

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**  
**«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»**

Кафедра строительных конструкций, водоснабжения и водоотведения

Составитель  
С. А. Сидельников

## **ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

### **Методические материалы**

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления  
подготовки 08.03.01 Строительство  
в качестве электронного издания  
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

**Рецензенты**

Покатилов А. В. – председатель учебно-методической комиссии направления подготовки 08.03.01 Строительство

**Сидельников Сергей Александрович**

**Техническая механика:** методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 08.03.01 Строительство всех форм обучения / сост. С. А. Сидельников; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

В методических материалах представлены методические разработки с указанием порядка их выполнения. Использование студентами методических указаний позволит закрепить методы определения деформаций, напряжений и перемещений применительно к расчетам элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, самостоятельно выполнить типовые расчеты и расчетно-графические работы.

© КузГТУ, 2019  
© Сидельников С. А.,  
составление, 2019

## Содержание

1. Практическое занятие № 1.	
Геометрические характеристики плоских сечений.....	4
2. Практическое занятие № 2.	
Расчет статически неопределимых стержневых систем при растяжении-сжатии (расчет от внешней нагрузки).....	20
3. Практическое занятие № 3.	
Расчет статически неопределимых стержневых систем при растяжении-сжатии (температурный и монтажный расчеты).....	28
4. Практическое занятие № 4.	
Расчет статически определимого круглого стержня при кручении.....	37
5. Практическое занятие № 5.	
Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе балок.....	55
6. Практическое занятие № 6.	
Напряжения при изгибе. Условие прочности. Подбор сечения.....	64
7. Практическое занятие № 7.	
Определение перемещений при изгибе методом Клебша.....	81
8. Практическое занятие № 8.	
Определение перемещений при изгибе способом Верещагина.....	93
9. Практическое занятие № 9.	
Расчет сжатых стержней на устойчивость.....	103
10. Приложения.....	120
11. Оценочные средства для текущего и промежуточного контроля (экзамена).....	131
11.1. Перечень вопросов для текущего контроля.....	131
11.2. Перечень вопросов для промежуточного контроля (экзамена).....	133
11.3. Типовые задачи для текущего и промежуточного контроля (экзамена).....	135
12. Список литературы.....	137

## Практическое занятие № 1

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения геометрических характеристик плоских сечений.

При решении задач сопротивления материалов, связанных с изучением поведения стержневого элемента (бруса), обычно задают систему отсчета в виде трех осей – продольной (здесь и далее  $z$ ) и двух поперечных ( $x$  и  $y$ ). Эти оси для прямого бруса показаны (см. рис. 1.1).

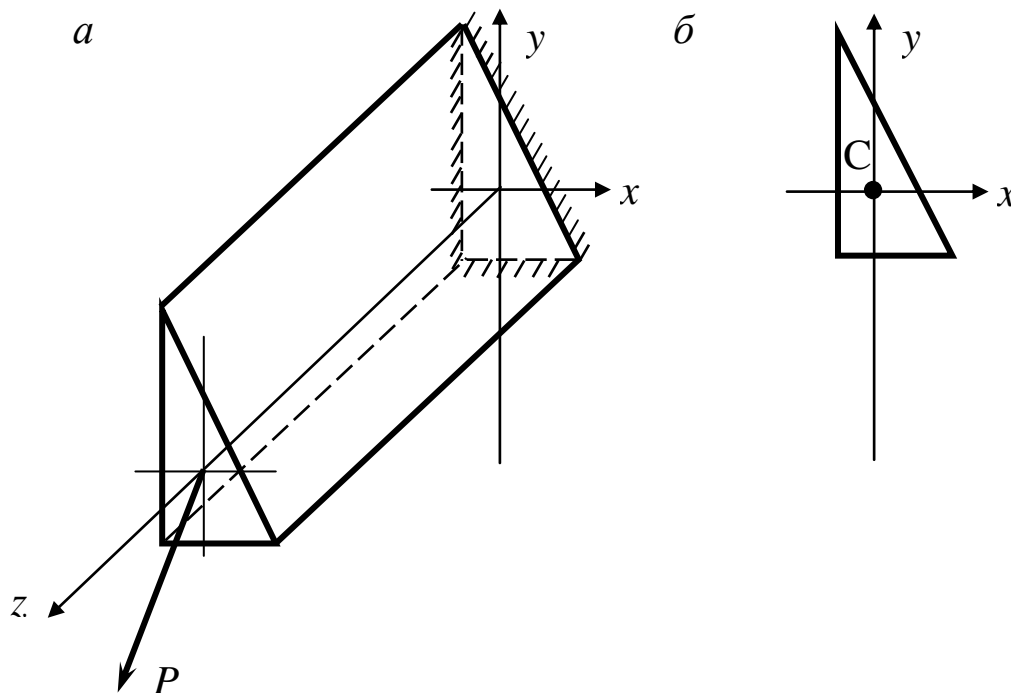


Рис. 1.1. Расположение координатных осей:  
 $a$  – в прямом стержне;  $b$  – в поперечном сечении

Практика расчетов и эксплуатации стержневых конструкций показывает, что поведение их сильно зависит от ориентации нагрузки относительно выбранных осей. Одновременно, при решении задач сопротивления материалов в расчетных моделях конструкций используются различные величины, зависящие от формы и разме-

ров поперечного сечения стержня. Эти величины обобщенно называются геометрическими характеристиками.

Простейшими и очевидными геометрическими характеристиками являются площадь поперечного сечения стержня и его центр тяжести. Однако наряду с ними существует еще целый ряд геометрических характеристик, которые до этого не использовались и имеют не столь очевидный смысл. Этими характеристиками являются моменты инерции поперечного сечения. Особую важность имеет тот факт, что в любом поперечном сечении всегда существуют оси с особыми свойствами, которые называются главными. Расчетные модели стержневых конструкций, созданные с использованием главных осей, наиболее просты и поэтому всегда предпочтительны. Поэтому при расчетах деформируемых стержневых систем всегда используются главные центральные оси поперечных сечений, а любая задача механики стержневых конструкций обычно содержит этап определения главных центральных осей поперечного сечения и моментов инерции относительно этих осей. Содержание этого этапа является предметом данного методического указания.

При выполнении расчетно-графического типового расчета, связанного с определением геометрических характеристик поперечных сечений, необходимо определить:

1. положение центра тяжести сечения;
2. положение главных центральных осей сечения;
3. величины главных моментов инерции.

## **Сведения из теории геометрических характеристик поперечных сечений стержней**

### ***Статические моменты и центр тяжести сечения***

Статические моменты тел и связанные с ними свойства впервые рассматриваются в курсе теоретической механики. В случае плоского сечения (плоской фигуры) произведение произвольного элемента  $dA$  на его координату  $x$  относительно некоторой оси  $y$  (рис. 1.2, *a*) называется статическим моментом этого элемента  $dS_y = dA x$  относительно оси  $y$ . Сумма таких статических моментов, определенная для всего сечения, называется статическим мо-

ментом площади сечения  $A$  относительно оси  $y$ . Статические моменты сечения относительно осей  $x$  и  $y$  можно найти по формулам

$$S_x = \int_0^A x dA; \quad S_y = \int_0^A y dA. \quad (1.1)$$

Среди бесконечного множества осей параллельных осям  $x$  и  $y$  существуют оси, относительно которых статические моменты (1.1) равны нулю. Такие оси называются центральными, а точка их пересечения – центром тяжести сечения (фигуры).

В теоретической механике доказано, что если известны площадь сечения  $A$  и координаты его центра тяжести  $x_c$  и  $y_c$ , то статические моменты могут быть определены следующим образом:

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c. \quad (1.2)$$

Из этих выражений следуют формулы для определения положения центра тяжести

$$x_c = S_y/A; \quad y_c = S_x/A. \quad (1.3)$$

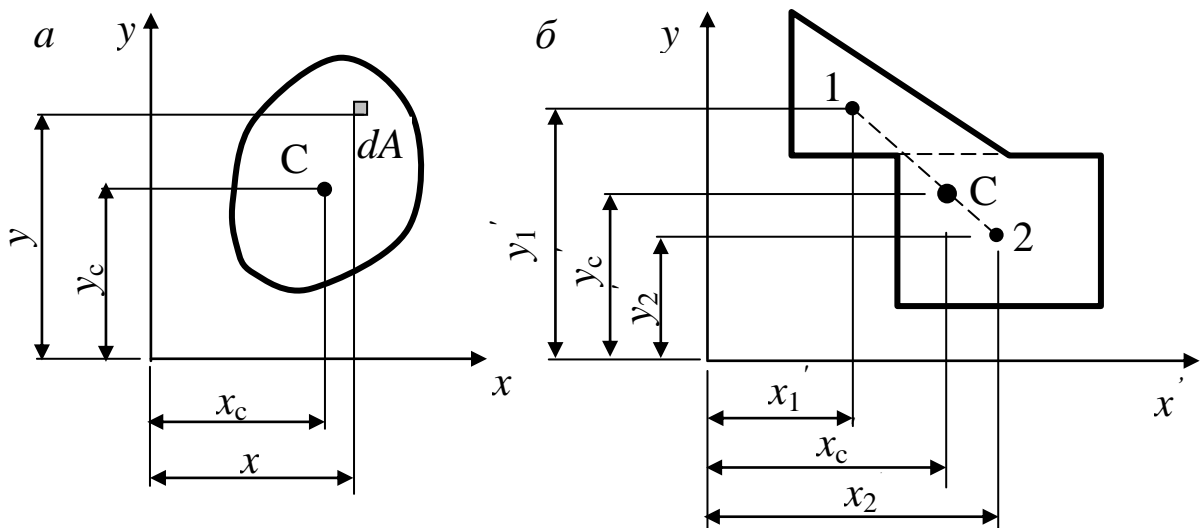


Рис. 1.2. К определению:  $a$  – статического момента;  
 $б$  – центра тяжести

Определение статических моментов, площади сечения и всех других геометрических характеристик подчиняется принципу суммирования (аддитивности). Это значит, что любая геометрическая характеристика сложной фигуры может быть найдена как сумма геометрических характеристик ее частей.

Например, для сечения (рис. 1.2, б) статические моменты могут быть записаны в виде:  $S'_x = A_1 y'_1 + A_2 y'_2$ ;  $S'_y = A_1 x'_1 + A_2 x'_2$ , а выражения (1.3) в общем виде приобретут следующую форму

$$x_c = \frac{\sum A_i x'_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{\sum A_i y'_i}{\sum A_i}. \quad (1.4)$$

На основании всего сказанного определение центра тяжести можно выполнить в следующей последовательности:

1. задается некоторая произвольная вспомогательная система осей  $x'$  и  $y'$ ;
2. сечение разбивается на элементы (части) для которых возможно простое определение площадей и положений их центров тяжести;
3. определяются по справочным данным (см. Приложение 1) площади  $F_i$  и координаты центров тяжести  $x'_i$ ;  $y'_i$  во вспомогательной системе координат;
4. вычисляются по формулам (1.4) координаты центра тяжести  $C$  всего сечения  $x'_c$  и  $y'_c$  во вспомогательной системе координат и производится его построение на эскизе сечения.

### ***Моменты инерции и главные оси***

Как сказано выше, при решении задач изгиба, кручения и устойчивости важную роль играют новые геометрические характеристики – главные оси поперечного сечения и связанные с ними моменты инерции.

Осевыми моментами инерции сечения называются суммы произведений элементарных площадей сечения  $dA$  на квадраты их координат относительно этих осей (рис. 1.3, а)

$$J_x = \int_0^A y^2 dA; \quad J_y = \int_0^A x^2 dA. \quad (1.5)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей называется сумма произведений элементарных площадей сечения  $dA$  на их координаты относительно этих осей

$$J_{xy} = \int_0^A xy dA. \quad (1.6)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно точки (полюса) называется сумма произведений элементарных площадей сечения  $dA$  на квадрат их расстояний до этой точки (полярного радиуса  $\rho$ )

$$J_\rho = \int_0^A \rho^2 dA = \int_0^A (x^2 + y^2) dA = J_x + J_y. \quad (1.7)$$

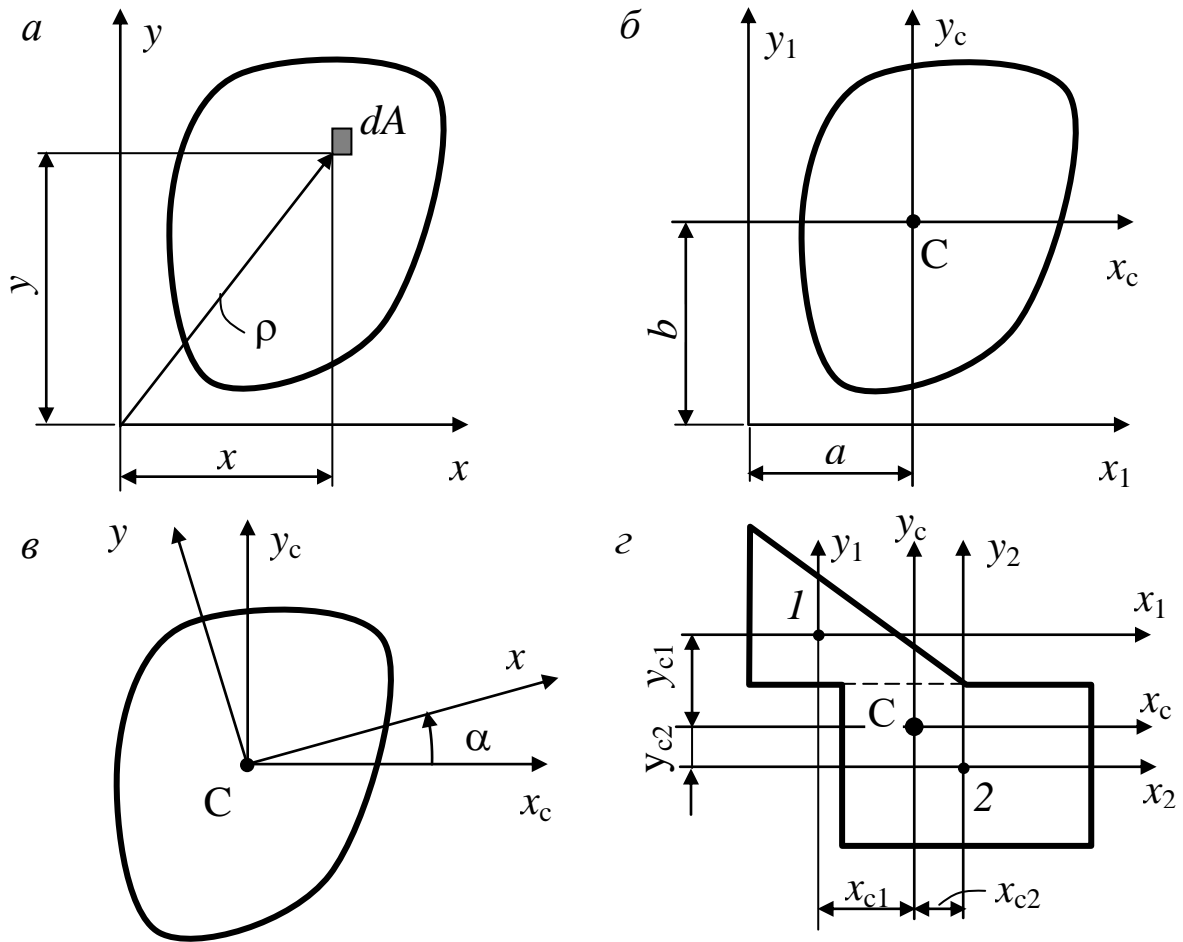


Рис. 1.3. К определению: *a* – моментов инерции сечения;  
*б* – изменения моментов инерции при параллельном переносе осей;  
*в* – изменения моментов инерции при вращательном переносе осей;  
*г* – моментов инерции составных сечений

Моменты инерции измеряются в единицах длины в четвертой степени ( $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$  и т. п.). Осевые и полярные моменты инерции могут быть только положительными, а знак центробежного момента инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от положения сечения относительно выбранной системы координат.

В теории геометрических характеристик, которая является частным случаем разработанной Х. Гюйгенсом теории моментов инерции твердых тел, доказываются две теоремы об изменении моментов инерции при переносе системы осей.

Первая теорема говорит о том, что при параллельном переносе центральных осей  $x_c$  и  $y_c$  в положения  $x_1$  и  $y_1$  соответственно



(рис. 1.3, б), значения моментов инерции относительно новых осей могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_{x_c} + A \cdot b^2; \\ J_{y_1} &= J_{y_c} + A \cdot a^2; \\ J_{x_1 y_1} &= J_{x_c y_c} + A \cdot a \cdot b, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$ ,  $J_{x_c y_c}$  – моменты инерции относительно центральных («старых») осей;  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$ ,  $J_{x_1 y_1}$  – моменты инерции относительно перенесенных («новых») осей;  $a$  и  $b$  – величины переносов центральных осей, которые трактуются как координаты центра тяжести сечения в новых осях, т. е. учитываются со знаками.

Формулы (1.8) дают возможность определять моменты инерции сложных сечений, используя принцип суммирования. Для этого сечение разбивается на простые элементы, и моменты инерции отдельных элементов суммируются по правилам (1.8). Тогда для сложного сечения (рис. 1.3, г) справедливы формулы

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= \Sigma J_{x_i} + \Sigma (A_i y_{c_i}^2); \\ J_{y_c} &= \Sigma J_{y_i} + \Sigma (A_i x_{c_i}^2); \\ J_{x_c y_c} &= \Sigma J_{x_i y_i} + \Sigma (A_i x_{c_i} y_{c_i}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $x_i$ ,  $y_i$  – центральные оси простых элементов параллельные центральным осям  $x_c$  и  $y_c$  всего сечения;  $x_{c_i}$ ,  $y_{c_i}$  – координаты центров тяжести простых элементов в осях  $x_c$ ,  $y_c$ .

Здесь и далее под простыми элементами сечения понимаются такие фигуры, для которых все необходимые в расчете геометрические характеристики могут быть найдены по справочным данным.

Вторая теорема описывает изменение моментов инерции при повороте системы осей на угол  $\alpha$ . Все сказанное ниже может быть отнесено к любой системе осей. Однако для целей данной работы будут обсуждаться только системы центральных осей для всего сечения. Например, для моментов инерции относительно повернутых на угол  $\alpha$  осей  $x$  и  $y$  (рис. 1.3, в) справедливы зависимости

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_c} \cos^2 \alpha + J_{y_c} \sin^2 \alpha - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha; \\ J_y &= J_{x_c} \sin^2 \alpha + J_{y_c} \cos^2 \alpha + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha; \\ J_{xy} &= 0,5(J_{x_c} - J_{y_c}) \sin 2\alpha + J_{x_c y_c} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зависимости (1.10) порождают ряд замечательных свойств множества систем осей  $(x; y)$ , проходящих через одну точку (в нашем случае через центр тяжести всего сечения):

1. функции  $J_x(\alpha)$ ,  $J_y(\alpha)$ ,  $J_{xy}(\alpha)$  являются гладкими и периодическими;

2. среди множества центральных осей  $x$ ,  $y$  всегда существует хотя бы одна система осей, для которой выполняются условия

$$J_{xy} = 0; J_x = J_{max}; J_y = J_{min};$$

3. такие оси называются главными центральными, и их определение является одной из основных целей данной работы;

4. осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными центральными моментами инерции, и их определение есть другая основная цель данной работы.

Угол поворота  $\alpha_0$  одной из главных осей относительно произвольной оси  $x$  можно определить из решения тригонометрического уравнения

$$tg\alpha_0 = -\frac{2J_{xcyc}}{J_{xc}-J_{yc}}, \quad (1.11)$$

где  $J_{xc}$ ,  $J_{yc}$ ,  $J_{xcyc}$  – моменты инерции относительно произвольной центральной системы осей.

Значения максимальных моментов инерции  $J_{max}$ ,  $J_{min}$  могут быть определены подстановкой угла  $\alpha_0$  в две первые формулы (1.10). Второй способ определения величин главных моментов инерции состоит в использовании формулы

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_{xc}+J_{yc}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xc}-J_{yc})^2 + 4J_{xcyc}^2}. \quad (1.12)$$

При использовании выражения (1.12) возникает проблема определения типа экстремума задаваемого углом  $\alpha_0$  (максимума или минимума). Для этого можно использовать стандартное правило математического анализа: если  $\frac{d^2 J_{xc}(\alpha)}{d\alpha^2} < 0$  при  $\alpha = \alpha_0$ , то угол  $\alpha_0$  задает ось *max*.

В случаях, когда  $J_{xc} \neq J_{yc}$ , может быть полезным следующее свойство: если  $J_{xc} > J_{yc}$ , то ось *max* повернута относительно оси  $x_c$  на меньший (по модулю) угол, чем ось *min*. Иногда, когда габаритные размеры сечения в направлении главных осей визуально существенно отличаются, может быть полезно свойство вытянутости сечения вдоль оси *min* и сжатости вдоль оси *max*.

В некоторых практически важных и часто встречающихся случаях задача определения главных центральных осей и главных моментов инерции существенно упрощается. К ним относятся сечения,

у которых есть оси или центр симметрии. У таких сечений центр тяжести расположен на осях симметрии или в центре симметрии. Центробежный момент инерции сечения, найденный с использованием оси симметрии, всегда равен нулю. Это значит, что любая ось симметрии не только центральная, но и главная. Очевидно, что всегда надо использовать оси симметрии как центральные и главные, а вычисления по формулам (1.11) и (1.12) в этих случаях теряют смысл.

Нахождение положения главных центральных осей и величин главных центральных моментов инерции можно выполнить в следующем порядке:

- 1) после определения центра тяжести всего сечения надо показать центральные всего сечения оси  $x_c$  и  $y_c$ ;
- 2) с помощью справочных данных (см. Приложение 1) определить моменты инерции простых элементов сечения  $J_{x_i}$ ,  $J_{y_i}$ ,  $J_{x_i y_i}$  относительно их собственных центральных осей  $x_i$  и  $y_i$ ;
- 3) по справочным данным и результатам нахождения центра тяжести  $C$  всего сечения определить координаты центров тяжести простых элементов сечения  $x_{c_i}$  и  $y_{c_i}$  относительно центральных осей всего сечения  $x_c$  и  $y_c$ ;
- 4) определить моменты инерции всего сечения  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$ ,  $J_{x_c y_c}$  по формулам (1.9);
- 5) решить уравнение (2.11) и найти угол поворота  $\alpha_0$  главной оси  $max$  (или  $min$ ) относительно оси  $x_c$ ;
- 6) определить какую главную ось ( $max$  или  $min$ ) задает угол  $\alpha_0$ ;
- 7) с помощью формул (1.11) или (1.12) определить величины главных центральных моментов инерции  $J_{max}$  и  $J_{min}$ .

## Примеры расчетов геометрических характеристик

### *Несимметричное сечение*

Для расчета принято составное сечение (рис. 1.4) из стандартных прокатных профилей:

- 1) неравнополочного уголка № 10/6,3 с толщиной стенки 8 мм (ГОСТ 8510-86);
- 2) полосы из листовой стали с сечением 200×20 мм;

3) швеллера № 18 (ГОСТ 8240-97).

Значения геометрических характеристик неравнополочного уголка и швеллера взяты из Приложения 1.2. На эскизе сечения (рис. 1.4) показаны центры тяжести элементов и их центральные оси  $x_i$  и  $y_i$ , направление которых может не совпадать с направлением осей на эскизах в сортаментах. Это обстоятельство надо иметь в виду и тщательно контролировать при выборке справочных значений.

Для неравнополочного уголка (см. Приложение 1.2.3):  $A_1 = 12,6 \text{ см}^2$ ;  $J_{x_1} = 127 \text{ см}^4$ ;  $J_{y_1} = 39,2 \text{ см}^4$ ;  $J_{x_1y_1} = 40,5 \text{ см}^4$ ; расстояния до центра тяжести  $x_{0_1} = 15 \text{ мм} = 1,5 \text{ см}$ ,  $y_{0_1} = 33,2 \text{ мм} = 3,32 \text{ см}$ .

Для швеллера (см. Приложение 1.2.2):  $A_3 = 20,7 \text{ см}^2$ ;  $J_{x_3} = 86,0 \text{ см}^4$ ;  $J_{y_3} = 1090 \text{ см}^4$ ;  $J_{x_3y_3} = 0$ ; расстояние до центра тяжести  $y_{0_3} = 19,5 \text{ мм} = 1,95 \text{ см}$ .

Для прямоугольной полосы (см. Приложение 1.1):  $A_2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2$ ;  $J_{x_2} = 2 \cdot 20^3 / 12 = 1333 \text{ см}^4$ ;  $J_{y_2} = 20 \cdot 2^3 / 12 = 13,3 \text{ см}^4$ ;  $J_{x_2y_2} = 0$ .

Решение:

I. Определение центра тяжести сечения

Определяются координаты центров тяжести элементов сечения 1, 2, 3 во вспомогательных осях  $x', y'$  (рис. 1.4):

$$x'_1 = 6,3 - 1,5 = 4,8 \text{ см}; \quad y'_1 = 3,32 \text{ см};$$

$$x'_2 = 6,3 + 1 = 7,3 \text{ см}; \quad y'_2 = 10 \text{ см};$$

$$x'_3 = 6,3 + 2 + 9 = 17,3 \text{ см}; \quad y'_3 = 20 - 1,95 = 18,05 \text{ см}.$$

Отметим, что (см. рис. 1.4) все размеры указаны в сантиметрах, то есть в единицах, в которых ведутся вычисления.

По формулам (1.4) определим координаты центра тяжести всего сечения  $C$  во вспомогательных осях  $x', y'$ :

$$x'_c = \frac{\sum A_i x'_i}{\sum A_i} = \frac{12,6 \cdot 4,8 + 40 \cdot 7,3 + 20,7 \cdot 17,3}{12,6 + 40 + 20,7} = \frac{707,1}{73,1} = 9,71 \text{ см};$$

$$y'_c = \frac{\sum A_i y'_i}{\sum A_i} = \frac{12,6 \cdot 3,32 + 40 \cdot 10 + 20,7 \cdot 18,05}{12,6 + 40 + 20,7} = \frac{812}{73,1} = 11,1 \text{ см}.$$

Положение центра тяжести сечения С (см. рис. 1.4).

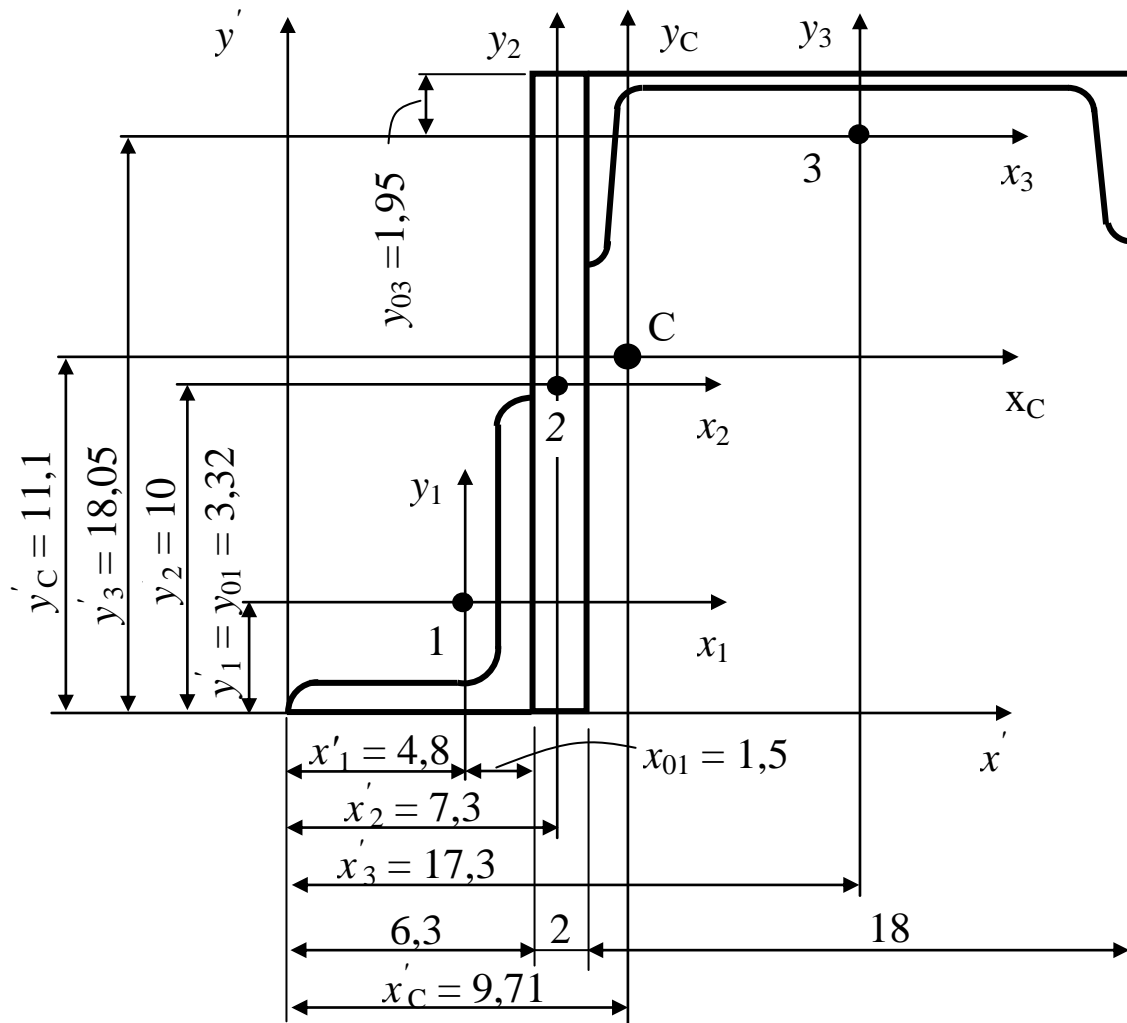


Рис. 1.4. Определение центра тяжести несимметричного сечения

Для возможностей визуальной проверки результатов расчетов настоятельно рекомендуем изображать все исходные размеры и полученные координаты на эскизе сечения в одном масштабе. Отметим, что в рассматриваемом примере точка С должна находиться внутри треугольника с вершинами 1, 2, 3.

II. Определение главных центральных осей и главных моментов инерции.

Эскиз сечения (рис. 1.5), иллюстрирует этот этап вычислений.

Моменты инерции простых элементов (уголка, полосы, швеллера) приведены выше. Укажем на то, что в сортаментах на уголкового профили (Приложения 1.2.3 и 1.2.4) центробежные моменты инерции задаются по модулю. Но, как говорилось ранее, центро-

бежные моменты инерции могут быть положительными и отрицательными. Их знаки зависят от направления осей  $x_i, y_i$ . Для определения знака центробежного момента инерции может быть использовано следующее свойство: если преобладающая часть сечения имеет координаты одного знака, то центробежный момент инерции будет положительным.

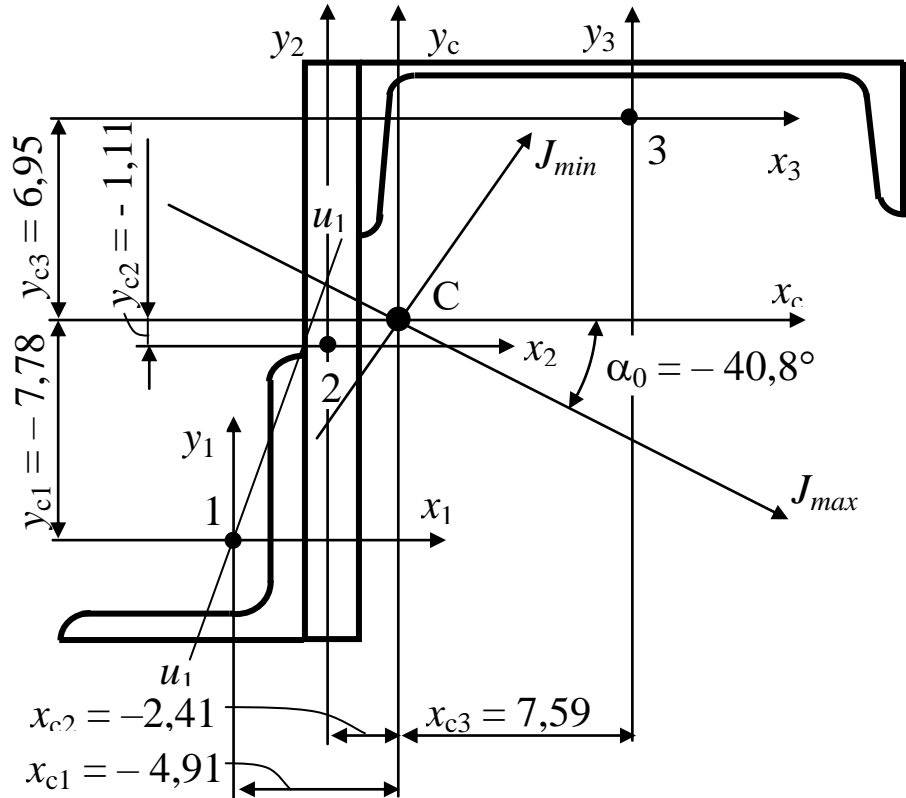


Рис. 1.5. Определение главных центральных осей и главных моментов инерции несимметричного сечения

На рис. 1.6 показаны простые сечения – прямоугольный треугольник, четверть круга, неравнополочный и равнополочный прокатные уголки, наиболее часто встречающиеся при определении геометрических характеристик. Там же показаны выделенные штриховкой преобладающие части сечений и соответствующие им знаки центробежных моментов инерции.

