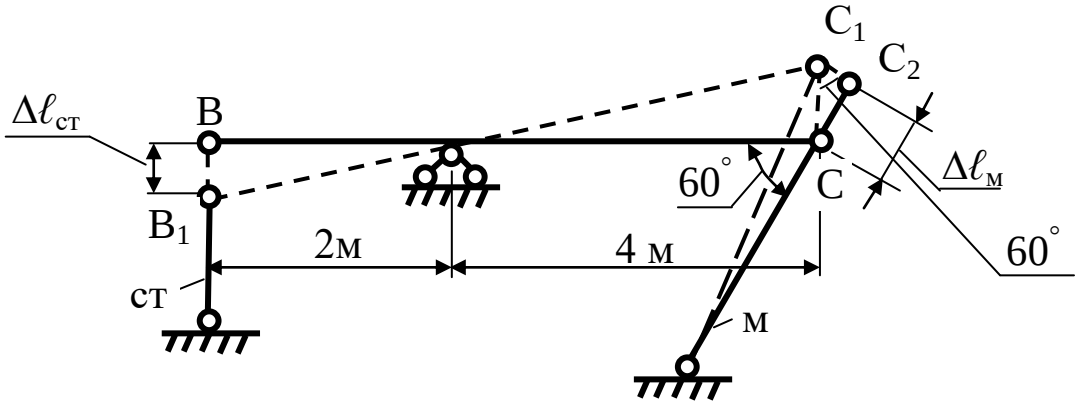


Рис. 3.6. План перемещений от внешней нагрузки

По плану перемещений составляем уравнение совместимости деформаций. В первую очередь запишем соотношение перемещений точек балки из подобия треугольников $ВВ_1Д$ и $ДСС_1$ (см. рис. 3.6)

$$\frac{ВВ_1}{СС_1} = \frac{ВД}{СД}. \tag{3.4}$$

Перемещения точек балки ($ВВ_1$ и $СС_1$) выразим через деформации стержней ($\Delta\ell_{ст}$; $\Delta\ell_{м}$):

$$ВВ_1 = \Delta\ell_{ст}. \tag{3.5}$$

Из треугольника $СС_1С_2$ выразим:

$$СС_1 = \frac{С_1С_2}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta\ell_{м}}{\sin 60^\circ}. \tag{3.6}$$

Выражения (3.5) и (3.6) подставим в соотношение (3.4):

$$\frac{\Delta\ell_{ст}\sin 60^\circ}{\Delta\ell_{м}} = \frac{AC}{AB}$$

или

$$\frac{\Delta\ell_{ст}\cdot 0{,}866}{\Delta\ell_{м}} = \frac{2}{4}$$

или

$$0{,}866\cdot\Delta\ell_{ст} = 0{,}5\cdot\Delta\ell_{м}. \tag{3.7}$$

Это и есть уравнение совместимости деформации.

Физическая сторона задачи

Полученное уравнение совместимости деформации (3.7) в таком виде не решается с уравнением равновесия (3.3), потому что входящие в них неизвестные величины разного характера.

Абсолютные деформации $\Delta\ell_{ст}$ и $\Delta\ell_{м}$ в уравнении (3.7) выразим через усилия в стержнях по закону Гука

$$\Delta\ell = \frac{N\cdot\ell}{E\cdot A}.$$

Получим

$$0{,}866\frac{N_{ст}\cdot\ell_{ст}}{E_{ст}\cdot A_{ст}} = \frac{N_{м}\cdot\ell_{м}}{E_{м}\cdot A_{м}}.$$

Подставим числовые значения исходных данных, а $A_{ст}$ выразим через $A_м$ согласно исходным данным:

$$\frac{A_{ст}}{A_м} = \frac{3}{4}, \quad \text{откуда} \quad A_{ст} = \frac{3}{4}A_м = 0{,}75A_м\ ,$$

и получим $\quad 0{,}866\frac{N_{ст}\cdot 1{,}2}{2\cdot 10^5\cdot 0{,}75A_м} = 0{,}5\frac{N_м\cdot 1{,}9}{1\cdot 10^5 A_м}.$

После выполнения арифметических действий получим

$$0{,}67N_{ст} = 0{,}95N_м. \qquad (3.8)$$

Получили уравнение совместимости деформаций, записанное через усилия в стержнях.

Синтез

Решим совместно уравнения равновесия (3.3) и уравнение совместимости деформаций (3.8)

$$\begin{cases} N_{ст} + 1{,}73N_м = 45 \\ 0{,}67N_{ст} = 0{,}95N_м \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы выразим усилие $N_{ст}$

$$N_{ст} + \frac{0{,}95}{0{,}67}N_м = 1{,}42\cdot N_м$$

и подставим в первое уравнение системы

$$1{,}42N_м + 1{,}73N_м = 45 \quad \text{или} \quad 3{,}15N_м = 45$$

откуда $N_м = \frac{45}{3{,}15} = 14{,}3$ кН, тогда $N_{ст} = 1{,}42\cdot 14{,}3 = 20{,}3$ кН.

Положительный результат $N_{ст}$ и $N_м$ подтверждает наши предположения сжатия стального стержня и растяжения медного стержня, значит, усилия в стержнях будут

$$N_{ст} = -20{,}3 \text{ кН}; \quad N_м = 14{,}3 \text{ кН}.$$

Подбор поперечных сечений стержней

Подбор поперечных сечений стержней ведется по условию прочности при растяжении – сжатии

$$\frac{N}{A} \le [\sigma].$$

Требуемая из условия прочности площадь поперечного сечения стального стержня будет определена

$$A_{ст} \ge \frac{N_{ст}}{[\sigma_{ст}]^-} \ge \frac{20{,}3}{120\cdot 10^3} \ge 1{,}7\cdot 10^{-4}\text{м}^2.$$

При этом согласно заданному отношению площадей $\frac{A_{ст}}{A_м} = \frac{3}{4}$ площадь медного стержня должна быть равна

$$A_м = \frac{4}{3} A_{ст} = \frac{4}{3} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-4} = 2{,}27 \cdot 10^{-4} м^2.$$

Требуемая из условия прочности площадь поперечного сечения медного стержня будет определена

$$A_м \geq \frac{N_м}{[\sigma_м]^+} \geq \frac{14{,}3}{84 \cdot 10^3} \geq 1{,}7 \cdot 10^{-4} м^2.$$

При этом, согласно заданному отношению площадей, площадь стального стержня должна быть равна

$$A_{ст} = \frac{3}{4} A_м = \frac{3}{4} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-4} = 1{,}275 \cdot 10^{-4} м^2.$$

Принимаем большие площади поперечных сечений стержней

$$A_{ст} = 1{,}7 \cdot 10^{-4} м^2; \quad A_м = 2{,}27 \cdot 10^{-4} м^2.$$

Напряжения в стержнях от внешней нагрузки

При принятых площадях поперечных сечений медного и стального стержней определим напряжения в этих стержнях:

$$\sigma_{ст}^F = \frac{N_{ст}}{A_{ст}} = \frac{-20{,}3 \cdot 10^{-3}}{1{,}7 \cdot 10^{-4}} = -119{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_м^F = \frac{N_м}{A_м} = \frac{14{,}3 \cdot 10^{-3}}{2{,}27 \cdot 10^{-4}} = 63 \text{ МПа}.$$

Практическое занятие № 4

РАСЧЕТ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ (ТЕМПЕРАТУРНЫЙ И МОНТАЖНЫЙ РАСЧЕТЫ)

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения температурных и монтажных напряжений в статически неопределимой шарнирно-стержневой системе.

Температурный расчет

Целью температурного расчета является определение дополнительных напряжений в медном и стальном стержнях от изменения температуры.

Допустим, система нагревается на $\Delta t = 20°\text{C}$.

Алгоритм решения остаётся прежним.

Исходная расчетная схема представлена на рис. 4.1.

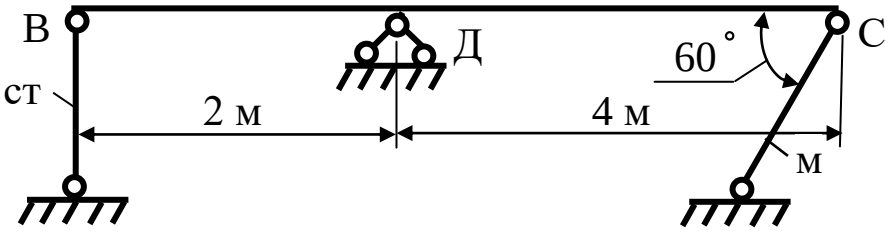


Рис. 4.1. Расчетная схема от температурного воздействия

Статическая сторона задачи

При построении плана сил направление усилия в одном из стержней предполагаем. Направление усилия во втором стержне принимаем в соответствии с принятым в первом, чтобы обеспечить равновесие балки. При этом надо помнить, что оба стержня одновременно растянутыми быть не могут (см. рис. 4.2). В рассматриваемом примере стержни сжаты.

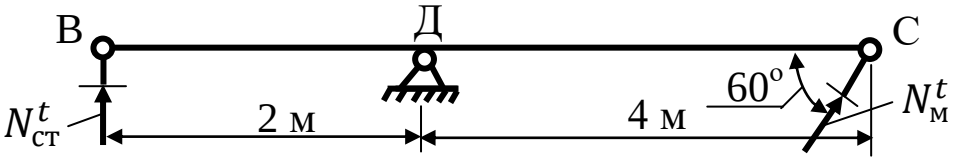


Рис. 4.2. План сил от температурного воздействия

Запишем уравнение равновесия:

$$\Sigma M_{\text{Д}} = 0;$$

$$-N_{\text{ст}}^{t} \cdot 2 + N_{\text{м}}^{t} \cdot \sin 60^{\circ} \cdot 4 = 0.$$

Полученное уравнение равновесия запишем через напряжения в стержнях, для чего разделим его на равноценные величины $A_{\text{ст}}$ и $0{,}75A_{\text{м}}$, (по условию задачи $A_{\text{ст}} = \frac{3}{4}A_{\text{м}} = 0{,}75A_{\text{м}}$)

$$-\frac{N_{\text{ст}}^{t}}{A_{\text{ст}}}2 + \frac{N_{\text{м}}^{t}}{0{,}75 \cdot A_{\text{м}}}0{,}866 \cdot 4 = 0.$$

После выполнения арифметических действий получим

$$\sigma_{\text{ст}}^{t} = 2{,}31\sigma_{\text{м}}^{t}.$$

Геометрическая сторона задачи

Строим план перемещений, на котором изображаем заданную шарнирно-стержневую систему до нагрева и предположительное положение её после нагрева (рис. 4.2).

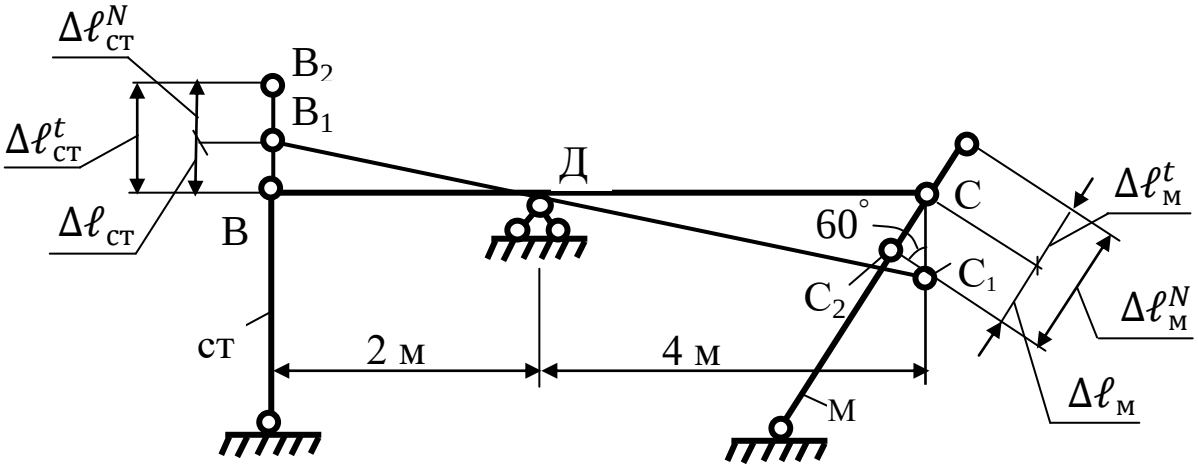


Рис. 4.2. План перемещений от температурного воздействия

На плане перемещений кроме полной, т. е. окончательной, деформации стержней ($\Delta\ell_{\text{м}}$ и $\Delta\ell_{\text{ст}}$) показаны виртуальные деформации от нагрева ($\Delta\ell^{t}$) и от усилий в стержнях ($\Delta\ell^{N}$). Причем в сжатых стержнях температурная деформация выходит за пределы полной деформации, а в случае растянутого стержня эта деформация будет в пределах полной деформации.

Из плана перемещений составим уравнение совместимости деформаций.

Из подобия треугольников $BB_1Д$ и $ДCC_1$ запишем отношение перемещений точек:

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BД}{CД} \text{ или } \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

или $$\mathrm{BB_1} = 0{,}5 \cdot \mathrm{CC_1}, \qquad (4.2)$$
где $AA_1 = \Delta\ell_{\text{ст}} = \Delta\ell_{\text{ст}}^t - \Delta\ell_{\text{ст}}^N$;

$$\mathrm{BB_1} = \frac{\Delta\ell_{\text{м}}}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta\ell_{\text{м}}^N - \Delta\ell_{\text{м}}^t}{s\sin 60^\circ},$$

Тогда зависимость (4.2) примет вид

$$\Delta\ell_{\text{ст}}^t - \Delta\ell_{\text{ст}}^N = 0{,}5\,\frac{\Delta\ell_{\text{м}}^N - \Delta\ell_{\text{м}}^t}{0{,}866}$$

или

$$\Delta\ell_{\text{ст}}^t - \Delta\ell_{\text{ст}}^N = 0{,}58(\Delta\ell_{\text{м}}^N - \Delta\ell_{\text{м}}^t). \qquad (4.3)$$

Это и есть уравнение совместимости деформаций при температурном воздействии на стержневую систему.

Физическая сторона задачи

Заменяя деформации в уравнении (4.3) по закону физики $\Delta\ell^t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t$ и закону Гука $\Delta\ell^N = \frac{N^t \cdot \ell}{E \cdot A}$. получим

$$\alpha_{\text{ст}} \cdot \ell_{\text{ст}} \cdot \Delta t - \frac{N_{\text{ст}}^t \cdot \ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}} \cdot A_{\text{ст}}} = 0{,}58\left(\frac{N_{\text{м}}^t \cdot \ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}} \cdot A_{\text{м}}} - \alpha_{\text{м}} \cdot \ell_{\text{м}} \cdot \Delta t\right). \qquad (4.4)$$

Подставляя в уравнение (4.4) числовые значения исходных данных, а также выражения

$$\frac{N_{\text{ст}}^t}{A_{\text{ст}}} = \sigma_{\text{ст}}^t \quad \text{и} \quad \frac{N_{\text{м}}^t}{A_{\text{м}}} = \sigma_{\text{м}}^t$$

получим

$$125 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}2 \cdot 20 - \frac{\sigma_{\text{ст}}^t}{2 \cdot 10^5} = 0{,}58\left(\frac{\sigma_{\text{м}}^t}{1 \cdot 10^5} - 165 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}9 \cdot 20\right).$$

или $$0{,}6\sigma_{\text{ст}}^t + 1{,}1\sigma_{\text{м}}^t = 66{,}4. \qquad (4.5)$$

Синтез

Решаем совместно уравнения (4.1) и (5.5)

$$\begin{cases} \sigma_{\text{ст}}^t = \sigma_{\text{м}}^t \\ \sigma_{\text{ст}}^t + \sigma_{\text{м}}^t = 66{,}4. \end{cases}$$

Выразим $\sigma_{\text{ст}}^t$ через $\sigma_{\text{м}}^t$ первого уравнения системы и подставим во второе уравнение системы

$$0{,}6 \cdot 2{,}31\sigma_{\text{м}}^t + 1{,}1\sigma_{\text{м}}^t = 66{,}4,$$

откуда

$$\sigma_{\text{м}}^{t} = \frac{66{,}4}{0{,}6 \cdot 2{,}31 + 1{,}1} = \frac{66{,}4}{2{,}486} = 26{,}71 \text{ МПа},$$

тогда

$$\sigma_{\text{ст}}^{t} = 2{,}31 \cdot 26{,}71 = 61{,}7 \text{ МПа}.$$

Положительный результат подтверждает предположение сжатия обоих стержней. Следовательно, в стержнях действуют нормальные напряжения от нагрева системы

$$\sigma_{\text{ст}}^{t} = -\,61{,}7 \text{ МПа} \;\text{ и }\; \sigma_{\text{м}}^{t} = -\,26{,}71 \text{ МПа}.$$

Монтажный расчет

Целью монтажного расчета является определение дополнительных напряжений в стальном и медном стержнях. При монтаже стержневой системы очень часто допускаются отклонения от проектных размеров. Стержни могут быть заготовлены или длиннее, или короче заданных на некоторую величину Δ (рис. 4.3). Если величина Δ незначительна по сравнению с длинами стержней (в рассматриваемом случае $\Delta = 0{,}001$ м), то, приложив определенные усилия к стержням, можно произвести монтаж стержневой системы.

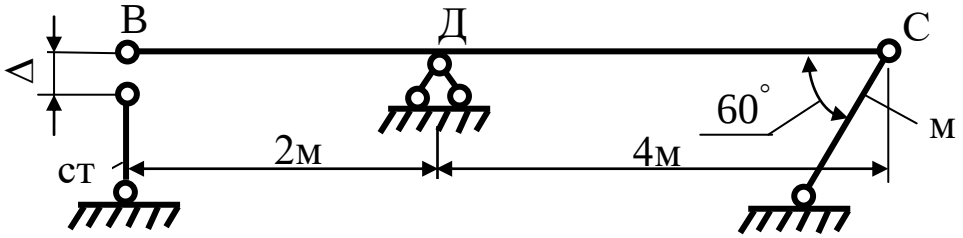


Рис. 4.3. Расчетная схема от монтажной ошибки в шарнире В

Статическая сторона задачи

При сборке стержневой системы, чтобы выполнить соединение в узле В, необходимо растянуть стальной и медный стержни. Построим план сил (рис. 4.4).

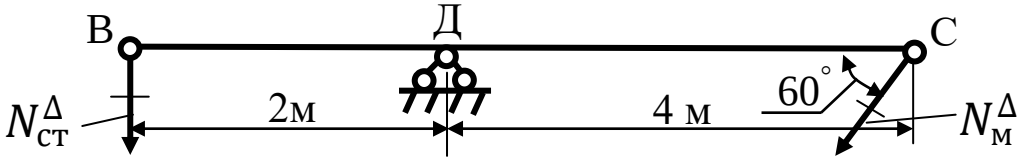


Рис. 4.4. План сил от монтажной ошибки в шарнире В

Составим уравнение статики $\Sigma M_Д = 0$:

$$N_{ст}^{\Delta} \cdot 2 - N_{м}^{\Delta} \cdot \sin 60^{\circ} \cdot 4 = 0 \quad \text{или} \quad N_{ст}^{\Delta} = 1{,}732 N_{м}^{\Delta}.$$

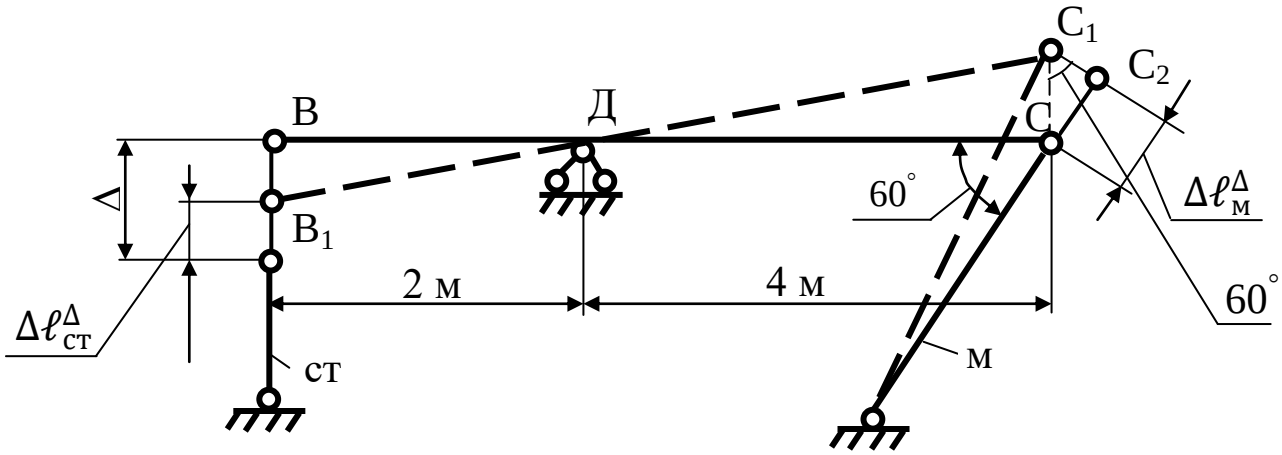
Полученное уравнение равновесия запишем через напряжения в стержнях, для чего разделим его на величину $A_{ст}$ и $0{,}75A_{м}$ (по условию задачи $A_{ст} = \frac{3}{4}A_{м} = 0{,}75A_{м}$). В результате получим:

$$\frac{N_{ст}^{\Delta}}{A_{ст}} = \frac{1{,}732 N_{м}^{\Delta}}{0{,}75 A_{м}}$$

или……$\sigma_{ст}^{\Delta} = 2{,}31\sigma_{м}^{\Delta}$……(4.6)

Геометрическая сторона задачи

Упругие свойства стального и медного стержней позволяют узлу В после сборки находится в пределах зазора Δ. Из этих сооб-



ражений строим план перемещений (рис. 4.5)

Рис. 4.5. План перемещений от монтажной ошибки в шарнире В

Запишем соотношение перемещений точек балки

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{ВД}{СД}, \tag{4.7}$$

где $BB_1 = \Delta - \Delta\ell_{ст}^{\Delta}$; $CC_1 = \frac{\Delta\ell_{м}^{\Delta}}{\sin 60^{\circ}}$; $ВД = 2$ м; $СД = 4$ м.

Подставляя в соотношение (4.7) получим

$$\frac{(\Delta - \Delta\ell_{ст}^{\Delta})\sin 60^{\circ}}{\Delta\ell_{м}^{\Delta}} = \frac{2}{4}.$$

После алгебраических действий получим

$$(\Delta - \Delta\ell_{ст}^{\Delta})0{,}866 = 0{,}5\Delta\ell_{м}^{\Delta}. \tag{4.8}$$

Это и есть уравнение совместимости деформаций.

Полученное уравнение совместимости деформаций (4.8) не может быть решено в системе с уравнением равновесия (4.6), так как в них различные неизвестные.

Физическая сторона задачи

В уравнении (4.8) выражая деформации стержней через усилия по закону Гука $\Delta\ell^{\Delta} = \frac{N^{\Delta}\cdot\ell}{E\cdot A}$ получим

$$\left(\Delta - \frac{N_{\text{ст}}^{\Delta}\cdot\ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}}\cdot A_{\text{ст}}}\right)0{,}866 = 0{,}5\,\frac{N_{\text{м}}^{\Delta}\cdot\ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}}\cdot A_{\text{м}}}$$

или

$$\left(\Delta - \frac{\sigma_{\text{ст}}^{\Delta}\cdot\ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}}}\right)0{,}866 = 0{,}5\,\frac{\sigma_{\text{м}}^{\Delta}\cdot\ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}}}.$$

Проведем числовую подстановку согласно исходным данным

$$\left(0{,}001 - \frac{\sigma_{\text{ст}}^{\Delta}\cdot 1{,}2}{2\cdot 10^{5}}\right)0{,}866 = 0{,}5\,\frac{\sigma_{\text{м}}^{\Delta}\cdot 1{,}9}{1\cdot 10^{5}}.$$

После арифметических действий получим

$$86{,}6 - 0{,}52\sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 0{,}95\sigma_{\text{м}}^{\Delta}. \qquad (4.9)$$

Синтез

Решаем совместно уравнения (4.6) и (4.9):

$$\begin{cases} \sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 2{,}31\sigma_{\text{м}}^{\Delta} \\ 86{,}6 - 0{,}52\sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 0{,}95\sigma_{\text{м}}^{\Delta} \end{cases}$$

Подставляя выражение $\sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 2{,}31\sigma_{\text{м}}^{\Delta}$ во второе уравнение системы уравнений получим:

$$86{,}6 - 0{,}52\cdot 2{,}31\sigma_{\text{м}}^{\Delta} = 0{,}95\sigma_{\text{м}}^{\Delta};$$

или

$$86{,}6 = 1{,}2\sigma_{\text{м}}^{\Delta} + 0{,}95\sigma_{\text{м}}^{\Delta};$$

или

$$86{,}6 = 2{,}15\sigma_{\text{м}}^{\Delta}.$$

откуда $\sigma_{\text{м}}^{\Delta} = \frac{86{,}6}{2{,}15} = 40{,}3$ МПа.

$$\sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 0{,}95\cdot 40{,}3 = 38{,}3 \text{ МПа}.$$

°Положительный результат подтверждает наше предположение растяжения обоих стержней. Следовательно, от монтажных ошибок в стержнях возникают напряжения:

$$\sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 38{,}3 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{\text{м}}^{\Delta} = 40{,}3 \text{ МПа}.$$

Определение суммарных напряжений

В стальном и медном стержнях определим суммарные напряжения от всех влияющих на них факторов: внешних нагрузок F, q, от изменения температуры и неточности изготовления одного из стержней (например, стального):

$$\sigma_{\text{ст}} = \sigma_{\text{ст}}^{F} + \sigma_{\text{ст}}^{t} + \sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = -112{,}4 - 61{,}71 + 38{,}3 = -142{,}8 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{\text{м}} = \sigma_{\text{м}}^{F} + \sigma_{\text{м}}^{t} + \sigma_{\text{м}}^{\Delta} = 63 - 26{,}31 + 40{,}3 = 76{,}59 \text{ МПа}.$$

Подводя итог, можно отметить, что в стержнях с площадями поперечных сечений, подобранных из условия прочности от внешнего загружения, дополнительные факторы снижают или увеличивают напряжения.

Проверим прочность стержней

$$\sigma_{\text{ст}} = -142{,}8 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{ст}}^{-} = 120 \text{ МПа},$$

что недопустимо. Стальной стержень непрочен.

$$\sigma_{\text{м}} = 75{,}69 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{м}}^{+} = 84 \text{ МПа},$$

что отвечает требованию условия прочности. Медный стержень прочен.

Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графической работы (РГР № 2) «Расчет шарнирно-стержневых статически неопределимых систем при растяжении-сжатии» из табл. 4.1 необходимо выбрать расчетную схему, а из табл. 4.2 и 4.3 взять необходимые данные.

Таблица 4.1

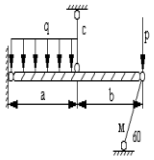
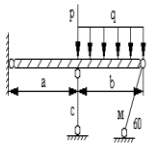
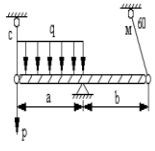
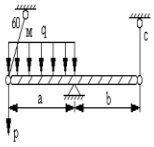
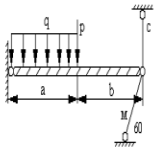
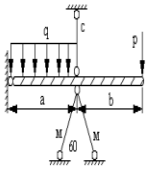
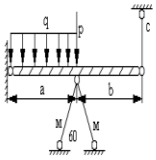
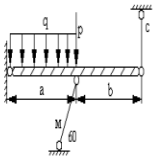
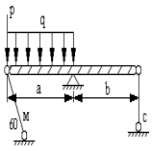
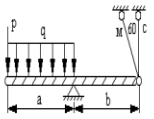
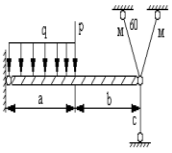
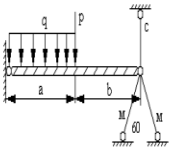
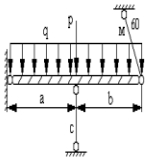
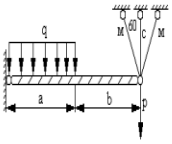
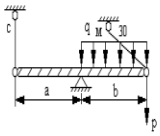
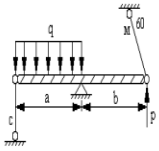
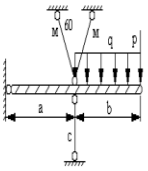
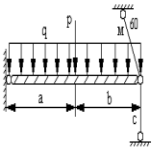
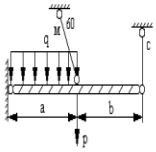
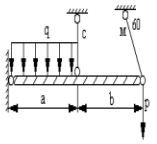
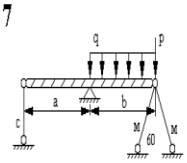
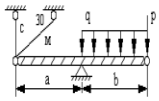
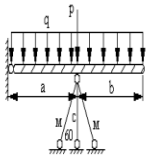
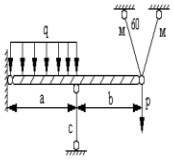
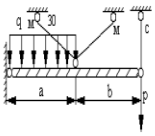
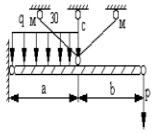
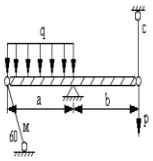
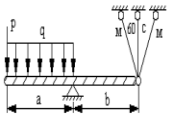
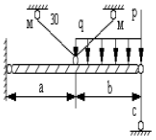
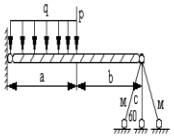
Шарнирно-стержневые статически неопределимые системы					
A		B		C	
1 	2 	1 	2 	1 	2 
3 	4 	3 	4 	3 	4 
5 	6 	5 	6 	5 	6 
7 	8 	7 	8 	7 	8 
9 	0 	9 	0 	9 	0 

Таблица 4.2

Индекс	№	a, м	b, м	$l_с$, м	$l_м$, м	F, кН	q, кН/м	$K=A_с/A_м$
A, *B*, *C*	1	1,0	2,8	1,0	1,9	10	100	1:1
	2	1,2	2,6	1,1	1,8	20	90	1:2
	3	1,4	2,4	1,2	1,7	30	80	2:1
	4	1,6	2,2	1,3	1,6	40	70	1:3
	5	1,8	2,0	1,4	1,5	50	60	3:1
	6	2,0	1,8	1,5	1,4	60	50	2:3
	7	2,2	1,6	1,6	1,3	70	40	3:2
	8	2,4	1,4	1,7	1,2	80	30	3:4
	9	2,6	1,2	1,8	1,1	90	20	4:3
	0	2,8	1,0	1,9	1,0	100	10	3:5

Таблица 4.3

Шарнирно-стержневые статически неопределимые системы		
Общие данные	**Сталь**	**Медь**
1. Допускаемые напряжения на сжатие, МПа	$[\sigma]_с = 120$	$[\sigma]_м = 42$
2. Допускаемые напряжения на растяжение, МПа	$[\sigma]_с = 160$	$[\sigma]_м = 84$
3. Модуль упругости 1 рода, МПа	$E_с = 2\cdot10^5$	$E_м = 1\cdot10^5$
4. Коэффициент линейного расширения, 1/град	$\alpha_с = 125\cdot10^{-7}$	$\alpha_м = 165\cdot10^{-7}$

Практическое занятие № 5

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ БАЛОК

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного построения эпюр внутренних силовых факторов в статически определимых балках.

Изгибом называется состояние стержневой конструкции, при котором в ее поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x. Изгиб является одним из самых распространенных видов работы стержневых конструкций. В простейшем случае изгиб возникает при действии нагрузки в направлении, перпендикулярном продольной оси стержня. Если это направление совпадает с одной из главных плоскостей стержня, то изгиб называется прямым, а в сечениях такого стержня возникают изгибающие моменты M_x и поперечные силы Q_y. Балки являются самыми простыми и наиболее распространенными конструкциями, работающими в условиях прямого изгиба.

При изучении темы студенты должны закрепить навыки в определении опорных реакций простых балок и балочных систем, определении внутренних усилий и построении их эпюр. Важной задачей является приобретение умений определения нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях и использования их для оценки надежности состояния конструкции.

Содержание РГР № 3 «Расчет балки на прочность» включает в себя выполнение следующих пунктов:

– определить внутренние усилия Q_y и M_x в поперечных сечениях заданных балок и построить их эпюры;

– подобрать по условию прочности размеры поперечных сечений заданных форм;

– исследовать напряженное состояние в ряде точек одной из балок с определением величин и направлений главных напряжений;

– произвести полную проверку прочности.

Внутренние усилия и их эпюры

Определение внутренних усилий в статически определимой балке (рис. 5.1) обычно сводится к процедурам, которые можно объединить в следующие пункты:

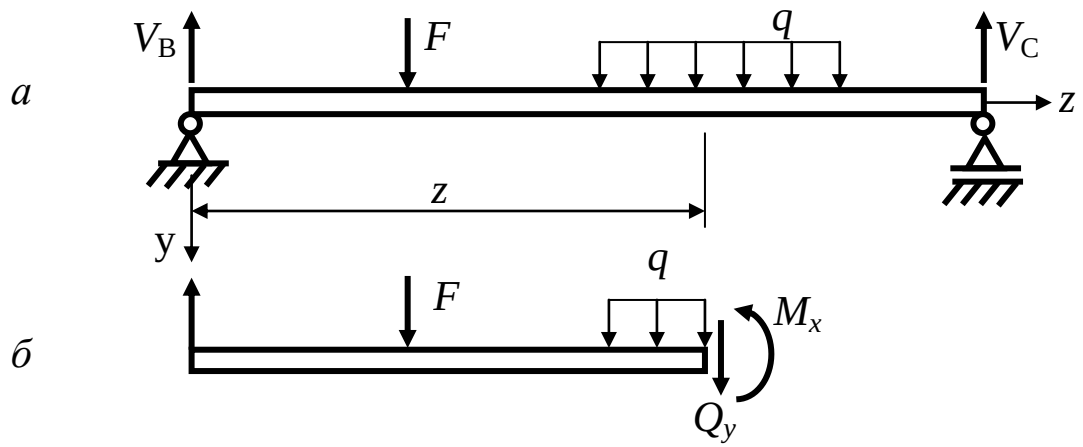


Рис. 5.1.: *а* – схема балки; *б* – внутренние усилия в поперечном сечении балки

1. Определяются реакции опор с помощью уравнений статики, которые могут составляться как для всей балки, так и для любого отдельного диска, на которые может быть разделена конструкция, если она составная.

2. Балка разбивается на участки, на которых законы изменения внутренних усилий имеют постоянный вид. Границами таких участков являются места расположения опор и шарниров, места приложения сосредоточенных сил и пар и т. д.

3. Для произвольного сечения z (рис. 5.1, б) на каждом участке составляются уравнения поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x как суммы проекций и моментов внешних сил (нагрузок и реакций связей), расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения

$$Q_y = \sum_{л(п)} F_{iy}, \quad M_x = \sum_{л(п)} m_{x_c}(F_{iy}). \tag{5.1}$$

В уравнениях (5.1) ось x_c является главной центральной осью рассматриваемого поперечного сечения.

4. С помощью уравнений (5.1) вычисляются значения Q_y и M_x в некоторых заранее выбранных сечениях балки, которые в дальнейшем будут называться характерными. Значения внутренних

усилий в характерных сечениях могут определяться с помощью (5.1) без составления аналитических уравнений этих усилий. Такой порядок нахождения внутренних усилий будем называть способом характерных сечений.

5. С помощью значений Q_y и M_x, найденных в п. 4, строятся графики их изменения вдоль продольной оси балки z, которые называются эпюрами Q_y и M_x. При построении эпюр обычно осуществляется контроль, основанный на правилах, вытекающих из дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} = -q, \quad \frac{\partial M_x}{\partial z} = Q_y. \tag{5.2}$$

Примеры определения внутренних усилий

Для простой одноконсольной балки на двух шарнирных опорах (рис. 5. 2, *а*) определить внутренние усилия и построить их эпюры с помощью уравнений:

1. Используя правила статики, отбрасываем внешние связи и заменяем их реакциями V_B и V_C. Величины реакций (рис. 5.2, *б*) определяем с помощью уравнений равновесия:

$$\sum m_\text{C}(F_{iy}) = 0;\ F \cdot 6 - V_\text{B} \cdot 5 + M + q \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0;\ V_\text{B} = 21 \text{ кН};$$
$$\sum m_\text{B}(F_{iy}) = 0;\ \ F \cdot 1 + M - q \cdot 3 \cdot 3 + V_\text{C} \cdot 5 = 0;\ \ V_\text{C} = 17 \text{ кН};$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = 0;\ -V_\text{B} - V_\text{C} + \ F + q \cdot 3 = 0.$$

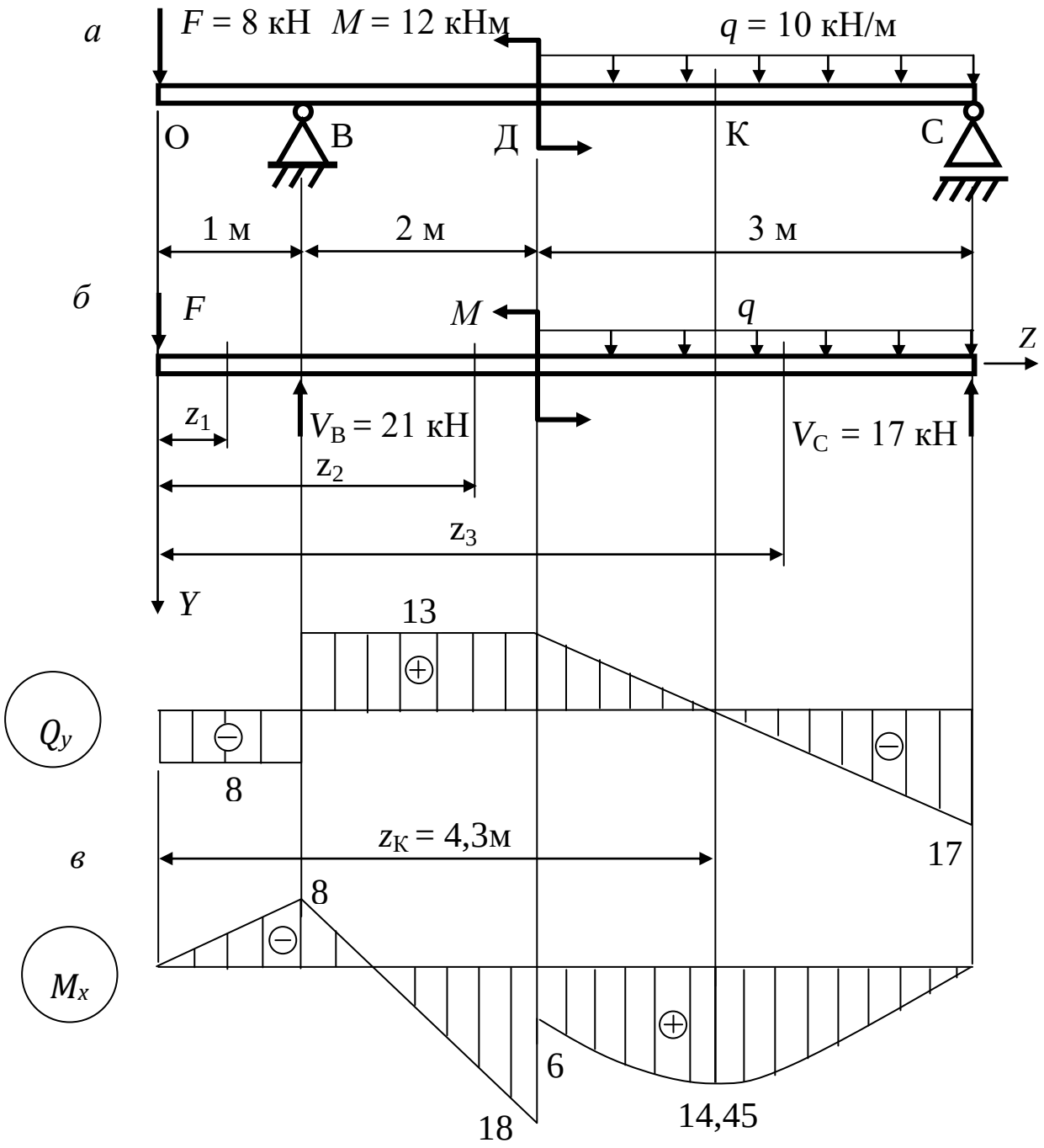


Рис. 5.2. Определение внутренних усилий в простой балке:
а – схема балки; *б* – схема сечений; *в* – эпюры Q_y и M_x

2. Разбиваем балку (рис. 5.2, *а*) на три участка (рис. 5.2, *б*) и составляем уравнения внутренних усилий (см. выражения 5.1). При составлении этих уравнений используются правила знаков (рис. 5.3).

На рисунке показаны положительные поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_x с учётом направлений нагрузок.

Правила знаков в этих случаях трактуются следующим образом:

– *положительная* Q_y возникает, если отсеченные нагрузки сдвигают левую часть балки вверх, а правую – вниз;

– *положительный* M_x возникает, если отсеченные нагрузки загибают концы балки вверх, растягивая при этом нижнее волокно балки.

Участок 1 ($0 \le z_1 \le 1$ м):

$$Q_{y_1} = -F; \;\; M_{x_1} = -F \cdot z_1.$$

Участок 2 (1 м $\le z_2 \le$ 3 м):

$$Q_{y_2} = -F + V_{\text{B}}; \;\; M_{x_2} = -F \cdot z_2 + V_{\text{B}} \cdot (z_2 - 1).$$

Участок 3 (3 м $\le z_3 \le$ 6 м):

$$Q_{y_3} = -F + V_{\text{B}} - q \cdot (z_3 - 3);$$

$$M_{x_3} = -F \cdot z_3 + V_{\text{B}} \cdot (z_3 - 1) - M - q \cdot \frac{(z_3 - 1)^2}{2}.$$

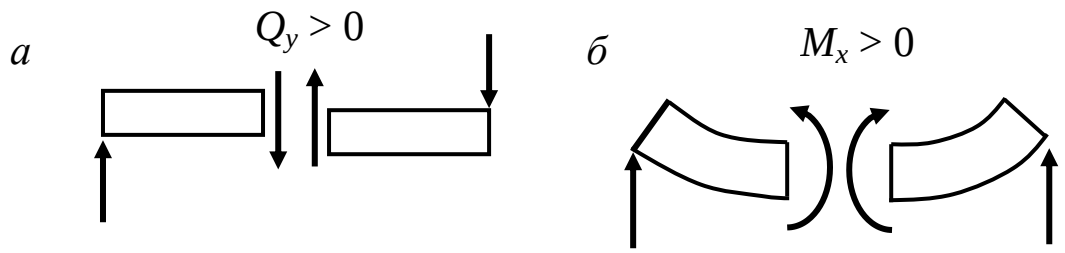


Рис. 5.3. Нагрузки вызывающие положительные:
а – поперечные силы Q_y; *б* – изгибающие моменты M_x

Для определения знаков слагаемых, входящих в уравнение изгибающих моментов, удобно использовать следующий прием:

– мысленно представьте отсеченную часть в виде консоли с заделкой в месте расчетного сечения;

– приложите к этой отсеченной части учитываемую нагрузку;

– проанализируйте характер искривления оси консоли под действием этой нагрузки;

– если консоль загибается вверх, а нижние волокна балки растягиваются, то слагаемому присваивается знак плюс.

Этот прием проиллюстрирован (рис. 5.4) при составлении уравнения M_{x_2} на примере нагрузок приложенных к левой отсеченной части балки.

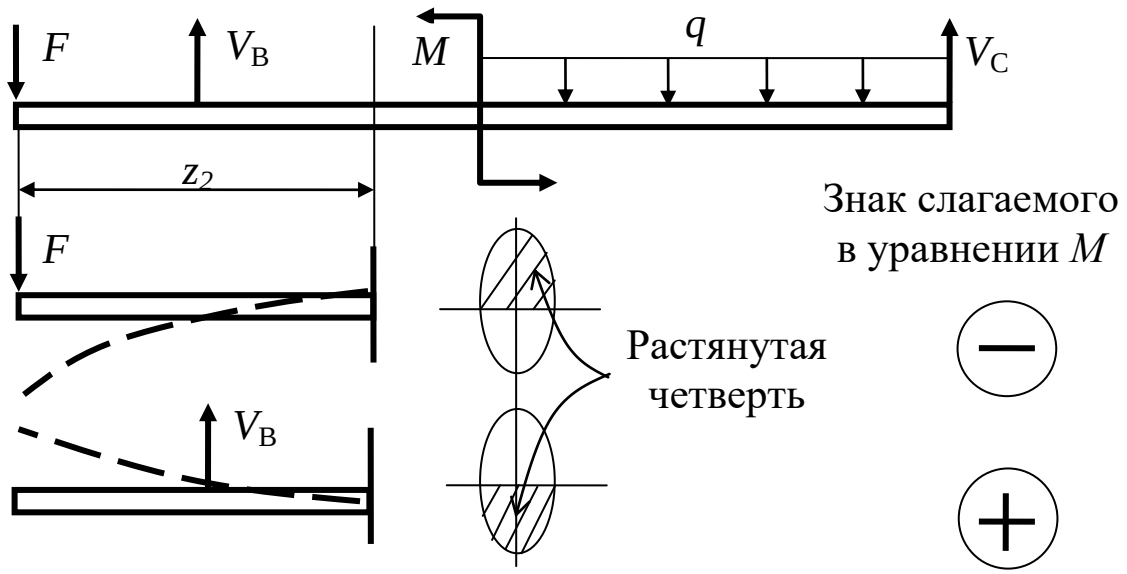


Рис. 5.4. К определению знаков слагаемых
при нахождении изгибающих моментов

3. С помощью полученных уравнений вычисляем значения Q_y и M_x. Результаты вычислений внутренних усилий в характерных сечениях приведены в «Ведомости значений Q_y и M_x в характерных сечениях балки» (см. табл. 5.1). По этим значениям строим эпюры Q_y и M_x (рис. 5.2, *в*).

При построении эпюр Q_y и M_x надо особо учитывать те сечения на участках загруженных распределенной нагрузкой q, в которых значение Q_y равно нулю, а M_x – экстремально. В рассматриваемом примере такая особенность есть на участке 3. Координату $z_К$ этого сечения можно найти из условия:

$Q_{y_3}(z_К) = 0$; $-F + V_В - q \cdot (z_К - 3) = 0$; $z_К = \frac{-F+V_В+q\cdot 3}{q} =$ 4,3 м.

Таблица 5.1

Ведомость значений Q_y и M_x в характерных сечениях балки

Сечение	z, м	Участок	Q_y, кН	M_x, кН·м
О	0	1	–8,0	0
$В_{лев}$	1,0	1	–8,0	–8,0
$В_{прав}$	1,0	2	+13,0	–8,0
$Д_{лев}$	3,0	2	+13,0	+18,0
$Д_{прав}$	3,0	3	+13,0	+6,0
К	4,3	3	0	+14,45
С	6,0	3	–17,0	0

Для составной балки (рис. 5.5, *а*) определить внутренние усилия по характерным сечениям без составления уравнений.

Определение опорных реакций $V_В, V_С, V_Д$ и $M_Д$ выполняется любым способом, применимым для составных систем и здесь не обсуждается. Результаты определения реакций приведены (см. рис. 5.5, *а*).

Определяем поперечные силы Q_y и строим их эпюру. Здесь можно использовать простое правило – приращение поперечной силы на участке или в сечении равно равнодействующей поперечных нагрузок, приложенных на этом участке или в сечении, а знак приращения положителен, если нагрузка направлена вверх. Это свойство условно называют «правилом следования за силой».

Построение эпюры Q_y (рис. 5.5, *б*) приведено с использованием этого правила. Штрихпунктирными стрелками там показаны направления построения эпюры и приведены значения приращений Q_y.

Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях балки (см. выражение 5.1):

Сечение В

$$M_{x_В} = 0;$$

Сечение К, слева от пары *М*

$$M_{x_{К,лев}} = -\,V_В \cdot 2 = -18 \cdot 2 = -\,36\ кН \cdot м;$$

Сечение К, справа от пары *М*

$$M_{x_{К,прав}} = -\,V_В \cdot 2 - M = -18 \cdot 2 - 30 = -\,66\ кН \cdot м;$$

Сечение С (шарнир)

$$M_{x_С} = 0.$$

Сечение L (экстремум эпюры на участке – вершина параболы). Положение сечения можно найти с помощью локальной координаты «a» сечения относительно левого конца этого участка. Из выражений (5.2) следует равенство $\left|dQ_y/dz\right| = |q| = |tg\alpha| = \left|Q_{y\ \text{лев}}/a\right|$ (см. рис. 5.5, *в*), которое приводит к простому правилу определения координаты «a»:

$$a = \left|Q_{y\ \text{лев}}/q\right| = 22/10 = 2{,}2\ \text{м}.$$

Здесь $Q_{y\ \text{лев}} = 22$ кН – значение поперечной силы на левом конце участка, где находится экстремум

$$M_{x_\text{L}} = V_\text{B} \cdot 2{,}2 - q \cdot 2{,}2^2/2 = 22 \cdot 2{,}2 - 10 \cdot 2{,}2^2/2 = 24{,}2\ \text{кНм}.$$

Сечение Д, заделка. Значение изгибающего момента в заделке всегда равно реактивному моменту.
Тогда

$$M_{x_\text{Д}} = 8\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям M_x построена эпюра, приведенная на рис. 5.5, *в*.