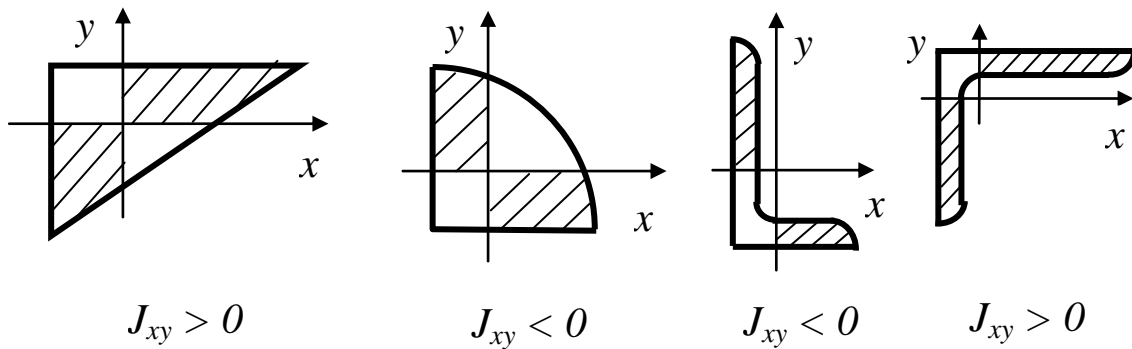


Рис. 1.6. Примеры нахождения знаков центробежных моментов инерции

В более ранних источниках сведения о значениях центробежных моментов инерции уголкового профиля отсутствовали. В этих случаях значения центробежных моментов инерции можно определить по формулам:

– для неравнополочного уголка

$$J_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_u)(J_y - J_u)}; \quad (1.13)$$

– для равнополочного уголка

$$J_{xy} = \pm 0,5(J_{x_0} - J_{y_0}), \quad (1.14)$$

где  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_u$  – осевые моменты инерции неравнополочного уголка относительно его осей  $x$ ,  $y$  и  $u$  ( $min$ ) (Приложение 1.3);  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$  – осевые моменты инерции равнополочного уголка относительно его осей  $x_0$  ( $max$ ) и  $y_0$  ( $min$ ) (см. Приложение 1.3).

Определим координаты центров тяжести простых элементов сечения в произвольных центральных осях всего сечения  $x_c$ ,  $y_c$  (рис. 1.5):

$$x_{c_1} = x'_1 - x'_c = 4,8 - 9,71 = -4,91 \text{ см};$$

$$y_{c_1} = y'_1 - y'_c = 3,32 - 11,1 = -7,78 \text{ см}.$$

Далее аналогично находим:

$$x_{c_2} = 7,3 - 9,71 = -2,41 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 10 - 11,1 = -1,11 \text{ см};$$

$$x_{c_3} = 17,3 - 9,71 = 7,59 \text{ см}; \quad y_{c_3} = 18,05 - 11,1 = 6,95 \text{ см}.$$

По формулам (1.9) вычисляем моменты инерции относительно произвольных центральных осей всего сечения:

$$J_{x_c} = 127 + 1333 + 86 + 12,6(-7,78)^2 + 40(-1,11)^2 + 20,7 \cdot 6,95^2 = 3374 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = 39,2 + 13,3 + 1090 + 12,6(-4,91)^2 + 40(-2,41)^2 + 20,7 \cdot 7,59^2 = 2870 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c} = 40,4 + 0 + 0 + 12,6(-4,91)(-7,78) + 40(-2,41)(-1,11) + 20,7 \cdot 7,59 \cdot 6,95 = 1720 \text{ см}^4.$$

Отметим, что найденный центробежный момент инерции  $J_{x_c y_c}$  не равен нулю. Это значит, что центральные оси сечения не являются главными.

Определим угол поворота одной из главных центральных осей с помощью уравнения (2.11):

$$2 \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 1720}{3374 - 2870} = -6,82;$$

$$2\alpha_0 = -81,66^\circ;$$

$$\alpha_0 = -40,8^\circ.$$

По условию  $J_{x_c} = 3374 \text{ см}^4 > J_{y_c} = 2870 \text{ см}^4$  устанавливаем, что угол  $\alpha_0$  задает положение оси *max* (см. рис. 1.5).

Величины главных центральных моментов инерции определим с помощью формулы (1.12):

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{3374 + 2870}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(3374 - 2870)^2 + 4 \cdot 1720^2} =$$

$$= 3122 \pm 1738;$$

$$J_{\max} = 4860 \text{ см}^4; J_{\min} = 1384 \text{ см}^4.$$

Для проверки полученных результатов вычислим центробежный момент инерции относительно главных центральных осей с помощью третьей формулы (1.10)

$$J_{\max, \min} = 0,5(J_{x_c} - J_{y_c}) \sin 2\alpha + J_{x_c y_c} \cos 2\alpha$$

$$= 0,5(3374 - 2870) \sin(-81,66^\circ) +$$

$$+ 1720 \cos(-81,66^\circ) = 252(-0,989) + 1720 \cdot 0,145 =$$

$$= -249 + 249 = 0.$$

Равенство нулю центробежного момента инерции относительно главных осей является достаточным для проверки правильности решения.



## Симметричное сечение

Рассмотрим эскиз сечения с вертикальной осью симметрии (рис. 1.7).

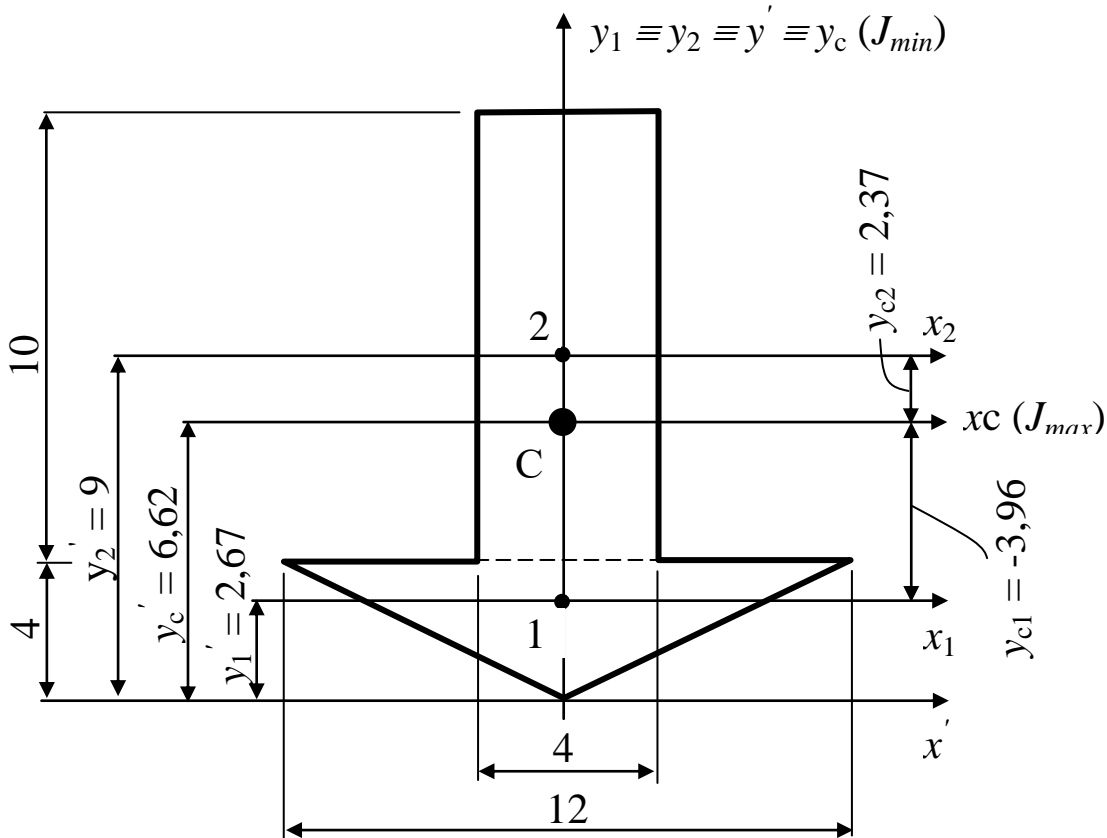


Рис. 1.7. Эскиз симметричного сечения

Сечение разбито на два простых элемента: равнобедренный треугольник 1 и прямоугольник 2.

Геометрические характеристики простых элементов (см. Приложение 1.1):

Для равнобедренного треугольника:  $A_1 = 4 \cdot 12 / 2 = 24 \text{ см}^2$ ;  $J_{x_1} = 12 \cdot 4^3 / 36 = 21,33 \text{ см}^4$ ;  $J_{y_1} = 4 \cdot 12^3 / 48 = 144 \text{ см}^4$ ;  $J_{x_1 y_1} = 0$ .

Для прямоугольника:  $A_2 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см}^2$ ;  $J_{x_2} = \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 333 \text{ см}^4$ ;  $J_{y_2} = 10 \cdot 4^3 / 12 = 53,3 \text{ см}^4$ ;  $J_{x_2 y_2} = 0$ .

Вспомогательные оси  $x', y'$  для определения положения центра тяжести всего сечения включают вертикальную ось симметрии (см. рис. 1.7). В этом случае имеет смысл определять только вертикальную координату центра тяжести  $y'_c$ .

### I. Определение центра тяжести сечения

Координаты центров тяжести простых элементов относительно оси  $x'$ :

$$y'_1 = 2 \cdot 4/3 = 2,67 \text{ см}; \quad y'_2 = 4 + 10/2 = 9 \text{ см}.$$

Определяем вертикальную координату центра тяжести всего сечения по второй формуле (1.4):

$$y'_c = \frac{24 \cdot 2,67 + 40 \cdot 9}{24 + 40} = \frac{424}{64} = 6,62 \text{ см}.$$

II. Определение положения главных центральных осей и главных моментов инерции.

Координаты центров тяжести простых элементов относительно центральной оси  $x_c$  всего сечения

$$y_{c_1} = 2,67 - 6,62 = -3,95 \text{ см};$$

$$y_{c_2} = 9 - 6,62 = 2,38 \text{ см}.$$

Определяем по формулам (1.9) моменты инерции относительно центральных осей сечения  $x_c$  и  $y_c$ , которые одновременно являются главными осями

$$J_{x_c} = 21,3 + 333 + 24 \cdot (-3,95)^2 + 40 \cdot 2,38^2 = 955 \text{ см}^4 \equiv J_{\max};$$

$$J_{y_c} = 144 + 53,3 = 197,5 \text{ см}^4 \equiv J_{\min}.$$

### Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графического типового расчета «Геометрические характеристики плоских сечений» из табл. 1.1 необходимо выбрать расчетную схему, а из табл. 1.2 взять необходимые данные.

Таблица 1.1


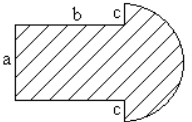

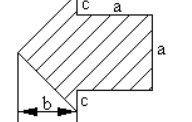

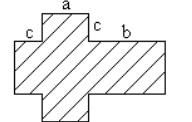

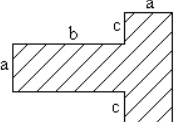

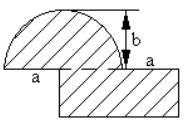

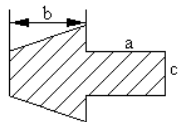

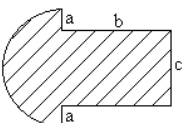

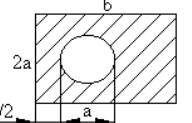

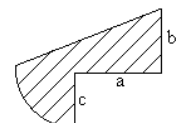

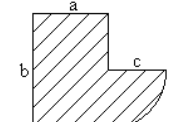

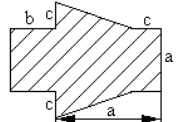
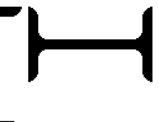
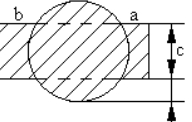

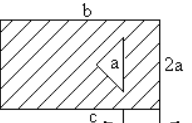

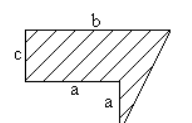

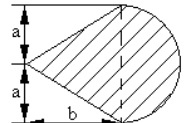
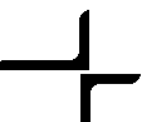
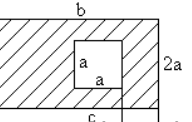

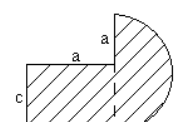

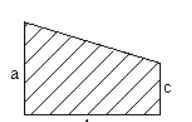

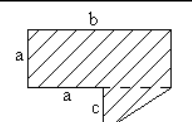

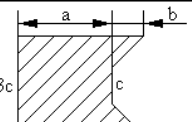

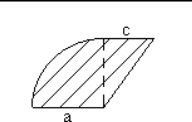

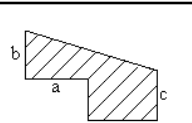

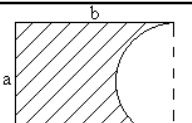
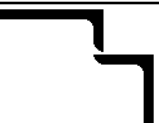
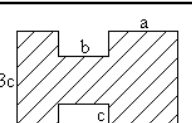

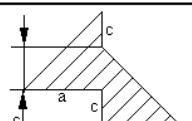

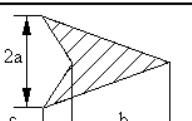

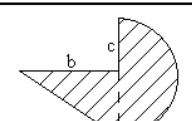
Геометрические характеристики сечений.						
	А		В		С	
	I	II	I	II	I	II
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

Таблица 1.2

№	Двутавр №	Швеллер №	Уголок равнобокий	Уголок неравнобо- кий	$a$ , см	$b$ , см	$c$ , см
1	18	8	80×8	70×45×5	10	22	4
2	16	24	70×6	80×50×6	12	21	5
3	12	26	63×5	75×50×6	15	17	7
4	14	10	80×3	110×70×8	16	18	6
5	10	12	100×10	140×90×8	14	23	8
6	18a	14	90×8	125×80×12	13	16	3
7	22	20	100×8	100×63×7	11	18	5
8	24	18	125×10	110×70×7	13	19	6
9	27	22	100×12	100×63×6	9	24	7

## Практическое занятие № 2

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ (РАСЧЕТ ОТ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ)

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного расчета статически неопределимых шарнирно-стержневых систем на внешнее нагружение.

Статически-неопределимой шарнирно-стержневой системой называется такая, в которой усилия в стержнях и реакции в опорах нельзя определить только из условия равновесия.

Обычный кронштейн (рис. 2.1, *а*), состоит из двух стержней. Усилия  $N_1$  и  $N_2$  в стержнях этого кронштейна легко определяются из условия равновесия системы сходящихся сил, приложенных к вырезанному узлу С, так как два уравнения для этой системы сил с двумя неизвестными решаются.

Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 2.1, *б*), то усилия в стержнях прежним образом уже определены быть не могут, так как для узла С по-прежнему можно составить только два уравнения статического равновесия ( $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ), а число неизвестных усилий равно трем. Имеем один раз статически неопределимую систему.

Усложняя конструкцию и вводя новые стержни, можно получить два раза статически неопределимую систему (рис. 2.1, *в*), три раза и т. д. Следовательно, под  $n$  раз статически неопределимой си-

стемой понимается такая система, в которой число связей превышает число независимых уравнений статики на  $n$  единиц.

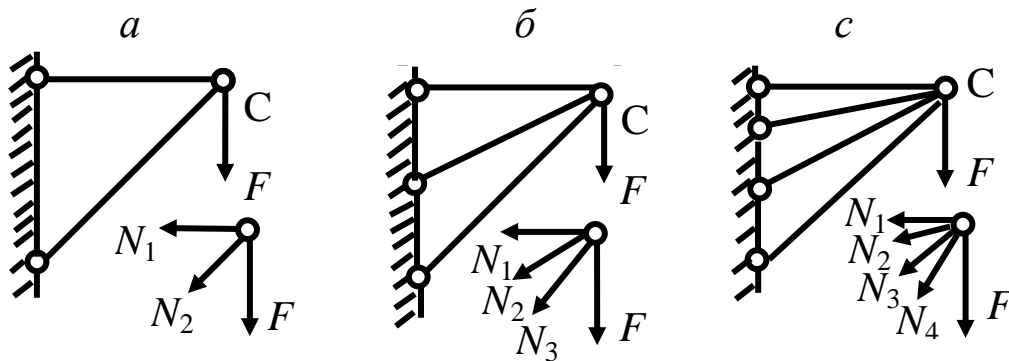


Рис. 2.1: *a* – статически определимая система;  
*б* и *с* – статически неопределимые системы

Необходимые для решения задачи дополнительные уравнения можно найти, рассматривая систему в деформированном состоянии и устанавливая связи между перемещениями и деформациями элементов конструкции. Полученные уравнения называются уравнениями совместимости деформаций.

Рассмотрим схемы некоторых статически неопределимых систем (рис. 2.2).

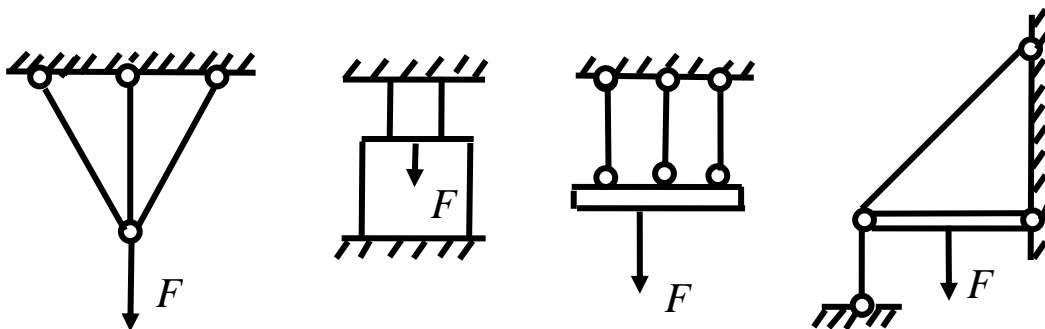


Рис. 2.2. Некоторые виды статически неопределимых систем

При изучении темы «Статически неопределимые шарнирно-стержневые системы» и выполнении соответствующего расчетно-графического типового расчета необходимо усвоить особенности статически неопределимых систем; получить навыки в раскрытии статической неопределимости, в определении усилий в элементах конструкций и подборе площадей поперечных сечений из условия прочности.

В расчетно-графическом типовом расчете необходимо выполнить следующую работу:

- определить усилия в стержнях и подобрать площади поперечных сечений от действия внешних нагрузок;
- определить дополнительные напряжения в стержнях от изменения температуры;
- определить дополнительные монтажные напряжения, вызванные неточностью изготовления стержней;
- подобрать сечения стержней по предельному состоянию.

При решении статически неопределимых задач следует придерживаться следующего порядка:

1. Рассмотреть статическую сторону задачи. Построить план сил и составить уравнения статики.

2. Рассмотреть геометрическую сторону задачи. Построить план перемещений. Составить дополнительные уравнения совместности деформаций в таком количестве, чтобы можно было найти все неизвестные усилия.

3. Рассмотреть физическую сторону задачи. По законам физики (при температурном расчете) и по закону Гука выразить деформации в уравнениях их совместности через неизвестные усилия, действующие в стержнях:

$$\Delta \ell^t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta \ell^N = \frac{N^t \cdot \ell}{E \cdot A}. \quad (2.1)$$

4. Произвести совместное решение уравнений статики, геометрии, физики и определить неизвестные усилия.

5. Используя условия прочности при сжатии или растяжении  $N/F = [\sigma]$ , подбор площадей поперечных сечений стержней.

6. При известных усилиях в стержнях и принятых площадях поперечных сечений вычислить нормальные напряжения по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.2)$$

### Пример

Дано: Статически неопределимая шарнирно-стержневая система (рис. 2.3) нагружена равномерно распределенной нагрузкой и силой  $F$ .

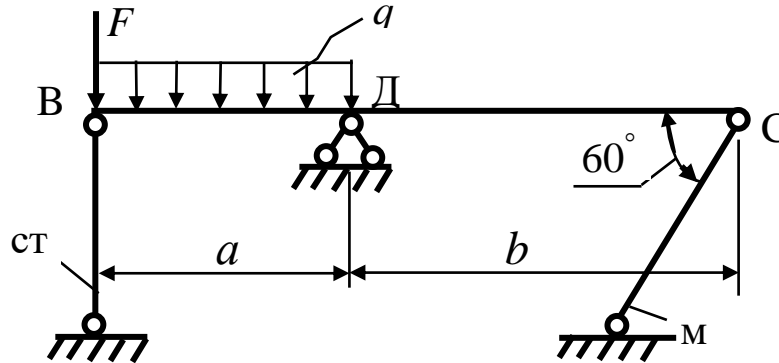


Рис. 2.3. Схема статически неопределимой системы

Таблица 2.1

Исходные данные для расчета

Материал	$E$ , МПа	$[\sigma]^+$ , МПа	$[\sigma]^-$ , МПа	$\alpha$ , 1/град	$\ell$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$a$ , м	$b$ , м	$\frac{A_{\text{ст}}}{A_{\text{м}}}$
Сталь	$2 \cdot 10^5$	160	120	$125 \cdot 10^{-7}$	1,2	30	1,5	2	4	$\frac{3}{4}$
Медь	$1 \cdot 10^5$	84	42	$165 \cdot 10^{-7}$	1,9					

Требуется:

1. Определить усилия ( $N_{\text{ст}}; N_{\text{м}}$ ), площади поперечных сечений ( $A_{\text{ст}}; A_{\text{м}}$ ) и напряжения ( $\sigma_{\text{ст}}^F; \sigma_{\text{м}}^F$ ) в стальном (СТ) и медном (М) стержнях от действия внешних нагрузок  $F$  и  $q$ .

2. Определить дополнительные напряжения в стержнях ( $\sigma_{\text{ст}}^t; \sigma_{\text{м}}^t$ ) от изменения температуры на  $\Delta t = +20^\circ \text{C}$ .

3. Определить дополнительные напряжения в стержнях, вызванные неточностью изготовления вертикального стержня  $\Delta = 0,1$  см.

4. Определить суммарные напряжения в стержнях от действия нагрузок, изменения температуры и неточности изготовления.

## Расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой системы от внешнего нагружения

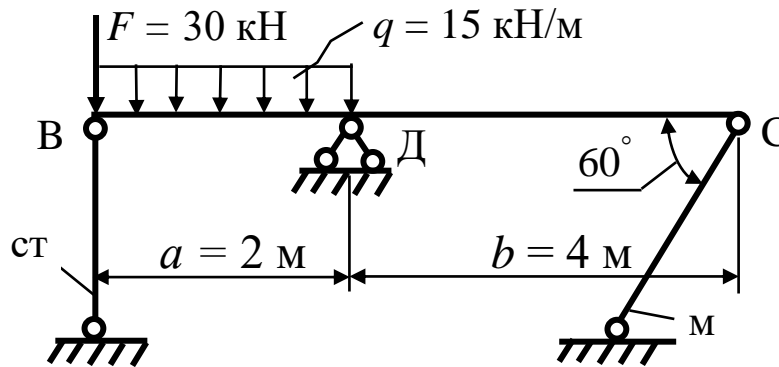


Рис. 2.4. Расчетная схема от внешнего нагружения

### Статическая сторона задачи

Статическая сторона задачи рассматривается планом сил (рис. 2.5). План сил – это расчетная схема, на которой показаны все силы (и известные, и неизвестные), приложенные к элементу шарнирно-стержневой системы, равновесие которого рассматривается (в нашем случае это жесткая балка  $AB$ ). Разрежем стальной и медный стержни и отброшенные их нижние части заменим внутренними усилиями.

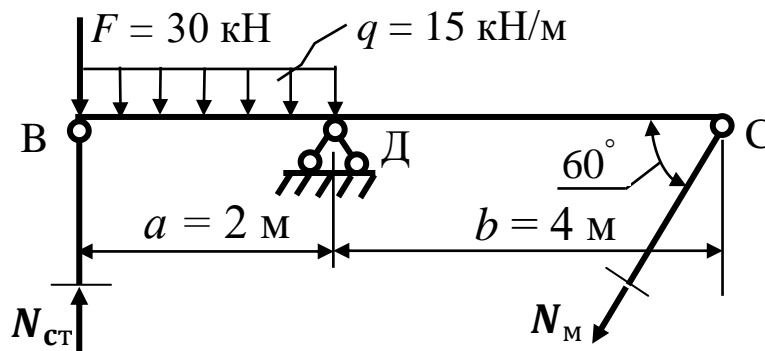


Рис. 2.5. План сил от внешнего нагружения

Из плана сил (рис. 2.5) записываем уравнения статического равновесия. Для ответа на первый вопрос задачи необходимо знать усилия в стержнях – стальном и медном. Реакцию шарнирно-неподвижной опоры вычислять в данном случае нет необходимо-





$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BD}{CD}. \quad (2.4)$$

Перемещения точек балки ( $BB_1$  и  $CC_1$ ) выразим через деформации стержней ( $\Delta\ell_{ст}$ ;  $\Delta\ell_{м}$ ):

$$BB_1 = \Delta\ell_{ст}. \quad (2.5)$$

Из треугольника  $CC_1C_2$  выразим:

$$CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta\ell_{м}}{\sin 60^\circ}. \quad (2.6)$$

Выражения (2.5) и (2.6) подставим в соотношение (2.4):

$$\frac{\Delta\ell_{ст} \sin 60^\circ}{\Delta\ell_{м}} = \frac{AC}{AB},$$

или

$$\frac{\Delta\ell_{ст} \cdot 0,866}{\Delta\ell_{м}} = \frac{2}{4},$$

или

$$0,866 \cdot \Delta\ell_{ст} = 0,5 \cdot \Delta\ell_{м}. \quad (2.7)$$

Это и есть уравнение совместимости деформации.

### Физическая сторона задачи

Полученное уравнение совместимости деформации (2.7) в таком виде не решается с уравнением равновесия (2.3), потому что входящие в них неизвестные величины разного характера.

Абсолютные деформации  $\Delta\ell_{ст}$  и  $\Delta\ell_{м}$  в уравнении (2.7) выразим через усилия в стержнях по закону Гука:

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A},$$

$$0,866 \frac{N_{ст} \cdot \ell_{ст}}{E_{ст} \cdot A_{ст}} = \frac{N_{м} \cdot \ell_{м}}{E_{м} \cdot A_{м}}.$$

Подставим числовые значения исходных данных, а  $A_{ст}$  выразим через  $A_{м}$  согласно исходным данным:

$$\frac{A_{ст}}{A_{м}} = \frac{3}{4}, \text{ откуда } A_{ст} = \frac{3}{4} A_{м} = 0,75 A_{м},$$

и получим 
$$0,866 \frac{N_{ст} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,75 A_{м}} = 0,5 \frac{N_{м} \cdot 1,9}{1 \cdot 10^5 A_{м}}.$$

После выполнения арифметических действий получим

$$0,67 N_{ст} = 0,95 N_{м}. \quad (2.8)$$

Получили уравнение совместимости деформаций, записанное через усилия в стержнях.

### Синтез

Решим совместно уравнения равновесия (2.3) и уравнение совместимости деформаций (2.8)

$$\begin{cases} N_{\text{ст}} + 1,73N_{\text{м}} = 45 \\ 0,67N_{\text{ст}} = 0,95N_{\text{м}} \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим усилие  $N_{\text{ст}}$

$$N_{\text{ст}} + \frac{0,95}{0,67} N_{\text{м}} = 1,42 \cdot N_{\text{м}}$$

и подставим в первое уравнение системы

$$1,42N_{\text{м}} + 1,73N_{\text{м}} = 45, \quad \text{или} \quad 3,15N_{\text{м}} = 45,$$

откуда  $N_{\text{м}} = \frac{45}{3,15} = 14,3 \text{ кН}$ , тогда  $N_{\text{ст}} = 1,42 \cdot 14,3 = 20,3 \text{ кН}$ .

Положительный результат  $N_{\text{ст}}$  и  $N_{\text{м}}$  подтверждает наши предположения сжатия стального стержня и растяжения медного стержня, значит, усилия в стержнях будут

$$N_{\text{ст}} = -20,3 \text{ кН}; \quad N_{\text{м}} = 14,3 \text{ кН}.$$

### Подбор поперечных сечений стержней

Подбор поперечных сечений стержней ведется по условию прочности при растяжении – сжатии:

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

а) Требуемая из условия прочности площадь поперечного сечения стального стержня будет определена:

$$A_{\text{ст}} \geq \frac{N_{\text{ст}}}{[\sigma_{\text{ст}}]^-} \geq \frac{20,3}{120 \cdot 10^3} \geq 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

При этом согласно заданному отношению площадей  $\frac{A_{\text{ст}}}{A_{\text{м}}} = \frac{3}{4}$  площадь медного стержня должна быть равна:

$$A_{\text{м}} = \frac{4}{3} A_{\text{ст}} = \frac{4}{3} \cdot 1,7 \cdot 10^{-4} = 2,27 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

б) Требуемая из условия прочности площадь поперечного сечения медного стержня будет определена:

$$A_{\text{м}} \geq \frac{N_{\text{м}}}{[\sigma_{\text{м}}]^+} \geq \frac{14,3}{84 \cdot 10^3} \geq 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

При этом, согласно заданному отношению площадей, площадь стального стержня должна быть равна:

$$A_{\text{ст}} = \frac{3}{4} A_{\text{м}} = \frac{3}{4} \cdot 1,7 \cdot 10^{-4} = 1,275 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Принимаем большие площади поперечных сечений стержней:

$$A_{\text{ст}} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad A_{\text{м}} = 2,27 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

### **Напряжения в стержнях от внешнего нагружения**

При принятых площадях поперечных сечений медного и стального стержней определим напряжения в этих стержнях:

$$\sigma_{\text{ст}}^F = \frac{N_{\text{ст}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{-20,3 \cdot 10^{-3}}{1,7 \cdot 10^{-4}} = -119,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{м}}^F = \frac{N_{\text{м}}}{A_{\text{м}}} = \frac{14,3 \cdot 10^{-3}}{2,27 \cdot 10^{-4}} = 63 \text{ МПа}.$$

### **Практическое занятие № 3**

#### **РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ–СЖАТИИ (ТЕМПЕРАТУРНЫЙ И МОНТАЖНЫЙ РАСЧЕТЫ)**

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения температурных и монтажных напряжений в статически неопределимой шарнирно-стержневой системе.

#### **Температурный расчет**

Целью температурного расчета является определение дополнительных напряжений в медном и стальном стержнях от изменения температуры.

Допустим, система нагревается на  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ .

Алгоритм решения остаётся прежним.

Исходная расчетная схема представлена на рис. 3.1.

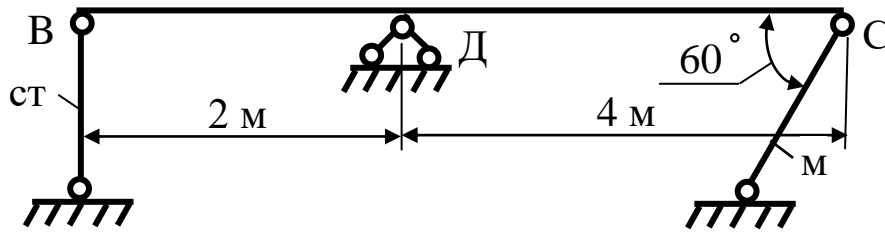


Рис. 3.1. Расчетная схема от температурного воздействия

### Статическая сторона задачи

При построении плана сил направление усилия в одном из стержней предполагаем. Направление усилия во втором стержне принимаем в соответствии с принятым в первом, чтобы обеспечить равновесие балки. При этом надо помнить, что оба стержня одновременно растянутыми быть не могут (см. рис. 3.2). В рассматриваемом примере стержни сжаты.