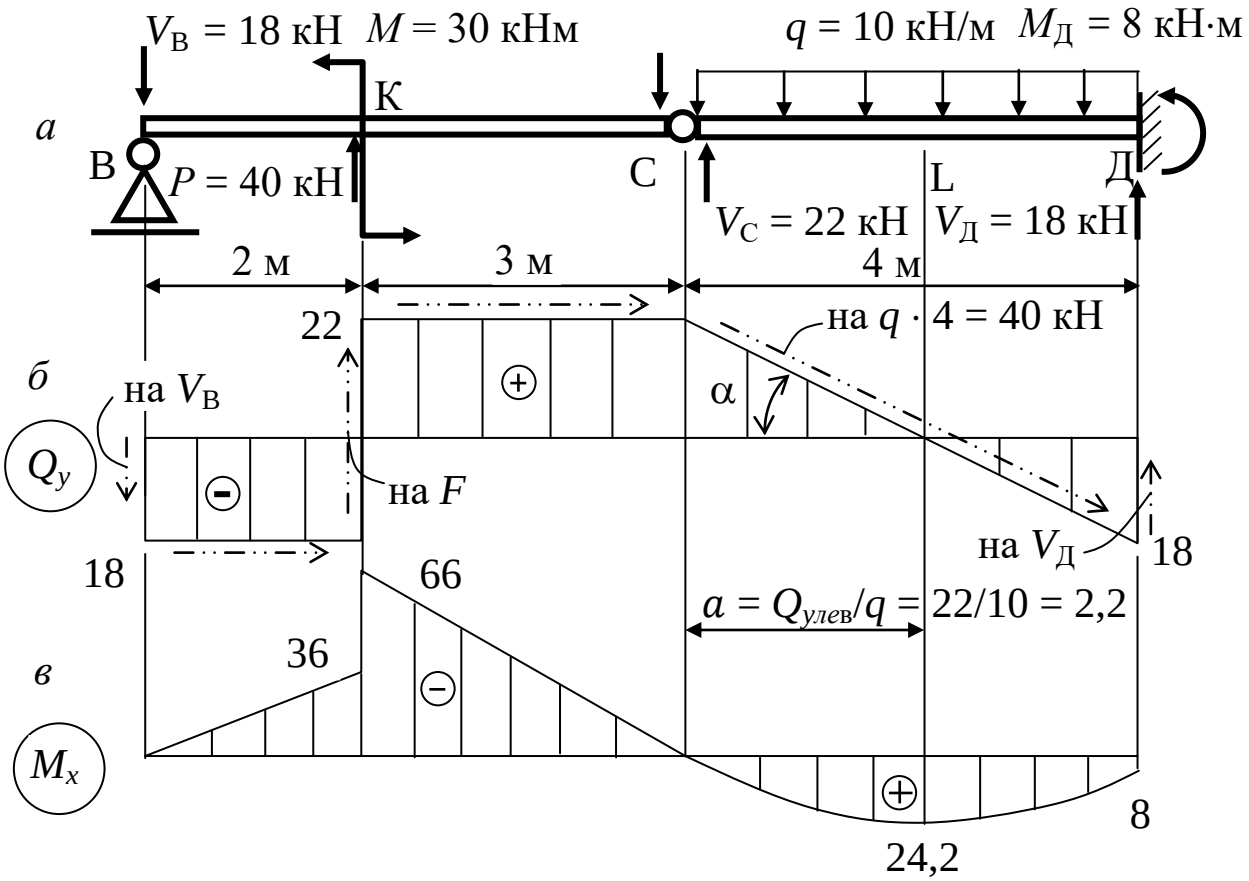


Рис. 5.5. Определение внутренних усилий в составной балке по характерным сечениям:
а – схема балки; *б* – построение эпюры Q_y; *в* – эпюра M_x

Практическое занятие № 6

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛОК

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного расчета на прочность статически определимых балок.

В общем случае прямого поперечного (простого) изгиба в поперечном сечении балки возникают нормальные σ и касательные τ напряжения (рис. 6.1, *а*). Нормальные напряжения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \tag{6.1}$$

где J_x – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси (н. о.), которая совпадает с главной центральной осью x; y – расстояние от расчетной точки поперечного сечения до нейтральной оси.

Касательные напряжения в симметричных поперечных сечениях открытого профиля приближенно можно вычислить по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)}, \tag{6.2}$$

где $S_x^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части сечения, выделенной штриховкой (см. рис. 6, *а*); $b(y)$ – ширина сечения на уровне расчетной точки.

Напряженное состояние в точке балки считается плоским (рис. 6.1, *б*). В этом случае в точке действуют два главных напряжения σ_1 и σ_3 с разными знаками, которые могут быть определены с помощью зависимости

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}. \tag{6.3}$$

Направление одного из этих главных напряжений определяется углом α_0 (рис. 6.1, *в*). Значение угла определяется из уравнения

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{2\tau}{\sigma}. \tag{6.4}$$

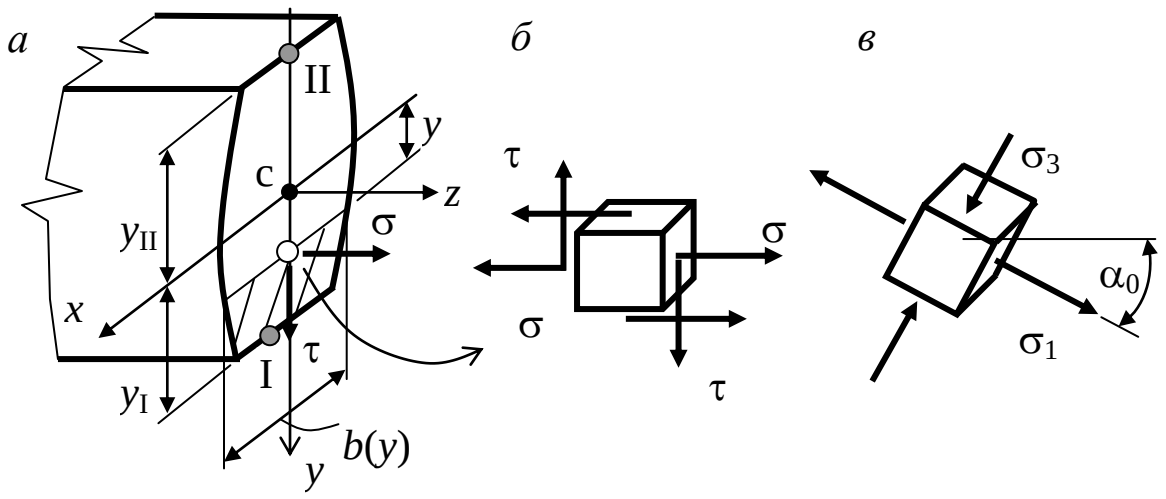


Рис. 6.1: *а* – напряжения в поперечном сечении балки;
б – напряженное состояние в точке; *в* – главные напряжения

Если угол α_0 задает главную нормаль, проходящую через четверть плоскости изгиба yoz, в которой сходятся векторы касательных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках, то это нормаль 1 (рис. 6.1, *в*).

Проверка прочности в произвольной точке балки должна выполняться с учетом сложности напряженного состояния, т. е. с учетом всех главных напряжений. Такую проверку часто называют полной. Это делается с использованием одной из подходящих теорий прочности. В случае балки из хрупкого материала применимы *I* теория или теория О.Мора. Для пластичных материалов рекомендуется использовать *III* или *IV* теории.

Например, при использовании *III* или *IV* теорий проверка прочности сводится к проверке выполнения условий

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le [\sigma], \quad \sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \le [\sigma], \quad (6.5)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при одноосном растяжении (основное).

В крайних точках сечения I и II, наиболее удаленных от н. о., напряженное состояние является линейным, а условие прочности преобразуется к виду

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{M_x}{W_{x\text{I}}} \le [\sigma]^+, \sigma_{\text{II}} = \frac{M_x}{W_{x\text{II}}} \le [\sigma]^-, \quad (6.6)$$

где σ_{I}, σ_{II} – модульные значения нормальных напряжений в наиболее растянутой или сжатой точках I и II (рис. 6, *а*); $[\sigma]_+$, $[\sigma]_-$ – до-

пускаемые напряжения материала балки на одноосное растяжение или сжатие; $W_{x\mathrm{I}}$, $W_{x\mathrm{II}}$ – моменты сопротивления сечения при изгибе относительно растянутой или сжатой точек I и II, которые определяются по формулам

$$W_{x\mathrm{I}} = \frac{J_x}{y_{\mathrm{I}}}, \quad W_{x\mathrm{II}} = \frac{J_x}{y_{\mathrm{II}}}\,. \tag{6.7}$$

Подбор сечения балки по условию прочности заключается в назначении таких формы и размеров сечения, которые должны удовлетворять условиям

$$W_{x\mathrm{I}} \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]^{+}}, \qquad W_{x\mathrm{II}} \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]^{-}}, \tag{6.8}$$

где $M_{\max}$ – расчетный момент, равный модулю изгибающего момента в опасном сечении.

Опасным считается такое сечение, в котором напряжения σ_{I} и σ_{II} имеют наибольшие значения.

Примеры подбора сечений балок

В расчетно-графической работе (РГР № 3) «Расчет балки на прочность» ставится задача подбора поперечных сечений балок, изготовленных из пластичных металлов – малоуглеродистых сталей, алюминиевых сплавов и т. д. В этих случаях нормы рекомендуют считать допускаемые напряжения на растяжение и сжатие при изгибе одинаковыми ($[\sigma]^{+} = [\sigma]^{-} = [\sigma]$). Задаваемые формы поперечных сечений можно разделить на следующие группы:

– массивные сечения типа прямоугольника или круга, размеры сечений выражаются через некоторый параметр;

– сечения из стандартных прокатных элементов – одиночных или составных;

– тонкостенные сечения из листовых элементов постоянной толщины δ.

Для каждого варианта формы сечения можно применить оптимальную методику подбора размеров сечения. Некоторые из этих методик иллюстрируются ниже.

Для балки (см. рис. 5.2, *а*) подобрать сечения в виде одиночного прокатного двутавра по ГОСТ 8239-89 и массивного типа (рис. 6.2, *а*). Материал балки – малоуглеродистая сталь марки Ст3, нормативный коэффициент запаса прочности $n = 1{,}5$.

Назначаем допускаемое напряжение. Для конструкций из Ст3 в качестве предельного (опасного) напряжения рекомендуется использовать предел текучести $\sigma_т$. Принимаем $\sigma_т = 240$ МПа.

Значение допускаемого напряжения

$$[\sigma] = 240/1{,}5 = 160 \text{ МПа}.$$

Опасным является сечение $Д_{лев}$, а расчетный момент для подбора сечения $M_{max} = 18$ кН · м. Находим нижнюю границу возможных значений момента сопротивления при изгибе по формуле (6.8)

$$W_x \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]} = \frac{18}{160 \cdot 10^3} = 0{,}113 \cdot 10^{-3} = 113 \text{ см}^3.$$

Подбор двутаврового сечения выполняем по сортаменту для прокатных двутавров. Принимаем двутавр №16, для которого $W_x = 109$ см^3. Это сечение имеет размеры несколько меньше требуемых. Перегрузка балки в этом случае определяется величиной

$$\Delta W_x / W_x = (113 - 109/113 = 0{,}035 \ll 1.$$

Обычно такая перегрузка считается приемлемой.

Отметим, что в случае подбора составного сечения, состоящего из нескольких прокатных элементов, необходимо использовать метод последовательных приближений. Он заключается в том, что предварительно назначаются некоторые размеры сечения, и они проверяются по условиям (6.6). Если расчетные напряжения σ_I или σ_{II} чрезмерно отличаются от соответствующих допускаемых напряжений в большую или меньшую стороны, то на следующем этапе расчета размеры прокатных элементов должны быть увеличены или уменьшены, а проверка прочности повторяется. Эти действия выполняются до тех пор, пока расчетные и допускаемые напряжения станут отличаться на 3–5 %.

Подбор массивного сечения, размеры которого заданы через параметр «*a*» (рис. 6.2, *а*), начинаем с определения геометрических характеристик.

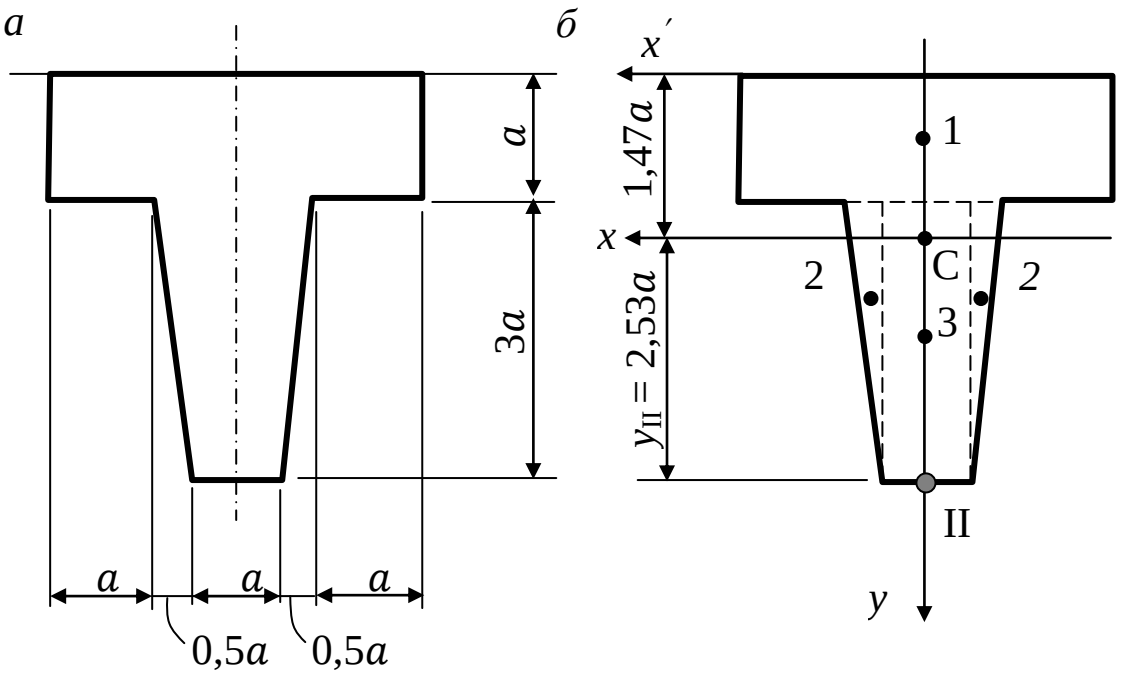


Рис. 6.2. Массивное сечение к балке (рис. 5.2):
а – эскиз сечения; *б* – определение геометрических характеристик

Положение центра тяжести относительно вспомогательной оси x'

$$y_c' = \frac{\Sigma F_i y_i'}{\Sigma F_i} = \frac{4a^2 \cdot 0{,}5 \cdot a + 2 \cdot 0{,}75a^2 \cdot 2a + 3a^2 \cdot 2{,}5a}{4a^2 + 2 \cdot 0{,}75a^2 + 3a^2} = 1{,}47a.$$

Момент инерции относительно нейтральной оси x

$$J_x = \Sigma J_{x_i} + \Sigma F_i y_i^2 = \frac{4a \cdot a^3}{12} + 2\frac{0{,}5a \cdot (3a)^3}{36} + \frac{a \cdot (3a)^3}{12} +$$
$$+4a^2 \cdot (0{,}97a)^2 + 2 \cdot 0{,}75a^2 \cdot (0{,}53a)^2 + 3a^2 \cdot (1{,}03a)^2 = 10{,}7a^4.$$

Момент сопротивления сечения при изгибе

$$W_x = W_{x\text{II}} = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{10{,}7 \cdot a^4}{2{,}35 \cdot a} = 4{,}23a^3 \geq 113 \text{ см}^3.$$

Отсюда следует: $a \geq 2{,}98$ см. Окончательно принимаем $a = 3$ см.

В завершение данного примера заметим, что в случаях, когда материал балки по–разному сопротивляется растяжению и сжатию, размеры сечения надо определять по условиям прочности как в растянутой, так и в сжатой точках опасного сечения.

Для балки (см. рис. 5.5, *а*) подобрать тонкостенное сечение (рис. 6.3, *а*). Толщина листов δ постоянна и равна 8 мм. Листы из-

готовлены из магналина марки АМг6м. Нормативный коэффициент запаса $n = 1{,}6$

Назначаем допускаемое напряжение. Предел текучести материала балки $\sigma_т = 150$ МПа. Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n} = \frac{150}{1{,}6} = 93{,}7 \text{ МПа}.$$

Опасным является сечение $К_{прав}$. Расчетный момент $M_{xmax} = 66$ кН · м. Нижняя возможная граница для момента сопротивления при изгибе

$$W_x \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]} = \frac{66}{93{,}7 \cdot 10^3} = 0{,}693 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 693 \text{ см}^3.$$

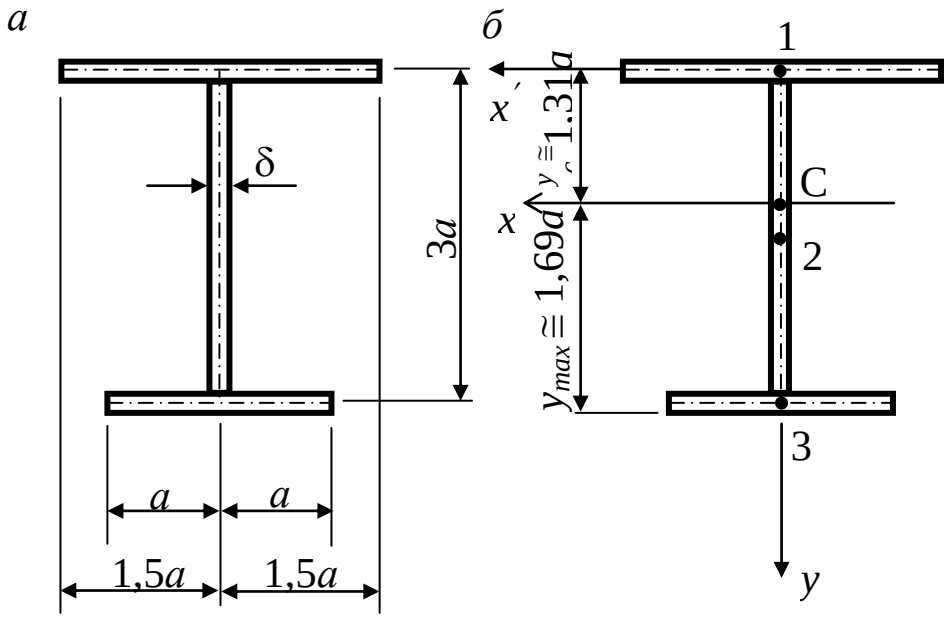


Рис. 6.3. Тонкостенное сечение к балке (рис. 5.5, *а*):
а – эскиз; *б* – определение геометрических характеристик

Определяем геометрические характеристики (рис. 6.3, *б*). Положение центра тяжести сечения находим приближенно, полагая что ожидаемое значение параметра «*a*» будет намного больше толщины листов δ. Это допущение позволяет пренебрегать величиной δ при суммировании его с параметром a $(a + \delta \cong a)$.

Тогда

$$y_c' = \frac{3\delta a \cdot 0 + 3\delta a \cdot 1{,}5a + 2\delta a \cdot 3a}{3\delta a + 3\delta a + 2\delta a} = \frac{10{,}5}{8} a = 1{,}31\, a.$$

Момент инерции поперечного сечения

$$J_x = \frac{3a \cdot \delta^3}{12} + \frac{\delta \cdot (3a)^3}{12} + \frac{2a \cdot \delta^3}{12} + 3\delta a \cdot (1{,}31a)^2 + 3\delta a \cdot (0{,}19a)^2 + 2\delta a \cdot (1{,}69a)^2.$$

На основании допущения о малости толщины листа δ пренебрегаем слагаемыми содержащими δ^3. Тогда окончательно имеем $J_x = 12{,}89\delta a^3$.

Момент сопротивления сечения при изгибе

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{12{,}89\delta a^3}{1{,}69a} = 7{,}63\delta a^2.$$

Подбираем размеры листовых элементов сечения

$$W_x \cong 7{,}63 \cdot \delta \cdot a^2 \geq 693 \text{ см}^3, a \geq \sqrt{\frac{693}{7{,}63 \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{693}{7{,}63 \cdot 0{,}08}} = 32 \text{ см}.$$

Определим отношение величин δ и a: $\delta/a = 0{,}08/32 = 0{,}0025 \ll 1$. Полученная величина отношения δ/a подтверждает правильность допущения о малости δ и позволяет окончательно принять $a = 32$ см.

Примеры анализа напряженного состояния и полной проверки прочности

При выполнении задания в данном пункте почти всегда рассматриваются сечения из одиночного двутавра прокатного профиля. Поэтому ниже рассматриваются только двутавровые балки.

В балке (см. рис. 5.2, *а*) определить величину и направление главных напряжений в точке К с координатами $z = 0{,}5$ м, $y = 0{,}03$ м. Балка изготовлена из двутавра № 16.

Расчетное сечение находится в середине участка ОВ. Значения усилий в этом сечении (см. рис. 5.2, *б*, *в*):

$$Q_y = -8 \text{ кН}, \qquad M_x = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Геометрические характеристики поперечного сечения взяты из сортамента на прокатные двутавры по ГОСТ 8239–89. Основные размеры сечения используемые в расчете (рис. 6.4, *а*). Момент инерции $J_x = 873$ см^4.

Определяем нормальные и касательные напряжения по формулам (6.1) и (6.2)

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y = -\frac{4 \cdot 10^{-3}}{873 \cdot 10^{-8}} 0{,}03 = -13{,}7 \text{ МПа}.$$

Для определения касательного напряжения вычисляем статический момент отсеченной части $S_x^{\text{отс}}$. Отсеченная часть (рис. 6.4, *б*) показана в упрощенном виде, состоящем из двух прямоугольников 1 и 2. Черными точками показаны центры тяжести прямоугольников.

$$S_x^{\text{отс}} = 8{,}1 \cdot 0{,}78 \cdot 7{,}6 + 0{,}5 \cdot 4{,}2 \cdot 5{,}1 = 58{,}7 \text{см}^3.$$

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)} = -\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 58{,}7 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = -10{,}6 \text{ МПа}.$$

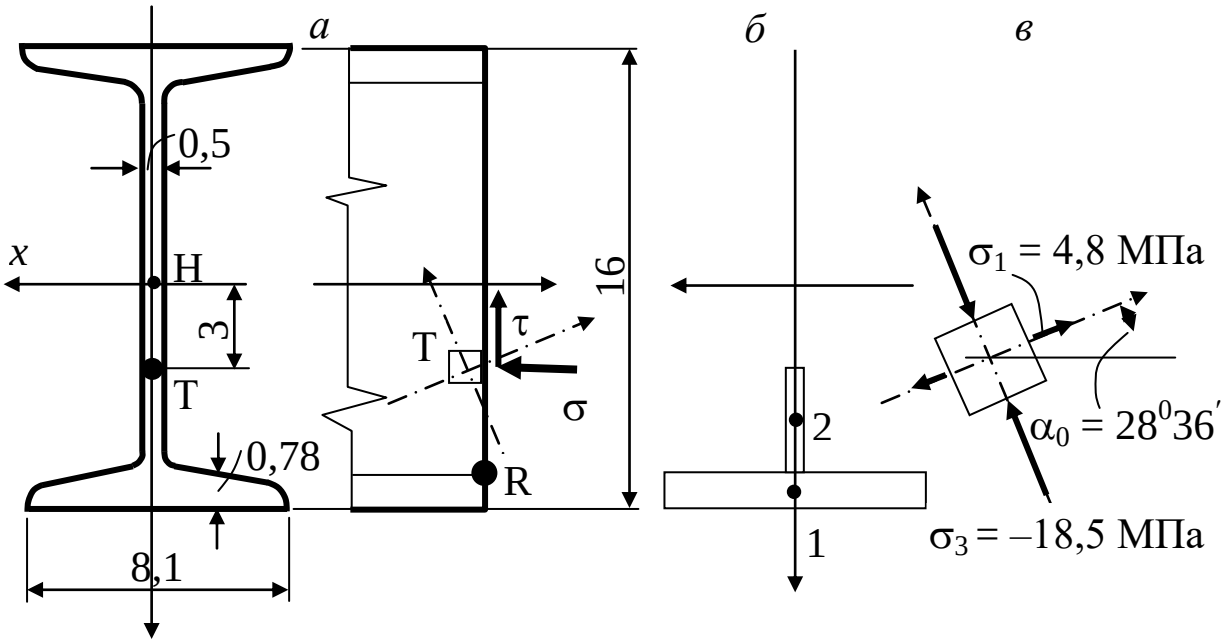


Рис. 6.4: *а* – напряжения в точке Т; *б* – отсеченная часть сечения; *в* – главные напряжения

Направления напряжений σ и τ в точке Т показаны на рис. 6.4, *а*.

Величины и направления главных напряжений находим по формулам (6.3) и (6.4):

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \frac{-13{,}7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13{,}7^2 + 4 \cdot 10{,}6^2}$$
$$= -6{,}35 \pm 11{,}65,$$

$$\sigma_1 = 4{,}8 \text{ МПа}, \qquad \sigma_3 = -18{,}5 \text{ МПа},$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} arctg \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{1}{2} arctg \frac{2(-10{,}6)}{-13{,}7} = 28^{\circ}36'.$$

Направления главных напряжений в точке Т показаны штрихпунктирными стрелками (рис. 6.4, *в*).

Произвести полную проверку прочности балки, рассмотренной в предыдущем примере. Материал балки – Ст3, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Проверку выполнить по *IV* теории.

Подбор данного сечения был выполнен ранее для балки (см. рис. 5.2, *а*). Он производился по формулам (6.8) из условий прочности в точках I и II. Поэтому в данном примере производить проверку прочности этих точек нет необходимости.

Проверяем прочность в точке Н (см. рис. 6.4, *а*). Опасным будет сечение С, в котором действует максимальная поперечная сила $Q_y = 17$ кН. (см. рис. 5.2, *б*). В точке Н в поперечном сечении действует только касательное напряжение τ. Для его определения статический момент отсеченной части половины сечения $S_x^{\text{отс}} = 62{,}3\text{см}^3$ берем из сортамента

$$\tau = \frac{17 \cdot 10^{-3} \cdot 62{,}3 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 24{,}2 \text{ МПа}.$$

Проверяем прочность по условию (6.5)

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{3 \cdot 24{,}2^2} = 41{,}9 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Проверяем прочность в точке R, расположенной в месте стыка полки и стенки двутавра (см. рис. 6.4, *а*). Опасное сечение – $Д_{лев}$, $Q_y = 13$ кН, $M_x = 18$ кН ·м (см. рис. 5.2. *б*, *в*).

Нормальное напряжение в этой точке

$$\sigma = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{873 \cdot 10^{-8}}\, 0{,}072 = 148{,}5 \text{ МПа}.$$

Для нахождения касательного напряжения вычисляем $S_{\text{отс}}$, учитывая только полку двутавра

$$S_x^{\text{отс}} = 8{,}1 \cdot 0{,}78 \cdot 7{,}6 = 48 \text{ см}^3.$$

Касательное напряжение

$$\tau = \frac{13 \cdot 10^{-3} \cdot 48 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 14{,}3 \text{ МПа}.$$

Проверяем прочность

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{148{,}5^2 + 3 \cdot 14{,}3^2} = 151 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Проведенные расчеты показывают, что влияние касательных напряжений на прочность прокатных двутавровых балок относительно невелико.

Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графической работы (РГР № 3) «Расчет балок на прочность» из табл. 6.1. выбрать расчетные схемы балок, а из табл. 6.2 взять необходимые данные.

Далее требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x;
2. Подобрать поперечные сечения балок из условия прочности.

Таблица 6.1

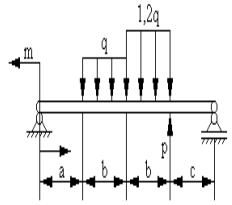
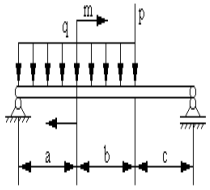
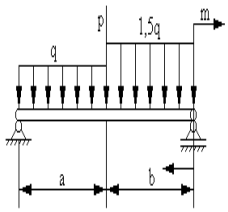
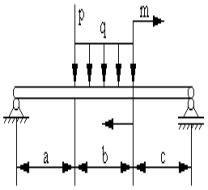
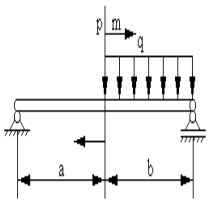
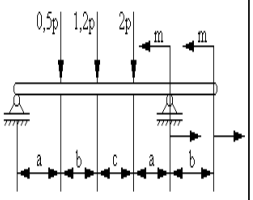
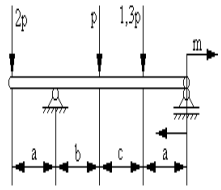
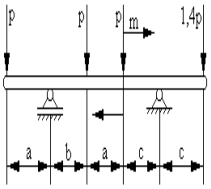
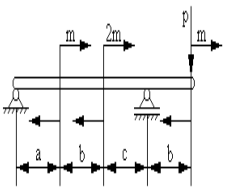
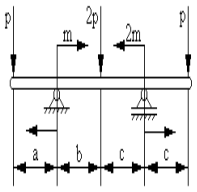
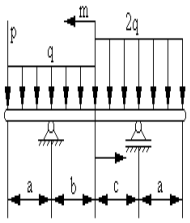
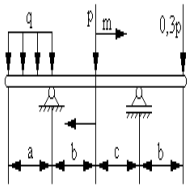
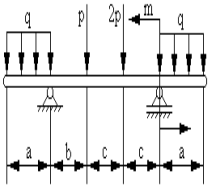
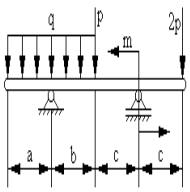
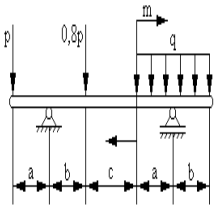
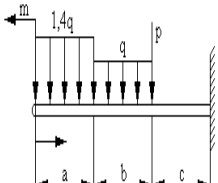
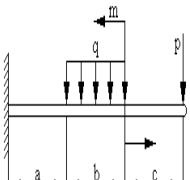
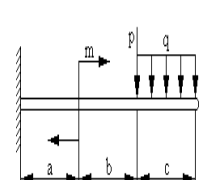
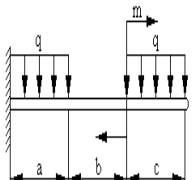
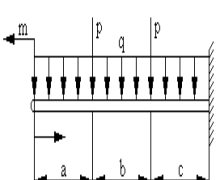
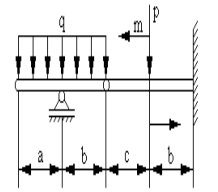
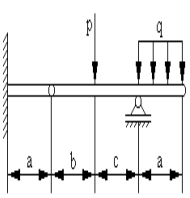
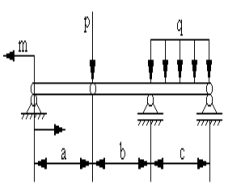
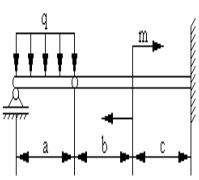
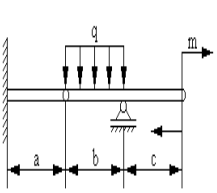
Поперечный изгиб.					
	0	1	2	3	4
А					
					
					
					
					

Таблица 6.1 (продолжение)

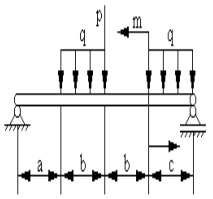
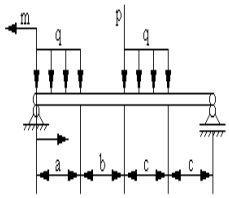
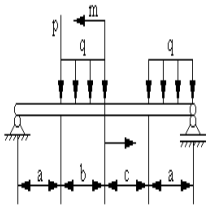
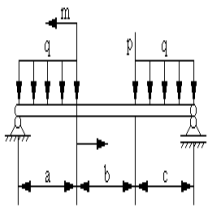
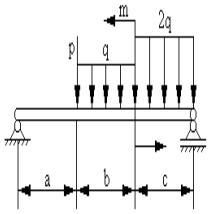
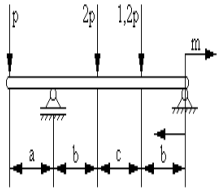
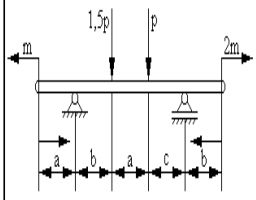
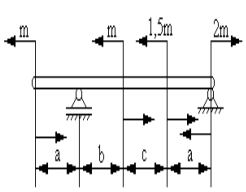
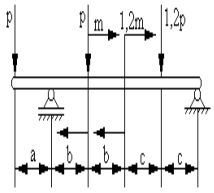
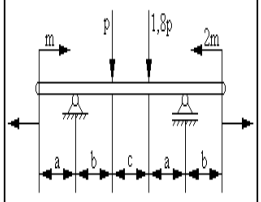
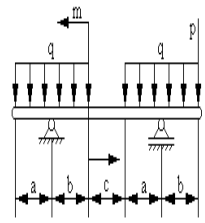
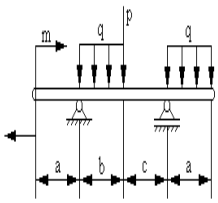
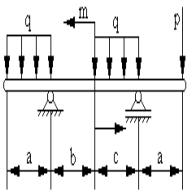
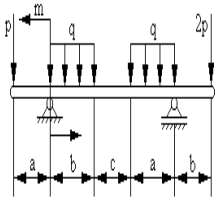
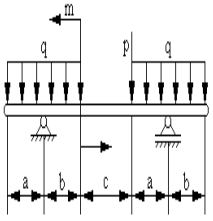
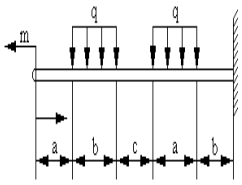
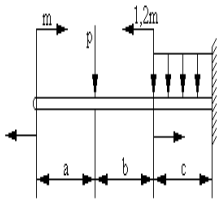
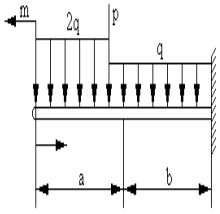
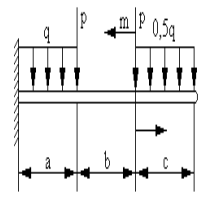
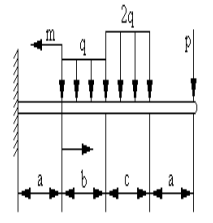
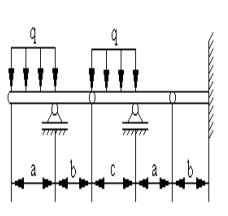
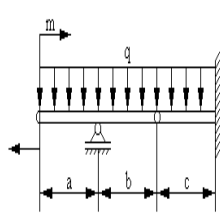
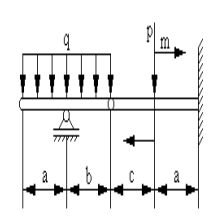
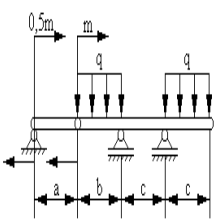
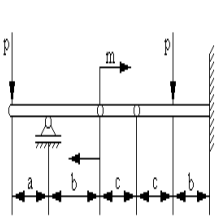
Поперечный изгиб.					
	5	6	7	8	9
А					
					
					
					
					

Таблица 6.1 (продолжение)

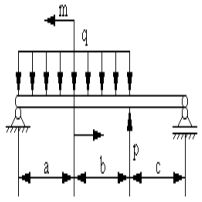
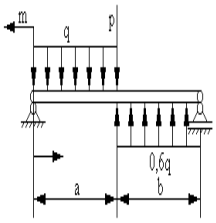
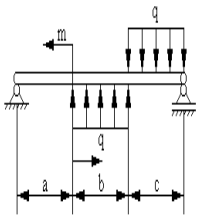
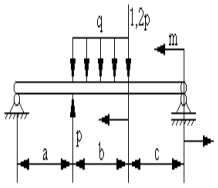
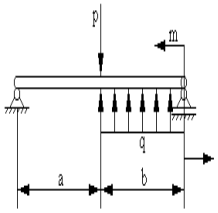
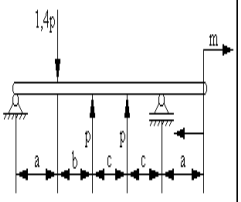
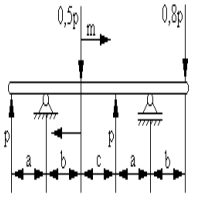
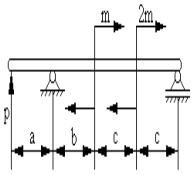
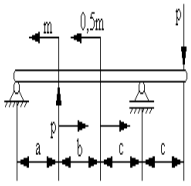
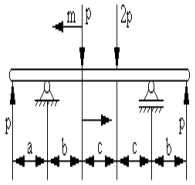
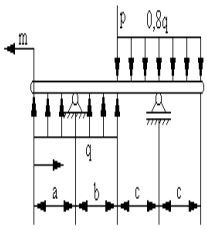
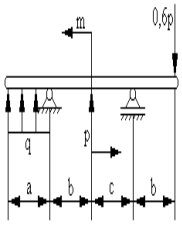
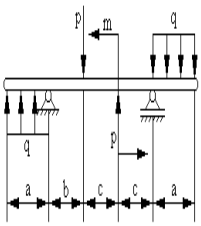
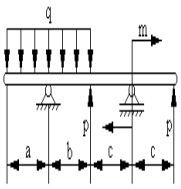
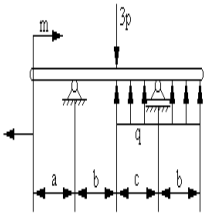
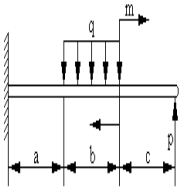
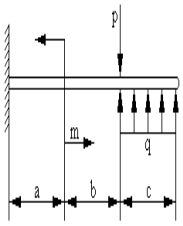
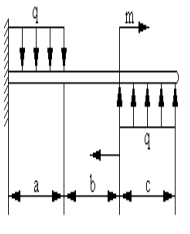
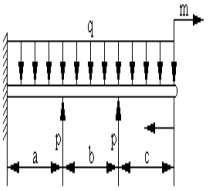
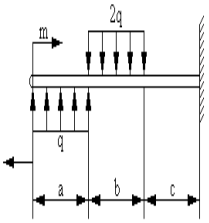
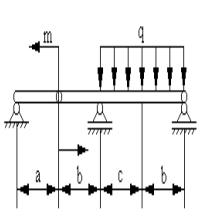
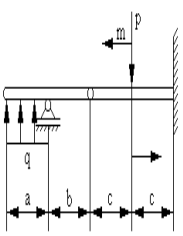
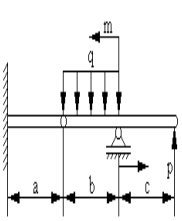
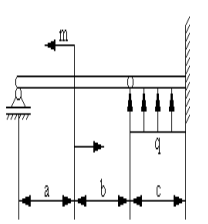
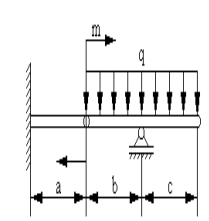
Поперечный изгиб.					
	0	1	2	3	4
В					
					
					
					
					

Таблица 6.1 (продолжение)

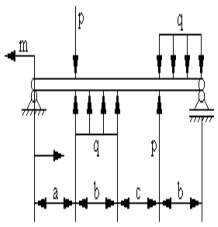
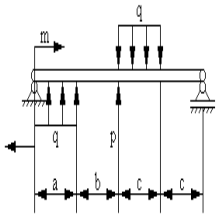
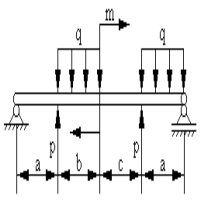
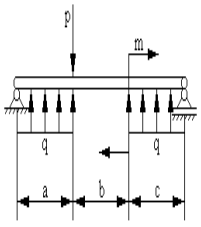
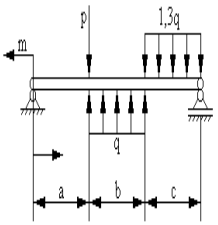
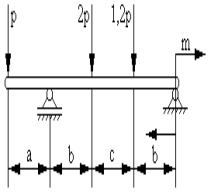
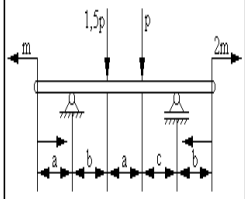
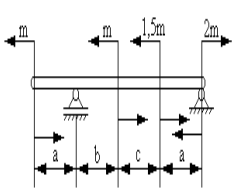
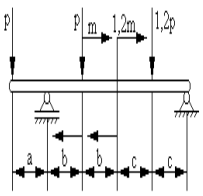
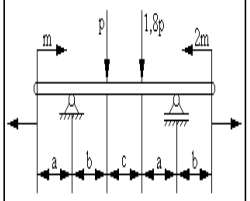
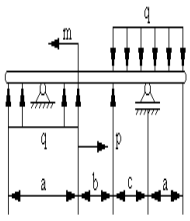
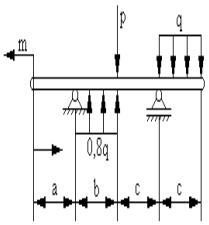
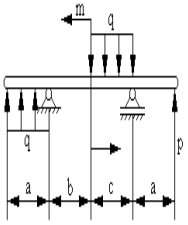
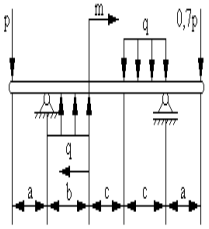
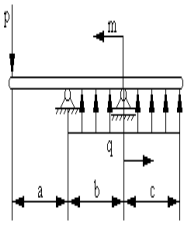
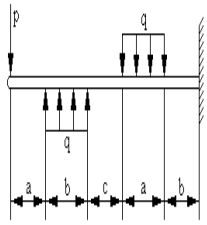
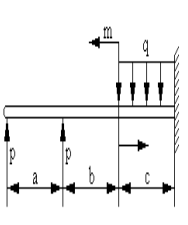
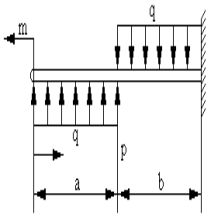
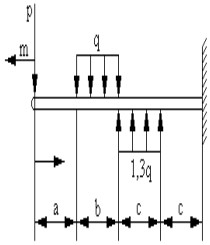
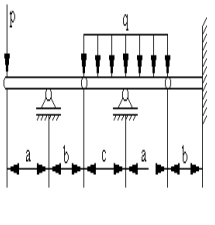
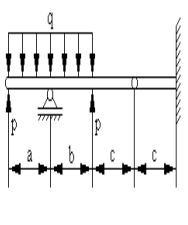
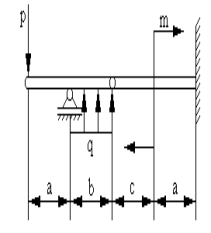
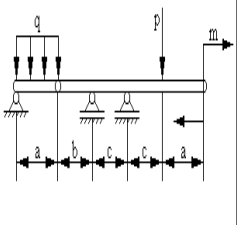
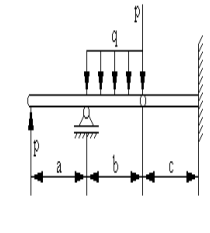
Поперечный изгиб.					
	5	6	7	8	9
В					
					
					
					
					

Таблица 6.1 (продолжение)

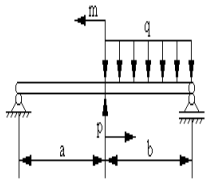
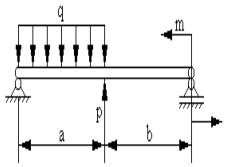
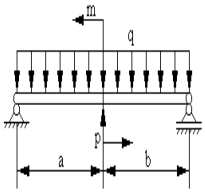
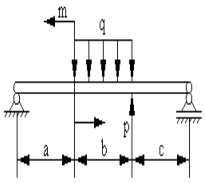
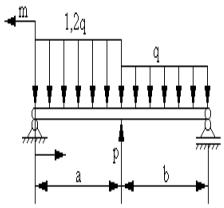
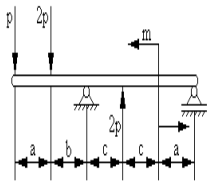
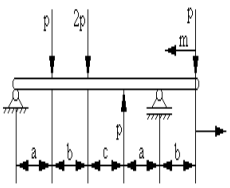
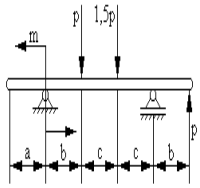
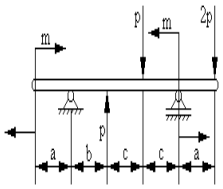
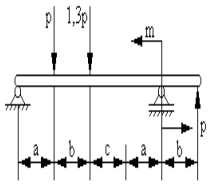
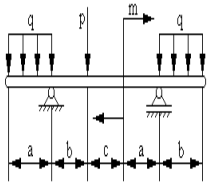
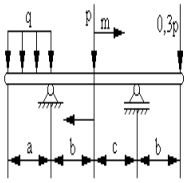
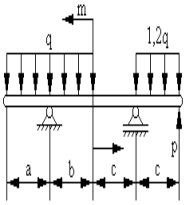
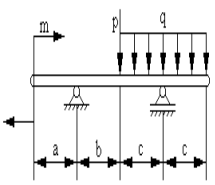
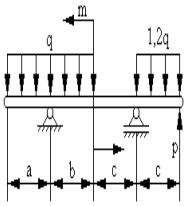
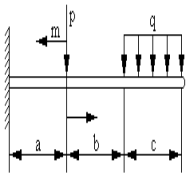
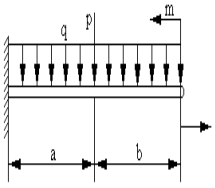
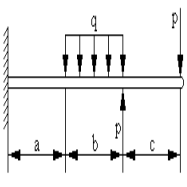
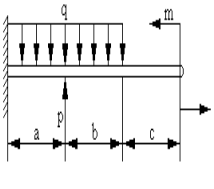
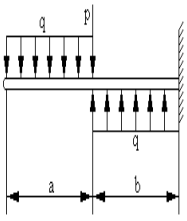
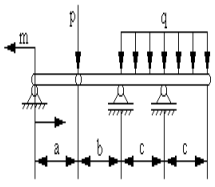
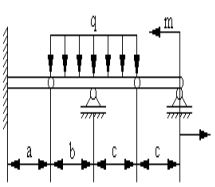
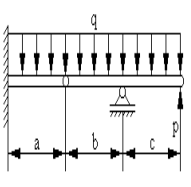
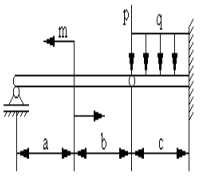
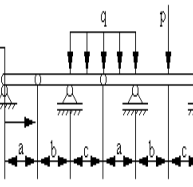
Поперечный изгиб.					
	0	1	2	3	4
С					
					
					
					
					

Таблица 6.1 (продолжение)

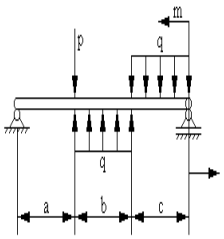
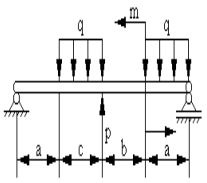
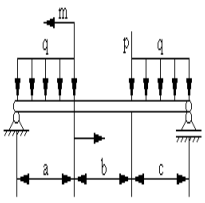
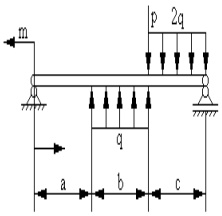
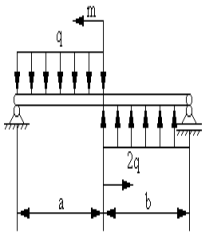
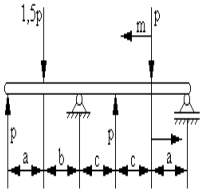
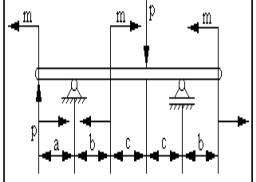
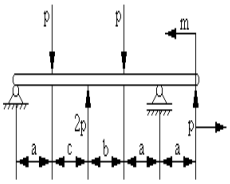
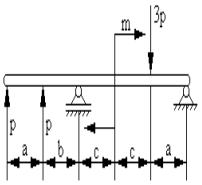
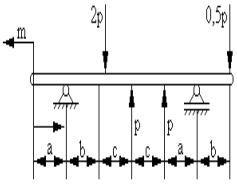
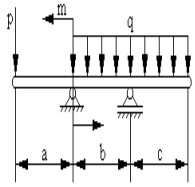
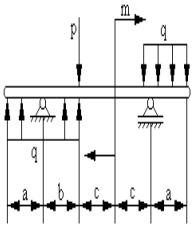
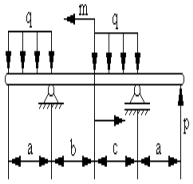
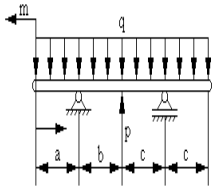
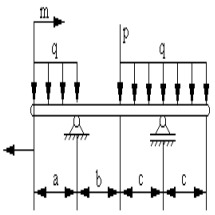
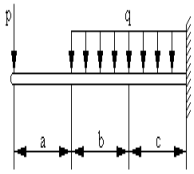
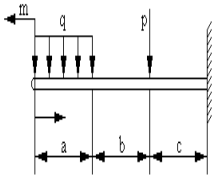
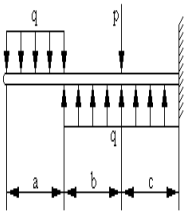
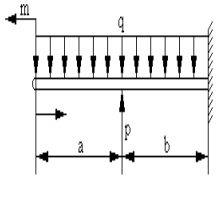
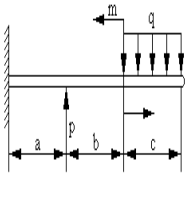
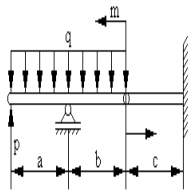
Поперечный изгиб.					
	5	6	7	8	9
С					
					
					
					
					

Таблица 6.2

Лист		*a*, м	*b*, м	*c*, м	*p*, кН	*q*, кН/м	*m*, кН×м
7	1	1,8	3,5	1,9	10	20	40
	2	2	3,4	2	20	12	45
	3	2,2	3,3	2,5	30	15	50
	4	2,4	3,2	2,6	40	18	55
	5	2,6	3	2,7	50	22	35
	6	2,8	2,9	2,9	60	25	30
	7	3	2,7	2,2	15	30	25
	8	3,2	2,5	2,4	25	11	20
	9	3,4	2,3	1,1	45	8	15
	0	3,6	2,1	1,4	35	9	10
8	1	1,5	1,2	2,2	12	10	32
	2	1,6	1,3	2,4	13	14	28
	3	1,7	0,9	1,8	14	16	26
	4	1,9	0,8	1,6	15	18	27
	5	2,1	0,7	1,4	18	20	18
	6	2,3	0,6	1,2	20	15	20
	7	2,5	0,5	1	24	13	22
	8	2,7	0,4	0,8	26	11	24
	9	2,9	1	0,9	30	9	16
	0	1,4	1,1	2	11	8	30
9	1	1,5	1,9	1,4	15	11	34
	2	1,7	1,8	1,6	17	13	28
	3	1,9	1,5	1,3	19	16	30
	4	2,1	1,7	1,8	21	17	32
	5	2,2	1,8	1,2	25	18	16
	6	2,5	2,6	1,5	30	20	40
	7	2,7	2,8	2,9	42	21	35
	8	3,2	2,4	2,2	45	30	55
	9	1,8	3,1	2,4	35	25	44
	0	1,3	2,1	0,9	13	14	25

Практическое занятие № 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК

Цель работы: дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения перемещений в статически определимых балках.