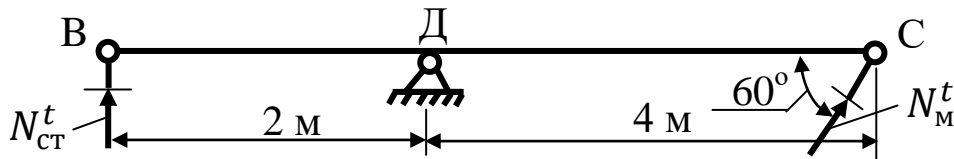


Рис. 3.2. План сил от температурного воздействия

Запишем уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0; \\ -N_{СТ}^t \cdot 2 + N_{М}^t \cdot \sin 60^\circ \cdot 4 &= 0.\end{aligned}$$

Полученное уравнение равновесия запишем через напряжения в стержнях, для чего разделим его на равноценные величины  $A_{СТ}$  и  $0,75A_M$ , (по условию задачи  $A_{СТ} = \frac{3}{4}A_M = 0,75A_M$ )

$$-\frac{N_{СТ}^t}{A_{СТ}} 2 + \frac{N_{М}^t}{0,75 \cdot A_M} 0,866 \cdot 4 = 0.$$

После выполнения арифметических действий получим

$$\sigma_{СТ}^t = 2,31\sigma_M^t.$$

## Геометрическая сторона задачи

Строим план перемещений, на котором изображаем заданную шарнирно-стержневую систему до нагрева и предположительное положение её после нагрева (рис. 3.2).

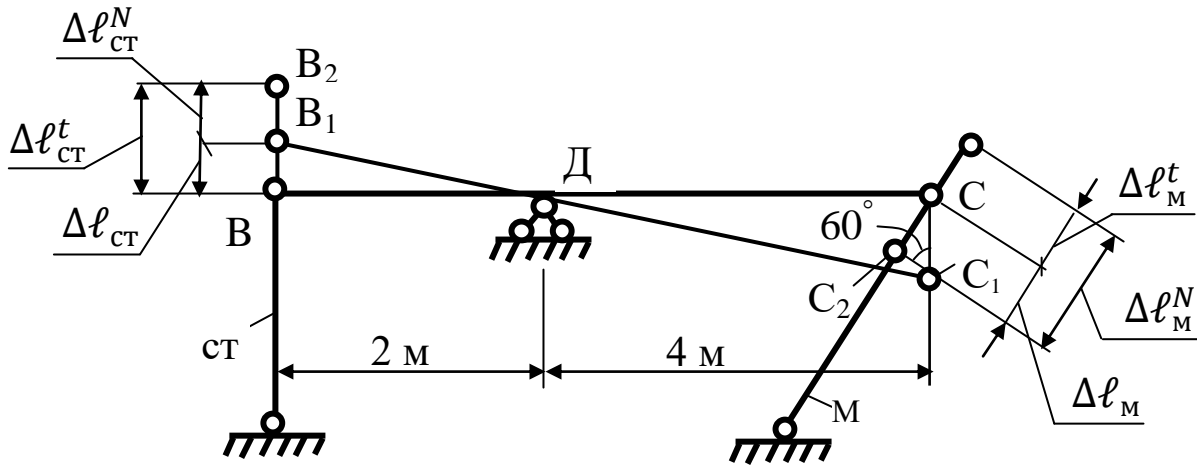


Рис. 3.2. План перемещений от температурного воздействия

На плане перемещений кроме полной, т. е. окончательной, деформации стержней ( $\Delta \ell_m$  и  $\Delta \ell_{ст}$ ) показаны виртуальные деформации от нагрева ( $\Delta \ell^t$ ) и от усилий в стержнях ( $\Delta \ell^N$ ). Причем в сжатых стержнях температурная деформация выходит за пределы полной деформации, а в случае растянутого стержня эта деформация будет в пределах полной деформации.

Из плана перемещений составим уравнение совместимости деформаций.

Из подобия треугольников  $BB_1D$  и  $DCC_1$  запишем отношение перемещений точек:

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BD}{CD} \text{ или } \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{2}{4} = 0,5,$$

или

$$BB_1 = 0,5CC_1,$$

(3.2)

где  $AA_1 = \Delta \ell_{ст} = \Delta \ell_{ст}^t - \Delta \ell_{ст}^N$ ;

$$BB_1 = \frac{\Delta \ell_m}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta \ell_m^N - \Delta \ell_m^t}{\sin 60^\circ},$$

тогда зависимость (3.2) примет вид

$$\Delta \ell_{\text{CT}}^t - \Delta \ell_{\text{CT}}^N = 0,5 \frac{\Delta \ell_{\text{M}}^N - \Delta \ell_{\text{M}}^t}{0,866}$$

или

$$\Delta \ell_{\text{CT}}^t - \Delta \ell_{\text{CT}}^N = 0,58(\Delta \ell_{\text{M}}^N - \Delta \ell_{\text{M}}^t). \quad (3.3)$$

Это и есть уравнение совместности деформаций при температурном воздействии на стержневую систему.

### Физическая сторона задачи

Деформации в уравнении (3.3) по закону физики:  $\Delta \ell^t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t$  и закону Гука:  $\Delta \ell^N = \frac{N^t \cdot \ell}{E \cdot A}$ . Будем иметь

$$\alpha_{\text{CT}} \cdot \ell_{\text{CT}} \cdot \Delta t - \frac{N_{\text{CT}}^t \cdot \ell_{\text{CT}}}{E_{\text{CT}} \cdot A_{\text{CT}}} = 0,58 \left( \frac{N_{\text{M}}^t \cdot \ell_{\text{M}}}{E_{\text{M}} \cdot A_{\text{M}}} - \alpha_{\text{M}} \cdot \ell_{\text{M}} \cdot \Delta t \right). \quad (3.3)$$

В уравнение подставим числовые значения исходных данных и выражения:

$$\frac{N_{\text{CT}}^t}{A_{\text{CT}}} = \sigma_{\text{CT}}^t; \quad \frac{N_{\text{M}}^t}{A_{\text{M}}} = \sigma_{\text{M}}^t;$$

$$125 \cdot 10^{-7} \cdot 1,2 \cdot 20 - \frac{\sigma_{\text{CT}}^t}{2 \cdot 10^5} = 0,58 \left( \frac{\sigma_{\text{M}}^t}{1 \cdot 10^5} - 165 \cdot 10^{-7} \cdot 1,9 \cdot 20 \right).$$

После арифметических действий получим

$$0,6\sigma_{\text{CT}}^t + 1,1\sigma_{\text{M}}^t = 66,4. \quad (3.4)$$

### Синтез

Решаем совместно уравнения (3.1) и (3.4)

$$\begin{cases} \sigma_{\text{CT}}^t = \sigma_{\text{M}}^t \\ \sigma_{\text{CT}}^t + \sigma_{\text{M}}^t = 66,4. \end{cases}$$

Выразим  $\sigma_{\text{CT}}^t$  через  $\sigma_{\text{M}}^t$  первого уравнения системы и подставим во второе уравнение системы

$$0,6 \cdot 2,31\sigma_{\text{M}}^t + 1,1\sigma_{\text{M}}^t = 66,4,$$

откуда

$$\sigma_{\text{M}}^t = \frac{66,4}{0,6 \cdot 2,31 + 1,1} = \frac{66,4}{2,486} = 26,71 \text{ МПа},$$

тогда

$$\sigma_{\text{CT}}^t = 2,31 \cdot 26,71 = 61,7 \text{ МПа}.$$

Положительный результат подтверждает предположение сжатия обеих стержней. Следовательно, в стержнях действуют нормальные напряжения от нагрева системы

$$\sigma_{\text{ст}}^t = -61,7 \text{ МПа и } \sigma_{\text{м}}^t = -26,71 \text{ МПа.}$$

### Монтажный расчет

Целью монтажного расчета является определение дополнительных напряжений в стальном и медном стержнях. При монтаже стержневой системы очень часто допускаются отклонения от проектных размеров. Стержни могут быть изготовлены или длиннее, или короче заданных на некоторую величину  $\Delta$  (рис. 3.3). Если величина  $\Delta$  незначительна по сравнению с длинами стержней (в рассматриваемом случае  $\Delta = 0,001 \text{ м}$ ), то, приложив определенные усилия к стержням, можно произвести монтаж стержневой системы.

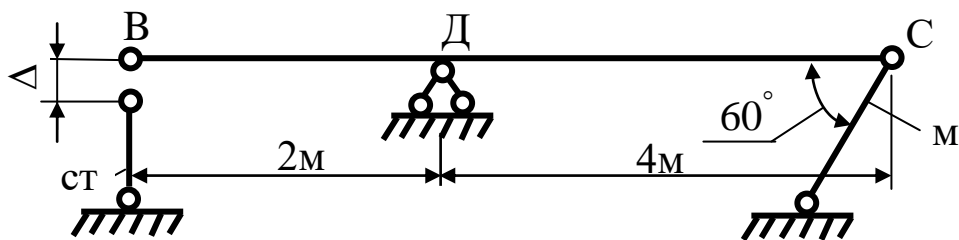


Рис. 3.3. Расчетная схема от монтажной ошибки в шарнире А

### Статическая сторона задачи

При сборке стержневой системы, чтобы выполнить соединение в узле А, необходимо растянуть стальной и медный стержни. Построим план сил (рис. 3.4).

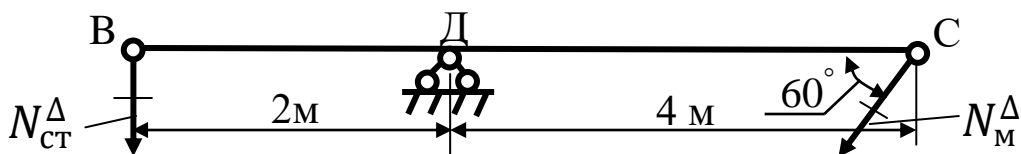


Рис. 3.4. План сил от монтажной ошибки в шарнире А  
Уравнение статики  $\sum M_D = 0$ ,

$$N_{\text{ст}}^{\Delta} \cdot 2 - N_{\text{м}}^{\Delta} \cdot \sin 60^{\circ} \cdot 4 = 0 \quad \text{или} \quad N_{\text{ст}}^{\Delta} = 1,732 N_{\text{м}}^{\Delta}.$$





Полученное уравнение совместности деформаций (3.7) не решается с уравнением равновесия (3.5), так как в них различные неизвестные.

### Физическая сторона задачи

В уравнении (3.7) деформации стержней выразим через усилия по закону Гука  $\Delta \ell^\Delta = \frac{N^\Delta \cdot \ell}{E \cdot A}$

$$\left( \Delta - \frac{N_{\text{ст}}^\Delta \cdot \ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}} \cdot A_{\text{ст}}} \right) 0,866 = 0,5 \frac{N_{\text{м}}^\Delta \cdot \ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}} \cdot A_{\text{м}}}$$

или

$$\left( \Delta - \frac{\sigma_{\text{ст}}^\Delta \cdot \ell_{\text{ст}}}{E_{\text{ст}}} \right) 0,866 = 0,5 \frac{\sigma_{\text{м}}^\Delta \cdot \ell_{\text{м}}}{E_{\text{м}}}.$$

Проведем числовую подстановку согласно исходным данным

$$\left( 0,001 - \frac{\sigma_{\text{ст}}^\Delta \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5} \right) 0,866 = 0,5 \frac{\sigma_{\text{м}}^\Delta \cdot 1,9}{1 \cdot 10^5}.$$

После арифметических действий получим

$$86,6 - 0,52 \sigma_{\text{ст}}^\Delta = 0,95 \sigma_{\text{м}}^\Delta. \quad (3.8)$$

### Синтез

Решаем совместно уравнения (3.5) и (3.8):

$$\begin{cases} \sigma_{\text{ст}}^\Delta = 2,31 \sigma_{\text{м}}^\Delta \\ 86,6 - 0,52 \sigma_{\text{ст}}^\Delta = 0,95 \sigma_{\text{м}}^\Delta \end{cases}$$

Выражение  $\sigma_{\text{ст}}^\Delta = 2,31 \sigma_{\text{м}}^\Delta$  подставим во второе уравнение системы уравнений

$$86,6 - 0,52 \cdot 2,31 \sigma_{\text{м}}^\Delta = 0,95 \sigma_{\text{м}}^\Delta,$$

или

$$86,6 = 1,2 \sigma_{\text{м}}^\Delta + 0,95 \sigma_{\text{м}}^\Delta,$$

или

$$86,6 = 2,15 \sigma_{\text{м}}^\Delta,$$

откуда

$$\sigma_{\text{м}}^\Delta = \frac{86,6}{2,15} = 40,3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{ст}}^\Delta = 0,95 \cdot 40,3 = 38,3 \text{ МПа}.$$

Положительный результат подтверждает наше предположение растяжения обоих стержней. Следовательно, от монтажных ошибок в стержнях возникают напряжения:

$$\sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = 38,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{м}}^{\Delta} = 40,3 \text{ МПа}.$$

### Определение суммарных напряжений

В стальном и медном стержнях определим суммарные напряжения от всех влияющих на них факторов: внешних нагрузок  $F$ ,  $q$ , от изменения температуры и неточности изготовления одного из стержней (например, стального):

$$\sigma_{\text{ст}} = \sigma_{\text{ст}}^F + \sigma_{\text{ст}}^t + \sigma_{\text{ст}}^{\Delta} = -112,4 - 61,71 + 38,3 = -142,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{м}} = \sigma_{\text{м}}^F + \sigma_{\text{м}}^t + \sigma_{\text{м}}^{\Delta} = 63 - 26,31 + 40,3 = 76,59 \text{ МПа}.$$

Подводя итог, можно отметить, что в стержнях с площадями поперечных сечений, подобранных из условия прочности от внешнего нагружения, дополнительные факторы снижают или увеличивают напряжения.

Проверим прочность стержней

$$\sigma_{\text{ст}} = -142,8 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{ст}}^{-} = 120 \text{ МПа},$$

что недопустимо. Стальной стержень непрочен.

$$\sigma_{\text{м}} = 75,69 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{м}}^{+} = 84 \text{ МПа},$$

что отвечает требованию условия прочности. Медный стержень прочен.

### Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графического типового расчета «Расчет статически неопределимых шарнирно-стержневых систем при растяжении-сжатии» из табл. 3.3 необходимо выбрать расчетную схему, а из табл. 3.1 и 3.2 взять необходимые данные.

Таблица 3.1

Индекс	№	$a$ , м	$b$ , м	$l_c$ , м	$l_m$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$K=A_c/A_m$
$A, B, C$	1	1,0	2,8	1,0	1,9	10	100	1:1
	2	1,2	2,6	1,1	1,8	20	90	1:2
	3	1,4	2,4	1,2	1,7	30	80	2:1
	4	1,6	2,2	1,3	1,6	40	70	1:3
	5	1,8	2,0	1,4	1,5	50	60	3:1
	6	2,0	1,8	1,5	1,4	60	50	2:3
	7	2,2	1,6	1,6	1,3	70	40	3:2
	8	2,4	1,4	1,7	1,2	80	30	3:4
	9	2,6	1,2	1,8	1,1	90	20	4:3
	0	2,8	1,0	1,9	1,0	100	10	3:5

Таблица 3.2

<b>Шарнирно-стержневые статически неопределимые системы</b>		
<b>Общие данные</b>	<b>Сталь</b>	<b>Медь</b>
1. Допускаемые напряжения на сжатие, МПа	$[\sigma]_c = 120$	$[\sigma]_m = 42$
2. Допускаемые напряжения на растяжение, МПа	$[\sigma]_c = 160$	$[\sigma]_m = 84$
3. Модуль упругости 1 рода, МПа	$E_c = 2 \cdot 10^5$	$E_m = 1 \cdot 10^5$
4. Коэффициент линейного расширения, 1/град	$\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$	$\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3.3

Шарнирно-стержневые статически неопределимые системы							См. табл. 3.2
А		В		С			
1		2		1		2	
3		4		3		4	
5		6		5		6	
7		8		7		8	
9		0		9		0	

## Практическое занятие № 4

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОГО КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного расчета статически определимых жестко закрепленных брусьев на кручение.

#### Определение внутренних усилий при кручении

Кручением называется вид деформирования брусьев, вызываемый внешними (закручивающими) моментами, действующими перпендикулярно продольной оси бруса. При кручении брусьев возникает внутреннее усилие – крутящий момент  $M_{кр}$ , вызывающий появление касательных напряжений  $\tau$ . Касательные напряжения по сечению бруса распределяются неравномерно: максимальны на внешнем контуре сечения, равные нулю в его центре (рис. 4.1).

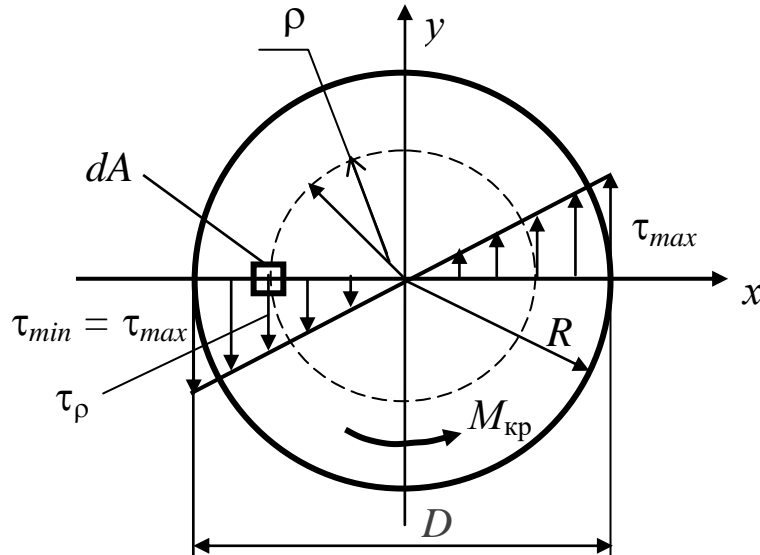


Рис. 4.1. Распределение касательных напряжений по сечению бруса при кручении

В основу расчетов на кручение положены следующие допущения:

- сечения бруса плоские до закручивания, остаются плоскими в процессе закручивания;
- радиусы сечений бруса в ходе закручивания остаются прямолинейными.

На основе принятых гипотез получены все рабочие формулы названной темы.

Крутящий момент  $M_{кр}$ , действующий в сечении, считается положительным, если при взгляде на сечение бруса со стороны начала координат он будет виден направленным против хода часовой стрелки (рис. 4.2).

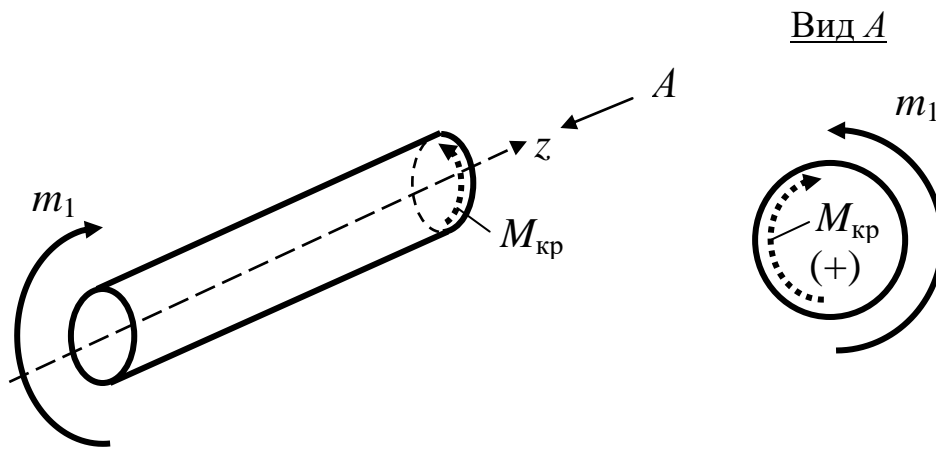


Рис. 4.2. Правило знаков для крутящих моментов

Определение внутренних усилий (крутящих моментов) при кручении обычно производится методом сечений: составляются уравнения крутящих моментов для отдельных участков вала и с их помощью находят значения крутящих моментов в характерных сечениях с дальнейшим построением эпюры.

### Определение напряжений при кручении и условие прочности

Как было сказано ранее (см. рис. 4.1), касательные напряжения при кручении распределяются по сечению неравномерно и могут быть найдены по формуле

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho, \quad (4.1)$$

где  $\rho$  – переменный радиус сечения, может изменяться от минимального до максимального значений, то есть от 0 до  $R = D/2$ .

Максимальные напряжения на внешнем контуре сечения

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} R = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \frac{D}{2} = \frac{M_{кр}}{\left(\frac{J_{\rho}}{D/2}\right)}. \quad (4.2)$$

С целью упрощения полученной формулы вводится величина, имеющая название полярного момента сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{D/2}. \quad (4.3)$$

Полярный момент инерции сплошного круглого сечения определяется по формуле

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (4.4)$$

В случае кольцеобразного сечения

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4). \quad (4.5)$$

где  $D$  и  $d$  – внешний и внутренний диаметры кольцеобразного сечения;  $\alpha$  – соотношение между диаметрами сечения (обычно при подборе сечения принимается равным  $0,7 \div 0,8$ ).

$$\alpha = \frac{d}{D}. \quad (4.6)$$

Тогда полярный момент сопротивления равен:

– для круглого сечения

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{D/2} = \frac{\pi \frac{D^4}{32}}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}; \quad (4.7)$$

– для кольцеобразного сечения

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{D/2} = \frac{\frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{32}}{D/2} = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16}. \quad (4.8)$$

Формула для определения максимальных касательных напряжений при кручении принимает вид

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}. \quad (4.9)$$

Одной из основных целей расчета на прочность является подбор сечения бруса, способного выдерживать внешнюю нагрузку, не разрушаясь.



На основе полученного выражения (4.9) условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (4.10)$$

где  $[\tau]$  – допускаемые касательные напряжения, которые задаются из справочника по сопротивлению материалов в соответствии с нормами; для пластичных сталей  $[\tau]$  могут быть приняты равными  $[\tau]/2$ , а для хрупких –  $[\sigma]^+$ .

Подбор сечения производится по следующему алгоритму, вытекающему из формулы (4.10):

1. По максимальному крутящему моменту, взятому с эпюры крутящих моментов, определяется полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{|M_{кр}|}{[\tau]}. \quad (4.11)$$

2. Из формул для момента сопротивления (4.7) и формулы (4.11) определяется диаметр сплошного круглого сечения

$$W_{\rho} \geq \frac{|M_{кр}|}{[\tau]}, \quad (4.12)$$

откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi [\tau]}}. \quad (4.13)$$

Для кольцевого сечения внешний и внутренний диаметры с помощью выражений (4.8) и (4.12) определяются:

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}, \quad (4.14)$$

$$d = \alpha \cdot D.$$

### Определение перемещений при кручении и расчет на жесткость

Кроме расчетов брусьев на прочность еще производятся их расчеты на жесткость и очень часто эти расчеты оказываются определяющими.

Существует два типа критерия жесткости стержней при кручении в зависимости от вида бруса и характера его работы. Этими критериями являются: достижение углом закручивания или относительным углом закручивания допускаемых величин.

Расчет бруса на жесткость (рис. 3) при кручении с помощью абсолютного угла закручивания производится по формуле, подобной условию жесткости при растяжении-сжатии:

$$\varphi = \sum \Delta\varphi_i = \sum \frac{M_{кр_i} \ell_i}{GJ_{\rho_i}} \leq [\varphi], \quad (4.15)$$

где  $\varphi$  – угол закручивания рассматриваемого сечения бруса;  $\Delta\varphi_i$  – приращение угла закручивания на  $i$ -м участке бруса;  $\ell_i$  – длина  $i$ -го участка бруса;  $G$  – модуль упругости второго рода (модуль сдвига) материала бруса;  $[\varphi]$  – допускаемый угол закручивания.

Рекомендуется проводить оценку жесткости брусьев не только по величинам углов закручивания, но и по их относительным значениям.

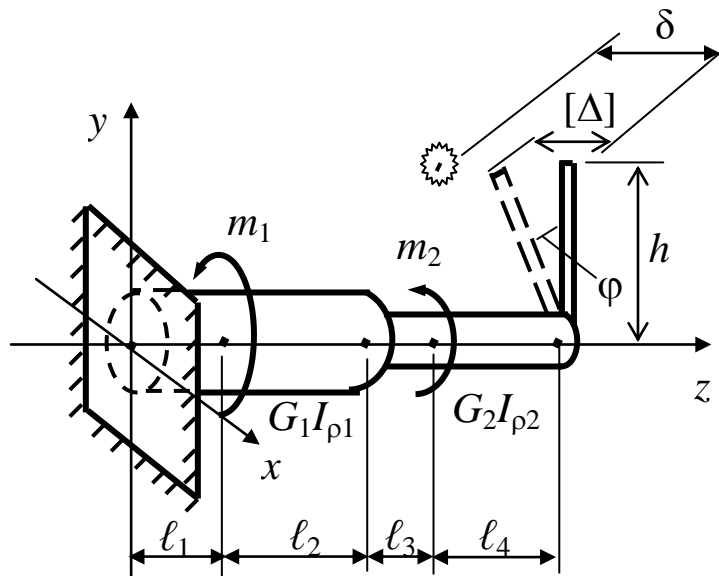


Рис. 4.3. Схема работы консольного бруса с кронштейном

Относительный угол закручивания при однородном кручении равен

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}}. \quad (4.16)$$

Тогда условие жесткости бруса имеет вид

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta], \quad (4.17)$$

где  $[\theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания.

Он является эмпирической величиной, приводится в нормативных источниках и зависит только от характера нагружения бруса.

Максимальное значение для типичных условий

$$[\theta] = 2 \text{ град/м} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

### Примеры расчетов

#### Пример 1. Расчет ступенчатого бруса

**Дано.**

Ступенчатый брус, состоящий из двух ступеней с круглыми поперечными сечениями, жестко закреплен на левом конце (рис. 4.4). Брус нагружен внешними закручивающими моментами  $m_1, m_2, m_3$ .

Ступени выполнены из стали ВСт3сп5.

Характеристики стали:  $[\Delta] = 80 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

К правому концу бруса присоединен кронштейн в форме вертикального стержня. Вблизи крайней точки кронштейна располагается шестерня. Соприкосновение кронштейна с шестерней, приведет к ее разрушению.

Высота кронштейна  $h = 0,2 \text{ м}$ .

Заданный зазор между вершиной кронштейна и шестерней  $\Delta = 0,0025 \text{ м}$ .

Допускаемый минимальный зазор  $[\Delta] = 0,0025 \text{ м}$ .

**Задание.**

Подобрать сечения бруса из условия прочности и жесткости.

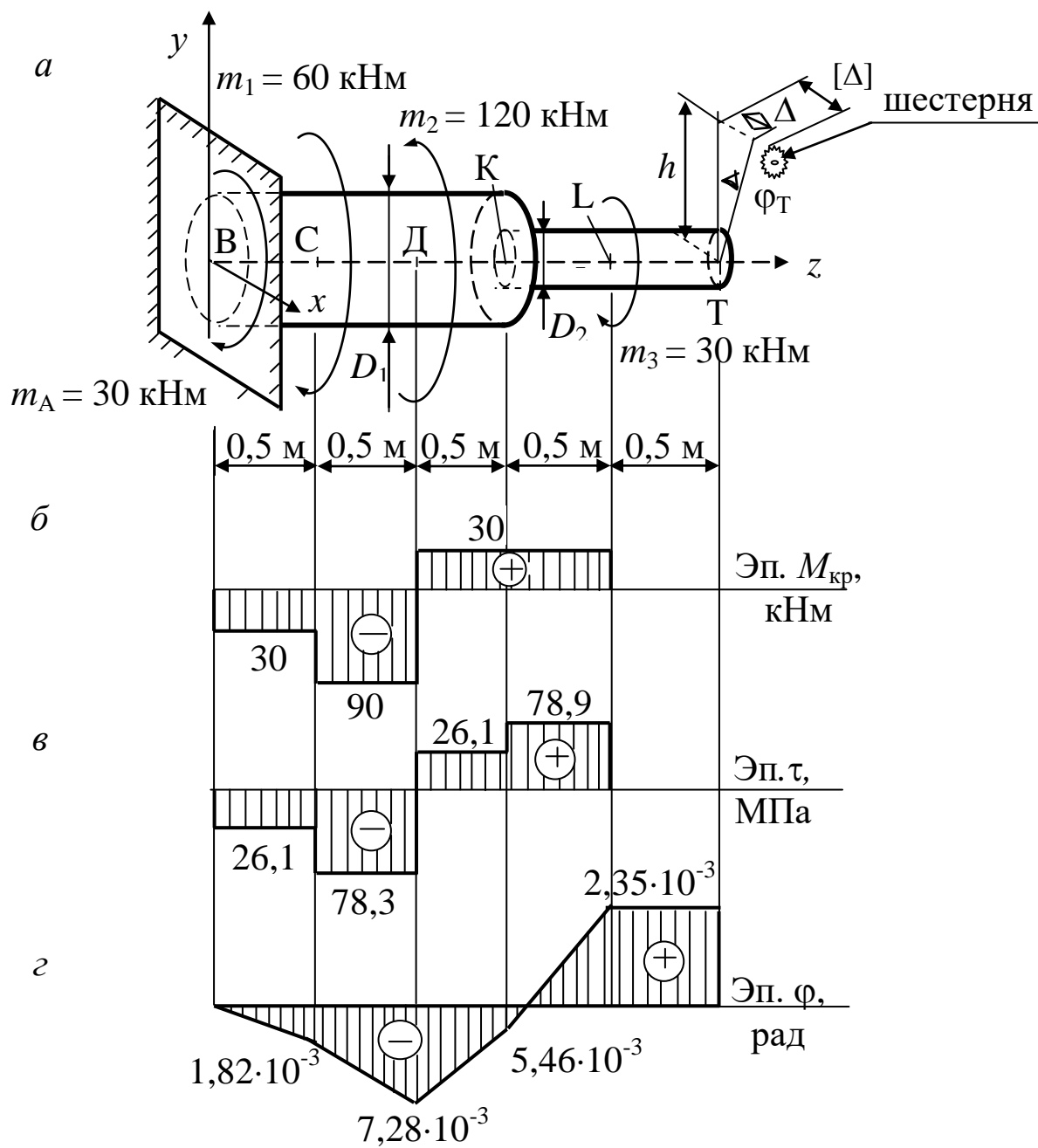


Рис. 4.4: *а* – Расчетная схема; *б* – эпюра крутящих моментов  $M_{кр}$ ; *в* – эпюра касательных напряжений  $\tau$ ; *г* – эпюра углов закручивания  $\varphi$

**Решение:****I. Расчет на прочность**

1. *Определим внутренние усилия и построим эпюры крутящих моментов  $M_{кр}$*

Произведем построение эпюры крутящих моментов по методу сечений с использованием упрощенного правила: на эпюре  $M_{кр}$ , в местах действия закручивающих моментов, образуются скачки в направлении их действия, указанные стрелками, величина скачка равна величине момента (см. рис. 4.4, б).

2. *Подберем сечения ступеней бруса*

Произведем подбор диаметров ступеней бруса  $D_1$  и  $D_2$  при помощи выражения (13)

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{90 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,179 \text{ м.}$$

Согласно ГОСТ 6639-69 примем диаметр  $D_1 = 0,18 \text{ м.}$

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,124 \text{ м.}$$

Согласно ГОСТ 6639-69 примем диаметр  $D_2 = 0,125 \text{ м.}$

3) *Построим эпюру касательных напряжений  $\tau$  в соответствии с подобранными диаметрами*

Для построения эпюры  $\tau$  необходимо знание значений полярных моментов сопротивления.

По формуле (4.7) определим полярные моменты сопротивления участков бруса.