Расчет балок на жесткость при изгибе имеет не меньшее значение, чем расчет на прочность. Анализ деформации балки при прямом изгибе показывает, что при приложении к ней поперечной нагрузки продольная ось балки искривляется в плоскости действия нагрузки, а поперечные сечения перемещаются. Искривленная ось балки называется изогнутой осью или упругой линией. Новые положения сечений характеризуются линейными и угловыми перемещениями (рис. 7.1).

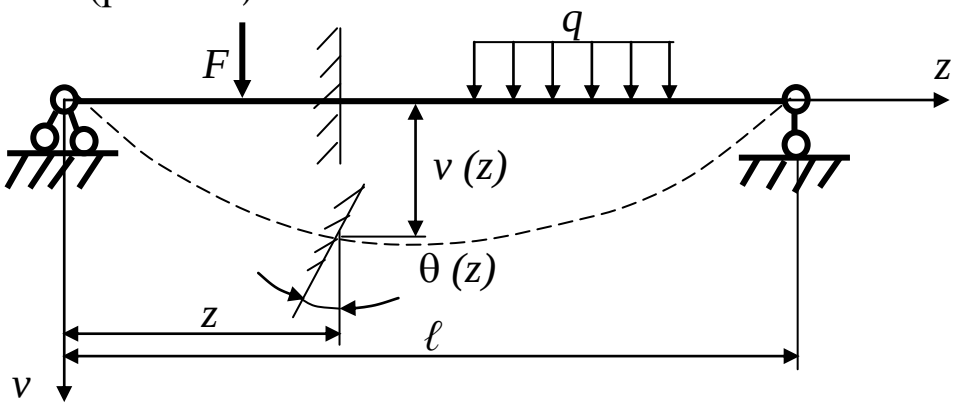


Рис. 7.1. Перемещения при изгибе

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к продольной оси недеформированной балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается v.

Угол, на который сечение поворачивается по отношению к своему начальному вертикальному положению, называется углом поворота сечения и обозначается θ.

Расчет балок на жесткость при изгибе заключается в определении наибольших упругих линейных и угловых перемещений поперечных сечений от заданной нагрузки и сопоставлении их с соответствующими допускаемыми перемещениями, зависящими от назначения и условий эксплуатации балок. Иначе говоря, тре-

буется обеспечить соблюдение условия жесткости, выраженного неравенствами:

$$v_{max} \leq [v], \qquad \Theta_{max} \leq [\Theta], \tag{7.1}$$

где $[v]$ и $[\Theta]$ – допускаемые значения прогиба и угла поворота.

Теоретические основы метода начальных параметров

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$EJ_x v'' = \pm M_x, \tag{7.2}$$

где EJ_x – жесткость сечения балки при изгибе; v'' – вторая производная от прогиба v по абсциссе сечения; M_x – изгибающий момент в произвольном сечении.

Уравнение (7.2) может иметь два знака, потому что знак кривизны ($v'' \approx 1/\rho$) изогнутой оси балки может не совпадать со знаком изгибающего момента. Знак кривизны зависит от направления осей координат, знак изгибающего момента выбирается в зависимости от того, где расположены растянутые волокна. При направлении оси прогибов вверх знак изгибающего момента согласуется со знаком кривизны, которая положительна при вогнутой форме и отрицательна при выпуклой форме (рис. 7.2, *а*).

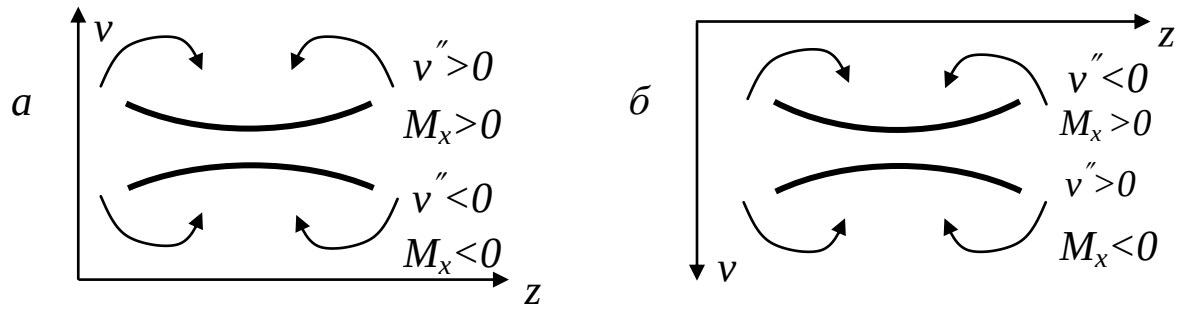


Рис. 7.2. Зависимость знака кривизны от координатных осей

В таком случае уравнение изогнутой оси балки записывается со знаком плюс в правой части $EJ_x v'' = \pm M_x$. При направлении оси прогибов вниз знаки кривизны и изгибающего момента не согласуются (рис. 7.2, *б*) и в правой части уравнения изогнутой оси следует ставить знак минус $EJ_x v'' = -M_x$.

Определение перемещений при изгибе для сложных балок (имеющих два и более участков) методом непосредственного интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки сопряжено со значительными трудностями. Причиной этого является то, что для сложных балок дифференциальное уравнение изогнутой оси не имеет одного аналитического выражения и поэтому должно записывается для каждого участка. При n участках в балке интегрирование n дифференциальных уравнений приводит к получению $2n$ постоянных интегрирования. Задача становится весьма трудоёмкой уже при $n = 3$.

Рассматриваемые ниже теоретические основы метода начальных параметров позволяют при составлении дифференциального уравнения изогнутой оси балки уравнять постоянные интегрирования по всем участкам балки и свести их количество к двум.

Рассмотрим расчетную часть балки (рис. 7.3), нагруженную наиболее часто встречающимися нагрузками:

– сосредоточенным моментом M в сечении с координатой a;

– сосредоточенной силой F в сечении с координатой b;

– равномерно распределенной нагрузкой от сечения с координатой c до сечения с координатой d.

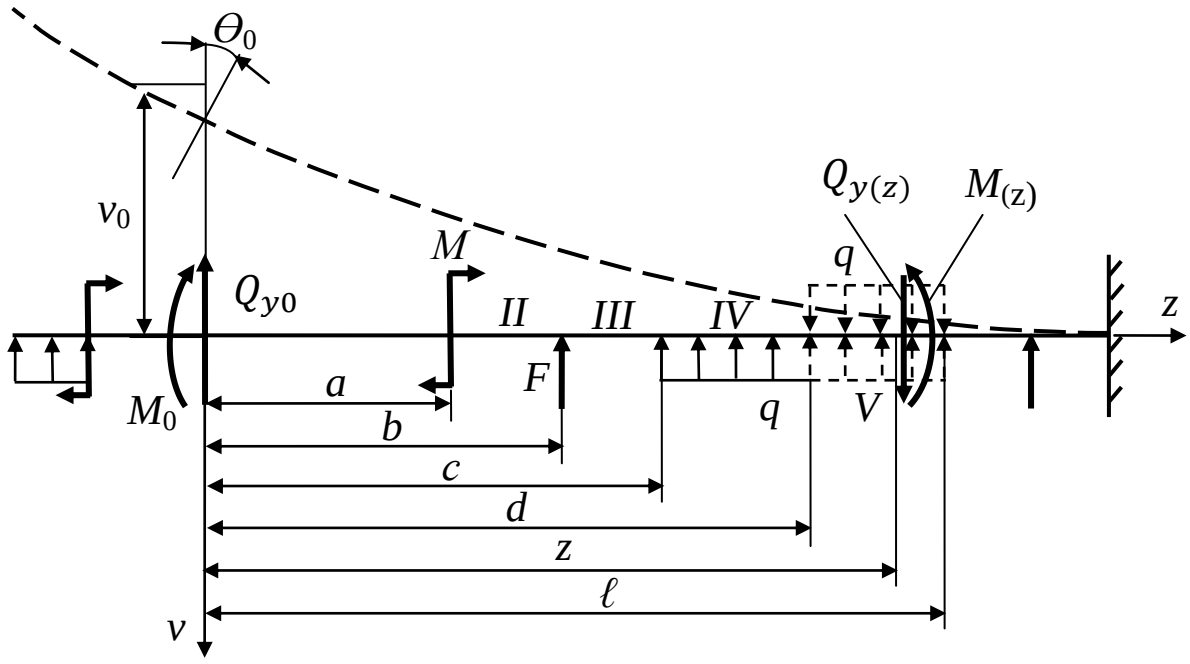


Рис. 7.3. – Расчетная часть балки длиной ℓ

По концам рассматриваемой части балки приложены поперечные силы и изгибающие моменты, заменяющие мысленно действие левой и правой отброшенных частей балки.

На рассматриваемой части балки выражение изгибающего момента для сечения с координатой z имеет вид

$$M_x(z) = M_{x_0} + Q_{y_0} z + M(z-a)^0 + F(z-b) + q\frac{(z-c)^2}{2} - q\frac{(z-d)^2}{2}.$$

В действительности на рассматриваемой части балки может быть несколько сосредоточенных моментов, сосредоточенных сил и участков распределенной нагрузки. Тогда выражение изгибающего момента примет вид:

$$M_x(z) = M_{x_0} + Q_{y_0} z + \Sigma M(z-a_i)^0 + \Sigma F(z-b_i) + \Sigma q\frac{(z-c_i)^2}{2} - \Sigma q\frac{(z-d_i)^2}{2}.$$

где a_i; b_i; c_i; d_i – координаты сечений приложения сосредоточенных моментов, сосредоточенных сил и равномерно распределенных нагрузок.

Изгибающий момент M_{x_0} и поперечная сила Q_{y_0}, действующие в сечении, совпадающем с началом координатных осей, называются статическими начальными параметрами.

Чтобы для балок с любым количеством участков сократить число постоянных интегрирования до двух, необходимо соблюдать следующие правила Клебша:

1. Начало координатных осей выбирается на крайнем левом конце балки и является общим для всех участков.

2. Выражение изгибающего момента записывается с учетом нагрузок, расположенных между началом координатных осей и текущим сечением с координатой z на последнем участке.

3. Внешний сосредоточенный момент умножается на фиктивное плечо вида $(z-a)^0$, где a – координата сечения приложения внешнего сосредоточенного момента.

4. Равномерно-распределенная нагрузка, не распространяющаяся на последующие участки, продлевается до конца участка балки с условием приложения в пределах продленной части компенсирующей равномерно-распределенной нагрузки противоположного направления. В рассматриваемом случае это заданная равномерно распределенная нагрузка, продленная до сечения с координатой ℓ и компенсирующая равномерно распределенная

нагрузка от сечения с координатой d до сечения с координатой ℓ (обе показаны штриховой линией).

5. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки в правой части производится без раскрытия скобок.

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси рассматриваемой части балки

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -\frac{1}{EI_x}\left[M_{x_0} + Q_{y_0}z + M(z-a)^0 + F(z-b) + q\frac{(z-c)^2}{2} - q\frac{(z-d)^2}{2}\right]$$

или

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{1}{EI_x}\left[-M_{x_0} - Q_{y_0}z - M(z-a)^0 - F(z-b) - q\frac{(z-c)^2}{2} + q\frac{(z-d)^2}{2}\right] \qquad (7.3)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение без раскрытия скобок, получим уравнение углов поворота

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[-M_{x_0}z - Q_{y_0}\frac{z^2}{2} - M(z-a) - F\frac{(z-b)^2}{2} - q\frac{(z-c)^3}{6} + q\frac{(z-d)^3}{6}\right]$$

После повторного аналогичного интегрирования уравнения углов поворота получим уравнение прогибов

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x}\left[-M_{x_0}\frac{z^2}{2} - Q_{y_0}\frac{z^3}{6} - M\frac{(z-a)^2}{2} - F\frac{(z-b)^3}{6} - q\frac{(z-c)^4}{24} + q\frac{(z-d)^4}{24}\right]$$

Для случая приложения к балке нескольких сосредоточенных моментов и сил, а также нескольких участков равномерно распределенных нагрузок имеем

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[-M_{x_0}z - Q_{y_0}\frac{z^2}{2} - \Sigma\, M_{a_i}(z-a_i) - \Sigma\, F_{b_i}\frac{(z-b_i)^2}{2} - \Sigma\, q_{c_i}\frac{(z-c_i)^3}{6} + \Sigma\, q_{d_i}\frac{(z-d_i)^3}{6}\right]$$

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x}\left[-M_{x_0}\frac{z^2}{2} - Q_{y_0}\frac{z^3}{6} - \Sigma\, M_{a_i}\frac{(z-a_i)^2}{2} - \Sigma\, F_{b_i}\frac{(z-b_i)^3}{6}\right.$$
$$\left. - \Sigma\, q_{c_i}\frac{(z-c_i)^4}{24} + \Sigma\, q_{d_i}\frac{(z-d_i)^4}{24}\right] \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.4) называется универсальным уравнением изогнутой оси балки.

При определении постоянных интегрирования v_0 и Θ_0 из граничных условий, а также при определении прогибов и углов поворота в расчетных сечениях используется «правило отрицательного аргумента». Согласно этому правилу не учитываются слагаемые, содержащие аргумент вида $(z - a_i)$, $(z - b_i)$, $(z - c_i)$, $(z - d_i)$, принимающий отрицательное значение независимо от его показателя степени. Здесь a, b, c, d – координаты сечений приложения различных нагрузок.

В случае определения перемещений в составной балке с промежуточным шарниром в уравнение углов поворота и прогибов соответственно вводятся дополнительные слагаемые $\Delta\theta(z-e)^0$и $\Delta\theta(z-e)$. Здесь $\Delta\theta$ – взаимный угол поворота поперечных сечений, примыкающих к промежуточному шарниру слева и справа, а e – координата промежуточного шарнира. При этом соблюдаются все рассмотренные выше правила, а определение постоянных интегрирования v_0 и Θ_0 , а также $\Delta\theta$ производится из условий закрепления на опорах балки.

Построение изогнутой оси балки выполняется с учетом (рис. 7.4.) правил знаков для прогибов и углов поворота в зависимости от выбора места и направления координатных осей.

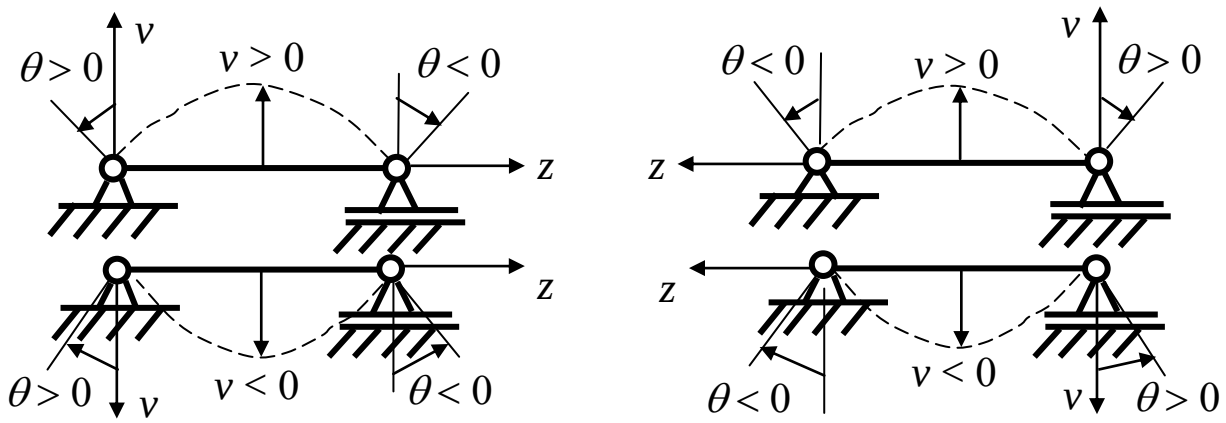


Рис. 7.4. – К определению знаков прогибов и углов поворота

Пример определения перемещений в простой двухопорной балке методом начальных параметров

Для балки (рис. 7.5, *а*), требуется:

1) построить эпюры Q_y, M_x и подобрать сечение из прокатного двутавра, полагая $[\sigma] = 160$ МПа;

2) определить прогибы и углы поворота в характерных сечениях при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и построить прогнутую ось балки;

3) проверить жесткость при $[v] = \frac{\ell}{300}$.

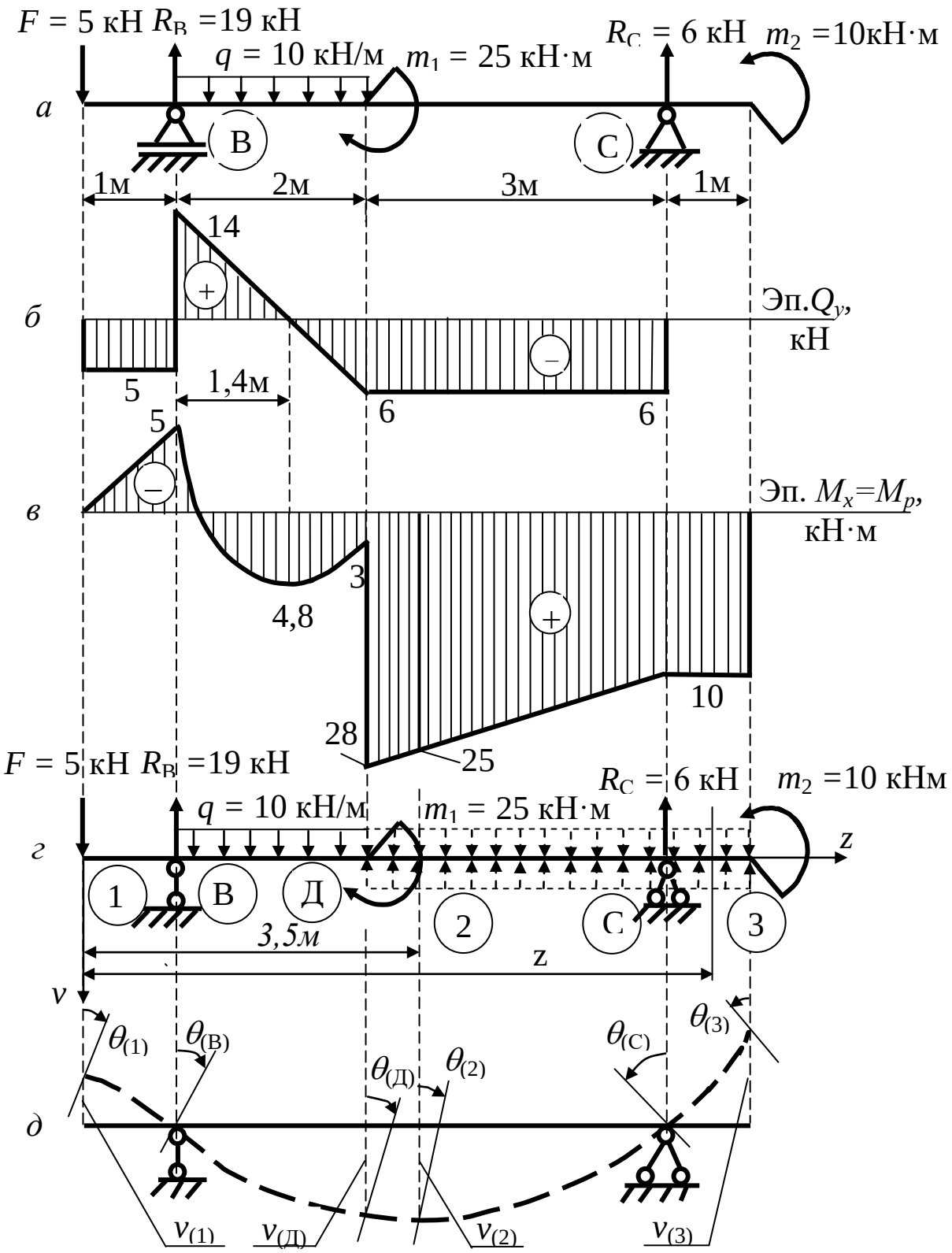


Рис. 7.5:
а – расчетная схема балки; *б* – эпюра Q_y; *в* – эпюра M_x;
г – преобразованная расчетная схема балки;
д – изогнутая ось балки

Решение

Любым из способов, рассмотренных на практическом занятии, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x (рис. 7.5, *б*, *в*).

Определяем опасное сечение и $|M_x|$ по эпюре M_x. Подбор двутаврового поперечного сечения производим, используя условие прочности при изгибе:

$$W_{x\,\text{треб}} \geq \frac{|M_{xmax}|}{[\sigma]} = \frac{28}{160 \cdot 10^3} = 0{,}000175\ \text{м}^3.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8239 – 89) принимаем двутавровое сечение № 20, для которого $W_x = 0{,}000184\ \text{м}^3, J_x = 0{,}0000184\ \text{м}^4$, жесткость сечения балки:

$$EJ_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0000184 = 3680\ \text{кН} \cdot \text{м}^2.$$

Подготовим расчетную схему к составлению универсального уравнения изогнутой оси балки (рис. 7.5, *г*).

Начало координат выбираем на левом конце балки, направив ось прогибов вниз.

Обрывающуюся распределенную нагрузку продолжаем до конца балки, компенсируя ее на третьем и четвертом участках.

Внешний сосредоточенный момент умножаем на фиктивное плечо.

Составляем универсальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -\frac{1}{EI_x}\left[-F \cdot z + R_\text{B}(z-1) - q\frac{(z-1)^2}{2} + m_1(z-3)^0 + q\frac{(z-3)^2}{2} + R_\text{C}(z-6)\right]. \quad (7.5)$$

Интегрируем первый раз и получаем уравнение углов поворота

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{z^2}{2} - R_\text{B}\frac{(z-1)^2}{2} + q\frac{(z-1)^3}{6} - m_1(z-3) - q\frac{(z-3)^3}{6} - R_\text{C}\frac{(z-6)^2}{2}\right] \quad (7.6)$$

Интегрируем второй раз и получаем уравнение прогибов

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{z^3}{6} - R_{\text{В}}\frac{(z-1)^3}{6} + q\frac{(z-1)^4}{24} - m_1\frac{(z-3)^2}{2} - q\frac{(z-3)^4}{24} - R_{\text{С}}\frac{(z-6)^3}{6}\right] \quad (7.7)$$

Постоянные интегрирования v_0 и θ_0 определяем из граничных условий:

а) при $z = 1$ м $\qquad v = 0$;

б) при $z = 6$ м $\qquad v = 0$.