На участках ВС, СД, ДК

$$W_{\rho}^{ВС} = W_{\rho}^{СД} = W_{\rho}^{ДК} = \frac{\pi \cdot D_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,18^3}{16} = 0,00115 \text{ м}^3.$$

На участках КЛ и ЛТ

$$W_{\rho}^{КЛ} = W_{\rho}^{ЛТ} = \frac{\pi \cdot D_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,125^3}{16} = 0,00038 \text{ м}^3.$$

Определим максимальные касательные напряжения на поверхности каждого участка ступенчатого бруса:

$$\tau_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC}}{W_{\rho}^{BC}} = \frac{-30 \cdot 10^3}{0,00115} = -26,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = -26,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD}}{W_{\rho}^{CD}} = \frac{-90 \cdot 10^3}{0,00115} = -78,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = -78,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_{DK} = \frac{M_{кр}^{DK}}{W_{\rho}^{DK}} = \frac{30 \cdot 10^3}{0,00115} = 26,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_{KL} = \frac{M_{кр}^{KL}}{W_{\rho}^{KL}} = \frac{30 \cdot 10^3}{0,00038} = 78,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_{LT} = \frac{M_{кр}^{LT}}{W_{\rho}^{LT}} = \frac{0}{0,00038} = 0.$$

По полученным значениям моментов построим эпюру касательных напряжений  $\tau$  (см. рис. 4.4, в).

#### 4) Проверим брус на прочность

На эпюре касательных напряжений находим максимальное по модулю значение этих напряжений. Наибольшие напряжения имеют место на участке KL бруса, сравним их с допускаемыми напряжениями

$$\tau_{max} = \tau_{KL} = 78,9 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Вывод: условие прочности удовлетворяется.

#### II. Расчет на жесткость

1) Определим приращения углов закручивания на участках бруса

Для этого по формуле (4.4) определим полярные моменты инерции сечений каждого участка.

На участках BC, CD, DK полярный момент инерции равен

$$J_{\rho}^{BC} = J_{\rho}^{CD} = J_{\rho}^{DK} = \frac{\pi \cdot D_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,18^4}{32} = 103 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Для сплошного сечения на участках KL, LT

$$J_{\rho}^{KL} = J_{\rho}^{LT} = \frac{\pi \cdot D_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,125^4}{32} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Определим приращения углов закручивания на каждом участке бруса:

$$\Delta\varphi_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC} \cdot \ell_{BC}}{G \cdot J_{\rho}^{BC}} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = -0,00182 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD} \cdot \ell_{CD}}{G \cdot J_{\rho}^{CD}} = \frac{-90 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = -0,00546 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{DK} = \frac{M_{кр}^{DK} \cdot \ell_{DK}}{G \cdot J_{\rho}^{DK}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = 0,00182 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{KL} = \frac{M_{кр}^{KL} \cdot \ell_{KL}}{G \cdot J_{\rho}^{KL}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-6}} = 0,00781 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{LT} = \frac{M_{кр}^{LT} \cdot \ell_{LT}}{G \cdot J_{\rho}^{LT}} = \frac{0 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-6}} = 0.$$

Используем полученные значения  $\Delta\varphi$  для построения эпюры углов закручивания  $\varphi$  (угловых перемещений).

### 2) Построим эпюру углов закручивания

Неподвижным сечением, то есть сечение, угол закручивания которого равен нулю, примем сечение в начале координат. Угол закручивания заданного сечения определим суммированием с учетом знаков значений  $\Delta\varphi_i$  на всех участках между заданными сечениями и началом координат.

Значения углов закручивания в расчетных сечениях равны:

$$\varphi_B = 0;$$

$$\begin{aligned}\varphi_C &= \varphi_B + \varphi_{BC} = 0 - 0,00182 = -0,00182 \text{ рад} = \\ &= -1,82 \cdot 10^{-3} \text{ рад};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_D &= \varphi_C + \varphi_{CD} = -0,00182 - 0,00546 = -0,00728 \text{ рад} = \\ &= -7,28 \cdot 10^{-3} \text{ рад};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_K &= \varphi_D + \varphi_{DK} = -0,00728 + 0,00182 = -0,00546 \text{ рад} = \\ &= -5,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_L &= \varphi_K + \varphi_{KL} = -0,00546 + 0,00781 = 0,00235 \text{ рад} = \\ &= 2,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад};\end{aligned}$$

$$\varphi_T = \varphi_L + \varphi_{LT} = 0,00235 + 0 = 0,00235 \text{ рад} = 2,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

По полученным значениям построим эпюру углов закручивания  $\varphi$  (см. рис. 4.4, г).

### 3) Проверим брус на жесткость

В сечении Т к брусу присоединен кронштейн длиной  $h = 0,2$  м (рис. 4.5). На некотором расстоянии от верхней точки кронштейна  $\Delta = 0,0025$  м, по ходу его поворота, располагается шестерня, приходящая в разрушение при соприкосновении с ним. Необходимо исключить возможность такого разрушения.

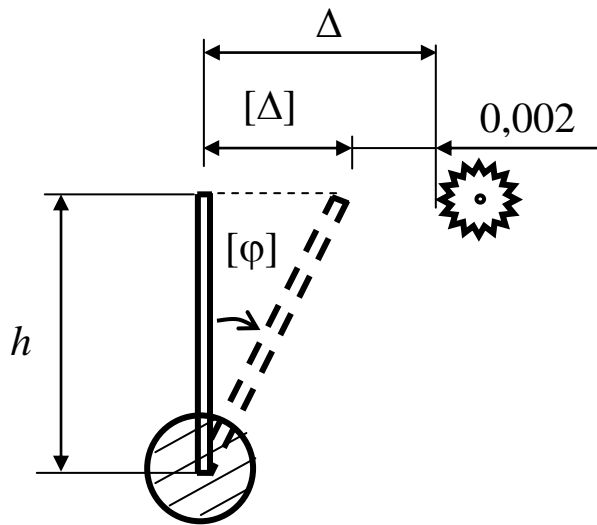


Рис. 4.5. Крайнее сечение ступенчатого бруса с кронштейном

Согласно заданию минимальный зазор между вершиной кронштейна и шестерней должен быть равен 0,002 м. Тогда допускаемое перемещение вершины кронштейна равно

$$[\Delta] = \Delta - 0,002 = 0,0025 - 0,002 = 0,0005 \text{ м} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определим допускаемый угол поворота  $[\varphi]$  для сечения Т. Он может быть найден как тангенс этого угла (при малых углах, измеряемых в радианах, тангенс равен самому углу), то есть

$$[\varphi] = \frac{[\Delta]}{h} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Проверим, удовлетворяется ли условие жесткости бруса и вступает ли кронштейн в соприкосновение с шестерней

$$\varphi_T = 2,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад} < [\varphi] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Условие жесткости выполняется, площади поперечных сечений подобраны верно.

## Пример 2. Расчет бруса с постоянным поперечным сечением

**Дано.**

Брус постоянного поперечного сечения жестко закреплен на левом конце (рис. 4.6, а). Брус нагружен внешними закручивающими моментами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ .

Брус выполнен из стали ВСт3сп5.

Характеристики стали  $[\Delta] = 80 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .



**Задание.**

Подобрать сечение бруса из условия прочности и жесткости.

**Решение:****I. Расчет на прочность**

1) *Определим внутренние усилия в сечениях бруса и построим эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$*

Произведем построение эпюры крутящих моментов по методу сечений с использованием упрощенного правила: на эпюре  $M_{кр}$ , в местах действия закручивающих моментов, образуются скачки в направлении их действия, указанные стрелками, величина скачка равна величине момента (см. рис. 4.6, б).

2) *Подберем сечение бруса*

Произведем подбор диаметра  $D$  при помощи выражения (4.11)

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,172 \text{ м.}$$

Согласно ГОСТ 6639 – 69 примем диаметр  $D = 0,18 \text{ м.}$

3) *Построим эпюру касательных напряжений  $\tau$  в соответствии с подобранными диаметрами*

Для построения эпюры  $\tau$  необходимо знание значений полярных моментов сопротивления.

По формуле (4.7) определим моменты сопротивления сечения бруса

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,18^3}{16} = 0,00115 \text{ м}^3.$$

Определим максимальные касательные напряжения на поверхности каждого участка бруса:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{кр}^{AB}}{W_{\rho}^{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,00115} = 34,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 34,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC}}{W_{\rho}^{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3}{0,00115} = -43,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -43,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD}}{W_{\rho}^{CD}} = \frac{80 \cdot 10^3}{0,00115} = 69,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 69,6 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям моментов строится эпюра касательных напряжений  $\tau$  (см. рис. 4.6, в).

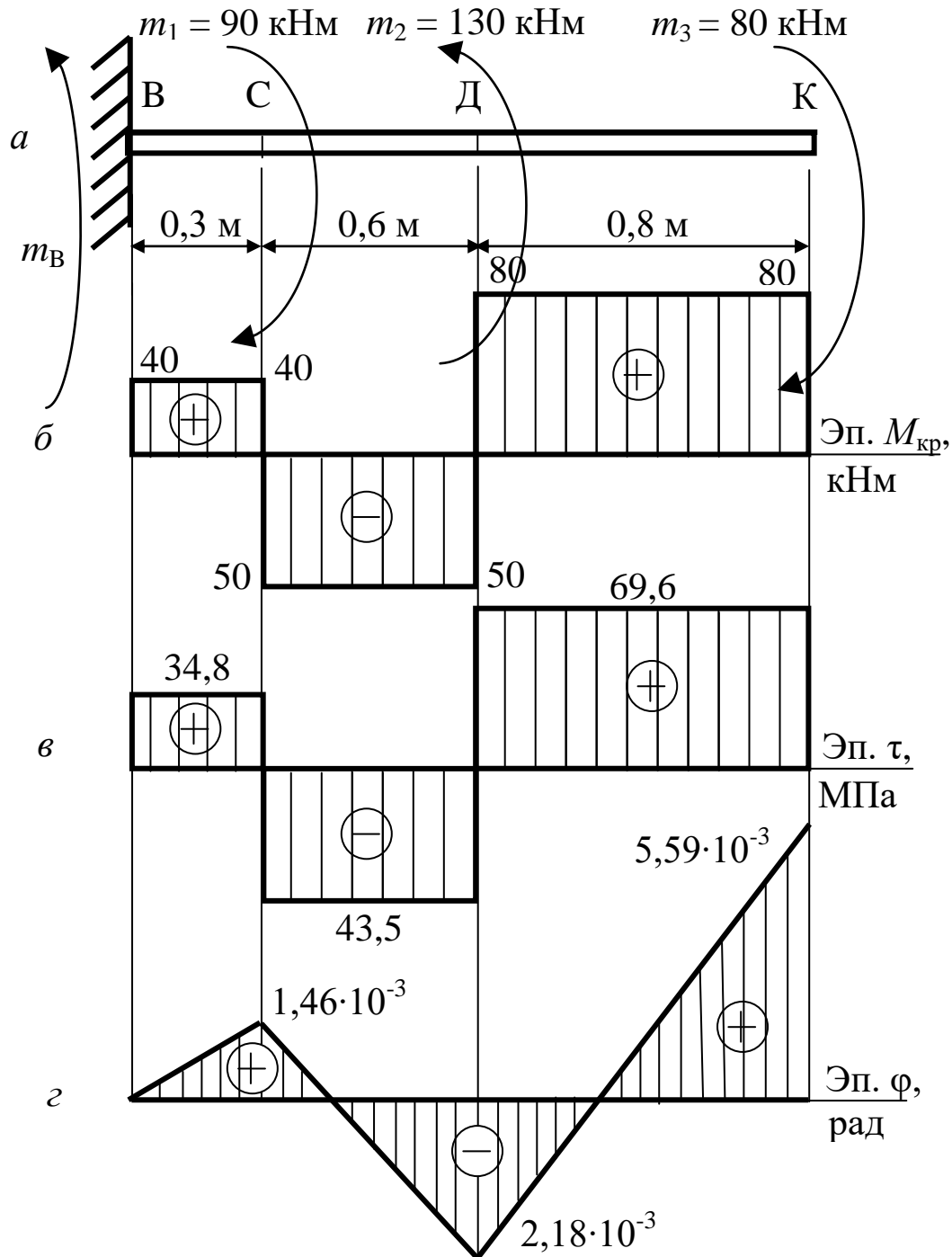


Рис. 4.6: *a* – Расчетная схема; *б* – эпюра крутящих моментов  $M_{кр}$ ;  
*в* – эпюра касательных напряжений  $\tau$ ;  
*г* – эпюра углов закручивания  $\varphi$

#### 4) Проверим брус на прочность

На эпюре касательных напряжений находим максимальное по модулю значение этих напряжений. Наибольшие напряжения имеют место на участке ДК бруса, сравним их с допускаемыми напряжениями

$$\tau_{max} = \tau_{ДК} = 69,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

Вывод: условие прочности удовлетворяется.

## II. Расчет на жесткость.

### 1) Определим приращения углов закручивания на участках бруса

Определим углы закручивания каждого характерного сечения на участках  $\Delta\varphi$  ступенчатого бруса в отдельности. Для этого по формуле (4) определим полярные моменты инерции сечений каждого участка

$$J_{\rho}^{BC} = J_{\rho}^{CD} = J_{\rho}^{DK} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,18^4}{32} = 103 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Определяем приращения углов закручивания на каждом участке бруса:

$$\Delta\varphi_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC} \cdot \ell_{BC}}{G \cdot J_{\rho}^{BC}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = 0,00146 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD} \cdot \ell_{CD}}{G \cdot J_{\rho}^{CD}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = -0,00364 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{DK} = \frac{M_{кр}^{DK} \cdot \ell_{DK}}{G \cdot J_{\rho}^{DK}} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = 0,00777 \text{ рад}.$$

Полученные значения  $\Delta\varphi$  используем для построения эпюры углов закручивания  $\varphi$  (угловых перемещений).

### 2) Построим эпюры углов закручивания

Неподвижным сечением, угол закручивания которого равен нулю, является сечение в начале координат.

Углы закручивания характерных сечений определим суммированием с учетом знаков значений  $\Delta\varphi_i$  на всех участках между характерными сечениями и началом координат.

Значения углов закручивания в характерных сечениях равны:

$$\varphi_B = 0;$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{BC} = 0 + 0,00146 = 0,00146 \text{ рад} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \Delta\varphi_{CD} = 0,00146 - 0,00364 = -0,00218 \text{ рад} = \\ &= -2,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_K &= \varphi_D + \Delta\varphi_{DK} = -0,00218 + 0,00777 = 0,00559 \text{ рад} = \\ &= 5,59 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру углов закручивания  $\varphi$  (см. рис. 4.6, з).

### 3) Подберем сечения бруса из условия жесткости

Условие жесткости при кручении выглядит

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_{\rho}} \leq [\theta], \quad (4.18)$$

где  $[\theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания.

Он является эмпирической величиной, приводится в нормативных источниках и зависит только от характера нагружения вала.

Максимальное значение для типичных условий

$$[\theta] = 2 \text{ град/м} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Из выражения (4.18) выразим диаметр бруса

$$D = \sqrt[4]{\frac{M_{кр} 32}{G \cdot \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 34 \cdot 10^{-3}}} = 0,132 \text{ м}.$$

Согласно ГОСТ 6636 – 69 принимаем  $D = 0,14 \text{ м}$ .

По условию прочности требуется диаметр  $D = 0,18 \text{ м}$ . Для того, чтобы удовлетворялось условие прочности и условие жесткости, окончательно примем диаметр  $D = 0,18 \text{ м}$ .

### **Задания для самостоятельной работы**

Для выполнения расчетно-графического типового расчета из табл. 4.1 и 4.2 выбрать расчетную схему, а из табл. 4.3 взять необходимые данные.

Общие данные взять из «Дано» примеров 1, 2.

1. Задать площади сечений ступеней бруса в соответствии с пропорциями между ступенями брусьев.

2. Поставить в опасной точке бруса деталь механизма, при соприкосновении с которой брус выведет ее из строя.

3. Рассчитать брус на прочность и жесткость в соответствии с Примерами 1, 2.

Таблица 4.1

	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Таблица 4.2

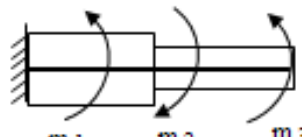


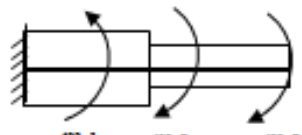

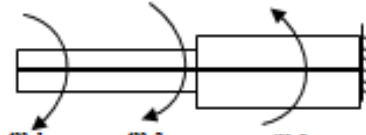


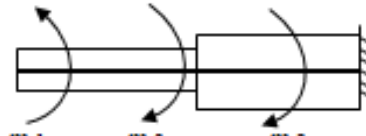




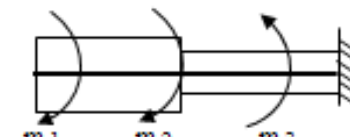


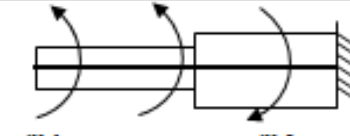
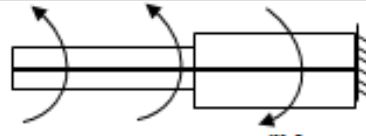

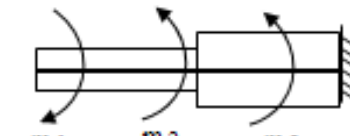
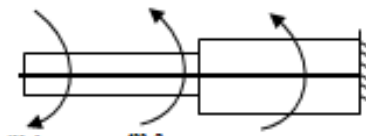
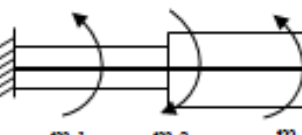
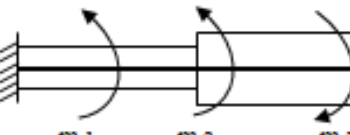
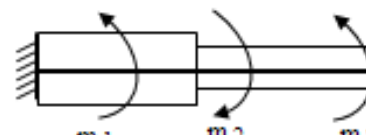
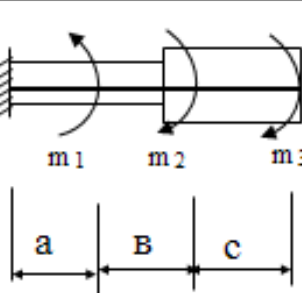
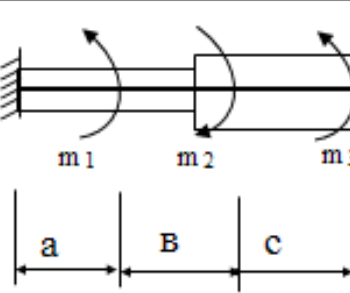
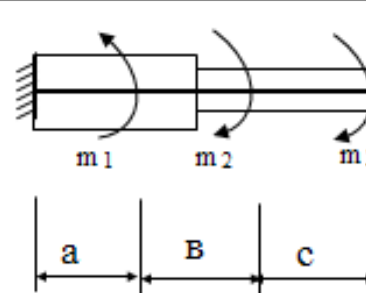
	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Таблица 4.3

№	$m_1$ , кНм	$m_2$ , кНм	$m_3$ , кНм	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м
1	30	60	40	0,5	0,3	0,9
2	50	80	80	0,6	0,8	0,5
3	70	90	90	0,7	0,5	0,6
4	80	70	30	0,8	0,2	0,4
5	90	40	40	0,9	0,5	0,8
6	40	50	50	0,4	0,6	0,6
7	60	30	60	0,3	0,7	0,7
8	80	90	70	0,5	0,9	0,6
9	90	80	20	0,6	0,8	0,4
0	70	60	90	0,8	0,5	0,3

## Практическое занятие № 5

### ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного построения эпюр внутренних силовых факторов в статически определимых балках.

Изгибом называется состояние стержневой конструкции, при котором в ее поперечных сечениях возникают изгибающие моменты  $M$ . Изгиб является одним из самых распространенных видов работы стержневых конструкций. В простейшем случае изгиб возникает при действии нагрузки в направлении, перпендикулярном продольной оси стержня. Если это направление совпадает с одной из главных плоскостей стержня, то изгиб называется прямым, а в сечениях такого стержня возникают изгибающие моменты  $M$  и поперечные силы  $Q$ . Балки являются самыми простыми и наиболее распространенными конструкциями, работающими в условиях прямого изгиба.

При изучении темы студенты должны закрепить навыки в определении опорных реакций простых балок и балочных систем, определении внутренних усилий и построении их эпюр. Важной задачей является приобретение умений определения нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях и использования их для оценки надежности состояния конструкции.

Содержание РГР «Расчет балки на прочность и жесткость» (1 часть) включает в себя выполнение следующих пунктов:



- определить внутренние усилия  $Q$  и  $M$  в поперечных сечениях заданной балки и построить их эпюры;
- подобрать по условию прочности размеры поперечных сечений заданных форм;
- исследовать напряженное состояние в ряде точек балки с определением величин и направлений главных напряжений;
- произвести полную проверку прочности.

### Внутренние усилия и их эпюры

Определение внутренних усилий в статически определимой балке (рис. 5.1) обычно сводится к процедурам, которые можно объединить в следующие пункты:

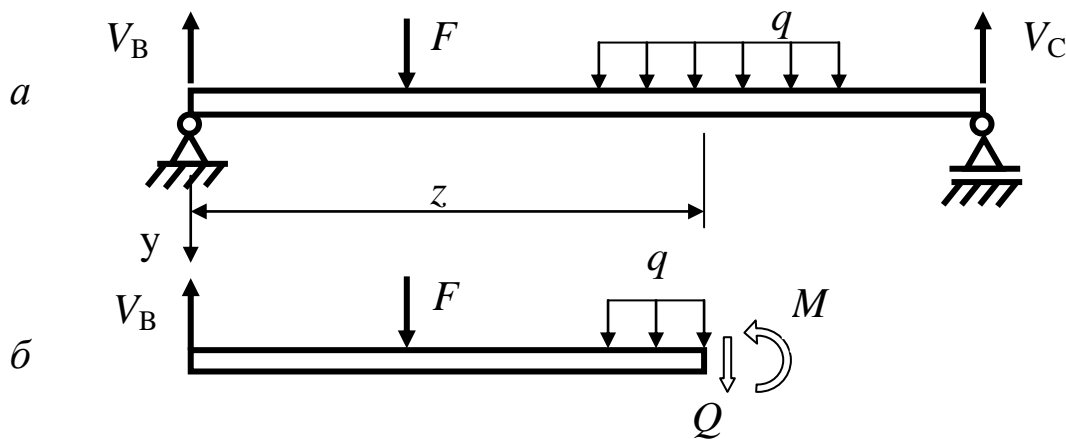


Рис. 5.1.: *a* – схема балки; *б* – внутренние усилия в поперечном сечении балки

1. Определяются реакции опор с помощью уравнений статики, которые могут составляться как для всей балки, так и для любого отдельного диска, на которые может быть разделена конструкция, если она составная.

2. Балка разбивается на участки, на которых законы изменения внутренних усилий имеют постоянный вид. Границами таких участков являются места расположения опор и шарниров, места приложения сосредоточенных сил и пар и т. д.

3. Для произвольного сечения  $z$  (рис. 5.1, б) на каждом участке составляются уравнения поперечных сил  $Q$  и изгибающих мо-

ментов  $M$  как суммы проекций и моментов внешних сил (нагрузок и реакций связей), расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения

$$Q = \sum_{л(п)} P_{iy}, \quad M = \sum_{л(п)} m_{x_c}(P_{iy}). \quad (5.1)$$

В уравнениях (5.1) ось  $x_c$  является главной центральной осью рассматриваемого поперечного сечения.

4. С помощью уравнений (5.1) вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в некоторых заранее выбранных сечениях балки, которые в дальнейшем будут называться характерными. Значения внутренних усилий в характерных сечениях могут определяться с помощью (5.1) без составления аналитических уравнений этих усилий. Такой порядок нахождения внутренних усилий будем называть способом характерных сечений.

5. С помощью значений  $Q$  и  $M$ , найденных в п. 4, строятся графики их изменения вдоль продольной оси балки  $z$ , которые называются эпюрами  $Q$  и  $M$ . При построении эпюр обычно осуществляется контроль, основанный на правилах, вытекающих из дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -q, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = Q. \quad (5.2)$$

### Примеры определения внутренних усилий

Для простой одноконсольной балки на двух шарнирных опорах (рис. 5. 2, а) определить внутренние усилия и построить их эпюры с помощью уравнений:

1. Используя правила статики, отбрасываем внешние связи и заменяем их реакциями  $V_B$  и  $V_C$ . Величины реакций (рис. 5.2, б) определяем с помощью уравнений равновесия:

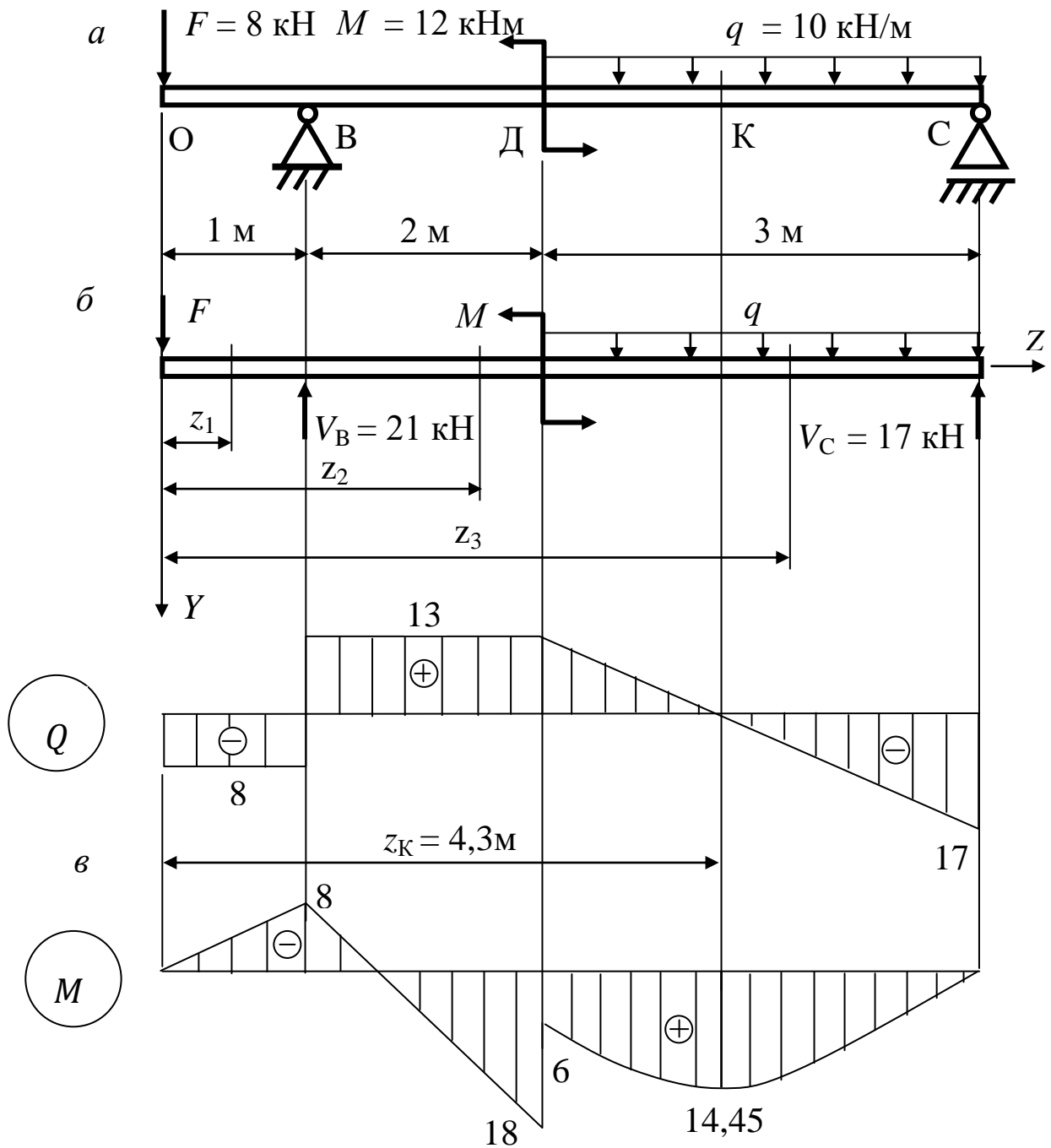


Рис. 5.2. Определение внутренних усилий в простой балке:  
 а – схема балки; б – схема сечений; в – эпюры  $Q$  и  $M$

$$\sum m_C(P_{iy}) = 0; F \cdot 6 - V_B \cdot 5 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; V_B = 21 \text{ кН};$$

$$\sum m_B(P_{iy}) = 0; F \cdot 1 + M - q \cdot 3 \cdot 3 + V_C \cdot 5 = 0; V_C = 17 \text{ кН};$$

Проверка:

$$\sum P_{iy} = 0; -V_B - V_C + F + q \cdot 3 = 0.$$

2. Разбиваем балку (рис. 5.2, а) на три участка (рис. 5.2, б) и составляем уравнения внутренних усилий (см. выражения 5.1). При составлении этих уравнений используются правила знаков (рис. 5.3).

На рисунке показаны положительные поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$  с учётом направлений нагрузок.

Правила знаков в этих случаях трактуются следующим образом:

- *положительная  $Q$*  возникает, если отсеченные нагрузки сдвигают левую часть балки вверх, а правую – вниз;
- *положительный  $M$*  возникает, если отсеченные нагрузки загибают концы балки вверх, растягивая при этом нижнее волокно балки.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 1$  м):

$$Q_1 = -F; \quad M_1 = -F \cdot z_1.$$

Участок 2 ( $1 \text{ м} \leq z_2 \leq 3$  м):

$$Q_2 = -F + V_B; \quad M_2 = -F \cdot z_2 + V_B \cdot (z_2 - 1).$$

Участок 3 ( $3 \text{ м} \leq z_3 \leq 6$  м):

$$Q_3 = -F + V_B - q \cdot (z_3 - 3);$$

$$M_3 = -F \cdot z_3 + V_B \cdot (z_3 - 1) - M - q \cdot \frac{(z_3 - 1)^2}{2}.$$

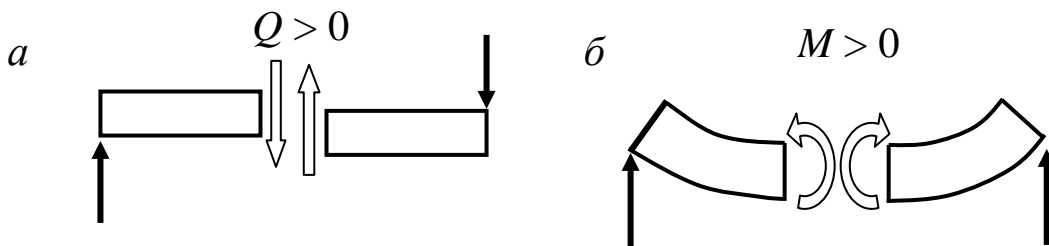


Рис. 5.3. Нагрузки вызывающие положительные:  
а – поперечные силы  $Q$ ; б – изгибающие моменты  $M$

Для определения знаков слагаемых, входящих в уравнение изгибающих моментов, удобно использовать следующий прием:

- мысленно представьте отсеченную часть в виде консоли с заделкой в месте расчетного сечения;

- приложите к этой отсеченной части учитываемую нагрузку;
- проанализируйте характер искривления оси консоли под действием этой нагрузки;
- если консоль загибается вверх, а нижние волокна балки растягиваются, то слагаемому присваивается знак плюс.

Этот прием проиллюстрирован (рис. 5.4) при составлении уравнения  $M_2$  на примере нагрузок приложенных к левой отсеченной части балки.