Подставляя эти условия, а также исходные данные в уравнение (7.13), получаем

$$\begin{cases} 0 = v_0 + \theta_0 \cdot 1 + \dfrac{1}{EI_x}\left[5\dfrac{1^3}{6}\right] \\ 0 = v_0 + \theta_0 \cdot 6 + \dfrac{1}{EI_x}\left[5\dfrac{6^3}{6} - 19\dfrac{(6-1)^3}{6} + 10\dfrac{(6-1)^4}{24} - 25\dfrac{(6-3)^2}{2} - 10\dfrac{(6-3)^4}{24}\right] \end{cases}$$

откуда

$$\theta_0 = \frac{20{,}5}{EI_x}, \qquad v_0 = -\frac{21{,}3}{EI_x}.$$

Определяем прогибы в характерных сечениях балки и в середине пролета по уравнению (7.7):

сечение (1). $z_{(1)} = 0$

$$v_{(1)} = -\frac{21{,}3}{3680} = -0{,}0058 \text{ м};$$

сечение (В). $z_{(\text{В})} = 1$ м, $\;v_{(\text{В})} = 0$;

сечение (Д). $z_{(\text{Д})} = 3$ м,

$$v = v_0 + \theta_0 z_{(\text{Д})} + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(\text{Д})}}^3}{6} - R_{\text{В}}\frac{(z_{(\text{Д})}-1)^3}{6} + q\frac{(z_{(\text{Д})}-1)^4}{24}\right],$$

$$v_{(\text{Д})} = \frac{-21{,}3 + 20{,}5 \cdot 3 + 5\dfrac{3^3}{6} - 19\dfrac{(3-1)^3}{6} + 10\dfrac{(3-1)^4}{24}}{3680} = 0{,}0119 \text{ м};$$

сечение (2). $z_{(2)} = 3{,}5$ м,

$$v_{(2)} = v_0 + \theta_0 z_{(2)} + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(2)}}^3}{6} - R_{\text{В}}\frac{(z_{(2)}-1)^3}{6} + q\frac{(z_{(2)}-1)^4}{24}\right],$$

$$v_{(2)} = \frac{-21{,}3 + 20{,}5 \cdot 3{,}5 + 5\frac{3{,}5^3}{6} - 19\frac{(3{,}5-1)^3}{6} + 10\frac{(3{,}5-1)^4}{24}}{3680}$$

$$= 0{,}013 \text{ м};$$

сечение (С). $z_{(\text{С})} = 6$ м, $V_{(\text{С})} = 0$;

сечение (3). $z_{(3)} = 7$ м,

$$v_{(3)} = v_0 + \theta_0 z_{(3)} + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(3)}}^3}{6} - R_{\text{А}}\frac{(z_{(3)}-1)^3}{6} + q\frac{(z_{(3)}-1)^4}{24} - m_1\frac{(z_{(3)}-3)^2}{2} - q\frac{(z_{(3)}-3)^4}{24} - R_{\text{В}}\frac{(z_{(3)}-6)^3}{6},\right]$$

$$v_{(3)} = \frac{-21{,}3 + 20{,}5 \cdot 7 + 5\frac{7^3}{6} - 19\frac{(7-1)^3}{6} + 10\frac{(7-1)^4}{24} - 25\frac{(7-3)^2}{2}}{3680}$$

$$\frac{-10\frac{(7-3)^4}{24} - 6\frac{(7-6)^3}{6}}{3680} = -\,0{,}01 \text{ м}.$$

Определим углы поворота в этих же сечениях по уравнению (7.6):

сечение (1). $z_{(1)} = 0$, $\theta_{(1)} = \theta_0$

$$\theta_{(1)} = \frac{20{,}5}{3680} = 0{,}0056 \text{ рад};$$

сечение (В). $z_{(\text{В})} = 1$ м, $\theta_{(\text{В})} = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(\text{В})}}^2}{2}\right]$,

$$\theta_{(\text{В})} = \frac{20{,}5 + 5\frac{1^2}{2}}{3680} = 0{,}0063 \text{ рад};$$

сечение (Д). $z_{(\text{Д})} = 3$ м,

$$\theta_{(\text{Д})} = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(\text{Д})}}^2}{2} - R_{\text{В}}\frac{(z_{(\text{Д})}-1)^2}{2} + q\frac{(z_{(\text{Д})}-1)^3}{6}\right],$$

$$\theta_{(\text{Д})} = \frac{20{,}5 + 5\frac{3^2}{2} - 19\frac{(3-1)^2}{2} + 10\frac{(3-1)^3}{6}}{3680} = 0{,}005 \text{ рад};$$

сечение (2). $z_{(2)} = 3{,}5$ м,

$$\Theta_{(2)} = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(2)}}^2}{2} - R_{\text{B}}\frac{(z_{(2)}-1)^2}{2} + q\frac{(z_{(2)}-1)^3}{6} - m_1\left(z_{(2)}-3\right) - q\frac{(z_{(2)}-3)^3}{6}\right],$$

$$\Theta_{(2)} = \frac{20{,}5 + 5\frac{3{,}5^2}{2} - 19\frac{(3{,}5-1)^2}{2} + 10\frac{(3{,}5-1)^3}{6} - 25(3{,}5-3) - 10\frac{(3{,}5-3)^3}{6}}{3680}$$

$= 0{,}001$ рад;

сечение (С). $z_{(\text{C})} = 6$ м,

$$\Theta_{(\text{c})} = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(\text{c})}}^2}{2} - R_{\text{B}}\frac{(z_{(\text{c})}-1)^2}{2} + q\frac{(z_{(\text{c})}-1)^3}{6} - m_1\left(z_{(\text{c})}-3\right) - q\frac{(z_{(\text{c})}-3)^3}{6}\right],$$

$$\Theta_{(\text{C})} = \frac{20{,}5 + 5\frac{6^2}{2} - 19\frac{(6-1)^2}{2} + 10\frac{(6-1)^3}{6} - 25(6-3) - 10\frac{(6-3)^3}{6}}{3680} =$$

$= -\,0{,}0105$ рад;

сечение (3). $z_{(3)} = 7$ м,

$$\Theta_{(3)} = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[F\frac{{z_{(3)}}^2}{2} - R_{\text{A}}\frac{\left(z_{(3)}-1\right)^2}{2} + q\frac{\left(z_{(3)}-1\right)^3}{6} - m_1\left(z_{(3)}-3\right) - q\frac{(z_{(3)}-3)^3}{6} - R_{\text{B}}\frac{(z_{(3)}-1)^2}{2},\right]$$

$$\Theta_{(3)} = \frac{20{,}5 + 5\frac{7^2}{2} - 19\frac{(7-1)^2}{2} + 10\frac{(7-1)^3}{6} - 25(7-3) - 10\frac{(7-3)^3}{6} - -10\frac{(7-3)^3}{6} - 6\frac{(7-1)^2}{2}}{3680}$$

$= -\,0{,}013$ рад.

По вычисленным значениям прогибов и углов поворота строим изогнутую ось балки (рис. 7.5, *д*). Положительные прогибы откладываем вниз (по направлению оси v), отрицательные прогибы откладываем вверх. При положительном угле поворота сечение поворачиваем по ходу часовой стрелки, а при отрицательном – против хода часовой стрелки.

Пример определения перемещений в составной балке с промежуточным сквозным шарниром методом начальных параметров

Для балки, расчетная схема которой показана на рис. 7.6, требуется:

1) построить эпюры Q_y, M_x и подобрать сечение из прокатного двутавра, полагая $[\sigma] = 160$ МПа;

2) определить прогибы и углы поворота в характерных сечениях при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и построить прогнутую ось балки;

3) проверить жесткость при $[v] = \frac{\ell}{300}$.

Решение

После построения эпюр Q_y и M_x из условия прочности при изгибе по сортаменту (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 20[а] с $J_x = 1970$ см$^4 = 1970 \cdot 10^{-8}$м^4, тогда

$$EJ_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1970 \cdot 10^{-8} = 3940 \cdot 10^3 \text{ н} \cdot \text{м}^2 = 3940 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Записываем универсальное уравнение изогнутой оси балки и дважды его интегрируем, учитывая наличие промежуточного шарнира:

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{1}{EI_x}\left[-R_\text{B}z + m(z-2)^0 + q\frac{(z-2)^2}{2} - q\frac{(z-6)^2}{2} - F(z-7)\right];$$

$$\theta(z) = \theta_0 + \Delta\Theta_{(3)}(z-6)^0 + \frac{1}{EI_x}\left[-R_\text{B}\frac{z^2}{2} + m(z-2) + q\frac{(z-2)^3}{6} - \right.$$
$$\left. -q\frac{(z-6)^3}{6} - F\frac{(z-7)^2}{2}\right]$$

$$v(z) = v_0 + \theta_0 z + \Delta\Theta_{(3)}(z-6) + \frac{1}{EI_x}\left[-R_{\text{B}}\frac{z^3}{6} + m\frac{(z-2)^2}{2} + q\frac{(z-2)^4}{24} - q\frac{(z-6)^4}{24} - F\frac{(z-7)^3}{6}\right].$$

Граничные условия:

$$v_{(\text{B})} = v_{(z=0)} = 0; \quad v_{(\text{C})} = v_{(z=9\text{м})} = 0; \quad \Theta_{(\text{C})} = \Theta_{(z=9\text{м})} = 0.$$

Первое условие дает $v_0 = 0$, а два остальных дают систему уравнений относительно θ_0 и $\Delta\Theta_{(3)}$:

$$\begin{cases} 0 = \theta_0 \cdot 9 + \Delta\Theta_{(3)} \cdot 3 + \dfrac{1}{EI_x}\left[-15\dfrac{9^3}{6} + 10\dfrac{7^2}{2} + 10\dfrac{7^4}{24} - 10\dfrac{3^4}{24} - 40\dfrac{2^3}{6}\right]; \\ 0 = \theta_0 + \Delta\Theta_{(3)} + \dfrac{1}{EI_x}\left[-15\dfrac{9^2}{2} + 10 \cdot 7 + 10\dfrac{7^3}{6} - 10\dfrac{3^3}{6} - 40\dfrac{2^2}{2}\right]. \end{cases}$$

Откуда $\theta_0 = \frac{65{,}26}{EI_x}$ рад, $\Delta\Theta_{(3)} = \frac{0{,}0065}{EI_x}$ рад.

Определяем прогибы и углы поворота в характерных сечениях:

$$v_{(1)} = \frac{1}{3940}\left[65{,}26 \cdot 2 - 15\frac{2^3}{6}\right] = 0{,}0282\text{м} = 2{,}82 \text{ см (вниз)};$$

$$v_{(2)} = \frac{1}{3940}\left(65{,}26 \cdot 3{,}5 - 15\frac{3{,}5^3}{6} + 10\frac{1{,}5^2}{2} + 10\frac{1{,}5^4}{24}\right) = 0{,}0342\text{м} = 3{,}42 \text{ см (вниз)};$$

$$v_{(3)} = \frac{1}{3940}\left(65{,}26 \cdot 6 - 15\frac{6^3}{6} + 10\frac{4^2}{2} + 10\frac{4^4}{24}\right) = 0{,}0093\text{м} = 0{,}93 \text{ см (вниз)};$$

$$\Theta_{(\text{B})} = \frac{1}{3940}65{,}26 = 0{,}0166 \text{ рад (по часовой стрелке)};$$

$$\Theta_{(3)}^{\text{лев}} = \frac{1}{3940}\left(65{,}26 - 15\frac{6^2}{2} + 10 \cdot 4 + 10\frac{4^3}{6}\right) = -0{,}0147 \text{ рад (против часовой стрелки)};$$

$$\Theta_{(3)}^{\text{прав}} = \Theta_{(3)}^{\text{лев}} + \Delta\Theta_{(3)} = -0{,}0147 + 0{,}0065 = -0{,}0082 \text{ рад (против часовой стрелки)}.$$

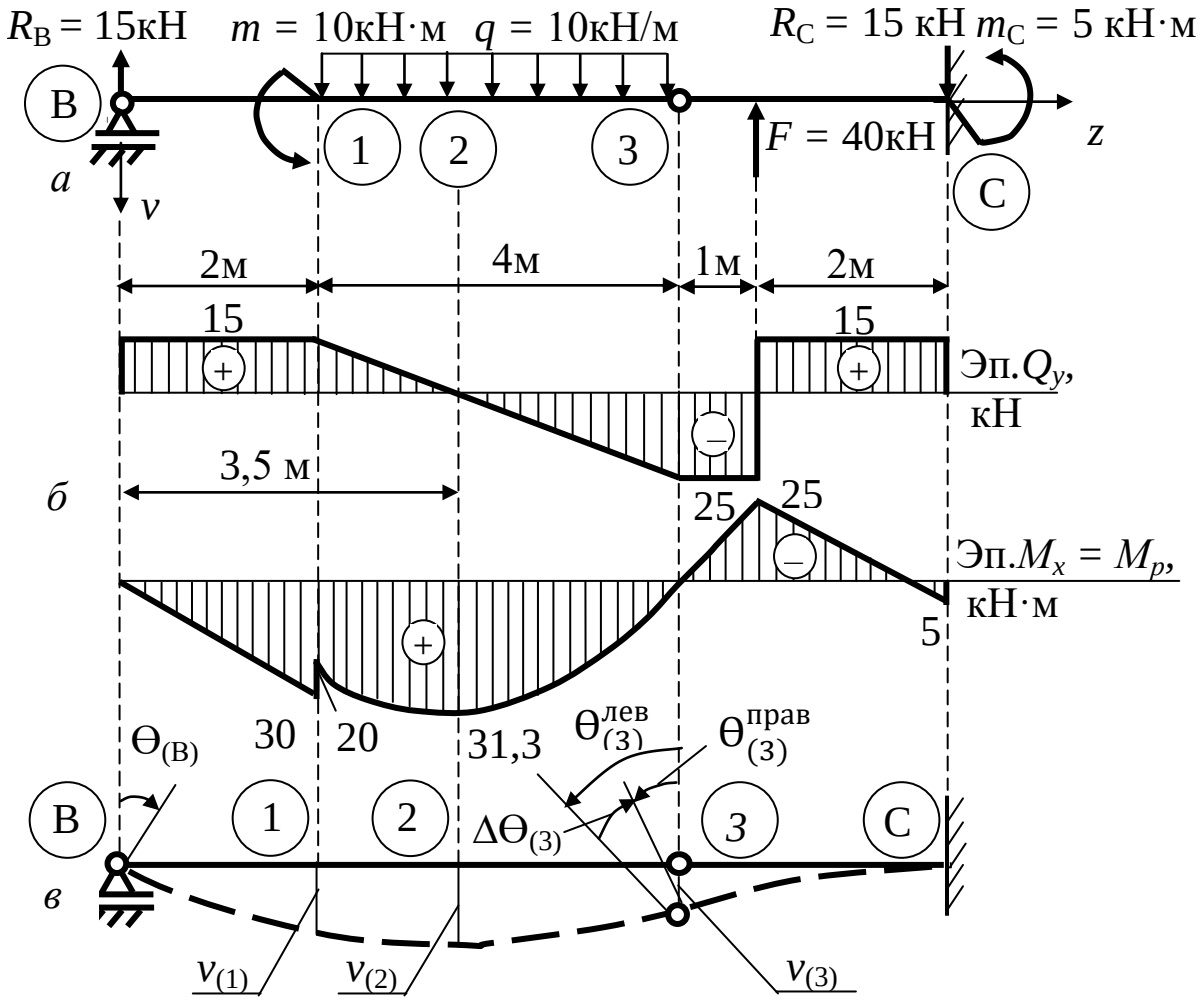


Рис. 7.6:
а – расчетная схема балки; *б* – эпюры Q_y и M_x;
в – изогнутая ось балки

Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графической работы (РГР № 4) «Расчет балки на жесткость» из табл. 7.1 выбрать расчетную схему балки, а из табл. 7.2 взять необходимые данные.

Далее требуется:

1. определить методом начальных параметров значения прогибов и углов поворота в балке;
2. проверить жесткость балки, исходя из нормы $[v] = \frac{\ell}{300}$.

Таблица 7.1

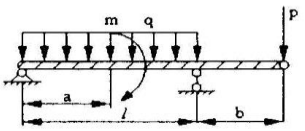
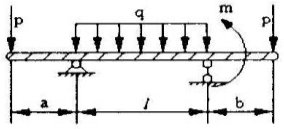
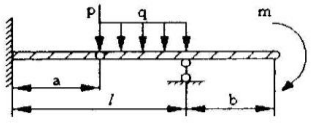
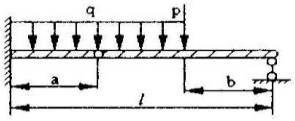
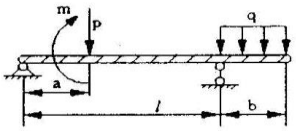
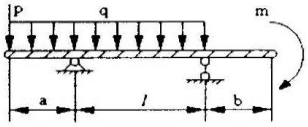
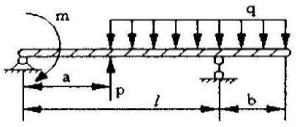
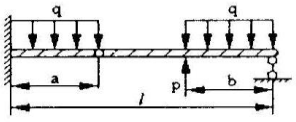
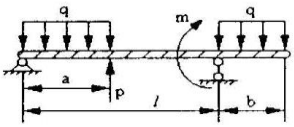
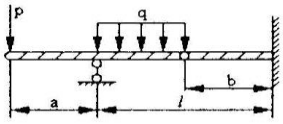
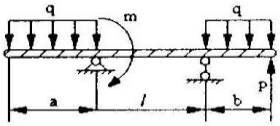
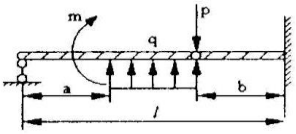
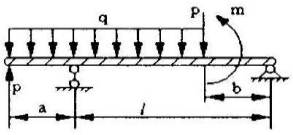
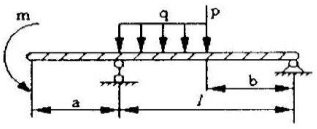
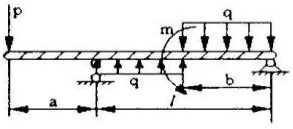
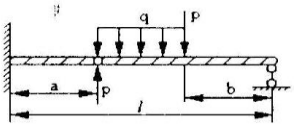
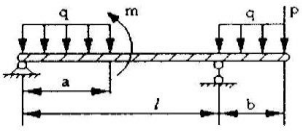
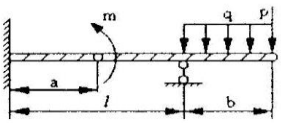
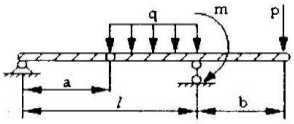
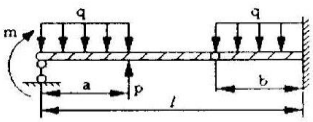
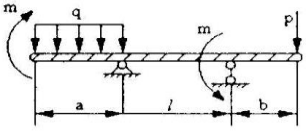
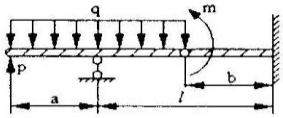
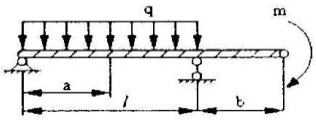
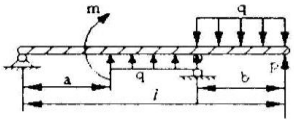
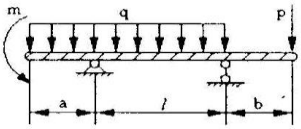
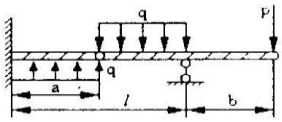
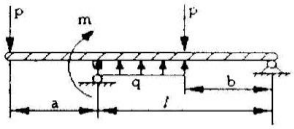
Изогнутая ось балки			бланк №10
	A	**B**	**C**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Таблица 7.2

Изогнутая ось балки					бланк №10		
Серия	**№**	**P, кН**	**q, кН/м**	**m, кНм**	***l*, м**	**a, м**	**b, м**
A	1	30	12	10	3,0	1,0	0,8
	2	32	14	12	6,2	1,2	1,0
	3	34	16	14	5,4	1,4	1,2
	4	36	18	16	5,6	1,6	1,4
	5	38	16	18	5,8	1,8	1,6
	6	40	14	20	6,0	1,6	1,8
	7	42	12	22	6,2	1,4	1,6
	8	44	10	24	6,4	1,2	1,4
	9	46	8,0	26	6,6	1,0	1,2
B	1	34	6,0	28	5,4	1,2	1,0
	2	36	8,0	30	5,6	1,4	1,2
	3	38	10	32	5,8	1,6	1,4
	4	40	12	34	6,0	1,8	1,6
	5	42	14	36	6,2	2,0	1,8
	6	44	16	38	6,4	1,8	1,6
	7	46	18	40	6,6	1,6	1,4
	8	48	20	38	6,8	1,4	1,2
	9	50	22	36	7,0	1,2	1,0
C	1	38	24	34	5,8	1,4	1,2
	2	40	22	32	6,0	1,6	1,4
	3	42	20	30	5,2	1,8	1,6
	4	44	18	28	6,4	2,0	1,8
	5	46	16	26	6,6	2,2	2,0
	6	48	14	24	6,8	2,0	1,8
	7	50	12	22	7,0	1,8	1,6
	8	52	10	20	7,8	1,6	1,4
	9	54	8	18	7,4	1,4	1,2

Практическое занятие № 8

РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Цель работы: оказать помощь студентам в приобретении навыков самостоятельного расчета центрально сжатых стержней на устойчивость.

Основные понятия

Устойчивостью называется способность конструкции и ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Устойчивость или неустойчивость прямолинейной формы продольной оси сжатого стержня существенно зависит от величины сжимающей силы.

Нагрузка на стержень, при которой прямолинейная форма оси перестаёт быть формой устойчивого равновесия, называется *критической нагрузкой* или *критической силой* – $F_{\text{кр}}$. При нагрузках, меньших критической, прямолинейная форма оси стержня – устойчива. При нагрузках больше критической прямолинейная форма оси стержня становится неустойчивой и стержень переходит к новой криволинейной форме равновесия, при которой происходит резкое нарастание прогибов и напряжений в стержне.

В конструкциях и сооружениях допускаются нагрузки значительно меньше критических. Отношение критической нагрузки к фактической называется *коэффициентом запаса устойчивости*

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{P}. \qquad (8.1)$$

Рекомендуемые величины коэффициента запаса устойчивости n_y существенно зависят от материала стержня:

– для сталей n_y = 1,8÷3,0;

– для дерева n_y = 2,8÷3,2;

– для чугуна n_y = 5÷5,5.

Допускаемая сжимающая нагрузка из расчёта на устойчивость

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{n_y}. \qquad (8.2)$$

Формула Эйлера для определения критической силы

В общем случае сжатого стержня критическое значение нагрузки может быть выражено, как

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{\ell^2}, \tag{8.3}$$

где E – модуль упругости первого рода; J_{min} – наименьший из главных центральных моментов инерции сечения; ℓ – полная длина стержня.

Формула (8.3) впервые была получена в 1744 г. великим математиком Леонардом Эйлером (1707–1783).

Следует обратить внимание, что критическая сила не зависит от характеристик прочности материала. Для двух стержней с одинаковыми геометрическими характеристиками, но изготовленными из разной стали (например, – малоуглеродистой стали и высокопрочной низколегированной стали) – критические силы одинаковы.

Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы

Формула Эйлера (8.3) получена для стержня шарнирно закрепленного по концам. Такой способ закрепления называется основным. Наиболее часто встречающиеся способы закрепления приведены в Приложении 3.

Критическая сила в общем случае определяется по формуле

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu\ell)^2}, \tag{8.4}$$

где μ – коэффициент приведенной длины (зависит от способа закрепления торцевых и промежуточных сечений стержня); $\mu\ell$ – приведенная или свободная длина стержня.

Пределы применимости формулы Эйлера

Основная формула (8.4) для критической силы справедлива только при статических нагрузках и при критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала стержня (справедлив закон Гука)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} \leq \sigma_{\text{пц}}. \tag{8.5}$$

Для определения границы применимости формулы Эйлера найдем нормальное напряжение, соответствующие критической силе

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu\ell)^2 A} \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu\ell}{i_{min}}\right)^2}, \tag{8.6}$$

где $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ – радиус инерции поперечного сечения стержня.

Введем понятие *гибкость стержня*

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}. \tag{8.7}$$

Тогда

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{8.8}$$

Обозначив через $\lambda_{\text{пред}}$ гибкость стержня, для которого критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}}$ равно пределу пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ получим

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \tag{8.9}$$

Для стержней, у которых $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ (для стали ст.3 $\lambda_{\text{пред}} = 100$) справедлива формула Эйлера (8.8), так как критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}}$ не превышает предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$.

Определение критической силы и критических напряжений за пределами пропорциональности. Формула Ясинского

Для стержней, у которых $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, критические напряжения $\sigma_{\text{кр}} > \sigma_{\text{пц}}$, поэтому для определения критической силы нужно пользоваться эмпирической формулой Ф. С. Ясинского (1856–1899) – русский инженер и механик:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2;$$

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A. \tag{8.10}$$

где a, b и c – числовые коэффициенты, имеющие размерность напряжения – (приложение 2); A – площадь поперечного сечения стержня; λ – гибкость стержня, определяемая по формуле (8.7).

Обозначим через λ_0 гибкость стержней, для которых критическое напряжение $\sigma_{кр}$ равно предельному напряжению при сжатии:

– для пластичных материалов $\sigma_{кр} = \sigma_т$;

– для хрупких материалов $\sigma_{кр} = \sigma_в$.

Эмпирическая формула (8.10) используется при определения критической силы для стержней, гибкость которых заключена в интервале от λ_0 до $\lambda_{пред}$ (для стали ст.3 $40 < \lambda < 100$). Стержни, у которых $\lambda < \lambda_0$, называются стержнями малой гибкости и рассчитываются только на прочность.

Значения $\lambda_{пред}$ и λ_0 для некоторых материалов даны в Приложении 4.

Пример 1. Задан дюралюминиевый стержень: $\ell = 1{,}5$ м; $D = 5$ *см*; $d = 3$ *см*; $\sigma_{пц} = 170$ МПа; $E = 0{,}71 \cdot 10^5$ МПа; (рис. 8.1).

Определить $P_{кр}$, $\sigma_{кр}$.

Решение:

Момент инерции кольцевого сечения

$$J_x = J_y = J_{min} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{3{,}14}{64}(5^4 - 3^4) = 26{,}69 \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения

$$A_{бр} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{3{,}14}{4}(5^2 - 3^2) = 12{,}56 \text{ см}^2.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{бр}}} = \sqrt{\frac{26{,}69}{12{,}56}} = 1{,}46 \text{ см}.$$

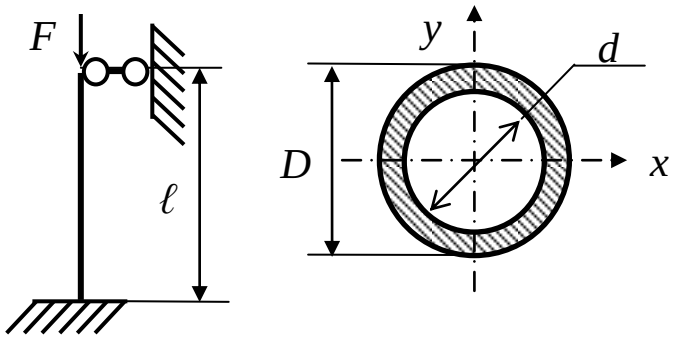


Рис. 8.1. Схема нагружения

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0{,}7 \cdot 150}{1{,}46} = 71{,}92,$$

где $\mu = 0{,}7$ (см. Приложение 3).

Предельная гибкость

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 0{,}71 \cdot 10^5}{170}} = 64.$$

Так как гибкость стержня $\lambda = 71{,}92 > \lambda_{\text{пред}} = 64$, то критическую силу определяем по формуле Эйлера (8.4)

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu\ell)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 0{,}71 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 26{,}69 \cdot 10^{-8}}{(0{,}7 \cdot 1{,}5)^2}$$
$$= 169{,}4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 169{,}4 \text{ кН}.$$

Критическое напряжение

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{169{,}4 \cdot 10^3}{12{,}56 \cdot 10^{-4}} = 134{,}9 \cdot 10^6 \text{Па} = 134{,}9 \text{ МПа}.$$

Пример 2. Материал стержня – чугун; $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа; $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ МПа; $\ell = 1{,}2$ м; $d = 8$ *см* (рис. 8.2).