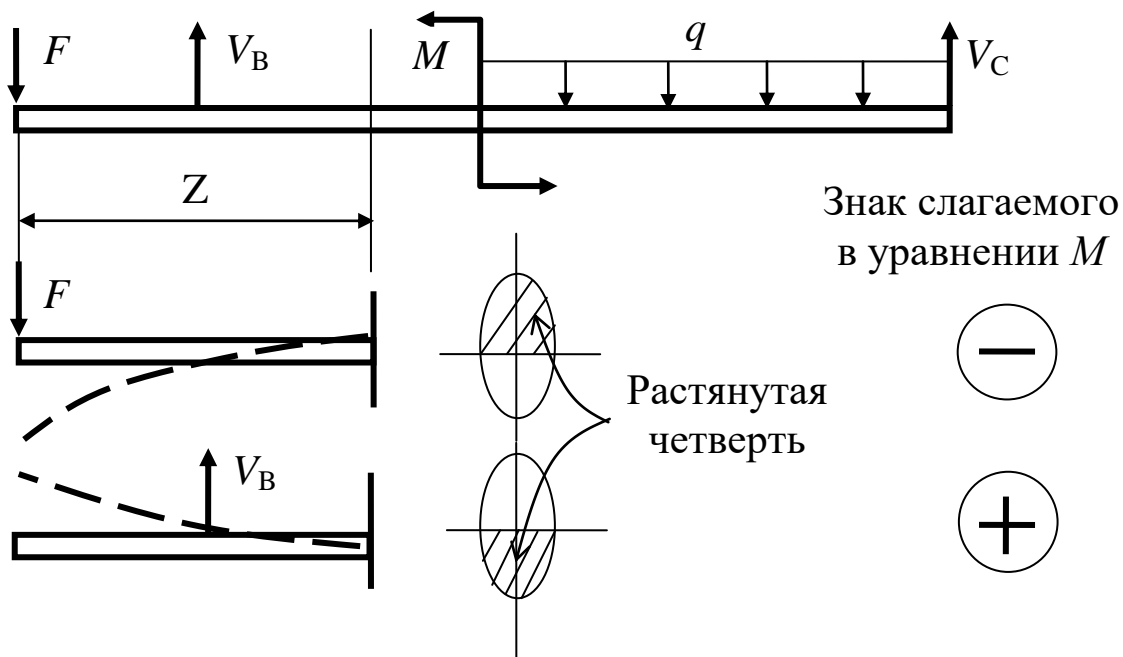


Рис. 5.4. К определению знаков слагаемых при нахождении изгибающих моментов

3. С помощью полученных уравнений вычисляем значения  $Q$  и  $M$ . Результаты вычислений внутренних усилий в характерных сечениях приведены в «Ведомости значений  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки» (см. табл. 5.1). По этим значениям строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 5.2, в).

При построении эпюр  $Q$  и  $M$  надо особо учитывать те сечения на участках загруженных распределенной нагрузкой  $q$ , в которых значение  $Q$  равно нулю, а  $M$  – экстремально. В рассматриваемом примере такая особенность есть на участке 3. Координату  $z_K$  этого сечения можно найти из условия:

$$Q_3(z_K) = 0; \quad -F + V_B - q \cdot (z_K - 3) = 0; \quad z_K = \frac{-F + V_B + q \cdot 3}{q} = 4,3 \text{ м.}$$

Таблица 5.1

Ведомость значений  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки

Сечение	$z$ , м	Участок	$Q$ , кН	$M$ , кН·м
О	0	1	–8,0	0
$B_{\text{лев}}$	1,0	1	–8,0	–8,0
$B_{\text{прав}}$	1,0	2	+13,0	–8,0
$D_{\text{лев}}$	3,0	2	+13,0	+18,0
$D_{\text{прав}}$	3,0	3	+13,0	+6,0
К	4,3	3	0	+14,45
С	6,0	3	–17,0	0

Для составной балки (рис. 5.5, а) определить внутренние усилия по характерным сечениям без составления уравнений.

Определение опорных реакций  $V_B, V_C, V_D$  и  $M_D$  выполняется любым способом, применимым для составных систем и здесь не обсуждается. Результаты определения реакций приведены (см. рис. 5.5, а).

Определяем поперечные силы  $Q$  и строим их эпюру. Здесь можно использовать простое правило – приращение поперечной силы на участке или в сечении равно равнодействующей поперечных нагрузок, приложенных на этом участке или в сечении, а знак приращения положителен, если нагрузка направлена вверх. Это свойство условно называют «правилом следования за силой».

Построение эпюры  $Q$  (рис. 5.5, б) приведено с использованием этого правила. Штрихпунктирными стрелками там показаны направления построения эпюры и приведены значения приращений  $Q$ .

Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях балки (см. выражение 5.1):

**Сечение В**

$$M_B = 0;$$

**Сечение К, слева от пары  $M$**

$$M_{K,\text{лев}} = -V_B \cdot 2 = -18 \cdot 2 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

**Сечение К, справа от пары  $M$**

$$M_{K,\text{прав}} = -V_B \cdot 2 - M = -18 \cdot 2 - 30 = -66 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

**Сечение С (шарнир)**

$$M_C = 0.$$

**Сечение L** (экстремум эпюры на участке – вершина параболы). Положение сечения можно найти с помощью локальной координаты «а» сечения относительно левого конца этого участка. Из выражений (5.2) следует равенство  $|dQ/dz| = |q| = |tg\alpha| = |Q_{лев}/a|$  (см. рис. 5.5, в), которое приводит к простому правилу определения координаты «а»:

$$a = |Q_{лев}/q| = 22/10 = 2,2 \text{ м.}$$

Здесь  $Q_{лев} = 22 \text{ кН}$  – значение поперечной силы на левом конце участка, где находится экстремум

$$M_L = V_B \cdot 2,2 - q \cdot 2,2^2/2 = 22 \cdot 2,2 - 10 \cdot 2,2^2/2 = 24,2 \text{ кНм.}$$

**Сечение Д, заделка.** Значение изгибающего момента в заделке всегда равно реактивному моменту.

Тогда

$$M_D = 8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По найденным значениям  $M$  построена эпюра, приведенная на рис. 5.5, в.

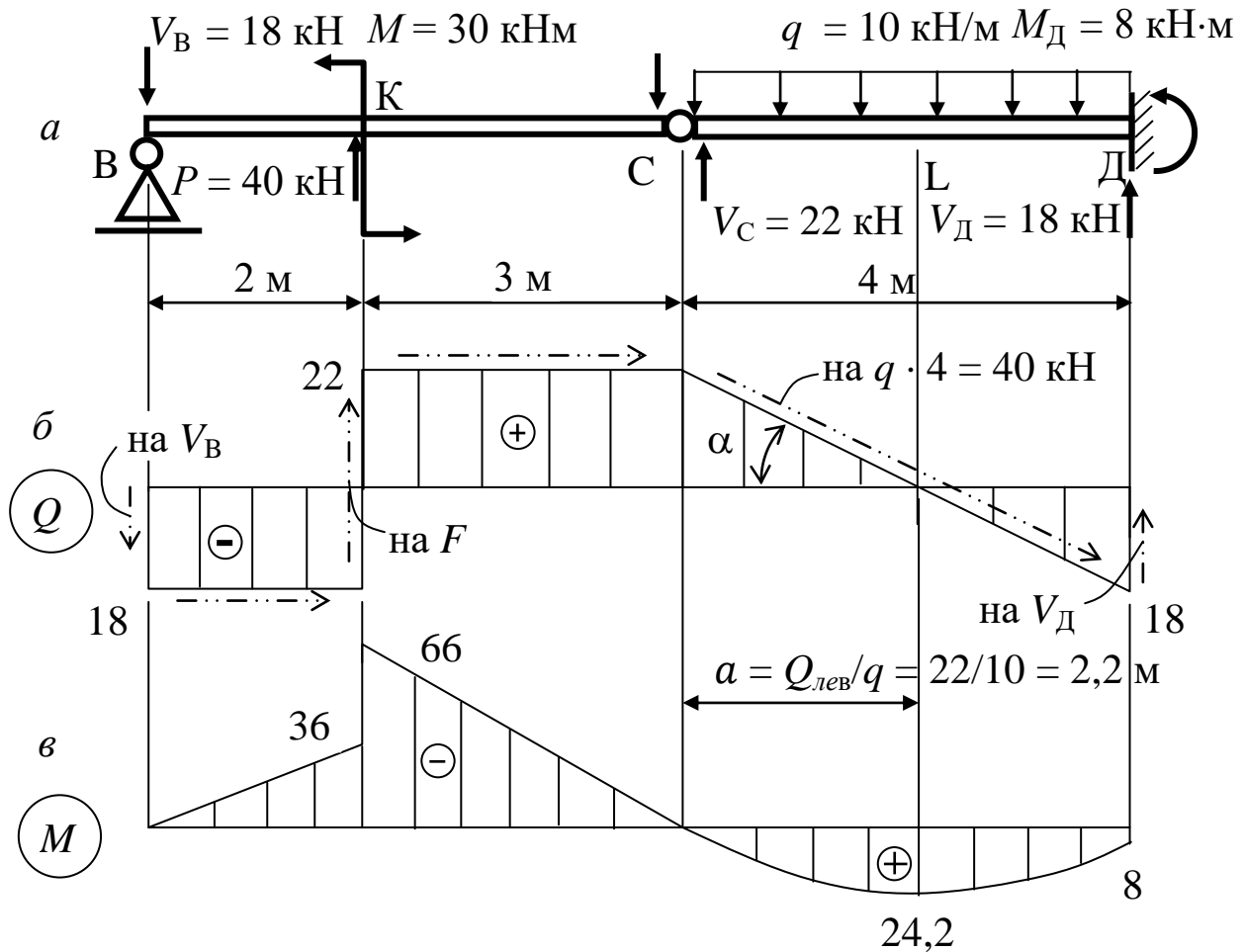


Рис. 5.5. Определение внутренних усилий в составной балке по характерным сечениям:

$a$  – схема балки;  $b$  – построение эпюры  $Q$ ;  $в$  – эпюра  $M$

### Контрольные вопросы

1. Что такое изгиб? Каковы его разновидности?
2. Дайте определения изгибающих моментов и поперечных сил.
3. Сформулируйте правила знаков изгибающих моментов и поперечных сил.
4. В чем смысл дифференциальных зависимостей между  $M$ ,  $Q$  и  $q$ ?
5. Правила контроля эпюр  $Q$  и  $M$ .
6. Построение эпюр  $Q$  и  $M$  методом уравнений.
7. Построение эпюр  $Q$  и  $M$  методом характерных сечений.
8. В чем существо «правила следования за силой»?



## Практическое занятие № 6

### НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного расчета на прочность статически определимых балок.

В общем случае прямого поперечного (простого) изгиба в поперечном сечении балки возникают нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения (рис. 6.1, а). Нормальные напряжения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad (6.1)$$

где  $J$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси (н. о.), которая совпадает с главной центральной осью  $x$ ;  $y$  – расстояние от расчетной точки поперечного сечения до нейтральной оси.

Касательные напряжения в симметричных поперечных сечениях открытого профиля приближенно можно вычислить по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)}, \quad (6.2)$$

где  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент отсеченной части сечения, выделенной штриховкой (см. рис. 6, а);  $b(y)$  – ширина сечения на уровне расчетной точки.

Напряженное состояние в точке балки считается плоским (рис. 6.1, б). В этом случае в точке действуют два главных напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  с разными знаками, которые могут быть определены с помощью зависимости

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}. \quad (6.3)$$

Направление одного из этих главных напряжений определяется углом  $\alpha_0$  (рис. 6.1, в). Значение угла определяется из уравнения

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (6.4)$$

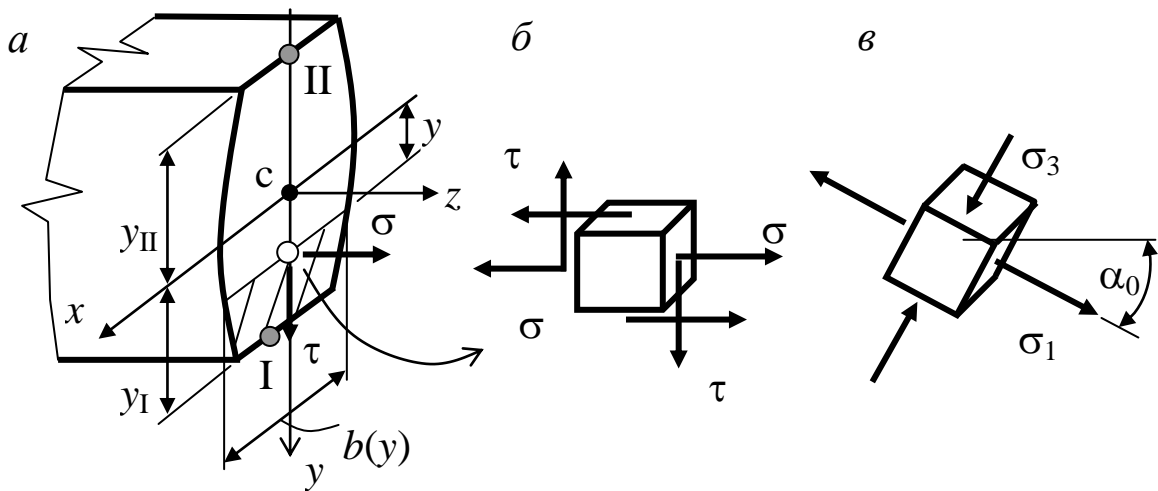


Рис. 6.1: *a* – напряжения в поперечном сечении балки;  
*б* – напряженное состояние в точке; *в* – главные напряжения

Если угол  $\alpha_0$  задает главную нормаль, проходящую через четверть плоскости изгиба  $yoz$ , в которой сходятся векторы касательных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках, то это нормаль 1 (рис. 6.1, *в*).

Проверка прочности в произвольной точке балки должна выполняться с учетом сложности напряженного состояния, т. е. с учетом всех главных напряжений. Такую проверку часто называют полной. Это делается с использованием одной из подходящих теорий прочности. В случае балки из хрупкого материала применимы *I* теория или теория Мора. Для пластичных материалов рекомендуется использовать *III* или *IV* теории.

Например, при использовании *III* или *IV* теорий проверка прочности сводится к проверке выполнения условий

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma], \quad (6.5)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при одноосном растяжении (основное).

В крайних точках сечения I и II, наиболее удаленных от н. о., напряженное состояние является линейным, а условие прочности преобразуется к виду

$$\sigma_I = \frac{M}{W_I} \leq [\sigma]^+, \quad \sigma_{II} = \frac{M}{W_{II}} \leq [\sigma]^-, \quad (6.6)$$

где  $\sigma_I, \sigma_{II}$  – модульные значения нормальных напряжений в наиболее растянутой или сжатой точках I и II (рис. 6, *a*);  $[\sigma]^+, [\sigma]^-$  – до-

пускаемые напряжения материала балки на одноосное растяжение или сжатие;  $W_I$ ,  $W_{II}$  – моменты сопротивления сечения при изгибе относительно растянутой или сжатой точек I и II, которые определяются по формулам

$$W_I = \frac{J}{y_I}, \quad W_{II} = \frac{J}{y_{II}}. \quad (6.7)$$

Подбор сечения балки по условию прочности заключается в назначении такой формы и размеров сечения, которые должны удовлетворять условиям

$$W_I \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]^+}, \quad W_{II} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]^-}, \quad (6.8)$$

где  $M_{\max}$  – расчетный момент, равный модулю изгибающего момента в опасном сечении.

Опасным считается такое сечение, в котором напряжения  $\sigma_I$  и  $\sigma_{II}$  имеют наибольшие значения.

### Примеры подбора сечений балок

В РГР «Расчет балки на прочность и жесткость» (1 часть) ставится задача подбора сечений балок, изготовленных из пластичных металлов – малоуглеродистых сталей, алюминиевых сплавов и т. д. В этих случаях нормы рекомендуют считать допускаемые напряжения на растяжение и сжатие при изгибе одинаковыми ( $[\sigma]^+ = [\sigma]^- = [\sigma]$ ). Задаваемые формы поперечных сечений можно разделить на следующие группы:

- массивные сечения типа прямоугольника или круга, размеры сечений выражаются через некоторый параметр;
- сечения из стандартных прокатных элементов – одиночных или составных;
- тонкостенные сечения из листовых элементов постоянной толщины  $\delta$ .

Для каждого варианта формы сечения можно применить оптимальную методику подбора размеров сечения. Некоторые из этих методик иллюстрируются ниже.

Для балки (см. рис. 5.2, а) подобрать сечения в виде одиночного прокатного двутавра по ГОСТ 8239-89 и массивного типа (рис. 6.2, а). Материал балки – малоуглеродистая сталь марки Ст3, нормативный коэффициент запаса прочности  $n = 1,5$ :

Назначаем допускаемое напряжение. Для конструкций из СтЗ в качестве предельного (опасного) напряжения рекомендуется использовать предел текучести  $\sigma_T$ . Принимаем  $\sigma_T = 240$  МПа.

Значение допускаемого напряжения

$$[\sigma] = 240/1,5 = 160 \text{ МПа.}$$

Опасным является сечение  $D_{лев}$ , а расчетный момент для подбора сечения  $M_{max} = 18$  кН·м. Находим нижнюю границу возможных значений момента сопротивления при изгибе по формуле (6.8)

$$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{18}{160 \cdot 10^3} = 0,113 \cdot 10^{-3} = 113 \text{ см}^3.$$

Подбор двутаврового сечения выполняем по сортаменту для прокатных двутавров. Принимаем двутавр №16, для которого  $W = W_x = 109 \text{ см}^3$ . Это сечение имеет размеры несколько меньше требуемых. Перегрузка балки в этом случае определяется величиной

$$\Delta W/W = (113 - 109)/113 = 0,035 \ll 1.$$

Обычно такая перегрузка считается приемлемой.

Отметим, что в случае подбора составного сечения, состоящего из нескольких прокатных элементов, необходимо использовать метод последовательных приближений. Он заключается в том, что предварительно назначаются некоторые размеры сечения и они проверяются по условиям (6.6). Если расчетные напряжения  $\sigma_I$  или  $\sigma_{II}$  чрезмерно отличаются от соответствующих допускаемых напряжений в большую или меньшую стороны, то на следующем этапе расчета размеры прокатных элементов должны быть увеличены или уменьшены, а проверка прочности повторяется. Эти действия выполняются до тех пор, пока расчетные и допускаемые напряжения станут отличаться на 3–5 %.

Подбор массивного сечения, размеры которого заданы через параметр «а» (рис. 6.2, а), начинаем с определения геометрических характеристик.

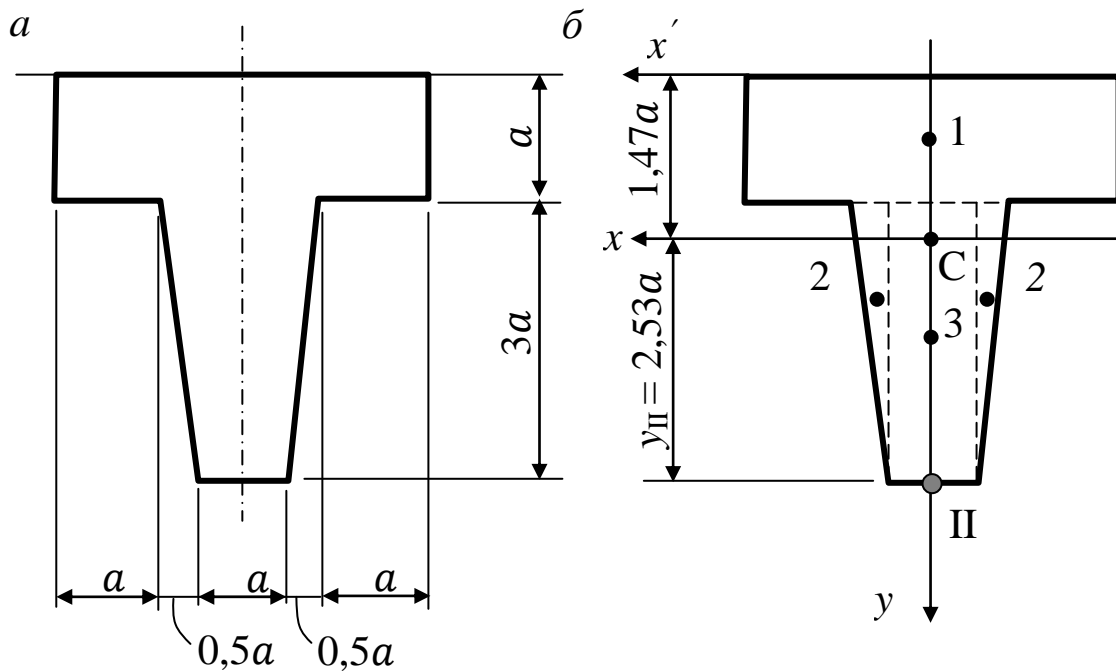


Рис. 6.2. Массивное сечение к балке (рис. 5.2):  
 $a$  – эскиз сечения;  $b$  – определение геометрических характеристик

Положение центра тяжести относительно вспомогательной оси  $x'$

$$y'_c = \frac{\sum F_i y'_i}{\sum F_i} = \frac{4a^2 \cdot 0,5 \cdot a + 2 \cdot 0,75a^2 \cdot 2a + 3a^2 \cdot 2,5a}{4a^2 + 2 \cdot 0,75a^2 + 3a^2} = 1,47a.$$

Момент инерции относительно нейтральной оси  $x$

$$J_x = \sum J_{x_i} + \sum F_i y_i^2 = \frac{4a \cdot a^3}{12} + 2 \frac{0,5a \cdot (3a)^3}{36} + \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 4a^2 \cdot (0,97a)^2 + 2 \cdot 0,75a^2 \cdot (0,53a)^2 + 3a^2 \cdot (1,03a)^2 = 10,7a^4.$$

Момент сопротивления сечения при изгибе

$$W = W_{II} = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{10,7 \cdot a^4}{2,35 \cdot a} = 4,23a^3 \geq 113 \text{ см}^3.$$

Отсюда следует:  $a \geq 2,98 \text{ см}$ . Окончательно принимаем  $a = 3 \text{ см}$ .

В завершение данного примера заметим, что в случаях, когда материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, размеры сечения надо определять по условиям прочности как в растянутой, так и в сжатой точках опасного сечения.

Для балки (см. рис. 5.5,  $a$ ) подобрать тонкостенное сечение (рис. 6.3,  $a$ ). Толщина листов  $\delta$  постоянна и равна 8 мм. Листы изго-

товлены из магналина марки АМг6м. Нормативный коэффициент запаса  $n = 1,6$ :

Назначаем допускаемое напряжение. Предел текучести материала балки  $\sigma_T = 150$  МПа. Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{150}{1,6} = 93,7 \text{ МПа.}$$

Опасным является сечение  $K_{\text{прав}}$ . Расчетный момент  $M_{\text{max}} = 66 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Нижняя возможная граница для момента сопротивления при изгибе

$$W \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{66}{93,7 \cdot 10^3} = 0,693 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 693 \text{ см}^3.$$

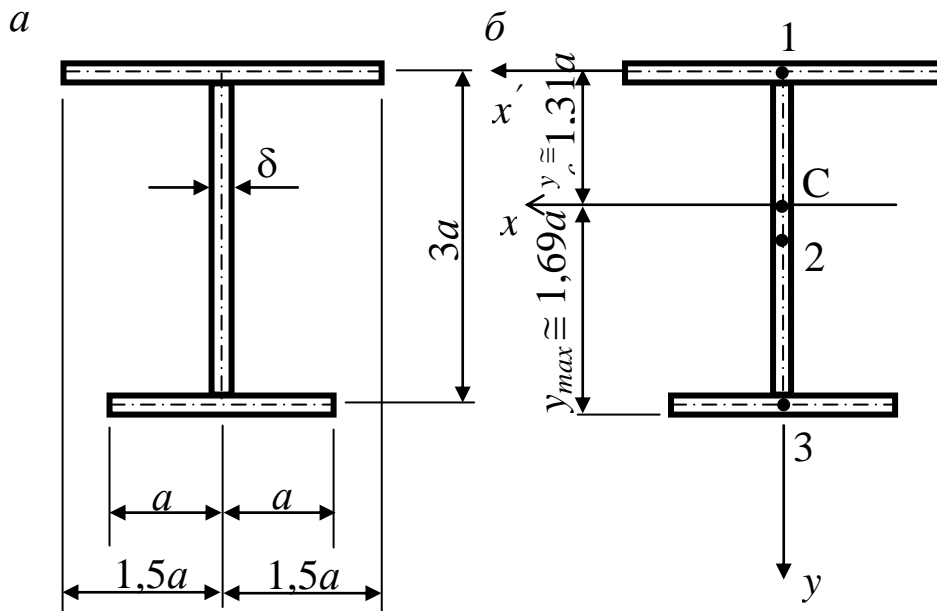


Рис. 6.3. Тонкостенное сечение к балке (рис. 5.5, а):  
а – эскиз; б – определение геометрических характеристик

Определяем геометрические характеристики (рис. 6.3, б). Положение центра тяжести сечения находим приближенно, полагая что ожидаемое значение параметра «а» будет намного больше толщины листов  $\delta$ . Это допущение позволяет пренебрегать величиной  $\delta$  при суммировании его с параметром  $a$  ( $a + \delta \cong a$ ).

Тогда

$$y'_c = \frac{3\delta a \cdot 0 + 3\delta a \cdot 1,5a + 2\delta a \cdot 3a}{3\delta a + 3\delta a + 2\delta a} = \frac{10,5}{8} a = 1,31 a.$$

Момент инерции поперечного сечения

$$J_x = \frac{3a \cdot \delta^3}{12} + \frac{\delta \cdot (3a)^3}{12} + \frac{2a \cdot \delta^3}{12} + 3\delta a \cdot (1,31a)^2 + 3\delta a \cdot (0,19a)^2 + 2\delta a \cdot (1,69a)^2.$$

На основании допущения о малости толщины листа  $\delta$  пренебрегаем слагаемыми содержащими  $\delta^3$ . Тогда окончательно имеем  $J = 12,89\delta a^3$ .

Момент сопротивления сечения при изгибе

$$W = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{12,89\delta a^3}{1,69a} = 7,63\delta a^2.$$

Подбираем размеры листовых элементов сечения

$$W \cong 7,63 \cdot \delta \cdot a^2 \geq 693 \text{ см}^3, a \geq \sqrt{\frac{693}{7,63 \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{693}{7,63 \cdot 0,08}} = 32 \text{ см.}$$

Определим отношение величин  $\delta$  и  $a$ :  $\delta/a = 0,08/32 = 0,0025 \ll 1$ . Полученная величина отношения  $\delta/a$  подтверждает правильность допущения о малости  $\delta$  и позволяет окончательно принять  $a = 32$  см.

### Примеры анализа напряженного состояния и полной проверки прочности

При выполнении задания в данном пункте почти всегда рассматриваются сечения из одиночного двутавра прокатного профиля. Поэтому ниже рассматриваются только двутавровые балки.

В балке (см. рис. 5.2, *а*) определить величину и направление главных напряжений в точке К с координатами  $z = 0,5$  м,  $y = 0,03$  м. Балка изготовлена из двутавра № 16.

Расчетное сечение находится в середине участка ОВ. Значения усилий в этом сечении (см. рис. 5.2, *б, в*):

$$Q = -8 \text{ кН}, \quad M = -4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Геометрические характеристики поперечного сечения взяты из сортамента на прокатные двутавры по ГОСТ 8239–89. Основные размеры сечения используемые в расчете (рис. 6.4, *а*). Момент инерции  $J = 873 \text{ см}^4$ .

Определяем нормальные и касательные напряжения по формулам (6.1) и (6.2)

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y = -\frac{4 \cdot 10^{-3}}{873 \cdot 10^{-8}} 0,03 = -13,7 \text{ МПа.}$$

Для определения касательного напряжения вычисляем статический момент отсеченной части  $S_{\text{отс}}$ . Отсеченная часть (рис. 6.4, б) показана в упрощенном виде, состоящем из двух прямоугольников 1 и 2. Черными точками показаны центры тяжести прямоугольников.

$$S_{\text{отс}} = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 7,6 + 0,5 \cdot 4,2 \cdot 5,1 = 58,7 \text{ см}^3.$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)} = -\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 58,7 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = -10,6 \text{ МПа.}$$

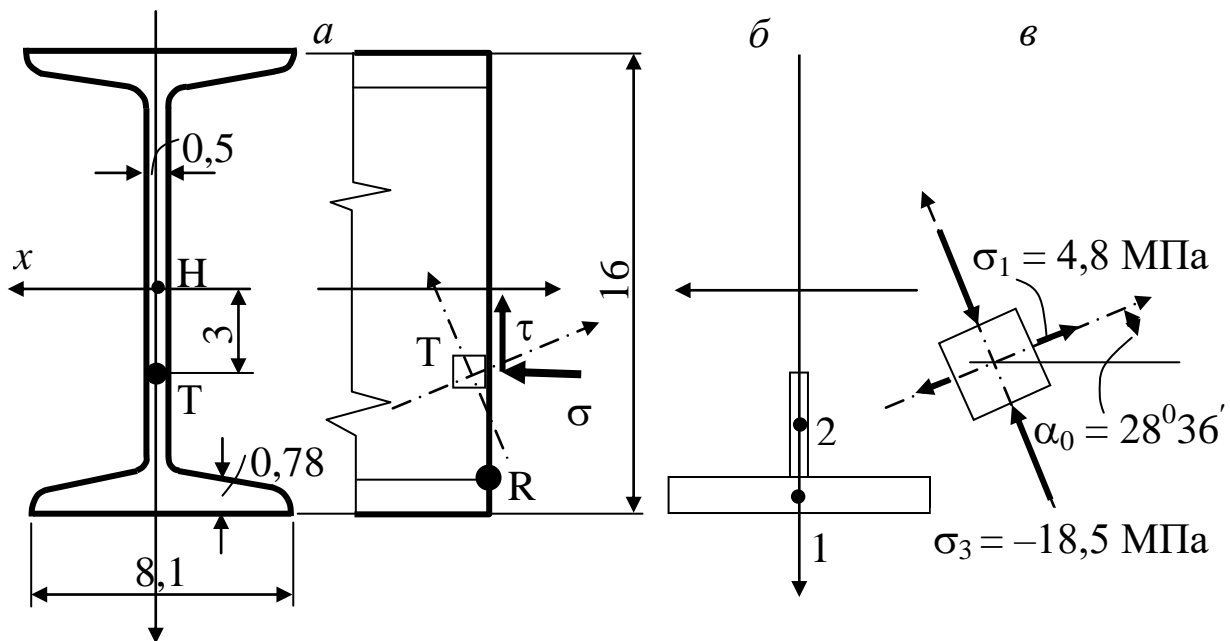


Рис. 6.4: а – напряжения в точке Т; б – отсеченная часть сечения; в – главные напряжения

Показаны (рис. 6.4, а) направления напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  в точке Т.

Величины и направления главных напряжений находим по формулам (6.3) и (6.4)

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \frac{-13,7}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{13,7^2 + 4 \cdot 10,6^2}$$

$$= -6,35 \pm 11,65,$$

$$\sigma_1 = 4,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -18,5 \text{ МПа},$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-10,6)}{-13,7} = 28^\circ 36'.$$



Направления главных напряжений в точке Т показаны штрихпунктирными стрелками (рис. 6.4, в).

Произвести полную проверку прочности балки, рассмотренной в предыдущем примере. Материал балки – Ст3, допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Проверку выполнить по IV теории.

Подбор данного сечения был выполнен ранее для балки (см. рис. 5.2, а). Он производился по формулам (6.8) из условий прочности в точках I и II. Поэтому в данном примере производить проверку прочности этих точек нет необходимости.

Проверяем прочность в точке Н (см. рис. 6.4, а). Опасным будет сечение С, в котором действует максимальная поперечная сила  $Q = 17$  кН. (см. рис. 5.2, б). В точке Н в поперечном сечении действует только касательное напряжение  $\tau$ . Для его определения статический момент отсеченной части половины сечения  $S_{отс} = 62,3 \text{ см}^3$  берем из сортамента

$$\tau = \frac{17 \cdot 10^{-3} \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 24,2 \text{ МПа.}$$

Проверяем прочность по условию (6.5)

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{3 \cdot 24,2^2} = 41,9 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Проверяем прочность в точке R, расположенной в месте стыка полки и стенки двутавра (см. рис. 6.4, а). Опасное сечение – Д<sub>лев</sub>,  $Q = 13$  кН,  $M = 18$  кН·м (см. рис. 5.2. б, в)

Нормальное напряжение в этой точке

$$\sigma = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{873 \cdot 10^{-8}} 0,072 = 148,5 \text{ МПа.}$$

Для нахождения касательного напряжения вычисляем  $S_{отс}$ , учитывая только полку двутавра

$$S_{отс} = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 7,6 = 48 \text{ см}^3.$$

Касательное напряжение

$$\tau = \frac{13 \cdot 10^{-3} \cdot 48 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 14,3 \text{ МПа.}$$

Проверяем прочность

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{148,5^2 + 3 \cdot 14,3^2} = 151 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Проведенные расчеты показывают, что влияние касательных напряжений на прочность прокатных двутавровых балок относительно невелико.

### Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графической работы (РГР) «Расчет балки на прочность и жесткость» (1 часть) из табл. 6.1 выбрать расчетную схему, а из табл. 6.2 взять необходимые данные.

Далее требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ ;
2. Подобрать поперечное сечение балки из условия прочности.

Таблица 6.1

Поперечный изгиб.					
A	0	1	2	3	4

Таблица 6.1 (продолжение)

Поперечный изгиб.					
A	5	6	7	8	9

Таблица 6.1 (продолжение)

Поперечный изгиб.					
	0	1	2	3	4
В					

Таблица 6.1 (продолжение)

Поперечный изгиб.					
В	5	6	7	8	9

Таблица 6.1 (продолжение)

Поперечный изгиб.					
С	0	1	2	3	4

Таблица 6.1 (продолжение)

Поперечный изгиб.					
С	5	6	7	8	9



Таблица 6.2

Лист		$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$p$ , кН	$q$ , кН/м	$m$ , кН×м
7	1	1,8	3,5	1,9	10	20	40
	2	2	3,4	2	20	12	45
	3	2,2	3,3	2,5	30	15	50
	4	2,4	3,2	2,6	40	18	55
	5	2,6	3	2,7	50	22	35
	6	2,8	2,9	2,9	60	25	30
	7	3	2,7	2,2	15	30	25
	8	3,2	2,5	2,4	25	11	20
	9	3,4	2,3	1,1	45	8	15
	0	3,6	2,1	1,4	35	9	10
8	1	1,5	1,2	2,2	12	10	32
	2	1,6	1,3	2,4	13	14	28
	3	1,7	0,9	1,8	14	16	26
	4	1,9	0,8	1,6	15	18	27
	5	2,1	0,7	1,4	18	20	18
	6	2,3	0,6	1,2	20	15	20
	7	2,5	0,5	1	24	13	22
	8	2,7	0,4	0,8	26	11	24
	9	2,9	1	0,9	30	9	16
	0	1,4	1,1	2	11	8	30
9	1	1,5	1,9	1,4	15	11	34
	2	1,7	1,8	1,6	17	13	28
	3	1,9	1,5	1,3	19	16	30
	4	2,1	1,7	1,8	21	17	32
	5	2,2	1,8	1,2	25	18	16
	6	2,5	2,6	1,5	30	20	40
	7	2,7	2,8	2,9	42	21	35
	8	3,2	2,4	2,2	45	30	55
	9	1,8	3,1	2,4	35	25	44
	0	1,3	2,1	0,9	13	14	25

## Практическое занятие № 7

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ МЕТОДОМ КЛЕБША

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения перемещений в статически определимых балках.

Расчет балок на жесткость при изгибе имеет не меньшее значение, чем расчет на прочность. Анализ деформации балки при прямом изгибе показывает, что при приложении к ней поперечной нагрузки продольная ось балки искривляется в плоскости действия нагрузки, а поперечные сечения перемещаются. Искривленная ось балки называется изогнутой осью или упругой линией. Новые положения сечений характеризуются линейными и угловыми перемещениями (рис. 7.1).

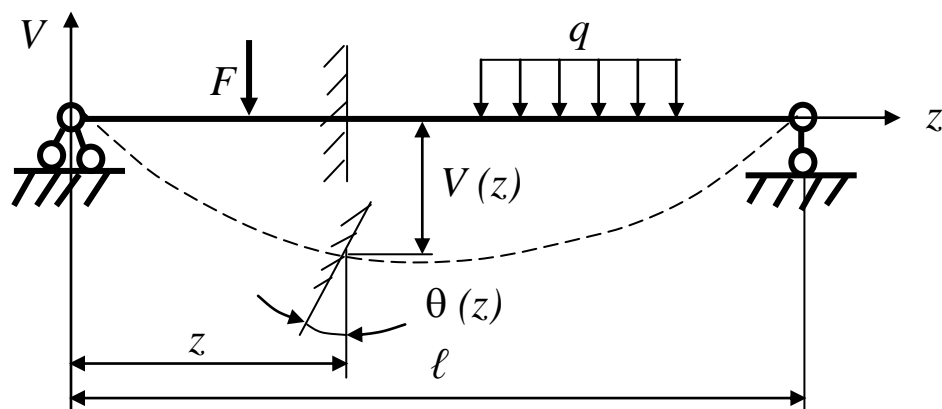


Рис. 7.1. Перемещения при изгибе

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к продольной оси недеформированной балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается  $V$ .

Угол, на который сечение поворачивается по отношению к своему начальному вертикальному положению, называется углом поворота сечения и обозначается  $\Theta$ .

Расчет балок на жесткость при изгибе заключается в определении наибольших упругих линейных и угловых перемещений поперечных сечений от заданной нагрузки и сопоставлении их с соответствующими допускаемыми перемещениями, зависящими от

назначения и условий эксплуатации балок. Иначе говоря, требуется обеспечить соблюдение условия жесткости, выраженного неравенствами:

$$V_{max} \leq [V], \quad \theta_{max} \leq [\theta], \quad (7.1)$$

где  $[V]$  и  $[\theta]$  – допускаемые значения прогиба и угла поворота.

Цель РГР «Расчет балки на прочность и жесткость» (2 часть) – получение навыков определения линейных и угловых перемещений в балках основными методами: методом Клебша и методом Максвелла – Мора (способом Верещагина).

### Теоретические основы метода Клебша

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$EJ_x V'' = \pm M_x, \quad (7.2)$$

где  $EJ_x$  – жесткость сечения балки при изгибе;  $V''$  – вторая производная от прогиба  $V$  по абсциссе сечения;  $M_x$  – изгибающий момент в произвольном сечении.

Уравнение (7.2) может иметь два знака, потому что знак кривизны ( $V'' \approx 1/\rho$ ) изогнутой оси балки может не совпадать со знаком изгибающего момента. Знак кривизны зависит от направления осей координат, знак изгибающего момента выбирается в зависимости от того, где расположены растянутые волокна. При направлении оси прогибов вверх знак изгибающего момента согласуется со знаком кривизны, которая положительна при вогнутой форме и отрицательна при выпуклой форме (рис. 7.2, а).

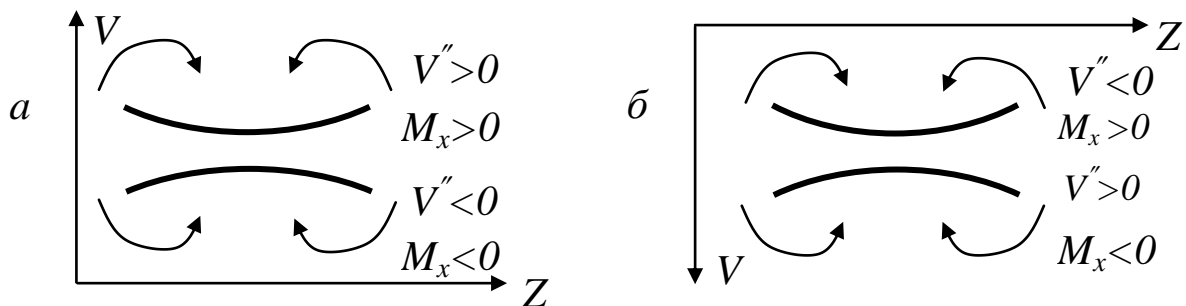


Рис. 7.2. Зависимость знака кривизны от координатных осей

В таком случае уравнение изогнутой оси балки записывается со знаком плюс в правой части  $EJ_x V'' = \pm M_x$ . При направлении

оси прогибов вниз знаки кривизны и изгибающего момента не согласуются (рис. 7.2, б) и в правой части уравнения изогнутой оси следует ставить знак минус  $EJ_x V'' = -M_x$ . Проинтегрировав уравнение (7.2) первый раз, получим уравнение углов поворота:

$$EJ_x \Theta = EJ_x V' = \pm \int M_x dz + C. \quad (7.3)$$

Проинтегрировав второй раз, получим уравнение прогибов:

$$EJ_x V = \pm \int dz \int M_x dz + Cz + D, \quad (7.4)$$

где  $C$  и  $D$  – постоянные интегрирования.

Определим постоянные интегрирования изогнутой оси балки, для чего рассмотрим их физический (геометрический) смысл в уравнениях (7.3) и (7.4). Уравнение (7.3) может быть записано в виде, удобном для вычисления углов поворота  $\Theta = V'$ :

$$\Theta = V' = \pm \frac{\int M_x dz}{EJ_x} + \frac{C}{EJ_x}. \quad (7.5)$$

При  $z = 0$  интеграл вида  $\int M_{изг} dz$  обращается в нуль, следует:

$$\Theta_0 = V'_{z=0} = \frac{C}{EJ_x}, \quad C = \Theta_0 EJ_x. \quad (7.6)$$

Это означает, что постоянная интегрирования  $C$  численно равна углу поворота  $\Theta_0$  в начале координат балки, умноженному на жесткость сечения  $EJ_x$ . Уравнение (7.4) запишем также в виде, удобном для вычисления прогибов:

$$V = \pm \frac{\int dz \int M_x dz}{EJ_x} + \frac{C}{EJ_x} + \frac{D}{EJ_x}. \quad (7.7)$$

В этом уравнении выражения  $\int dz \int M_x dz$ ,  $Cz$  при  $z = 0$  обращаются в нуль, откуда следует:

$$V_{z=0} = V_0 = \frac{D}{EJ_x}, \quad D = V_0 EJ_x. \quad (7.8)$$

Следовательно, постоянная интегрирования  $D$  численно равна прогибу  $V_0$  в начале координат балки, умноженному на жесткость сечения  $EJ_x$ .

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяются из условий опирания балки на опорах, где граничные условия зависят от типа расчетной схемы балки.

Для балок с несколькими участками дифференциальное уравнение изогнутой оси балки не имеет одного аналитического выражения и записывается отдельно для каждого участка. При  $n$  участках в балке раздельное интегрирование  $n$  дифференциальных уравнений приводит к получению  $2n$  постоянных интегрирования.

Рассмотренные ниже правила (рис. 7.3), предложенные Клебшем, используемые при составлении дифференциального уравнения изогнутой оси балки и последующем его интегрировании, позволяют уравнивать постоянные интегрирования по всем участкам балки и свести их количество к двум,  $C$  и  $D$ .

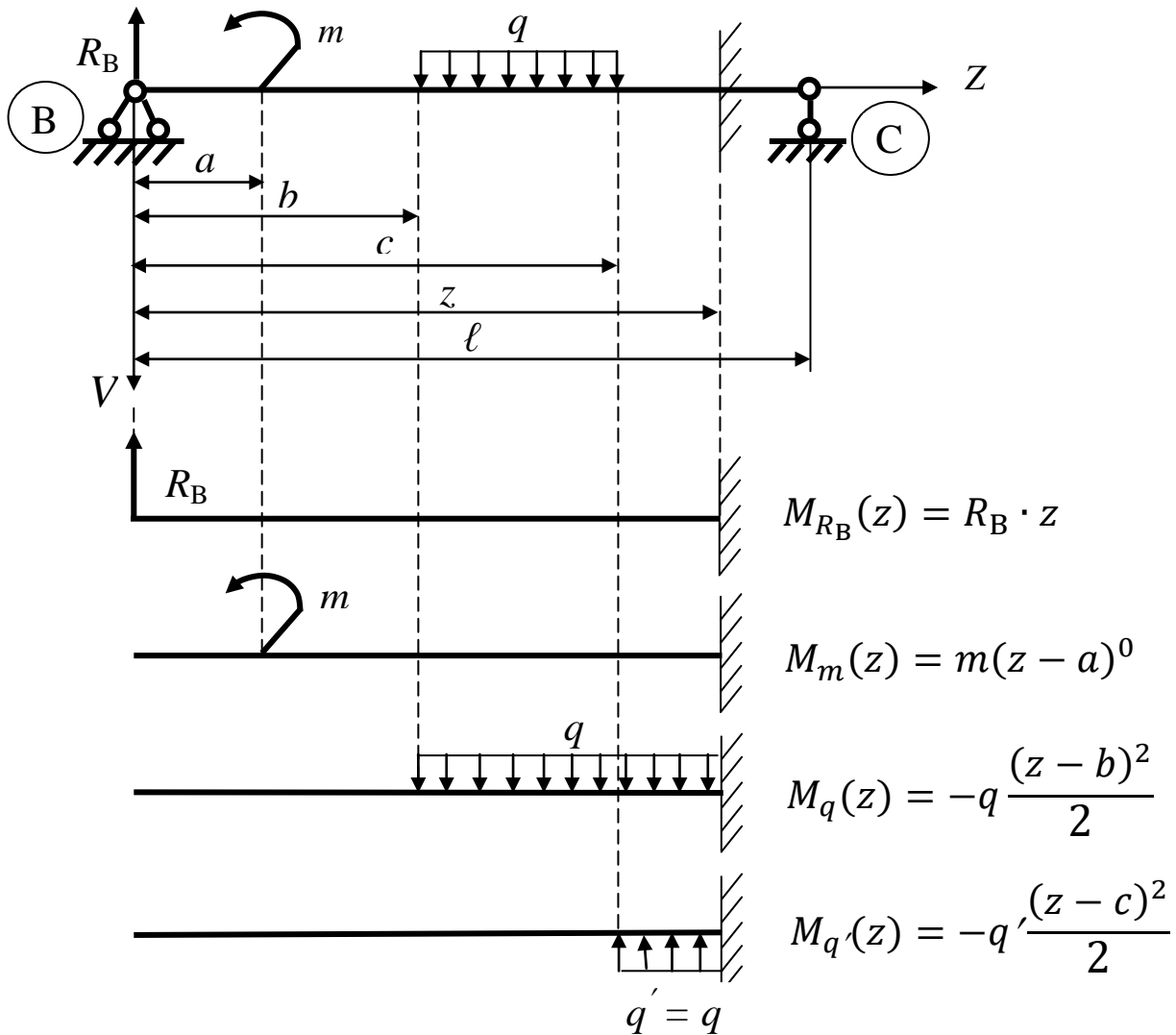


Рис. 7.3. Правила Клебша при составлении дифференциального уравнения изогнутой оси балки

В случае определения перемещений в составной балке с промежуточным шарниром в уравнение углов поворота и прогибов соответственно вводятся дополнительные слагаемые  $\Delta\theta(z - d)^0$  и  $\Delta\theta(z - d)$ . Здесь  $\Delta\theta$  – взаимный угол поворота поперечных сечений, примыкающих к промежуточному шарниру слева и справа,  $d$  – координата промежуточного шарнира. При этом соблюдаются все правила Клебша, в частности определение постоянных интегри-

рования  $C$  и  $D$ , а также  $\Delta\theta$  производится из граничных условий на опорах балки.

Построение изогнутой оси балки выполняется (рис. 7.4) с учетом представленных правил знаков для прогибов и углов поворота в зависимости от выбора места и направления координатных осей.

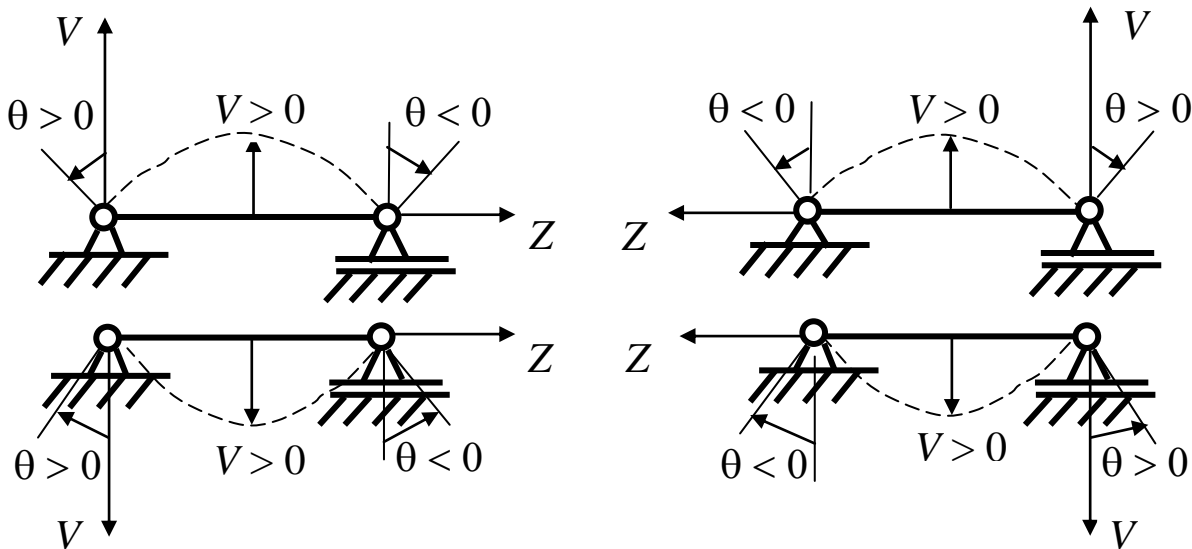


Рис. 7.4. К определению знаков прогибов и углов поворота

### Пример определения перемещений в простой двухопорной балке методом Клебша

Для балки (рис. 7.5,  $a$ ), требуется:

1) построить эпюры  $Q$ ,  $M_x$  и подобрать сечение из прокатного двутавра, полагая  $[\sigma] = 160$  МПа;

2) определить прогибы и углы поворота в характерных сечениях при  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и построить прогнутую ось балки;

3) проверить жесткость при  $[V] = \frac{\lambda}{300}$ .

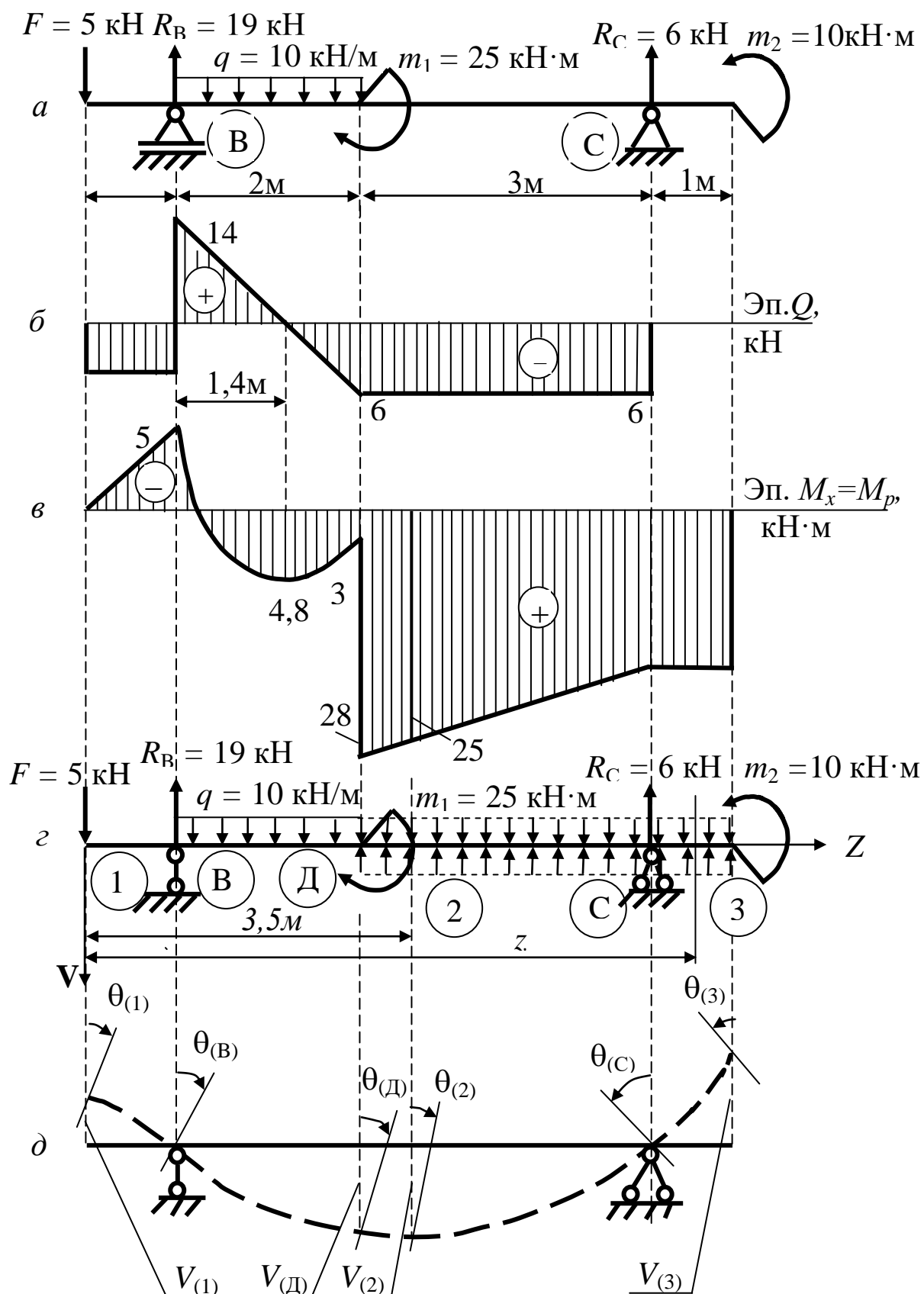


Рис. 7.5: а – Расчетная схема балки; б – эюора  $Q$ ; в – эюора  $M_x$ ;  
 г – преобразованная расчетная схема балки;  
 д – изогнутая ось балки

## Решение

Любым из способов, рассмотренных в задании «Изгиб», строим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 7.5, б, в).

Определяем опасное сечение и  $|M_x|$  по эпюре  $M_x$ . Подбор двутаврового поперечного сечения производим, используя условие прочности при изгибе:

$$W_{x \text{ треб}} \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{28}{160 \cdot 10^3} = 0,000175 \text{ м}^3.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8239 – 89) принимаем двутавровое сечение № 20, для которого  $W_x = 0,000184 \text{ м}^3$ ,  $J_x = 0,0000184 \text{ м}^4$ , жесткость сечения балки:

$$EJ_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0,0000184 = 3680 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Подготовим расчетную схему к составлению дифференциального уравнения изогнутой оси балки (рис. 7.5, з).

Начало координат выбираем на левом конце балки, направив ось прогибов вниз.

Обрывающуюся распределенную нагрузку продолжаем до конца балки, компенсируя ее на третьем и четвертом участках.

Внешний сосредоточенный момент умножаем на фиктивное плечо.

Составляем дифференциальное уравнение  $EJ_x V'' = -M_x$ .

$$EJ_x V'' = - \left[ -F \cdot z + R_B(z-1) - q \frac{(z-1)^2}{2} + m_1(z-3)^0 + q \frac{(z-3)^2}{2} + R_C(z-6) \right]. \quad (7.9)$$

Интегрируем первый раз и получаем уравнение углов поворота

$$EJ_x V' = C + F \frac{z^2}{2} - R_B \frac{(z-1)^2}{2} + q \frac{(z-1)^3}{6} - m_1(z-3) - q \frac{(z-3)^3}{6} - R_C \frac{(z-6)^2}{2}. \quad (7.10)$$

Интегрируем второй раз и получаем уравнение прогибов



$$\begin{aligned}
& EJ_x V \\
& = D + Cz + F \frac{z^3}{6} - R_B \frac{(z-1)^3}{6} \\
& + q \frac{(z-1)^4}{24} - m_1 \frac{(z-3)^2}{2} - q \frac{(z-3)^4}{24} \\
& - R_C \frac{(z-6)^3}{6}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяем из граничных условий:

а) при  $z = 1$  м  $V = 0$ ;

б) при  $z = 6$  м  $V = 0$ .

Подставляя эти условия, а также исходные данные в уравнение (7.11), получаем

$$\begin{cases} 0 = D + C \cdot 1 + 5 \frac{1^3}{6} \\ 0 = D + C \cdot 6 + 5 \frac{6^3}{6} - 19 \frac{(6-1)^3}{6} + 10 \frac{(6-1)^4}{24} - 25 \frac{(6-3)^2}{2} - 10 \frac{(6-3)^4}{24} \end{cases}$$

откуда

$$C = 20,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad D = -21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Определяем прогибы в характерных сечениях балки и в середине пролета по уравнению (7.11):

сечение (1).  $V_{(1)} = 0$ ,  $EJ_x V_{(1)} = D$ ,

$$V_{(1)} = -\frac{21,3}{3680} = -0,0058 \text{ м};$$

сечение (В).  $z_{(В)} = 1$  м,  $V_{(В)} = 0$ ;

сечение (Д).  $z_{(Д)} = 3$  м,

$$\begin{aligned}
& EJ_x V_{(Д)} = D + Cz_{(Д)} + F \frac{z_{(Д)}^3}{6} - R_B \frac{(z_{(Д)}-1)^3}{6} + q \frac{(z_{(Д)}-1)^4}{24}, \\
V_{(Д)} & = \frac{-21,3 + 20,5 \cdot 3 + 5 \frac{3^3}{6} - 19 \frac{(3-1)^3}{6} + 10 \frac{(3-1)^4}{24}}{3680} = 0,0119 \text{ м};
\end{aligned}$$

сечение (2).  $z_{(2)} = 3,5$  м,

$$EJ_x V_{(2)} = D + Cz_{(2)} + F \frac{z_{(2)}^3}{6} - R_B \frac{(z_{(2)}-1)^3}{6} + q \frac{(z_{(2)}-1)^4}{24},$$

$$V_{(2)} = \frac{-21,3 + 20,5 \cdot 3,5 + 5 \frac{3,5^3}{6} - 19 \frac{(3,5 - 1)^3}{6} + 10 \frac{(3,5 - 1)^4}{24}}{3680} = 0,013 \text{ м};$$

сечение (С).  $z_{(C)} = 6 \text{ м}$ ,  $V_{(C)} = 0$ ;

сечение (3).  $z_{(3)} = 7 \text{ м}$ ,

$$EJ_x V_{(3)} = D + Cz_{(3)} + P \frac{z_{(3)}^3}{6} - R_A \frac{(z_{(3)} - 1)^3}{6} + q \frac{(z_{(3)} - 1)^4}{24} - m_1 \frac{(z_{(3)} - 3)^2}{2} - q \frac{(z_{(3)} - 3)^4}{24} - R_B \frac{(z_{(3)} - 6)^3}{6},$$

$$V_{(3)} = \frac{-21,3 + 20,5 \cdot 7 + 5 \frac{7^3}{6} - 19 \frac{(7 - 1)^3}{6} + 10 \frac{(7 - 1)^4}{24} - 25 \frac{(7 - 3)^2}{2}}{3680} - \frac{10 \frac{(7 - 3)^4}{24} - 6 \frac{(7 - 6)^3}{6}}{3680} = -0,01 \text{ м}.$$

Определим углы поворота в этих же сечениях по уравнению (3.2):

сечение (1).  $z_{(1)} = 0$ ,  $EJ_x \theta_{(1)} = EJ_x V'_{(1)} = C$

$$\theta_{(1)} = V'_{(1)} = \frac{20,5}{3680} = 0,0056 \text{ рад};$$

сечение (В).  $z_{(B)} = 1 \text{ м}$ ,  $EJ_x \theta_{(B)} = EJ_x V'_{(B)} = C + F \frac{z_{(B)}^2}{2}$ ,

$$\theta_{(B)} = V'_{(B)} = \frac{20,5 + 5 \frac{1^2}{2}}{3680} = 0,0063 \text{ рад};$$

сечение (Д).  $z_{(D)} = 3 \text{ м}$ ,

$$EJ_x \theta_{(D)} = EJ_x V'_{(D)} = C + F \frac{z_{(D)}^2}{2} - R_B \frac{(z_{(D)} - 1)^2}{2} + q \frac{(z_{(D)} - 1)^3}{6},$$

$$\theta_{(D)} = V'_{(D)} = \frac{20,5 + 5 \frac{3^2}{2} - 19 \frac{(3 - 1)^2}{2} + 10 \frac{(3 - 1)^3}{6}}{3680} = 0,005 \text{ рад};$$

сечение (2).  $z_{(2)} = 3,5 \text{ м}$ ,

$$\begin{aligned}
 EJ_x \Theta_{(2)} &= EJ_x V'_{(2)} = \\
 &= C + F \frac{z_{(2)}^2}{2} - R_B \frac{(z_{(2)} - 1)^2}{2} \\
 &+ q \frac{(z_{(2)} - 1)^3}{6} - m_1 (z_{(2)} - 3) - q \frac{(z_{(2)} - 3)^3}{6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{(2)} &= V'_{(2)} = \\
 &= \frac{20,5 + 5 \frac{3,5^2}{2} - 19 \frac{(3,5 - 1)^2}{2} + 10 \frac{(3,5 - 1)^3}{6} - 25(3,5 - 3) - 10 \frac{(3,5 - 3)^3}{6}}{3680}
 \end{aligned}$$

$$= 0,001 \text{ рад};$$

сечение (C).  $z_{(C)} = 6 \text{ м},$

$$\begin{aligned}
 EJ_x \Theta_{(C)} &= EJ_x V'_{(C)} = \\
 &= C + F \frac{z_{(C)}^2}{2} - R_C \frac{(z_{(C)} - 1)^2}{2} + q \frac{(z_{(C)} - 1)^3}{6} - m_1 (z_{(C)} - 3) \\
 &- q \frac{(z_{(C)} - 3)^3}{6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{(C)} &= V'_{(C)} = \\
 &= \frac{20,5 + 5 \frac{6^2}{2} - 19 \frac{(6 - 1)^2}{2} + 10 \frac{(6 - 1)^3}{6} - 25(6 - 3) - 10 \frac{(6 - 3)^3}{6}}{3680} =
 \end{aligned}$$

$$= -0,0105 \text{ рад};$$

сечение (3).  $z_{(3)} = 7 \text{ м},$

$$\begin{aligned}
 EJ_x \Theta_{(3)} &= EJ_x V'_{(3)} = \\
 &= C + P \frac{z_{(3)}^2}{2} - R_A \frac{(z_{(3)} - 1)^2}{2} + q \frac{(z_{(3)} - 1)^3}{6} - m_1 (z_{(3)} - 3) - \\
 &- q \frac{(z_{(3)} - 3)^3}{6} - R_B \frac{(z_{(3)} - 1)^2}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{(3)} &= V'_{(3)} = \\
 &= \frac{20,5 + 5 \frac{7^2}{2} - 19 \frac{(7 - 1)^2}{2} + 10 \frac{(7 - 1)^3}{6} - 25(7 - 3) - 10 \frac{(7 - 3)^3}{6} - \\
 &- 10 \frac{(7 - 3)^3}{6} - 6 \frac{(7 - 1)^2}{2}}{3680}
 \end{aligned}$$

$$= -0,013 \text{ рад}.$$

По вычисленным значениям прогибов и углов поворота строим изогнутую ось балки (рис. 7.5, д). Положительные прогибы откладываем вниз (по направлению оси  $V$ ), отрицательные прогибы откладываем вверх. При положительном угле поворота сечение поворачиваем по ходу часовой стрелки, а при отрицательном – против хода часовой стрелки.

### Пример определения перемещений в составной балке с промежуточным сквозным шарниром методом Клебша

Для балки, расчетная схема которой показана на рис. 7.6, требуется:

- 1) построить эпюры  $Q$ ,  $M_x$  и подобрать сечение из прокатного двутавра, полагая  $[\sigma] = 160$  МПа;
- 2) определить прогибы и углы поворота в характерных сечениях при  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и построить прогнутую ось балки;
- 3) проверить жесткость при  $[V] = \frac{\lambda}{300}$ .