Определить, $F_{\text{кр}}$, $\sigma_{\text{кр}}$.

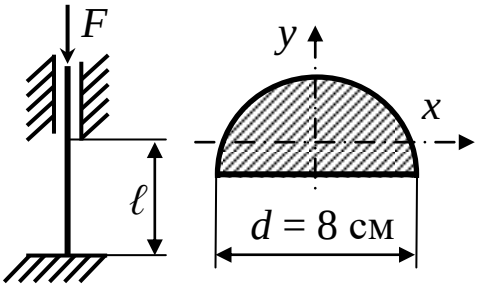


Рис. 8.2. Схема нагружения стержня

Решение:

Момент инерции

$$J_{min} = J_x = 0{,}11 \cdot r^4 = 0{,}11 \cdot 4^4 = 28{,}16 \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения

$$A_{\text{бр}} = \frac{\pi d^2}{8} = 0{,}393 \cdot 8^2 = 25{,}15 \text{ см}^2.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{\text{бр}}}} = \sqrt{\frac{28{,}16}{25{,}15}} = 1{,}06 \text{ см}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{0{,}5 \cdot 120}{1{,}06} = 56{,}6,$$

где $\mu = 0{,}5$ (см. Приложение 3).

Предельная гибкость

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5}{180}} = 80.$$

Так как гибкость стержня $\lambda = 56{,}6 > \lambda_{\text{пред}} = 80$, то критическое напряжение определяем по формуле Ясинского (8.10)

$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 776 - 12 \cdot 56{,}6 + 0{,}053 \cdot 56{,}6^2 = 266{,}6$ МПа,

где $a = 776$ МПа, $b = 12$ МПа, $c = 0{,}053$ МПа (см. Приложение 4).

Критическая сила

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 266{,}6 \cdot 10^6 \cdot 25{,}15 \cdot 10^{-4} = 670{,}5 \text{ кН}.$$

Расчет сжатых стержней на устойчивость

Расчет на устойчивость может осуществляться двумя способами:

1. При заданном в условии допускаемом коэффициенте запаса на устойчивость n_y. В этом случае условие устойчивости имеет вид

$$F \leq \frac{F_{\text{кр}}}{n_y}, \tag{8.11}$$

или

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} \leq [\sigma]_y\ , \tag{8.12}$$

где $F_{кр}$ – критическая сила, определяемая в зависимости от гибкости формулой Эйлера (8.4) или формулой Ясинского (8.10); $[\sigma]_y$ – допускаемое напряжение на устойчивость; n_y – коэффициент запаса устойчивости.

2. С помощью таблиц коэффициентов понижения основного допускаемого напряжения $\varphi(\lambda)$. Условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A_{бр}} \leq \varphi[\sigma]^{-}, \qquad (8.13)$$

где $[\sigma]^{-}$– допускаемое напряжение на сжатие; $A_{бр.}$ – площадь поперечного сечения стержня без учета его ослаблений.

Отношение $\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]^{-}} = \varphi$ называется *коэффициентом понижения основного допускаемого напряжения.* Значения коэффициента φ в зависимости от λ приведены в Приложении 6.

Первый способ расчета на устойчивость

При заданном коэффициенте запаса на устойчивость n_y.

Данный способ применяют при ориентировочных проверочных расчетах, а также в случаях, когда отсутствуют таблицы $\varphi(\lambda)$ – в случае новых материалов или стержней с гибкостями, превышающими рекомендуемые.

1. *Определение допускаемой силы*

Если известны коэффициент запаса на устойчивость n_y, длина стержня ℓ, способ закрепления концов (μ), форма и размеры поперечного сечения (A, J, i), материал $(E, [\sigma]^{-})$, то определяют:

– гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}$;

– критическую силу $F_{кр}$ по формуле Эйлера (8.4), если $\lambda > \lambda_{пред}$ или по формуле Ясинского (8.10), если $\lambda < \lambda_{пред}$;

– допускаемую силу $[F] = \frac{F_{кр}}{n_y}$.

Пример 3. Дано: материал стержня – сосна (вдоль волокон); $\ell = 2$ м; $\mu = 2$; $d = 10$ *см*; $n_y = 3$ (рис. 8.3). Определить $[F]$.

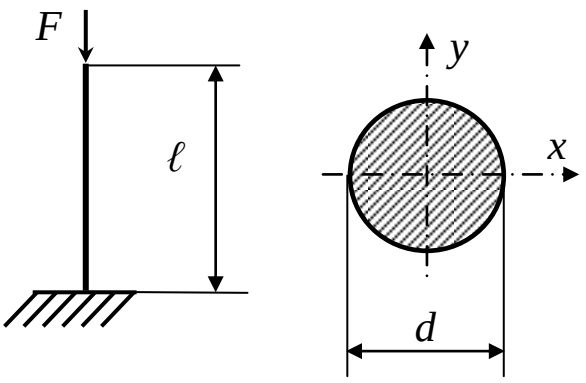


Рис. 8.3. Схема нагружения стержня

Решение:

Радиус инерции круглого сечения

$$i_{min} = i = \frac{d}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ см}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 200}{2{,}5} = 160.$$

Предельная гибкость

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 1 \cdot 10^4}{20}} \approx 70,$$

где $\sigma_{\text{пц}} = 20$ МПа, $E = 1 \cdot 10^4$ МПа (см. Приложение 5).

Так как гибкость стержня $\lambda = 160 > \lambda_{\text{пред}} = 70$, то критическую силу определяем по формуле Эйлера (8.4)

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu\ell)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 490{,}6 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2)^2} = 302{,}3 \cdot 10^2 \text{ Н}$$
$$= 30{,}23 \text{ кН},$$

где

$$J_{min} = \frac{\pi d^2}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2}{64} = 490{,}6 \text{ см}^4.$$

Допускаемая сила

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{30{,}23}{3} = 10{,}08 \text{ кН}.$$

2. *Проверка на устойчивость*

Осуществляется аналогично определению допускаемой силы по формуле (8.11).

3. *Подбор сечения*

Если известны коэффициент запаса на устойчивость n_y, сжимающая сила F, длина стержня ℓ, способ закрепления концов (μ), материал $(E, [\sigma]^-)$, и форма сечения то определяют:

– момент инерции, считая справедливой формулу Эйлера (8.4)

$$J_{min} = \frac{F(\mu\ell)^2 n_y}{\pi^2 E};$$

– площадь поперечного сечения F;

– радиус инерции $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$;

– гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}$, если $\lambda > \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$, то расчет считают законченным;

– если $\lambda < \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$, то делают перерасчет, учитывая формулу Ясинского (8.10).

Пример 4. Сечение стержня – два равнобоких уголка (сталь Ст. 3), $n_y = 2$, $F = 400$ кН, $\ell = 1{,}3$ м (рис. 8.4). Определить номер уголка.

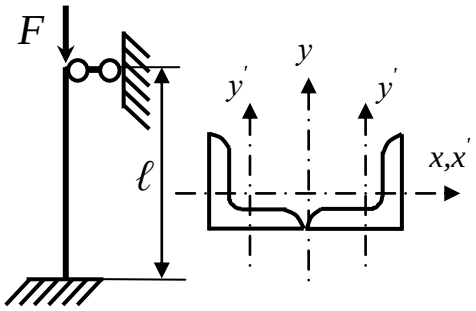


Рис. 8.4. Схема нагружения стержня

Решение:

Момент инерции из формулы Эйлера:

$$J_{min} = \frac{F(\mu\ell)^2 n_y}{\pi^2 E} = \frac{400 \cdot 10^3 (0{,}7 \cdot 1{,}3)^2 \cdot 2}{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 33{,}6 \cdot 10^{-8} \text{м}^4;$$
$$= 33{,}6 \text{ см}^4.$$

$$J_{min} = J_x = 2J_{x'},$$

где $J_{x'}$ – момент инерции одного уголка.

$$J_{x'} = \frac{J_{min}}{2} = \frac{33{,}6}{2} = 16{,}8 \text{ см}^4.$$

По сортаменту прокатной стали ГОСТ8509-89 ближайший меньший уголок 56×5. Для него: $J_{x'} = 16$ см^4; $i_{x'} = 1{,}72$ см; $A' = 5{,}41$ см^2.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0{,}7\cdot 130}{1{,}72} = 52{,}9.$$

Так как $\lambda = 52{,}9 < \lambda_{пред} = 100$ (см. Приложение 4) делаем перерасчет по формуле Ясинского (8.10)

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1{,}14 \cdot 52{,}9 = 249{,}7 \text{ МПа},$$

где $a = 310$ МПа, $b = 1{,}14$ МПа (см. Приложение 4).

$$F_{кр} = \sigma_{кр} F.$$

Отсюда

$$A = \frac{F_{кр}}{\sigma_{кр}} = \frac{F \cdot n_y}{\sigma_{кр}} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 2}{249{,}7 \cdot 10^6} = 3{,}2 \cdot 10^{-3} \text{м}^2 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A' = \frac{A}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509-89 принимаем уголок 90×9, $F' = 15{,}6$ см^2.

Второй способ расчета на устойчивость

С помощью коэффициента понижения основного допускаемого напряжения φ.

Второй способ является основным методом расчета стержней на устойчивость.

Расчет производят только с помощью таблиц коэффициентов φ, не применяя ни формулу Эйлера, ни эмпирическую формулу Ясинского.

1. *Определение допускаемой силы*

Если известны длина стержня ℓ, способ закрепления концов (μ), форма и размеры поперечного сечения (A, J, i), материал $(E, [\sigma]^-)$, то определяют:

– гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}$;

– коэффициент понижения основного допускаемого напряжения φ по таблицам с использованием интерполяции;

– допускаемую сжимающую силу $[F] = [\sigma]_y \cdot A = \varphi[\sigma]^- \cdot A$.

Пример 5. Стойка длиной $\ell = 3$ м, состоящая из двух швеллеров и двух тонких (не учитываемых в расчете) накладок (Ст. 3) сжата силой F (рис. 8.5).

Дано: швеллер № 18, $A_1 = 20{,}5$ см^2, $J_{x_1} = 1080$ см^4, $i_{x_1} = 7{,}26$ см, $J_{y_1} = 85{,}6$ см^4, $z_0 = 1{,}95$ см, $[\sigma] = 160$ МПа (рис. 8.6).

Определить: допускаемую силу $[F]$ и расстояние b из условия одинаковой устойчивости стойки в главных плоскостях инерции zx и zy.

Решение:

Гибкость стойки в плоскости zx

$$\lambda_x = \frac{\mu\ell}{i_{x_1}} = \frac{1\cdot 300}{7{,}26} = 41{,}3,$$

где $\mu = 1$ (см. Приложение 3), $i_x = 7{,}26$ см, т. к. радиус инерции всего стержня (обоих швеллеров) относительно оси x равен радиусу инерции i_{x_1} одного швеллера.

При гибкости $\lambda_x = 41{,}3$ коэффициент φ для стали Ст. 3 равен (приложение 3)

$$\varphi = 0{,}92 - \frac{0{,}92 - 0{,}89}{10}1{,}3 = 0{,}916.$$

Допускаемая сила

$$[F] = \varphi[\sigma]^- \cdot A_{\text{бр}} = 0{,}916 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 20{,}5 \cdot 10^{-4} =$$
$$= 6009 \cdot 10^2 \text{ Н} = 600{,}9 \text{ КН}.$$

Момент инерции всего сечения стойки относительно оси y (рис. 8.6):

$$J_y = 2\left[J_{y_1} + A_1\left(\frac{b}{2} - z_0\right)^2\right] = 2\left[85{,}6 + 20{,}5\left(\frac{b}{2} - 1{,}95\right)^2\right];$$

$$J_y = J_x = 2J_{x_1};$$

$$2\left[85{,}6 + 20{,}5\left(\frac{b}{2} - 1{,}95\right)^2\right] = 2 \cdot 1080.$$

Из этого равенства находим:

$$\left(\frac{b}{2} - 1{,}95\right)^2 = \frac{1080 - 85{,}6}{20{,}5}$$

$$\frac{b}{2} - 1{,}95 = \sqrt{\frac{1080 - 85{,}6}{20{,}5}} = 6{,}96 \text{ см}$$

откуда

$$b = (6{,}96 + 1{,}95) \cdot 2 = 17{,}82 \text{ см}.$$

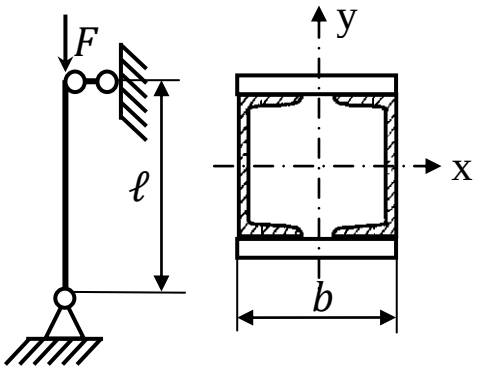


Рис. 8.5. Схема нагружения стержня

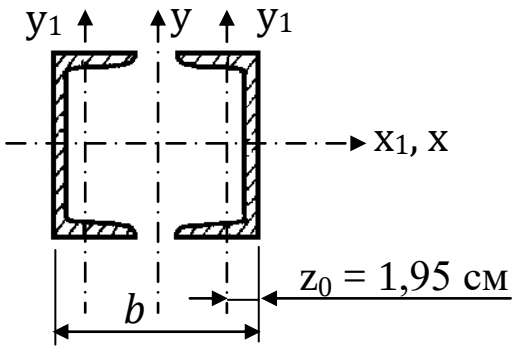


Рис. 8.6. Поперечное сечение стержня

2. *Проверка на устойчивость*

Осуществляется аналогично определению допускаемой силы по формуле (8.12).

3. *Подбор поперечного сечения*

Если известны сжимающая сила F, длина стержня ℓ, способ закрепления концов (μ), материал ($E, [\sigma]^{-}$), и форма сечения, то условие устойчивости (8.13) является неопределенным, поскольку без размеров сечения невозможно найти A и λ, а следовательно и φ.

Подбор сечения производят методом последовательных приближений, для этого:

– в первом приближении задаются значением коэффициента $\varphi_1 = 0{,}5$;

– из условия устойчивости $A_{бр} \geq \frac{F}{\varphi_1[\sigma]^{-}}$, подбирают размеры сечения или номер профиля (если стержень – прокатная сталь);

– находят момент инерции J_{min}, радиус инерции $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{бр}}}$ и гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}$;

– по таблицам с использованием интерполяции определяют значение $\varphi_{1табл}$;

– если $\varphi_{1табл}$ значительно (более 5 %) отличается от φ_1, то во втором приближении принимают $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\,табл}}{2}$ и повторяют расчет.

Сечение считают подобранным, если σ и $[\sigma]_y$ отличаются не более чем на 5%.

Пример 6. Стальной стержень длиной ℓ сжимается силой F (рис. 8.7).

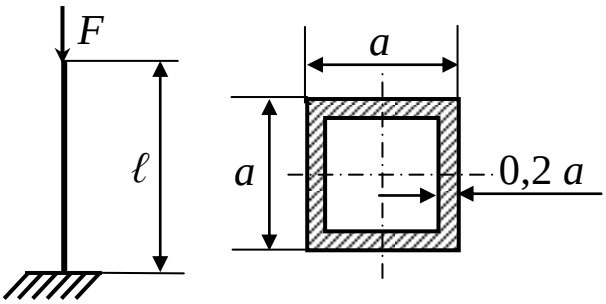


Рис. 8.7. Схема нагружения стержня

Дано: $F = 200$ кН, $\ell = 2{,}2$ м, $[\sigma]^{-} = 160$ МПа.

Определить: размеры поперечного сечения, критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Решение:

Первое приближение

Зададим $\varphi_1 = 0{,}5$.

Требуемая площадь поперечного сечения:

$$A_{\text{бр}} = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]^{-}} = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-4}\text{м}^2;$$

$$A_{\text{бр}} = F = a^2 - (0{,}6a)^2 = 0{,}64\, a^2.$$

Момент инерции

$$J_{min} = J = \frac{a^4}{12} - \frac{(0{,}6a)^4}{12} = 0{,}073\, a^4.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = i = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{\text{бр}}}} = \sqrt{\frac{0{,}073a^4}{0{,}64a^2}} = 0{,}338\, a.$$

Следовательно:

$$A_{\text{бр}} = 0{,}64\, a^2 = 25 \cdot 10^{-4}\text{м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A_{\text{бр}}}{0{,}64}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-4}}{0{,}64}} = 6{,}25 \cdot 10^{-2}\text{м};$$

$$i = 0{,}338a = 0{,}338 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-2} = 2{,}11 \cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 2{,}2}{2{,}11 \cdot 10^{-2}} = 208{,}5,$$

где $\mu = 2$ (см. Приложение 3).

По таблице (см. Приложение 6) для $\lambda = 208{,}5$, $\varphi_{1\text{табл}} = 0 < \varphi_1 = 0{,}5$.

Второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\ \text{табл}}}{2} = \frac{0{,}5 + 0}{2} = 0{,}25.$$

Необходимая площадь поперечного сечения:

$$A_{\text{бр}} = \frac{F}{\varphi_2[\sigma]^-} = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}25 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4}\text{м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A_{\text{бр}}}{0{,}64}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-4}}{0{,}64}} = 8{,}84 \cdot 10^{-2}\text{м};$$

$$i = 0{,}338a = 0{,}338 \cdot 8{,}84 \cdot 10^{-2} = 2{,}98 \cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 2{,}2}{2{,}98 \cdot 10^{-2}} = 147{,}7$$

По приложению 3, интерполируя, находим коэффициент

$$\varphi_{2\ \text{табл}} = 0{,}36 - \frac{0{,}36 - 0{,}32}{10} \cdot 7{,}7 = 0{,}33 > \varphi_2 = 0{,}25.$$

Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{2\ \text{табл}}}{2} = \frac{0{,}25 + 0{,}33}{2} = 0{,}29.$$

Вычисляем необходимую площадь:

$$A_{\text{бр}} = \frac{F}{\varphi_3[\sigma]^-} = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}29 \cdot 160 \cdot 10^6} = 43{,}1 \cdot 10^{-4}\text{м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A_{\text{бр}}}{0{,}64}} = \sqrt{\frac{43{,}1 \cdot 10^{-4}}{0{,}64}} = 8{,}21 \cdot 10^{-2}\text{м};$$

$$i = 0{,}338a = 0{,}338 \cdot 8{,}21 \cdot 10^{-2} = 2{,}77 \cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 2{,}2}{2{,}77 \cdot 10^{-2}} = 158{,}8.$$

Интерполируя по таблице (см. Приложение 6), находим $\varphi_{3\text{табл}} = 0{,}29$.

Вычисляем напряжение

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_{3_{\text{табл}}} A_{бр}} = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}29 \cdot 43{,}1 \cdot 10^{-4}} = 158{,}4\ МПа.$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{160-158{,}4}{160} \cdot 100\% = 1\% \qquad \text{(допускается ±5\%).}$$

Окончательно принимаем

$$a = 8{,}21 \cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости

Гибкость стержня $\lambda = 158{,}8 > \lambda_{\text{пред}} = 100$.

Критическая сила по формуле Эйлера (8.4.)

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 331{,}66 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2{,}2)^2} =$$

$$= 337{,}8 \cdot 10^3\ \text{Н} = 337{,}8\ \text{кН},$$

где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль продольной упругости для стали;

$$J_{min} = J = \frac{a^4}{12} - \frac{(0{,}6a)^4}{12} = 0{,}073\ a^4 = 0{,}073(8{,}21 \cdot 10^{-2})^4 =$$

$$= 331{,}66\ 10^{-8}\ \text{м}^4.$$

Коэффициент запаса устойчивости определяем по формуле

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{337{,}8}{200} = 1{,}69.$$

Задания для самостоятельной работы

При выполнении расчета стержня длиной ℓ сжимаемого силой F (рис. 8.8) требуется:

1) найти размеры поперечного сечения по допускаемому напряжению $[\sigma]^- = 160$ МПа (расчет производить методом последовательных приближений);

2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из табл. 8.1

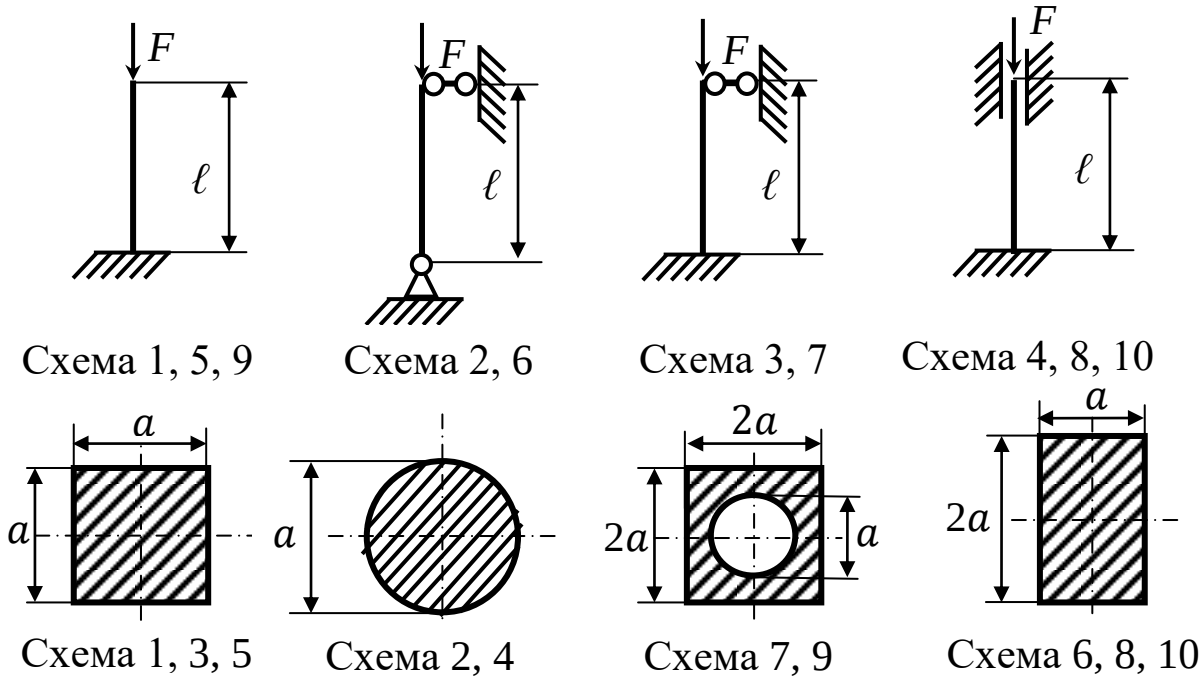


Рис. 8.8. Варианты способов закрепления
концов стержня и формы их сечений

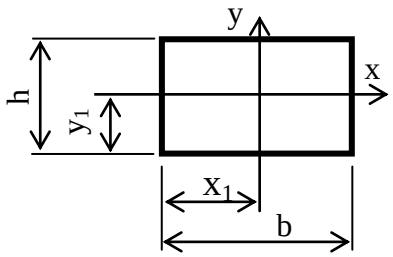
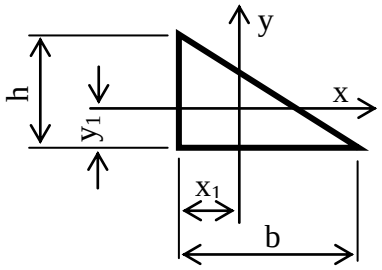
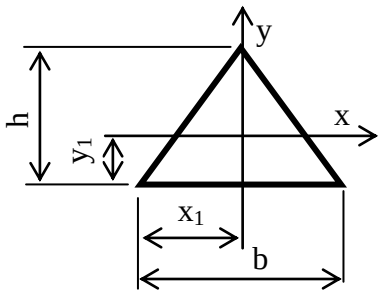
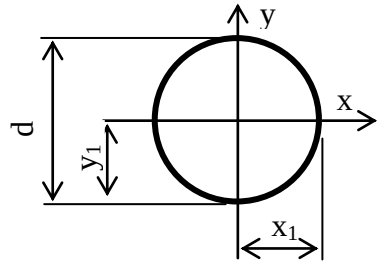
Таблица 8.1

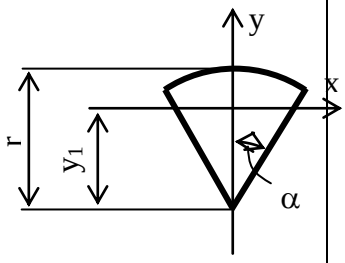
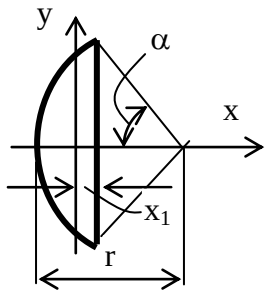
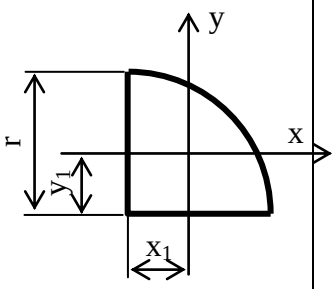
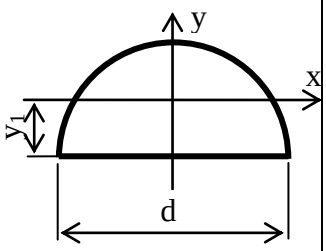
№ строки	Схема по рис. 9.8	ℓ, м	P, кН
1	1	1,5	15
2	2	1,6	70
3	3	1,7	40
4	4	1,8	50
5	5	1,9	60
6	6	2,0	30
7	7	2,1	10
8	8	2,2	100
9	9	2,3	120
0	10	2,5	150
	д	*г*	*в*

9. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

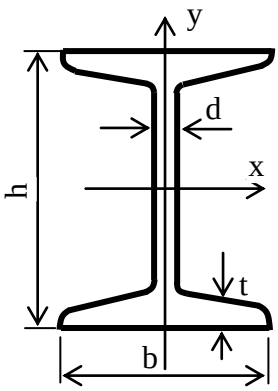
1.1. Геометрические характеристики простых фигур

№ п/п	Эскиз	Площадь сечения A	Моменты инерции J_x, J_y, J_{xy}	Коорд. крайн. точек
1	2	3	4	5
Прямоугольник		$A = b \cdot h$	$J_x = \frac{bh^3}{12}$ $J_y = \frac{b^3h}{12}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Прямоугольный треугольник		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$x_1 = \frac{b}{3}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Равнобедренный треугольник		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{b^3h}{48}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Круг		$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = y_1 = r$

1	2	3	4	5
Сектор круга		$A = \alpha \cdot r^4$ α – в рад	$J_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha})$ $J_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$
Сегмент круга		$A = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$J_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3}\cos\alpha \sin^3\alpha)$ $J_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha + 4\cos\alpha \sin^3\alpha)$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = r\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos\alpha\right)$
Четверть круга		$A = 0{,}785 \cdot r^2$	$J_x = J_y = 0{,}0549r^4$ $J_{xy} = -0{,}0165r^4$	$x_1 = y_1 = 0{,}424r$
Половина круга		$A = 0{,}393 \cdot d^2$	$J_x = 0{,}11r^4$ $J_y = 0{,}393r^4$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = 0{,}424r$

1.2. Сортаменты прокатных профилей

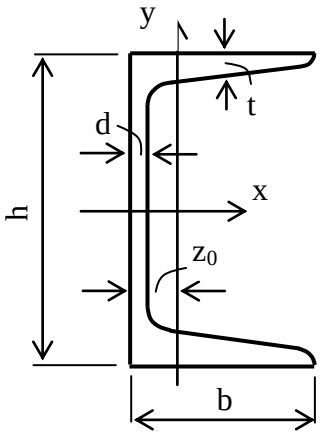
1.2.1. Двутавры стальные горячекатанные (по ГОСТ 8239-89)



h - высота двутавра; J_x и J_y - моменты инерции сечения;
b - ширина полок; W_x - моменты сопротивления сечения;
d - толщина стенки; S_x - статический момент половины сечения.
t - средняя толщина полок;
A - площадь сечения;

Номер двутавра	Масса 1 м. кг	Размеры, мм				A, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3
		h	b	d	t						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23	17,9	6,49
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	545	667	86,1
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	919	1043	123
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	1181	1356	151
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	1491	1725	182

1.2.2. Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-97)

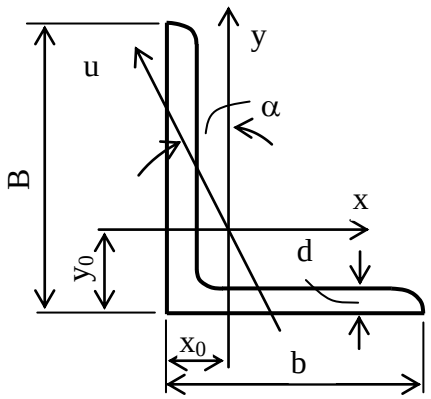


h - высота швеллера;
b - ширина полок;
d - толщина стенки;
t - средняя толщина полок;
A - площадь сечения;

J_x и J_y - моменты инерции сечения;
W_x и W_y - моменты сопротивления сечения;
S_x - статический момент половины сечения;
z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	z_0, см
		h	b	d	t							
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,00	8,70	3,68	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	23,30	12,80	4,75	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	20,40	20,40	6,46	1,44
12	10,40	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	29,60	31,20	8,52	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	40,80	45,40	11,00	1,67
16	14,20	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	54,10	63,30	13,80	1,80
16а	15,30	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103,0	59,40	78,80	16,40	2,00
18	16,30	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,0	69,80	86,00	17,00	1,94
18а	17,40	180	74	5,1	9,3	22,20	1190,0	132,0	76,10	105,00	20,00	2,13
20	18,40	200	76	5,2	9,0	23,40	1520,0	152,0	87,80	113,00	20,50	2,07
22	21,00	220	82	5,4	9,5	26,70	2110,0	192,0	110,00	151,00	25,10	2,21
24	24,00	240	90	5,6	10,0	30,60	2900,0	242,0	139,00	208,00	31,60	2,42
27	27,70	270	95	6,0	10,5	35,20	4160,0	308,0	178,00	262,00	37,30	2,47
30	31,80	300	100	6,5	11,0	40,50	5810,0	387,0	224,00	327,00	43,60	2,52
33	36,50	330	105	7,0	11,7	46,50	7980,0	484,0	281,00	410,00	51,80	2,59
36	41,90	360	110	7,5	12,6	53,40	10820,0	601,0	350,00	513,00	61,70	2,68
40	48,30	400	115	8,0	13,5	61,50	15220,0	761,0	444,00	642,00	73,40	2,75

1.2.3. Уголки стальные горячекатанные неравнополочные (по ГОСТ 8510-86)

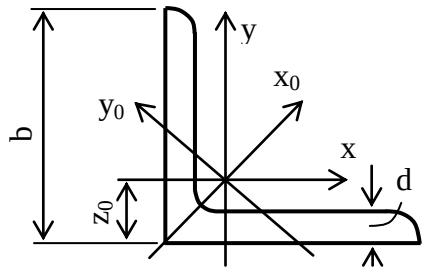


B - ширина большой полки;
b - ширина малой полки;
d - толщина полок;
A - площадь сечения;
J_x и J_y - моменты инерции сечения;
x_0, y_0 - расстояния от центра тяжести до наружных граней полок.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			A, см^2	J_x, см^4	J_y, см^4	$J_{u,\,min}$ см^4	$\lvert J_{xy} \rvert$, см^4	x_0, см	y_0, см	tgα
		B	b	d								
2,5/1,6	0,91	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,22	0,42	0,86	0,392
3/2	1,12	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
	1,46			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,54	0,54	1,04	0,421
3,2/2	1,17	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,47	0,49	1,08	0,382
	1,52			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,59	0,53	1,12	0,374
4/2,5	1,48	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,96	0,59	1,32	0,385
	1,94			4	2,47	3,93	1,18	0,71	1,22	0,63	1,37	0,281
	2,37			5	3,03	4,73	1,41	0,86	1,44	0,66	1,41	0,374
4/3	2,26	40	30	4	2,67	4,18	2,01	1,09	1,68	0,78	1,28	0,544
	2,46			5	3,28	5,04	2,41	1,33	2,00	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	1,68	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,72	1,38	0,64	1,47	0,382
	2,20			4	2,80	5,68	1,69	1,02	1,77	0,68	1,51	0,379
5/3,2	1,90	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	2,01	0,72	1,60	0,469
	2,40			4	3,17	7,98	2,56	1,52	2,59	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	2,81	56	36	4	3,58	11,37	3,79	2,19	3,74	0,84	1,82	0,406
	3,46			5	4,41	13,82	4,48	2,65	4,50	0,88	1,87	0,404
6,3/4,0	3,17	63	40	4	4,04	16,33	5,16	3,07	5,25	0,91	2,03	0,397
	3,91			5	4,98	19,91	6,26	3,73	6,41	0,95	2,08	0,396
	4,63			6	5,90	23,31	7,29	4,36	7,44	0,99	2,12	0,393
	6,03			8	7,68	29,60	9,15	5,58	9,27	1,07	2,20	0,386
6,5/5	4,36	65	50	5	5,56	22,41	12,08	6,41	9,77	1,26	2,00	0,576
	5,18			6	6,60	27,46	14,12	7,52	11,46	1,30	2,04	0,575
	5,98			7	7,62	31,32	16,05	8,68	12,94	1,34	2,08	0,571
	6,77			8	8,62	35,00	18,88	9,65	13,61	1,37	2,12	0,570
7/4,5	4,39	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	9,12	1,05	2,28	0,406
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	12,00	1,17	2,39	0,436
	5,69			6	7,25	40,92	14,60	8,48	14,10	1,21	2,44	0,435
	6,57			7	8,37	46,77	16,61	9,69	16,18	1,25	2,48	0,435
	7,43			8	9,47	52,38	18,52	10,87	17,80	1,29	2,52	0,430

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			A, см^2	J_x, см^4	J_y, см^4	$J_{u,\ min}$ см^4	$\lvert J_{xy} \rvert$, см^4	x_0, см	y_0, см	tgα
		B	b	d								
8/5	4,49	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	13,20	1,13	2,60	0,387
	5,92			6	7,55	48,98	14,85	8,88	15,50	1,17	2,65	0,386
8/6	6,39	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	20,98	1,49	2,47	0,547
	7,39			7	9,42	59,61	28,74	15,58	24,01	1,53	2,52	0,546
	8,37			8	10,67	66,88	32,15	17,49	26,83	1,57	2,56	0,544
9/5,6	6,17	90	56	5,5	7,86	65,28	19,67	11,77	20,54	1,26	2,92	0,384
	6,76			6	8,54	70,58	21,22	12,70	22,23	1,28	2,95	0,384
	8,77			8	11,18	90,87	27,08	16,29	28,33	1,36	3,04	0,380
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,29	30,58	18,20	31,50	1,42	3,23	0,393
	8,70			7	11,09	112,86	34,99	20,83	36,10	1,46	3,28	0,392
	9,87			8	12,57	126,96	39,21	23,38	40,50	1,50	3,32	0,391
	12,14			10	15,47	153,95	47,18	28,34	48,60	1,58	3,40	0,387
10/6,5	8,81	100	65	7	11,23	114,05	38,32	22,77	38,00	1,52	3,24	0,415
	9,99			8	12,73	128,31	42,96	25,24	42,64	1,56	3,28	0,414
	12,30			10	15,67	155,52	51,68	30,60	51,18	1,64	3,37	0,410
11/7	8,98	110	70	6,5	11,45	142,42	45,61	26,94	46,80	1,58	3,55	0,402
	10,93			8	13,93	171,54	54,64	32,31	55,90	1,64	3,61	0,400
12,5/8	11,04	125	80	7	14,06	226,53	73,73	43,40	74,70	1,80	4,01	0,407
	12,58			8	15,98	225,62	80,95	48,82	84,10	1,84	4,05	0,406
	15,47			10	19,70	311,61	100,47	59,33	102,0	1,92	4,14	0,404
	18,34			12	23,36	364,79	116,84	69,47	118,0	2,00	4,22	0,400
14/9	14,13	140	90	8	18,00	363,68	119,79	70,27	121,0	2,03	4,49	0,411
	17,47			10	22,24	444,45	145,54	85,51	147,0	2,12	4,58	0,409
16/10	17,96	160	100	9	22,87	605,97	186,03	110,4	194,0	2,24	5,19	0,391
	19,85			10	25,28	666,59	204,09	121,16	213,0	2,28	5,23	0,390
	23,58			12	30,04	784,22	238,75	142,14	249,0	2,36	5,32	0,388
	27,26			14	34,72	897,19	271,60	162,49	282,0	2,43	5,40	0,385
18/11	22,20	180	110	10	28,33	952,28	276,37	165,44	295,0	2,44	5,88	0,376
	26,40			12	33,69	1122,56	324,09	194,28	348,0	2,52	5,97	0,374
20/12,5	27,37	200	125	11	34,87	1449,02	446,36	263,84	465,0	2,79	6,50	0,392
	29,74			12	37,89	1568,19	481,93	285,04	503,0	2,83	6,54	0,392
	34,43			14	43,87	1800,83	550,77	326,54	575,0	2,91	6,62	0,390
	39,07			16	49,77	2026,08	616,66	366,99	643,0	2,99	6,71	0,388

1.2.4. Уголки стальные горячекатанные равнополочные (по ГОСТ 8509-93)



в - ширина полок;
d - толщина полок;
A - площадь сечения;
J_x - моменты инерции сечения;
J_{xy} - центробежный момент инерции;
z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полок.

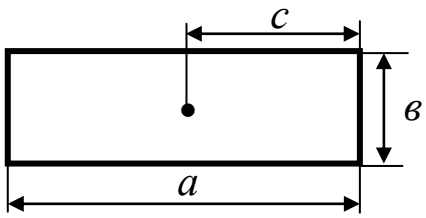
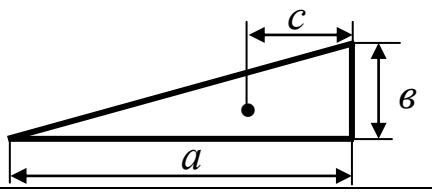
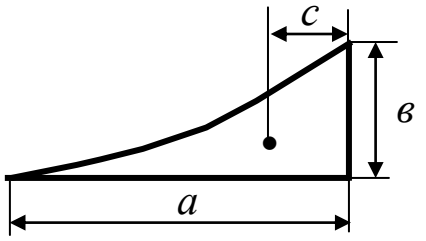
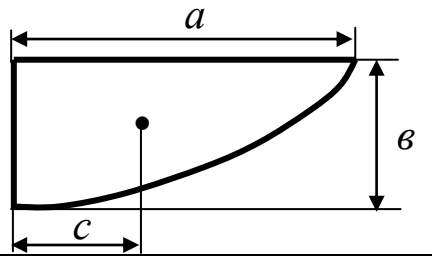
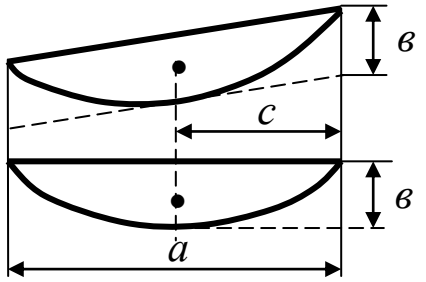
Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A, см^2	J_x, см^4	$J_{x0,\,max}$ см^4	$J_{y0,\,min}$, см^4	$\lvert J_{xy} \rvert$, см^4	z_0, см
		B	d						
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,63	0,17	0,23	0,60
	1,15		4	1,46	0,50	0,78	0,22	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	1,29	0,34	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	1,62	0,44	0,59	0,76
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	1,84	0,48	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	2,30	0,60	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	2,92	0,77	1,08	0,89
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	2,80	0,74	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	3,58	0,94	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	3,72	0,97	1,37	0,97
	2,10		4	2,67	3,01	4,76	1,25	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	5,71	1,52	2,10	1,05
4	1,85	40	3	2,35	3,55	5,63	1,47	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	7,26	1,90	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	8,75	2,30	3,22	1,17
4,5	2,08	45	3	2,65	5,13	8,13	2,12	3,00	1,21
	2,73		4	3,48	6,63	10,52	2,74	3,89	1,26
	3,37		5	4,29	8,03	12,74	3,33	4,71	1,30
5	2,32	50	3	2,96	7,11	11,27	2,95	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	14,63	3,80	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,20	17,77	4,63	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	20,72	5,43	7,65	1,46
5,6	3,44	56	4	4,38	13,10	20,79	5,41	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	15,97	25,36	6,59	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,86	29,90	7,81	11,00	1,69
	4,81		5	6,13	23,10	36,80	9,52	13,70	1,74
	5,72		6	7,28	27,06	42,91	11,18	15,90	1,78
7	4,87	70	4,5	6,20	29,04	465,03	12,04	17,00	1,88
	5,38		5	6,86	31,94	50,67	13,22	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	59,64	15,52	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	68,19	17,77	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	76,35	19,97	28,20	2,02

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A, см^2	J_x, см^4	$J_{x0,\,max}$ см^4	$J_{y0,\,min}$, см^4	$\lvert J_{xy} \rvert$, см^4	z_0, см
		B	d						
7,5	5,80	75	5	7,39	39,53	62,65	16,41	23,10	2,02
	6,89		6	8,78	46,57	73,87	19,28	27,30	2,06
	7,96		7	10,15	53,34	84,61	22,07	31,20	2,10
	9,02		8	11,50	59,84	94,89	24,80	35,00	2,15
	10,07		9	12,83	66,10	104,72	27,48	38,60	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,68	82,56	21,80	30,90	2,17
	7,36		6	9,38	56,97	90,40	23,54	33,40	2,19
	8,51		7	10,85	65,31	103,60	26,97	38,30	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	116,39	30,32	43,00	2,27
9	8,33	90	6	10,61	82,10	130,00	33,97	48,10	2,43
	9,64		7	12,28	94,30	149,67	38,94	55,40	2,47
	10,93		8	13,93	16,36	168,42	43,80	62,30	2,51
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	193,46	50,73	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	207,01	54,16	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	233,46	60,92	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	283,83	74,08	110,00	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	330,95	86,84	122,00	2,91
11	11,89	110	7	15,15	175,61	278,54	72,68	106,00	2,96
	13,50		8	17,20	198,17	314,51	81,83	116,00	3,00
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	466,76	121,98	172,00	3,36
	17,36		9	22,00	327,48	520,00	135,88	192,00	3,40
	19,10		10	24,33	359,82	571,04	148,59	211,00	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	670,02	174,43	248,00	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	763,90	199,62	282,00	3,61
	29,65		16	37,77	538,56	852,84	224,29	315,00	3,68
14	19,41	140	9	24,72	465,72	739,42	192,03	274,00	3,76
	21,45		10	27,33	512,29	813,62	210,96	301,00	3,82
	25,50		12	32,49	602,49	956,98	248,01	354,00	3,90
16	24,67	160	10	31,43	774,24	1229,10	319,33	455,00	4,30
	27,02		11	34,42	844,21	1340,06	347,77	496,00	4,35
	29,35		12	37,39	912,89	1450,00	375,78	537,00	4,39
18	30,47	180	11	38,80	1216,44	1933,10	499,78	716,00	4,85
	33,12		12	42,19	1316,62	2092,78	540,45	776,00	4,89
20	36,97	200	12	47,10	1822,78	2896,16	749,40	1073,00	5,37
	39,92		13	50,85	1960,77	3116,18	805,35	1156,00	5,42
	42,80		14	54,60	2097,00	3333,00	861,00	1236,00	5,46
	60,08		16	61,98	2362,57	4860,42	969,74	1393,00	5,54
22	47,40	220	14	160,38	2814,36	4470,15	1158,56	1655,00	5,91
	53,83		16	68,58	3175,44	5045,37	1305,52	1869,00	6,02

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A, см^2	J_x, см^4	$J_{x0,\,max}$ см^4	$J_{y0,\,min}$, см^4	$\lvert J_{xy} \rvert$, см^4	z_0, см
		B	d						
25	61,55	250	16	78,40	4717,1	7492,1	1942,09	2775,00	6,75
	68,86		18	87,72	5247,24	8336,9	2157,78	3089,00	6,83
	76,11		20	96,96	5764,87	9159,3	2370,01	3395,00	6,91
	83,31		22	106,12	6270,32	9961,3	2579,04	3691,00	7,00
	93,97		25	119,71	7006,39	1112,52	2887,26	4119,00	7,11

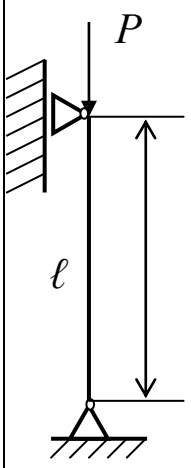
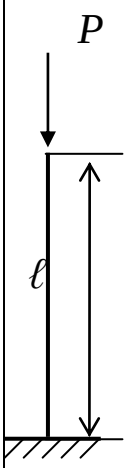
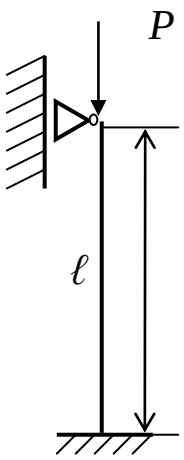
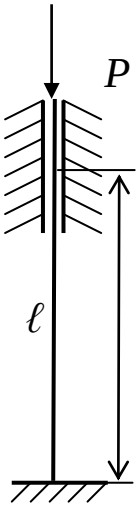
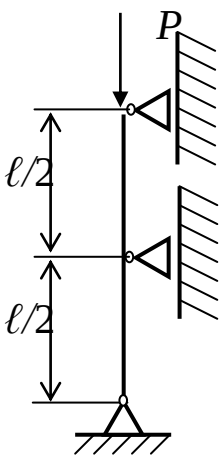
Приложение 2

Площади (ω) и координаты центра тяжести (с) простых фигур

Фигура	Схема	ω	с
Прямоугольник		$ав$	$\frac{1}{2}a$
Треугольник		$\frac{1}{2}ав$	$\frac{1}{3}a$
Вогнутый параболический треугольник		$\frac{1}{3}ав = \frac{qa^3}{6}$	$\frac{1}{4}a$
Выпуклый параболический треугольник		$\frac{2}{3}ав = \frac{qa^3}{3}$	$\frac{3}{8}a$
Параболический сегмент		$\frac{2}{3}ав = \frac{qa^3}{12}$	$\frac{1}{2}a$

Приложение 3

Коэффициент приведения длины μ

				
μ = 1	μ = 2	μ = 0,7	μ = 0,5	μ = 0,5

Приложение 4

Формула Ясинского

$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$, границы применимости $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_{пред}$

Материал	λ_0	$\lambda_{пред}$	a, МПа	b, МПа	c, МПа
Ст.2, Ст.3	40	100	310	1,14	
Ст.5	40	100	465	3,26	
Сталь 40	60	90	321	1,16	
Кремнистая ст.	60	100	589	3,82	
Дерево (сосна)		70	29,3	0,194	
Чугун		80	776	12	0,053

Приложение 5

Модуль продольной упругости, предел пропорциональности и основное допускаемое напряжение на сжатие

Материал	Сталь ст. 3	Сталь ст. 5	Чугун	Дюралюминий	Дерево (сосна)
E, МПа	$2{\cdot}10^5$	$2{\cdot}10^5$	$1{,}2{\cdot}10^5$	$0{,}7{\cdot}10^5$	$1{\cdot}10^4$
$\sigma_{пц}$, МПа	200	240	180	170	20
$[\sigma]^-$, МПа	160	170	150	150	10

Приложение 6

Коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения φ

Гибкость, λ	Коэффициент, φ				
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст.5	Чугун	Дерево	Дюраль-юминий
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,96	0,98	0,97	0,99	0,999
20	0,96	0,95	0,91	0,97	0,998
30	0,94	0,92	0,81	0,93	0,835
40	0,92	0,89	0,69	0,87	0,700
50	0,89	0,86	0,57	0,80	0,568
60	0,86	0,82	0,44	0,71	0,455
70	0,81	0,76	0,34	0,60	0,353
80	0,75	0,70	0,26	0,48	0,269
90	0,69	0,62	0,20	0,38	0,212
100	0,60	0,51	0,16	0,31	0,172
110	0,52	0,43		0,25	0,142
120	0,45	0,36		0,22	0,119
130	0,40	0,33		0,18	0,101
140	0,36	0,29		0,16	0,087
150	0,32	0,26		0,14	0,076
160	0,29	0,24		0,12	
170	0,26	0,21		0,11	
180	0,23	0,19		0,10	
190	0,21	0,17		0,09	
200	0,19	0,16		0,08	

10. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, В. И. Техническая механика [Текст] : учебник для студентов строительных вузов и факультетов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 270800 «Строительство» / В. И. Андреев, А. Г. Паушкин, А. Н. Леонтьев. – Москва : АСВ, 2012. – 256 с. – Текст : непосредственный.

2. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степин.– 13-е изд., стер.. – Санкт-Петербург : Лань, 2014. – 320 с. – Режим доступа: :https://e.lanbook.com/book/3179. – Текст : электронный.

3. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учебник для студентов техн. специальностей вузов / П. А. Степин. – 11-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 320 с. – ISBN 9785811410385. – Текст : непосредственный.

4. Паначев, И. А. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов всех технических специальностей / И. А. Паначев, Ю. Ф. Глазков, М. Ю. Насонов ; ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. сопротивления материалов. – Кемерово, 2011. – 229 с. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – Доступна электронная версия: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90643&type=utchposob:common

5.Паначев, И. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / И. А. Паначев, Г. В. Широколобов, Ю. Ф. Глазков ; ГОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т». – Кемерово, 2010. – 208 с. – ISBN 9785890707406. – URL: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90680&type=utchposob:common. – Текст : непосредственный + электронный.

6. Паначев, И. А. Справочное пособие к решению задач по сопротивлению материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов всех технических специальностей / И. А. Паначев, Ю. Ф. Глазков ; ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. сопротивления материалов. – Кемерово, 2012. – 58 с. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – Доступна электронная версия: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90572&type=utchposob:common – Текст : электронный.

7. Сопротивление материалов : учебник для машиностроительных специальностей вузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка [и др.] ; под ред. Г. С. Писаренко. – 5-е изд., перераб. и

доп. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с. – Текст : непосредственный.

8. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для студентов вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 4-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2004. – 560 с. – ISBN 5060037320. – Текст : непосредственный.

9. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов : учебник для втузов / Н. М. Беляев. – 15-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1976. – 608 с. – Текст : непосредственный.

10. Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов : учебное пособие для студентов втузов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров ; под ред. Л. С. Минина. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 2001. – 592 с. – ISBN 5060034941. – Текст : непосредственный.