#### Решение

После построения эпюр  $Q$  и  $M_x$  из условия прочности при изгибе по сортаменту (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 20<sup>а</sup> с  $J_x = 1970 \text{ см}^4 = 1970 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , тогда

$$EJ_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1970 \cdot 10^{-8} = 3940 \cdot 10^3 \text{ н} \cdot \text{м}^2 = 3940 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Записываем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и дважды его интегрируем, учитывая наличие промежуточного шарнира:

$$EJ_x V'' = -R_B \cdot z + m(z-2)^0 + q \frac{(z-2)^2}{2} - q \frac{(z-6)^2}{2} - F(z-7);$$

$$\begin{aligned} EJ_x \Theta &= EJ_x V' = \\ &= C - R_B \frac{z^2}{2} + m(z-2) + q \frac{(z-2)^3}{6} + EJ_x \Delta \Theta_{(3)}(z-6)^0 \\ &\quad - q \frac{(z-6)^3}{6} - F \frac{(z-7)^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ_x V &= D + C \cdot z - R_B \frac{z^3}{6} + m \frac{(z-2)^2}{2} + q \frac{(z-2)^4}{24} + EJ_x \Delta \Theta_{(3)}(z-6) - \\ &\quad - q \frac{(z-6)^4}{24} - F \frac{(z-7)^3}{6}. \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$V_{(B)} = V_{(0)} = 0; \quad V_{(C)} = V_{(9)} = 0; \quad \theta_{(C)} = \theta_{(9)} = 0.$$

Первое условие дает  $D = 0$ , а два остальных дают систему уравнений относительно  $C$  и  $\Delta\theta_{(3)}$ :

$$\begin{cases} 0 = C \cdot 9 + EJ_x \Delta\theta_{(3)} \cdot 3 - 15 \frac{9^3}{6} + 10 \frac{7^2}{2} + 10 \frac{7^4}{24} - 10 \frac{3^4}{24} - 40 \frac{2^3}{6}; \\ 0 = C + EJ_x \Delta\theta_{(3)} - 15 \frac{9^2}{2} + 10 \cdot 7 + 10 \frac{7^3}{6} - 10 \frac{3^3}{6} - 40 \frac{2^2}{2}. \end{cases}$$

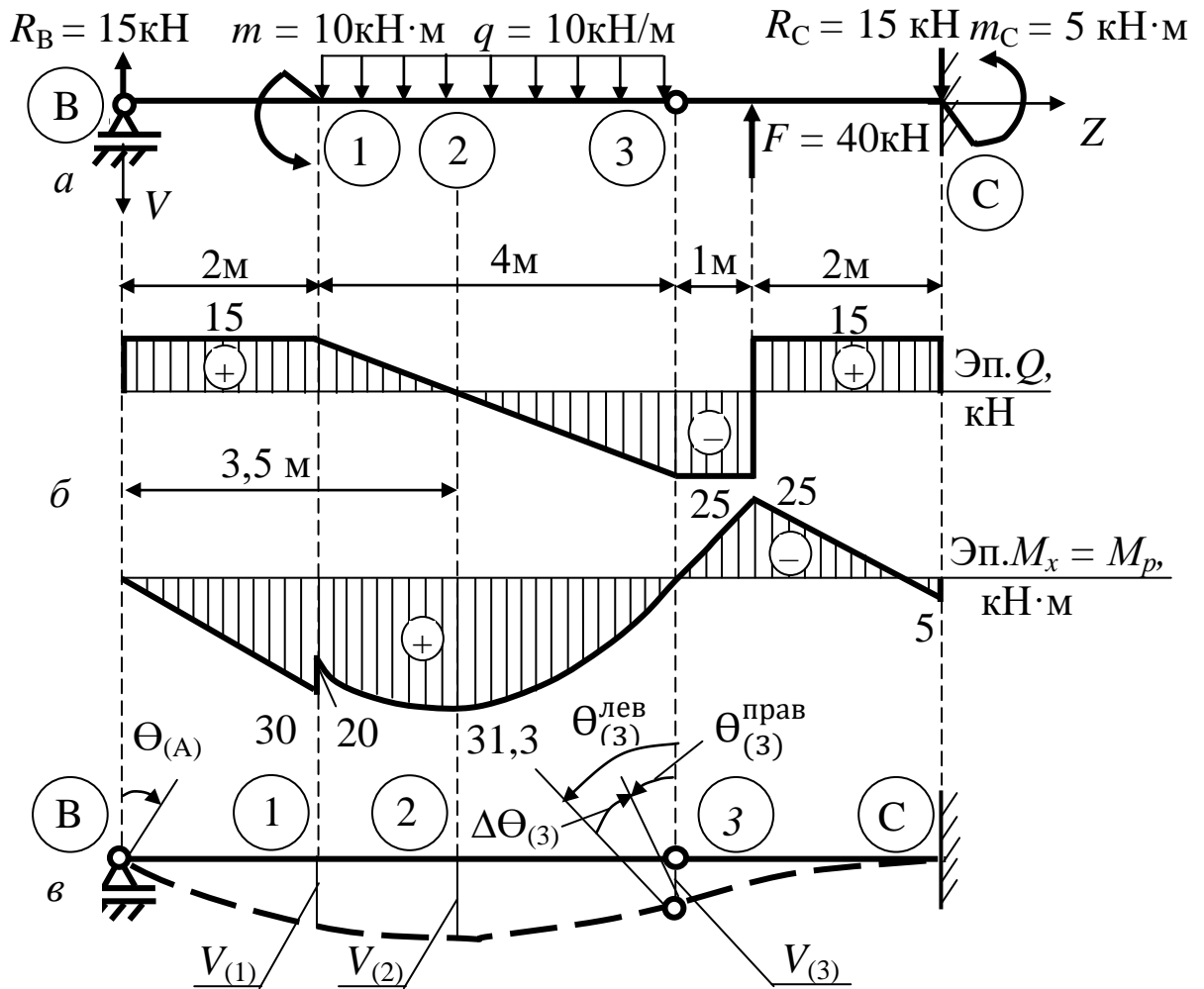


Рис. 7.6: а – Расчетная схема балки; б – эпюры  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$ ; в – изогнутая ось балки

Откуда  $C = 65,26 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $\Delta\theta_{(3)} = 0,0065 \text{ рад}$ .

Определяем прогибы и углы поворота в характерных сечениях:

$$V_{(1)} = \frac{1}{3940} \left( 65,26 \cdot 2 - 15 \frac{2^3}{6} \right) = 0,0282 \text{ м} = 2,82 \text{ см (вниз)};$$

$$V_{(2)} = \frac{1}{3940} \left( 65,26 \cdot 3,5 - 15 \frac{3,5^3}{6} + 10 \frac{1,5^2}{2} + 10 \frac{1,5^4}{24} \right) = 0,0342 \text{ м}$$

$$= 3,42 \text{ см (вниз);}$$

$$V_{(3)} = \frac{1}{3940} \left( 65,26 \cdot 6 - 15 \frac{6^3}{6} + 10 \frac{4^2}{2} + 10 \frac{4^4}{24} \right) = 0,0093 \text{ м}$$

$$= 0,93 \text{ см (вниз);}$$

$$\theta_{(A)} = \frac{1}{3940} 65,26 = 0,0166 \text{ рад (по часовой стрелке);}$$

$$\theta_{(3)}^{\text{лев}} = \frac{1}{3940} \left( 65,26 - 15 \frac{6^2}{2} + 10 \cdot 4 + 10 \frac{4^3}{6} \right)$$

$$= -0,0147 \text{ рад (против часовой стрелки);}$$

$$\theta_{(3)}^{\text{прав}} = \theta_{(3)}^{\text{лев}} + \Delta\theta_{(3)} = -0,0147 + 0,0065 =$$

$$= -0,0082 \text{ рад (против часовой стрелки).}$$

## Практическое занятие № 8

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ СПОСОБОМ ВЕРЕЩАГИНА

**Цель работы:** дать возможность студентам приобрести навыки самостоятельного определения перемещений в статически определимых балках.

Помимо метода Максвелла – Мора, основанного на вычислении соответствующего определенного интеграла, определение перемещений (прогибов и углов поворота) может быть произведено способом Верещагина, являющимся способом «перемножения эпюр». В этом случае пользуются следующим выражением:

$$\Delta_{iF} = \frac{\omega_F \cdot Y}{E \cdot J_x}, \quad (8.1)$$

где  $\Delta_{iF}$  – искомое перемещение;  $\omega_F$  – площадь грузовой эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки;  $Y$  – ордината единичной эпюры изгибающих моментов от единичного нагружения балки, взятая под центром тяжести площади грузовой эпюры.

При определении прогиба или угла поворота единичное нагружение создается соответственно единичной силой или единичным моментом, прилагаемыми к балке в тех сечениях, где определяется перемещение. Определение перемещений при сложном виде грузовой эпюры выполняется по участкам балки, на каждом из

которых единичная эпюра должна быть линейно – гладкой, т. е. описываться одной линейной зависимостью. При этом в пределах каждого из таких участков на грузовой эпюре выделяются простые фигуры, для которых легко определяются площади и положение центров тяжести. Затем суммируются произведения площади  $\omega_{Fi}$  каждой простой фигуры на ординату  $Y_i$  единичной эпюры, взятую под центром тяжести соответствующей простой фигуры. В Приложении 2 приведены значения площадей и координаты центров тяжести наиболее часто встречающихся простых геометрических фигур. Формула (8.1) в случае сложного вида грузовой эпюры имеет вид

$$\Delta_{iF} = \frac{\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i)}{E \cdot J_x}, \quad (8.2)$$

где  $i$  – номер простой фигуры в грузовой эпюре.

Направления единичной силы и единичного момента, выбираемые произвольно, указывают предположительные направления искомых перемещений.

Полученные положительные значения перемещений подтверждают верность выбранных направлений перемещений, а отрицательные значения указывают на то, что перемещения направлены противоположно направлению единичного нагружения.

### **Пример определения перемещений в простой двухпорной балке способом Верещагина**

Для заданной схемы балки (рис. 7.5, а) определить прогибы в сечениях (1) и (2) и угол поворота поперечного сечения (С). Сравнить прогибы и угол поворота, вычисленные по методу начальных параметров и по способу Верещагина, в указанных сечениях.

Определим прогиб в сечении (1). Для этого разобьем грузовую эпюру  $M_F$  на простые фигуры по участкам расчетной схемы балки (рис. 8.1, а).

Определим площади  $\omega_{Fi}$  простых фигур грузовой эпюры  $M_F$ :

$$\begin{aligned} \omega_{F1} &= -\frac{1}{2} 1 \cdot 5 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & \omega_{F4} &= \frac{1}{2} 2 \cdot 3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \\ \omega_{F2} &= -\frac{1}{2} 2 \cdot 5 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & \omega_{F5} &= \frac{1}{2} 3 \cdot 28 = 42 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \end{aligned}$$

$$\omega_{F3} = q \frac{2^3}{12} = 6,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \omega_{F6} = \frac{1}{2} 3 \cdot 10 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Нагрузим балку единичной силой  $F = 1$  в сечении (1) (рис. 8.1, б) и построим единичную эпюру  $M_{(1)}^V$  (рис. 8.1, в).

Определим ординаты единичной эпюры  $M_{(1)}^V$  под центрами тяжести площадей  $\omega_{Fi}$  (рис. 8.1, а). Для удобства вычисления ординат единичной эпюры, кроме  $Y_1$ , можно рассмотреть подобие любых треугольников, например  $eab$  и  $ecd$ . Из подобия следует, что

$$\frac{Y_i}{1} = \frac{a_i}{5}, \quad Y_i = 0,2a_i,$$

где  $a_i$  – расстояние от центра тяжести каждой площади  $\omega_{pi}$ , кроме  $\omega_{F1}$ , до точки  $e$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a_1 &= \frac{2}{3} \text{ м} = 0,67 \text{ м}, \quad Y_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = -0,67 \text{ м}, \\ a_2 &= 4,33 \text{ м}, \quad Y_2 = -0,2 \cdot 4,33 = -0,866 \text{ м}, \\ a_3 &= 4 \text{ м}, \quad Y_3 = -0,2 \cdot 4 = -0,8 \text{ м}, \\ a_4 &= 3,66 \text{ м}, \quad Y_4 = -0,2 \cdot 3,66 = -0,732 \text{ м}, \\ a_5 &= 2 \text{ м}, \quad Y_5 = -0,2 \cdot 2 = -0,4 \text{ м}, \\ a_6 &= 1 \text{ м}, \quad Y_6 = -0,2 \cdot 1 = -0,2 \text{ м}. \end{aligned}$$

Знак «минус» соответствует знаку единичной эпюры.

Вычислим прогиб в сечении (1), перемножив грузовую  $M_F$  и единичную  $M_{(1)}^V$  эпюры:



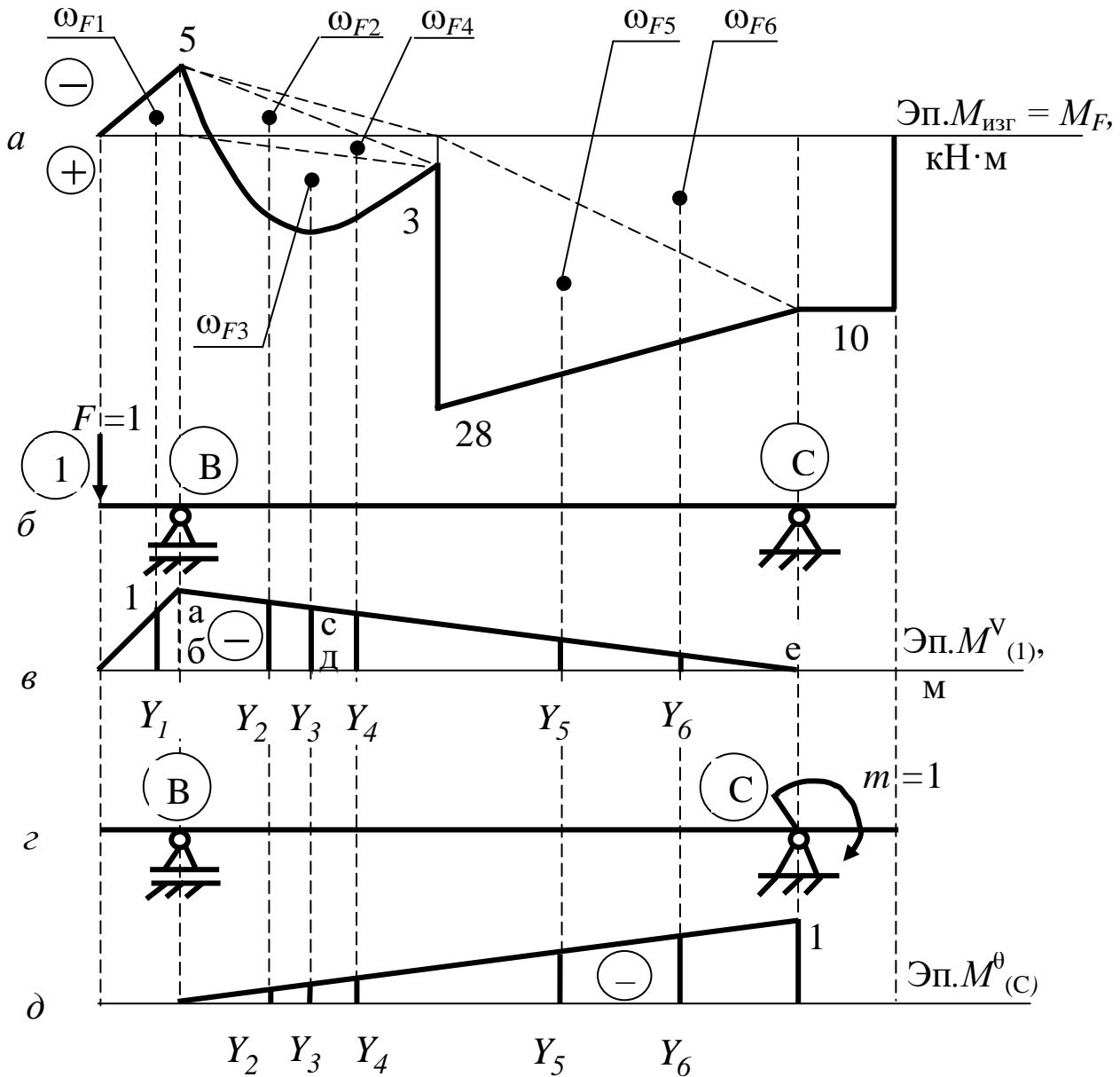


Рис. 8.1. К определению: а, б, в – прогиба в сечении (1);  
а, г, д – угла поворота в сечении (С)

$$\begin{aligned}
 V_{(1)} &= \frac{1}{EJ_x} (\omega_{F1}Y_1 + \omega_{F2}Y_2 + \omega_{F3}Y_3 + \omega_{F4}Y_4 + \omega_{F5}Y_5 + \omega_{F6}Y_6) = \\
 &= \frac{1}{3680} (2,5 \cdot 0,67 + 5 \cdot 0,867 - 6,67 \cdot 0,8 - 3 \cdot 0,732 - 42 \\
 &\quad \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,2) = -0,0058 \text{ м}
 \end{aligned}$$

противоположно направлению единичной силы

Определим угол поворота поперечного сечения (С).

Нагрузим балку единичным моментом  $m = 1$  в сечении (С) (рис. 8.1, г) и построим единичную эпюру  $M^{\theta}_{(C)}$  (рис. 8.1, д).

Ординаты  $M_{(C)}^{\theta}$  единичной эпюры под центрами тяжести площадей  $\omega_{Fi}$  грузовой эпюры определим по вышеуказанному выражению

$$Y_i = 0,2a_i,$$

где  $a_i$  – расстояние от центра тяжести каждой площади  $\omega_{Fi}$  до сечения (В).

$$\begin{aligned}\text{Тогда } a_2 &= 0,67 \text{ м, } Y_2 = -0,2 \cdot 0,67 = -0,134, \\ a_3 &= 1 \text{ м, } Y_3 = -0,2 \cdot 1 = -0,2, \\ a_4 &= 1,33 \text{ м, } Y_4 = -0,2 \cdot 1,33 = -0,266, \\ a_5 &= 3 \text{ м, } Y_5 = -0,2 \cdot 3 = -0,6, \\ a_6 &= 4 \text{ м, } Y_6 = -0,2 \cdot 4 = -0,8.\end{aligned}$$

Вычислим угол поворота поперечного сечения (С), перемножив грузовую  $M_F$  и единичную  $M_{(C)}^{\theta}$  эпюры:

$$\begin{aligned}\theta_{(C)} &= \frac{1}{EJ_x} (\omega_{F2}Y_2 + \omega_{F3}Y_3 + \omega_{F4}Y_4 + \omega_{F5}Y_5 + \omega_{F6}Y_6) = \\ &= \frac{1}{3680} (5 \cdot 0,134 + 6,67 \cdot 0,2 - 3 \cdot 0,266 - 42 \cdot 0,6 - 15 \cdot 0,8) = \\ &= 0,0105 \text{ рад}\end{aligned}$$

(в направлении противоположном единичному моменту)

Определим прогиб в середине пролета – в сечении (2) (рис. 8.2).

Нагрузим балку единичной силой  $F = 1$  в сечении (2) (рис. 8.2, б) и построим единичную эпюру  $M_{(2)}^V$  (рис. 8.2, в).

Единичная эпюра на третьем участке (между сечениями (2) и (В) представлена не одной линейной зависимостью, а двумя), поэтому необходимо грузовую эпюру  $M_F$  на третьем участке дополнительно разбить (см. рис. 8.2, а).

Определим площади грузовой эпюры  $M_F$  (рис. 8.2, а) и ординаты единичной эпюры  $M_{(2)}^V$  (рис. 8.2, в) под центрами тяжести площадей  $\omega_{Fi}$ .

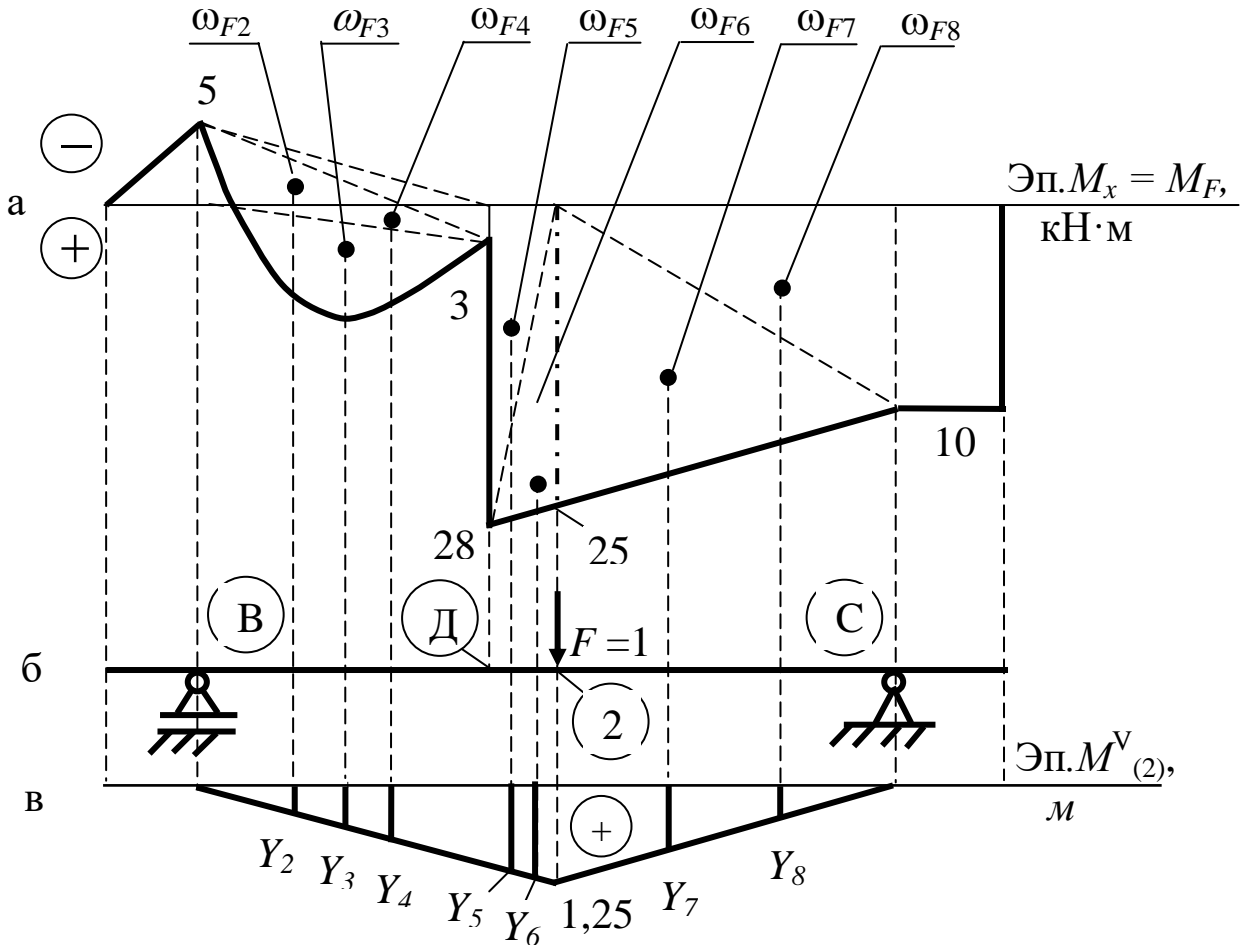


Рис. 8.2. К определению прогиба  
в середине пролета балки (в сечении 2)

Тогда

$$\omega_{F2} = -\frac{1}{2} 2 \cdot 5 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_2 = -0,5 \cdot 0,67 = -0,335 \text{ м},$$

$$\omega_{F3} = 10 \frac{2^3}{12} = 6,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_3 = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ м},$$

$$\omega_{F4} = \frac{1}{2} 2 \cdot 3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_4 = 0,5 \cdot 1,33 = 0,65 \text{ м},$$

$$\omega_{F5} = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 28 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_5 = 0,5 \cdot 2,17 = 1,085 \text{ м},$$

$$\omega_{F6} = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 25 = 6,25 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_6 = 0,5 \cdot 2,33 = 1,165 \text{ м},$$

$$\omega_{F7} = \frac{1}{2} 2,5 \cdot 25 = 31,25 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_7 = 0,5 \cdot 1,67 = 0,835 \text{ м},$$

$$\omega_{F8} = \frac{1}{2} 10 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad Y_8 = 0,5 \cdot 0,83 = 0,415 \text{ м}.$$

Вычислим значение прогиба в сечении (2), перемножив эпюры  $M_F$  и  $M_{(2)}^V$ :

$$V_{(2)} = \frac{1}{EJ_x} (\omega_{F2}Y_2 + \omega_{F3}Y_3 + \omega_{F4}Y_4 + \omega_{F5}Y_5 + \omega_{F6}Y_6 + \omega_{F7}Y_7 + \omega_{F8}Y_8) =$$

$$= \frac{1}{3680} (-5 \cdot 0,335 + 6,67 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,65 + 7 \cdot 1,085 + 6,25 \cdot 1,165 + 31,25 \cdot 0,835 + 12,5 \cdot 0,415) =$$

$$= 0,013 \text{ м (в направлении единичной силы).}$$

По полученным значениям прогибов видно, что

$$V_{max} = V_{(2)} = 0,013 \text{ м} = 1,3 \text{ см} < [V] = \frac{500}{300} = 1,67 \text{ см.}$$

Таким образом, условие жесткости выполняется.

### **Пример определения перемещений в составной балке с промежуточным сквозным шарниром способом Верещагина**

Для заданной балки (рис. 8.3) способом Верещагина определить прогибы в сечениях (1) и (3) и углы поворота в сечениях (В) и (3). Расчет перемещений для балки с промежуточным шарниром по способу Верещагина представлен в табличной форме (табл. 8.1–8.5)

По полученным значениям прогибов методом Клебша видно, что  $V_{max} = V(2) = 3,42 \text{ см.}$

Так как

$$V_{max} = V(2) = 3,42 \text{ см} > [V] = \frac{900}{300} = 3 \text{ см,}$$

то условие жесткости не выполняется. Таким образом, необходимо увеличить жесткость сечения, приняв новое значение момента инерции:

$$J_x^{\text{нов}} = J_x^{\text{стар}} \frac{V_{max}}{[V]} = 1970 \frac{3,42}{3} = 2245,8 \text{ см}^4.$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) принимаем новое сечение – двутавр № 22 с  $J_x = 2530 \text{ см}^4$ , что позволит уменьшить  $V_{max}$  в  $\eta = \frac{J_x^{\text{нов}}}{J_x^{\text{стар}}} = \frac{2530}{1970} = 1,284$  раза. Все остальные перемещения уменьшатся в такой же пропорции.

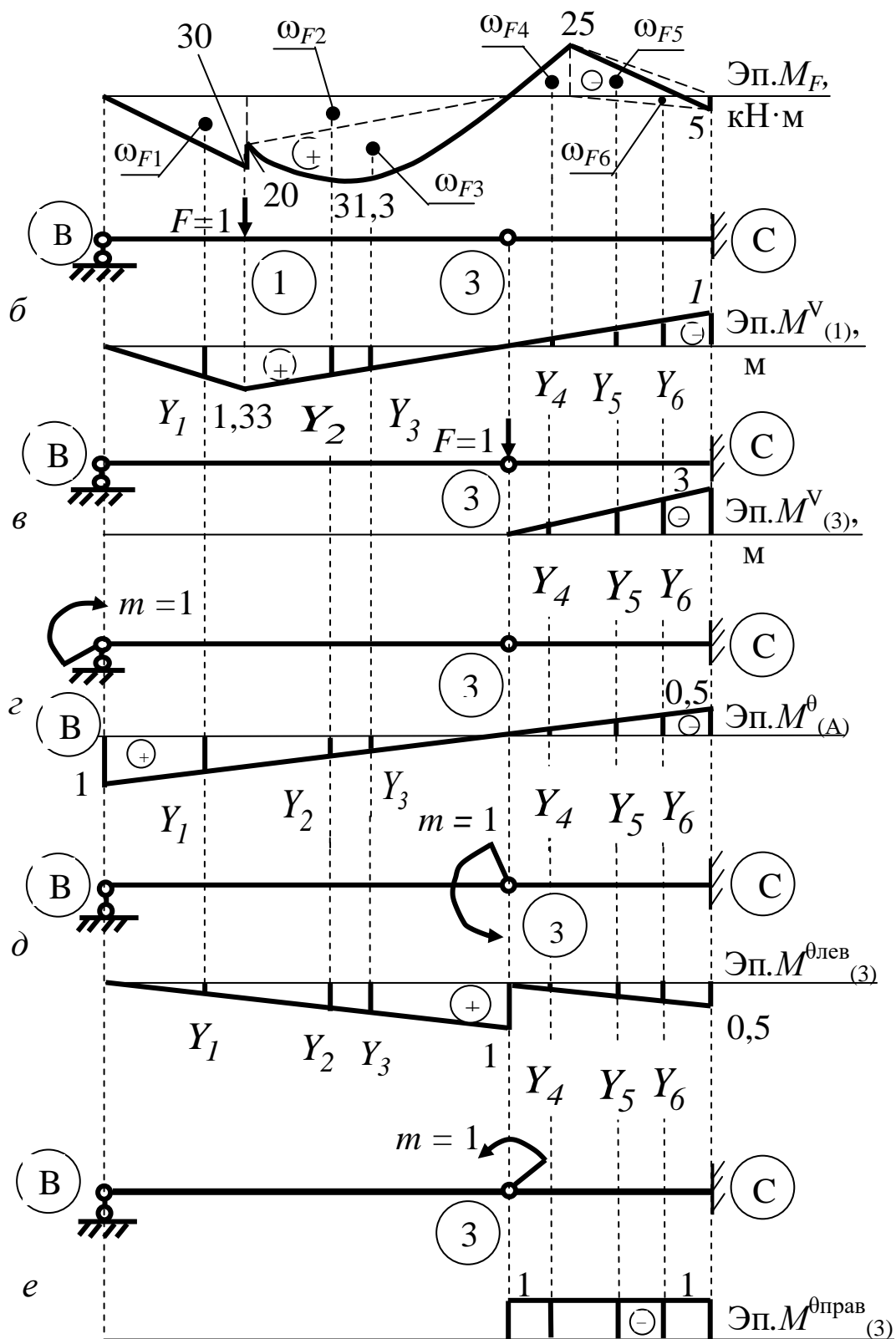


Рис. 8.3. К определению прогибов и углов поворота в характерных сечениях для составной балки с промежуточным сквозным шарниром способом Верещагина

Таблица 8.1

Определение прогиба  $V_{(1)}$ 

$i$	$\omega_{Fi}$ , кН · м <sup>2</sup>	$Y_i$ , м (рис. 8.3, б)	$\omega_{Fi} \cdot Y_i$ , кН · м <sup>3</sup>
1	30	0,889	26,67
2	40	0,889	35,56
3	53,33	0,667	35,571
4	-12,5	-0,222	2,775
5	-25	-0,556	13,9
6	5	-0,778	-3,889

$$\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i) = 110,587 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

$$V_{(1)} = \frac{\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i)}{EJ_x} = \frac{110,587}{3940} = 0,000281 \text{ м} = 0,0281 \text{ см}.$$

(в направлении единичной силы).

Таблица 8.2

Определение прогиба  $V_{(3)}$ 

$i$	$\omega_{Fi}$ , кН · м <sup>2</sup>	$Y_i$ , м (рис. 8.3, в)	$\omega_{Fi} \cdot Y_i$ , кН · м <sup>3</sup>
1	30	0	0
2	40	0	0
3	53,33	0	0
4	-12,5	-0,667	8,338
5	-25	-1,667	41,675
6	5	-2,333	-11,665

$$\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i) = 33,348 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

$$V_{(3)} = \frac{\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i)}{EJ_x} = \frac{33,348}{3940} = 0,0097 \text{ м} = 0,97 \text{ см}$$

(в направлении единичной силы).

Таблица 8.3

Определение угла поворота  $\theta_{(B)}$ 

$i$	$\omega_{Fi}$ , кН · м <sup>2</sup>	$Y_i$ (рис. 8.3, з)	$\omega_{Fi} \cdot Y_i$ , кН · м <sup>2</sup>
1	30	-0,778	23,34
2	40	0,444	17,76
3	53,33	0,333	17,76
4	-12,5	-0,111	1,38
5	-25	-0,278	6,95

$i$	$\omega_{Fi}, \text{кН} \cdot \text{м}^2$	$Y_i$ (рис. 8.3, з)	$\omega_{Fi} \cdot Y_i, \text{кН} \cdot \text{м}^2$
6	5	-0,389	-1,95

$$\Theta_{(3)} = \frac{\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i)}{EJ_x} = \frac{65,2}{3940} = 0,0166 \text{ рад.}$$

(в направлении единичного момента).

Таблица 8.4

Определение угла поворота  $\Theta_{(3)}^{\text{лев}}$

$i$	$\omega_{Fi}, \text{кН} \cdot \text{м}^2$	$Y_i$ (рис. 8.3, д)	$\omega_{Fi} \cdot Y_i, \text{кН} \cdot \text{м}^2$
1	30	0,222	6,66
2	40	0,556	22,22
3	53,33	0,667	35,571
4	-12,5	0,111	-1,388
5	-25	0,278	-6,946
6	5	0,389	1,944

$$\Theta_{(3)}^{\text{лев}} = \frac{\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i)}{EJ_x} = \frac{58,06}{3940} = 0,0147 \text{ рад.}$$

(в направлении единичного момента).

Таблица 8.5

Определение угла поворота  $\Theta_{(3)}^{\text{прав}}$

$i$	$\omega_{Fi}, \text{кН} \cdot \text{м}^2$	$Y_i$ (рис. 8.3, е)	$\omega_{Fi} \cdot Y_i, \text{кН} \cdot \text{м}^2$
1	30	0	0
2	40	0	0
3	53,33	0	0
4	-12,5	-1	12,5
5	-25	-1	25
6	5	-1	-5

$$\Theta_{(3)}^{\text{лев}} = \frac{\Sigma(\omega_{Fi} \cdot Y_i)}{EJ_x} = \frac{32,5}{3940} = 0,0083 \text{ рад.}$$

(в направлении единичного момента).

### Задания для самостоятельной работы

Для выполнения расчетно-графической работы «Расчет балки на прочность и жесткость» (2 часть) необходимо методом Клебша определить прогибы и углы поворота, в количестве достаточном для построения изогнутой оси балки, а затем наибольшие значения прогиба и угла поворота определить способом Верещагина с целью проверки.

### Практическое занятие № 9

## РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

**Цель работы:** оказать помощь студентам в приобретении навыков самостоятельного расчета центрально сжатых стержней на устойчивость.

### Основные понятия

*Устойчивостью* называется способность конструкции и ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Устойчивость или неустойчивость прямолинейной формы продольной оси сжатого стержня существенно зависит от величины сжимающей силы.

Нагрузка на стержень, при которой прямолинейная форма оси перестаёт быть формой устойчивого равновесия, называется *критической нагрузкой* или *критической силой* –  $F_{кр}$ . При нагрузках, меньших критической, прямолинейная форма оси стержня – устойчива. При нагрузках больше критической прямолинейная форма оси стержня становится неустойчивой и стержень переходит к новой криволинейной форме равновесия, при которой происходит резкое нарастание прогибов и напряжений в стержне.

В конструкциях и сооружениях допускаются нагрузки значительно меньше критических. Отношение критической нагрузки к фактической называется *коэффициентом запаса устойчивости*

$$n_y = \frac{F_{кр}}{P}. \quad (9.1)$$

Рекомендуемые величины коэффициента запаса устойчивости  $n_y$  существенно зависят от материала стержня:

– для сталей  $n_y = 1,8 \div 3,0$ ;



– для дерева  $n_y = 2,8 \div 3,2$ ;

– для чугуна  $n_y = 5 \div 5,5$ .

Допускаемая сжимающая нагрузка из расчёта на устойчивость

$$[F] = \frac{F_{кр}}{n_y}. \quad (9.2)$$

### **Формула Эйлера для определения критической силы**

В общем случае сжатого стержня критическое значение нагрузки может быть выражено, как

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\ell^2}, \quad (9.3)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода;  $J_{min}$  – наименьший из главных центральных моментов инерции сечения;  $\ell$  – полная длина стержня.

Формула (9.3) впервые была получена в 1744 г. великим математиком Леонардом Эйлером (1707–1783).

Следует обратить внимание, что критическая сила не зависит от характеристик прочности материала. Для двух стержней с одинаковыми геометрическими характеристиками, но изготовленными из разной стали (например, – малоуглеродистой стали и высокопрочной низколегированной стали) – критические силы одинаковы.

### **Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы**

Формула Эйлера (9.3) получена для стержня шарнирно закрепленного по концам. Такой способ закрепления называется основным. Наиболее часто встречающиеся способы закрепления приведены в Приложении 3.

Критическая сила в общем случае определяется по формуле

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu\ell)^2}, \quad (9.4)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведенной длины (зависит от способа закрепления торцевых и промежуточных сечений стержня);  $\mu\ell$  – приведенная или свободная длина стержня.

## Пределы применимости формулы Эйлера

Основная формула (9.4) для критической силы справедлива только при статических нагрузках и при критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала стержня (справедлив закон Гука)

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq \sigma_{пц}. \quad (9.5)$$

Для определения границы применимости формулы Эйлера найдем нормальное напряжение, соответствующие критической силе

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu\ell)^2 A} \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu\ell}{i_{min}}\right)^2}, \quad (9.6)$$

где  $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$  – радиус инерции поперечного сечения стержня.

Введем понятие *гибкость стержня*

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}. \quad (9.7)$$

Тогда

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (9.8)$$

Обозначив через  $\lambda_{пред}$  гибкость стержня, для которого критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  равно пределу пропорциональности  $\sigma_{пц}$  получим

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (9.9)$$

Для стержней, у которых  $\lambda > \lambda_{пред}$  (для стали ст.3  $\lambda_{пред} = 100$ ) справедлива формула Эйлера (9.8), так как критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  не превышает предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ .

## Определение критической силы и критических напряжений за пределами пропорциональности. Формула Ясинского

Для стержней, у которых  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , критические напряжения  $\sigma_{\text{кр}} > \sigma_{\text{пц}}$ , поэтому для определения критической силы нужно пользоваться эмпирической формулой Ф. С. Ясинского (1856–1899) – русский инженер и механик:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2; \quad (9.10)$$

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A.$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – числовые коэффициенты, имеющие размерность напряжения – (приложение 2);  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;  $\lambda$  – гибкость стержня, определяемая по формуле (9.7).

Обозначим через  $\lambda_0$  гибкость стержней, для которых критическое напряжение  $\sigma_{\text{кр}}$  равно предельному напряжению при сжатии:

- для пластичных материалов  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}$ ;
- для хрупких материалов  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{в}}$ .

Эмпирическая формула (9.10) используется при определении критической силы для стержней, гибкость которых заключена в интервале от  $\lambda_0$  до  $\lambda_{\text{пред}}$  (для стали ст.3  $40 < \lambda < 100$ ). Стержни, у которых  $\lambda < \lambda_0$ , называются стержнями малой гибкости и рассчитываются только на прочность.

Значения  $\lambda_{\text{пред}}$  и  $\lambda_0$  для некоторых материалов даны в Приложении 4.

**Пример 1.** Задан дюралюминиевый стержень:  $\ell = 1,5$  м;  $D = 5$  см;  $d = 3$  см;  $\sigma_{\text{пц}} = 170$  МПа;  $E = 0,71 \cdot 10^5$  МПа; (рис. 9.1).

Определить  $P_{\text{кр}}$ ,  $\sigma_{\text{кр}}$ .

Решение:

Момент инерции кольцевого сечения

$$J_x = J_y = J_{\text{min}} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{3,14}{64} (5^4 - 3^4) = 26,69 \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения

$$A_{\text{бр}} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (5^2 - 3^2) = 12,56 \text{ см}^2.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{6p}}} = \sqrt{\frac{26,69}{12,56}} = 1,46 \text{ см.}$$

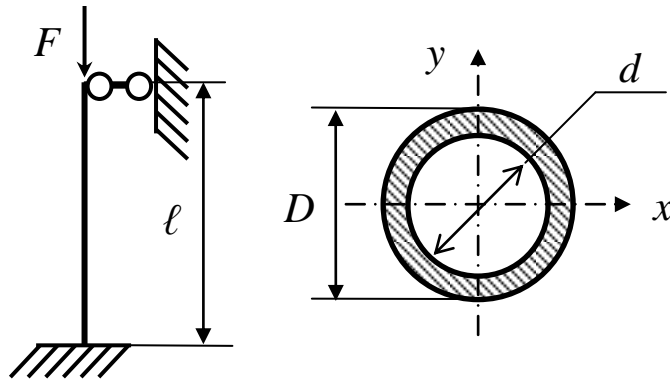


Рис. 9.1. Схема нагружения

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 150}{1,46} = 71,92,$$

где  $\mu = 0,7$  (см. Приложение 3).

Предельная гибкость

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 0,71 \cdot 10^5}{170}} = 64.$$

Так как гибкость стержня  $\lambda = 71,92 > \lambda_{пред} = 64$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера (9.4)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,71 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 26,69 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 1,5)^2} = 169,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 169,4 \text{ кН.}$$

Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{169,4 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 134,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 134,9 \text{ МПа.}$$

**Пример 2.** Материал стержня – чугун;  $\sigma_{пц} = 180 \text{ МПа}$ ;  $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\ell = 1,2 \text{ м}$ ;  $d = 8 \text{ см}$  (рис. 9.2).

Определить  $P_{кр}$ ,  $\sigma_{кр}$ .

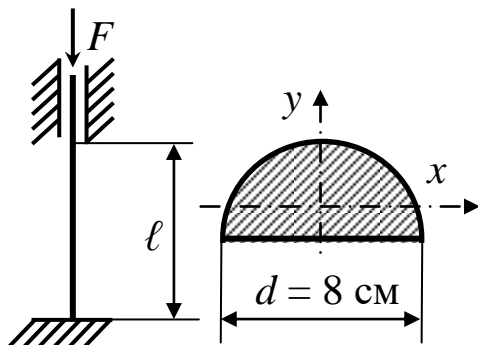


Рис. 9.2. Схема нагружения стержня

Решение:

Момент инерции

$$J_{min} = J_x = 0,11 \cdot r^4 = 0,11 \cdot 4^4 = 28,16 \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения

$$A_{бр} = \frac{\pi d^2}{8} = 0,393 \cdot 8^2 = 25,15 \text{ см}^2.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{бр}}} = \sqrt{\frac{28,16}{25,15}} = 1,06 \text{ см}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 120}{1,06} = 56,6,$$

где  $\mu = 0,5$  (см. Приложение 3).

Предельная гибкость

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 1,2 \cdot 10^5}{180}} = 80.$$

Так как гибкость стержня  $\lambda = 56,6 > \lambda_{пред} = 80$ , то критическое напряжение определяем по формуле Ясинского (9.10)

$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 776 - 12 \cdot 56,6 + 0,053 \cdot 56,6^2 = 266,6 \text{ МПа}$ ,  
где  $a = 776 \text{ МПа}$ ,  $b = 12 \text{ МПа}$ ,  $c = 0,053 \text{ МПа}$  (см. Приложение 4).

Критическая сила

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = 266,6 \cdot 10^6 \cdot 25,15 \cdot 10^{-4} = 670,5 \text{ кН}.$$

## Расчет сжатых стержней на устойчивость

Расчет на устойчивость может осуществляться двумя способами:

1. При заданном в условии допускаемом коэффициенте запаса на устойчивость  $n_y$ . В этом случае условие устойчивости имеет вид

$$F \leq \frac{F_{кр}}{n_y}, \quad (9.11)$$

или

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq [\sigma]_y, \quad (9.12)$$

где  $F_{кр}$  – критическая сила, определяемая в зависимости от гибкости формулой Эйлера (9.4) или формулой Ясинского (9.10);  $[\sigma]_y$  – допускаемое напряжение на устойчивость;  $n_y$  – коэффициент запаса устойчивости.

2. С помощью таблиц коэффициентов понижения основного допускаемого напряжения  $\varphi(\lambda)$ . Условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A_{бр}} \leq \varphi[\sigma]^-, \quad (9.13)$$

где  $[\sigma]^-$  – допускаемое напряжение на сжатие;  $A_{бр}$  – площадь поперечного сечения стержня без учета его ослаблений.

Отношение  $\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]^-} = \varphi$  называется *коэффициентом понижения основного допускаемого напряжения*. Значения коэффициента  $\varphi$  в зависимости от  $\lambda$  приведены в Приложении 6.

## Первый способ расчета на устойчивость

При заданном коэффициенте запаса на устойчивость  $n_y$ .

Данный способ применяют при ориентировочных проверочных расчетах, а также в случаях, когда отсутствуют таблицы  $\varphi(\lambda)$  – в случае новых материалов или стержней с гибкостями, превышающими рекомендуемые.

### 1. Определение допускаемой силы

Если известны коэффициент запаса на устойчивость  $n_y$ , длина стержня  $\ell$ , способ закрепления концов ( $\mu$ ), форма и размеры поперечного сечения ( $A, J, i$ ), материал ( $E, [\sigma]^-$ ), то определяют:

- гибкость стержня  $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}}$ ;
- критическую силу  $F_{кр}$  по формуле Эйлера (9.4), если  $\lambda > \lambda_{пред}$  или по формуле Ясинского (9.10), если  $\lambda < \lambda_{пред}$ ;
- допускаемую силу  $[F] = \frac{F_{кр}}{n_y}$ .

**Пример 3.** Дано: материал стержня – сосна (вдоль волокон);  $\ell = 2$  м;  $\mu = 2$ ;  $d = 10$  см;  $n_y = 3$  (рис. 9.3). Определить  $[F]$ .

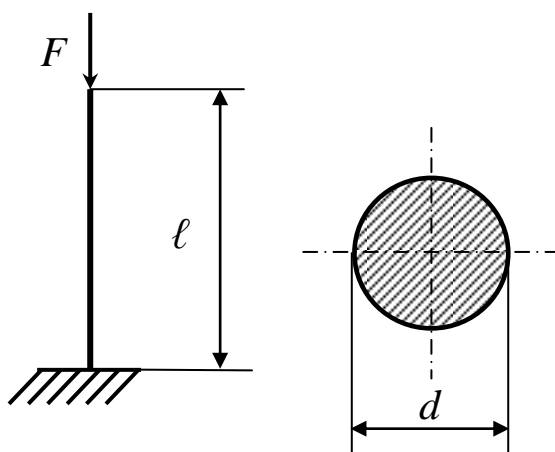


Рис. 9.3. Схема нагружения стержня

Решение:

Радиус инерции круглого сечения

$$i_{min} = i = \frac{d}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 200}{2,5} = 160.$$

Предельная гибкость

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 1 \cdot 10^4}{20}} \approx 70,$$

где  $\sigma_{пц} = 20$  МПа,  $E = 1 \cdot 10^4$  МПа (см. Приложение 5).

Так как гибкость стержня  $\lambda = 160 > \lambda_{пред} = 70$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера (9.4)

$$\begin{aligned} F_{кр} &= \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 490,6 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2)^2} = 302,3 \cdot 10^2 \text{ Н} \\ &= 30,23 \text{ кН,} \end{aligned}$$

где

$$J_{min} = \frac{\pi d^2}{64} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{64} = 490,6 \text{ см}^4.$$

Допускаемая сила

$$[F] = \frac{F_{кр}}{n_y} = \frac{30,23}{3} = 10,08 \text{ кН}.$$

## 2. Проверка на устойчивость

Осуществляется аналогично определению допускаемой силы по формуле (9.11).

## 3. Подбор сечения

Если известны коэффициент запаса на устойчивость  $n_y$ , сжимающая сила  $F$ , длина стержня  $\ell$ , способ закрепления концов ( $\mu$ ), материал ( $E, [\sigma]^-$ ), и форма сечения то определяют:

– момент инерции, считая справедливой формулу Эйлера (9.4)

$$J_{min} = \frac{P(\mu\ell)^2 n_y}{\pi^2 E};$$

– площадь поперечного сечения  $F$ ;

– радиус инерции  $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$ ;

– гибкость стержня  $\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}}$ , если  $\lambda > \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$ , то расчет

считают законченным;

– если  $\lambda < \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$ , то делают перерасчет, учитывая формулу Ясинского (9.10).

**Пример 4.** Сечение стержня – два равнобоких уголка (сталь Ст. 3),  $n_y = 2$ ,  $F = 400$  кН,  $\ell = 1,3$  м (рис. 9.4). Определить номер уголка.

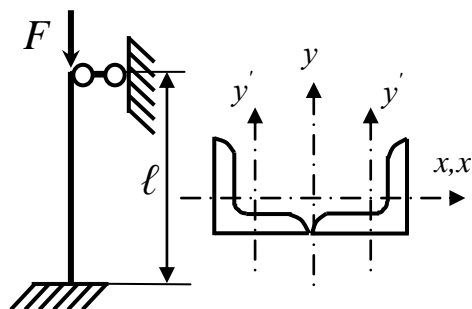


Рис. 9.4. Схема нагружения стержня



Решение:

Момент инерции из формулы Эйлера:

$$J_{min} = \frac{F(\mu\ell)^2 n_y}{\pi^2 E} = \frac{400 \cdot 10^3 (0,7 \cdot 1,3)^2 \cdot 2}{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 33,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$= 33,6 \text{ см}^4.$$

$$J_{min} = J_x = 2J_{x'},$$

где  $J_{x'}$  – момент инерции одного уголка.

$$J_{x'} = \frac{J_{min}}{2} = \frac{33,6}{2} = 16,8 \text{ см}^4.$$

По сортаменту прокатной стали ГОСТ8509-89 ближайший меньший уголок 56×5. Для него:  $J_{x'} = 16 \text{ см}^4$ ;  $i_{x'} = 1,72 \text{ см}$ ;  $A' = 5,41 \text{ см}^2$ .

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 130}{1,72} = 52,9.$$

Так как  $\lambda = 52,9 < \lambda_{пред} = 100$  (см. Приложение 4) делаем перерасчет по формуле Ясинского (9.10)

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 52,9 = 249,7 \text{ МПа},$$

где  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$  (см. Приложение 4).

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F.$$

Отсюда

$$A = \frac{F_{кр}}{\sigma_{кр}} = \frac{F \cdot n_y}{\sigma_{кр}} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 2}{249,7 \cdot 10^6} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A' = \frac{A}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8509-89 принимаем уголок 90×9,  $F' = 15,6 \text{ см}^2$ .

### Второй способ расчета на устойчивость

С помощью коэффициента понижения основного допускаемого напряжения  $\varphi$ .

Второй способ является основным методом расчета стержней на устойчивость.

Расчет производят только с помощью таблиц коэффициентов  $\varphi$ , не применяя ни формулу Эйлера, ни эмпирическую формулу Ясинского.

#### 1. Определение допускаемой силы

Если известны длина стержня  $\ell$ , способ закрепления концов ( $\mu$ ), форма и размеры поперечного сечения ( $A, J, i$ ), материал ( $E, [\sigma]^-$ ), то определяют:

- гибкость стержня  $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}}$ ;
- коэффициент понижения основного допускаемого напряжения  $\varphi$  по таблицам с использованием интерполяции;
- допускаемую сжимающую силу  $[F] = [\sigma]_y A = \varphi [\sigma]^- A$ .

**Пример 5.** Стойка длиной  $\ell = 3$  м, состоящая из двух швеллеров (Ст. 3) сжата силой  $F$  (рис. 9.5).

Дано: швеллер № 18,  $A_1 = 20,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_1} = 1080 \text{ см}^4$ ,  $i_{x_1} = 7,26 \text{ см}$ ,  $J_{y_1} = 85,6 \text{ см}^4$ ,  $z_0 = 1,95 \text{ см}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  (рис. 9.6).

Определить: допускаемую силу  $[F]$  и расстояние  $b$  из условия одинаковой устойчивости стойки в главных плоскостях инерции  $zx$  и  $zy$ .

Решение:

Гибкость стойки в плоскости  $zx$

$$\lambda_x = \frac{\mu \ell}{i_{x_1}} = \frac{1 \cdot 300}{7,26} = 41,3,$$

где  $\mu = 1$  (см. Приложение 3),  $i_x = 7,26 \text{ см}$ , т. к. радиус инерции всего стержня (обоих швеллеров) относительно оси  $x$  равен радиусу инерции  $i_{x_1}$  одного швеллера.

При гибкости  $\lambda_x = 41,3$  коэффициент  $\varphi$  для стали Ст. 3 равен (приложение 3)

$$\varphi = 0,92 - \frac{0,92 - 0,89}{10} 1,3 = 0,916.$$

Допускаемая сила

$$\begin{aligned} [F] &= \varphi [\sigma]^- \cdot A_{6p} = 0,916 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 20,5 \cdot 10^{-4} = \\ &= 6009 \cdot 10^2 \text{ Н} = 600,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Момент инерции всего сечения стойки относительно оси  $y$  (рис. 9.6):

$$\begin{aligned} J_y &= 2 \left[ J_{y_1} + A_1 \left( \frac{b}{2} - z_0 \right)^2 \right] = 2 \left[ 85,6 + 20,5 \left( \frac{b}{2} - 1,95 \right)^2 \right]; \\ J_y &= J_x = 2J_{x_1}; \end{aligned}$$

$$2 \left[ 85,6 + 20,5 \left( \frac{b}{2} - 1,95 \right)^2 \right] = 2 \cdot 1080.$$

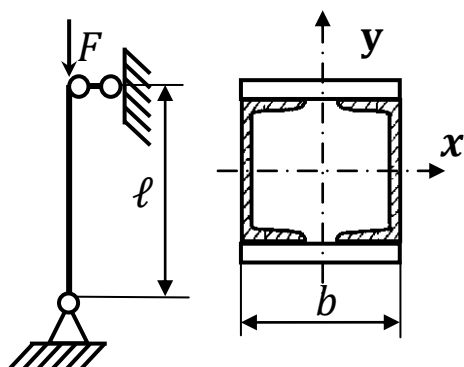


Рис. 9.5. Схема нагружения стержня

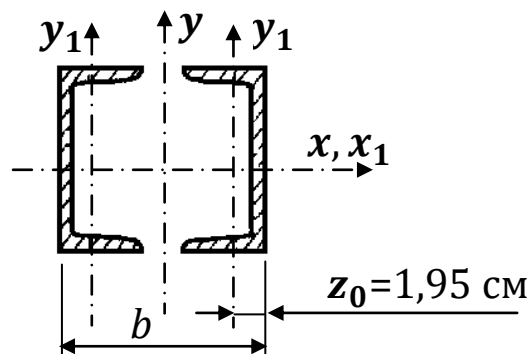


Рис. 9.6. Поперечное сечение стержня

Из этого равенства находим:

$$\left( \frac{b}{2} - 1,95 \right)^2 = \frac{1080 - 85,6}{20,5};$$

$$\frac{b}{2} - 1,95 = \sqrt{\frac{1080 - 85,6}{20,5}} = 6,96 \text{ см.}$$

откуда

$$b = (6,96 + 1,95) \cdot 2 = 17,82 \text{ см.}$$

## 2. Проверка на устойчивость

Осуществляется аналогично определению допускаемой силы по формуле (9.12).

## 3. Подбор поперечного сечения

Если известны сжимающая сила  $F$ , длина стержня  $\ell$ , способ закрепления концов ( $\mu$ ), материал ( $E, [\sigma]^-$ ), и форма сечения, то условие устойчивости (9.13) является неопределенным, поскольку без размеров сечения невозможно найти  $A$  и  $\lambda$ , а следовательно и  $\varphi$ .

Подбор сечения производят методом последовательных приближений, для этого:

– в первом приближении задаются значением коэффициента  $\varphi_1 = 0,5$ ;

– из условия устойчивости  $A_{бр} \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]^-}$ , подбирают размеры сечения или номер профиля (если стержень – прокатная сталь);

– находят момент инерции  $J_{min}$ , радиус инерции  $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{бр}}}$

и гибкость стержня  $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}}$ ;

– по таблицам с использованием интерполяции определяют значение  $\varphi_{1\text{табл}}$ ;

– если  $\varphi_{1\text{табл}}$  значительно (более 5 %) отличается от  $\varphi_1$ , то во втором приближении принимают  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\text{табл}}}{2}$  и повторяют расчет.

Сечение считают подобранным, если  $\sigma$  и  $[\sigma]_y$  отличаются не более чем на 5%.

**Пример 6.** Стальной стержень длиной  $\ell$  сжимается силой  $F$  (рис. 9.7).

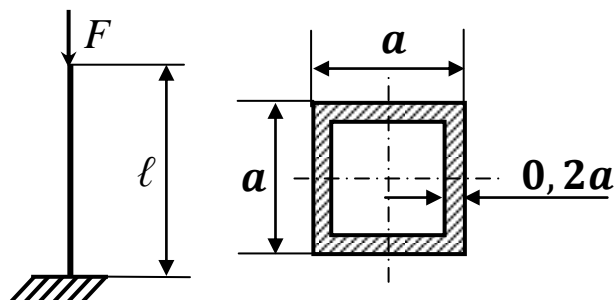


Рис. 9.7. Схема нагружения стержня

Дано:  $F = 200$  кН,  $\ell = 2,2$  м,  $[\sigma]^- = 160$  МПа.

Определить: размеры поперечного сечения, критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Решение:

Первое приближение

Зададим  $\varphi_1 = 0,5$ .

Требуемая площадь поперечного сечения:

$$A_{бр} = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]^-} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_{бр} = F = a^2 - (0,6a)^2 = 0,64 a^2.$$

Момент инерции

$$J_{min} = J = \frac{a^4}{12} - \frac{(0,6a)^4}{12} = 0,073 a^4.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = i = \sqrt{\frac{J_{min}}{A_{6p}}} = \sqrt{\frac{0,073a^4}{0,64a^2}} = 0,338 a.$$

Следовательно:

$$A_{6p} = 0,64 a^2 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A_{6p}}{0,64}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i = 0,338a = 0,338 \cdot 6,25 \cdot 10^{-2} = 2,11 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 2,2}{2,11 \cdot 10^{-2}} = 208,5,$$

где  $\mu = 2$  (см. Приложение 3).

По таблице (см. Приложение 6) для  $\lambda = 208,5$ ,  $\varphi_{1\text{табл}} = 0 < \varphi_1 = 0,5$ .

Второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0}{2} = 0,25.$$

Необходимая площадь поперечного сечения:

$$A_{6p} = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]^-} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A_{6p}}{0,64}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 8,84 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i = 0,338a = 0,338 \cdot 8,84 \cdot 10^{-2} = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 2,2}{2,98 \cdot 10^{-2}} = 147,7$$

По приложению 3, интерполируя, находим коэффициент

$$\varphi_{2\text{табл}} = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} \cdot 7,7 = 0,33 > \varphi_2 = 0,25.$$

Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{2\text{табл}}}{2} = \frac{0,25 + 0,33}{2} = 0,29.$$

Вычисляем необходимую площадь:

$$A_{6p} = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]^-} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,29 \cdot 160 \cdot 10^6} = 43,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{A_{\text{бп}}}{0,64}} = \sqrt{\frac{43,1 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 8,21 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i = 0,338a = 0,338 \cdot 8,21 \cdot 10^{-2} = 2,77 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,2}{2,77 \cdot 10^{-2}} = 158,8.$$

Интерполируя по таблице (см. Приложение 6), находим  $\varphi_{\text{табл}} = 0,29$ .

Вычисляем напряжение

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_{\text{табл}} A_{\text{бп}}} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,29 \cdot 43,1 \cdot 10^{-4}} = 158,4 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{160 - 158,4}{160} \cdot 100\% = 1\% \quad (\text{допускается } \pm 5\%).$$

Окончательно принимаем

$$a = 8,21 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости

Гибкость стержня  $\lambda = 158,8 > \lambda_{\text{пред}} = 100$ .

Критическая сила по формуле Эйлера (9.4.)

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 331,66 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,2)^2} =$$

$$= 337,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 337,8 \text{ кН},$$

где  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  – модуль продольной упругости для стали;

$$J_{\min} = J = \frac{a^4}{12} - \frac{(0,6a)^4}{12} = 0,073 a^4 = 0,073 (8,21 \cdot 10^{-2})^4 =$$

$$= 331,66 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Коэффициент запаса устойчивости определяем по формуле

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{337,8}{200} = 1,69.$$

### Задания для самостоятельной работы

При выполнении расчета стержня длиной  $\ell$  сжимаемого силой  $F$  (рис. 9.8) требуется:

1) найти размеры поперечного сечения по допускаемому напряжению  $[\sigma]^- = 160 \text{ МПа}$  (расчет производить методом последовательных приближений);

2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из табл. 9.1

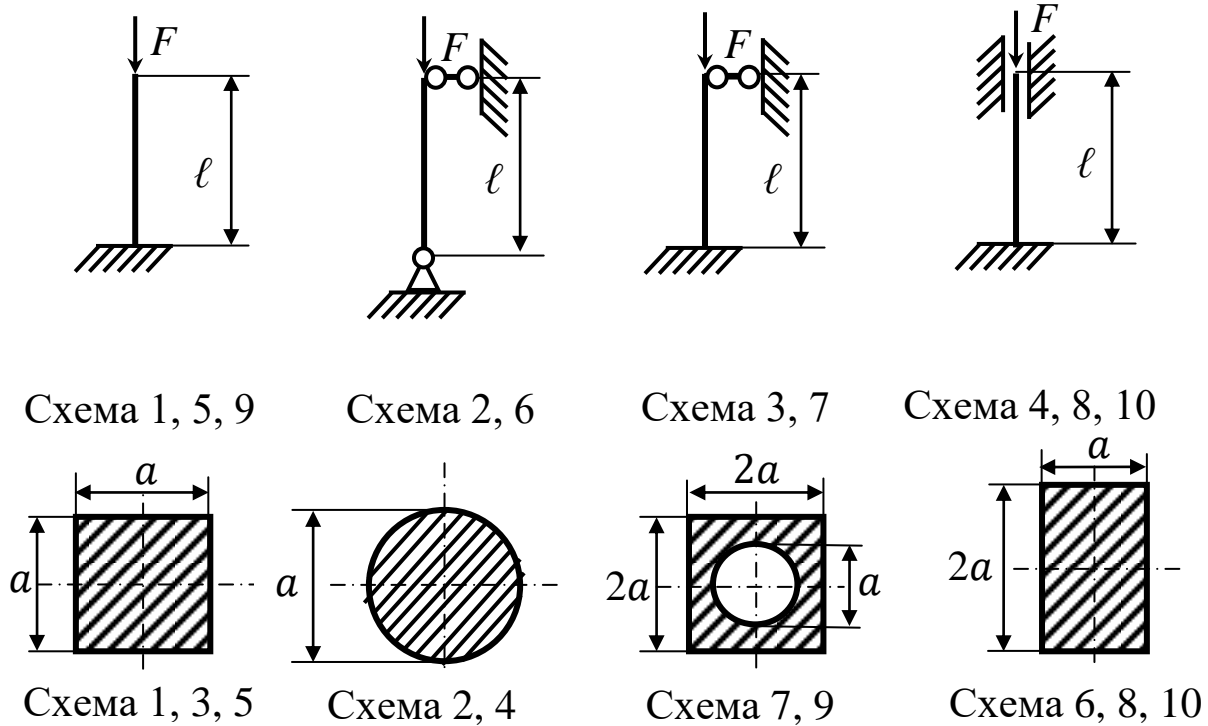


Рис. 9.8. Варианты способов закрепления концов стержня и формы их сечений

Таблица 9.1

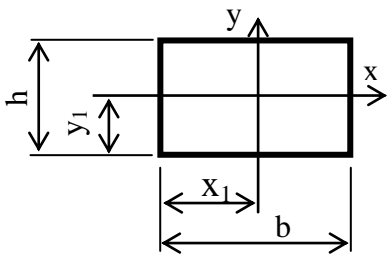
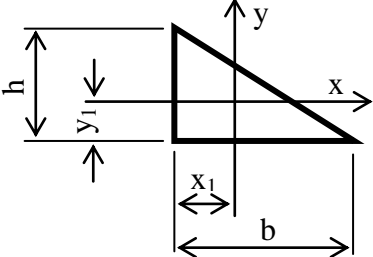
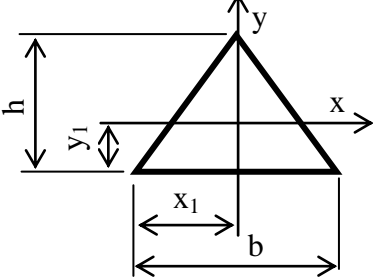
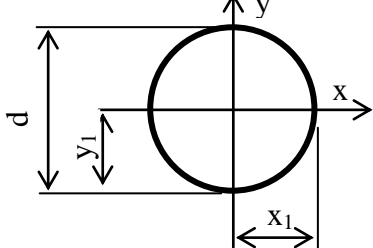
№ строки	Схема по рис. 9.8	$\ell$ , м	$P$ , кН
1	1	1,5	15
2	2	1,6	70
3	3	1,7	40
4	4	1,8	50
5	5	1,9	60
6	6	2,0	30
7	7	2,1	10
8	8	2,2	100
9	9	2,3	120
0	10	2,5	150
	$\partial$	$\varepsilon$	$\epsilon$

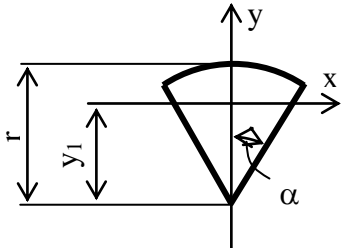
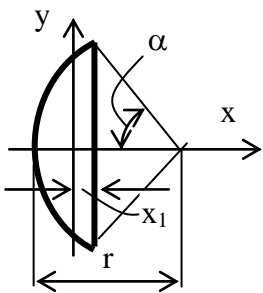
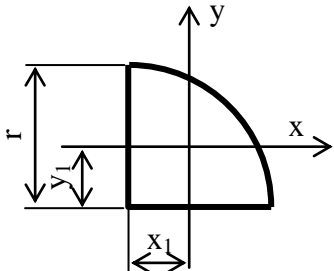
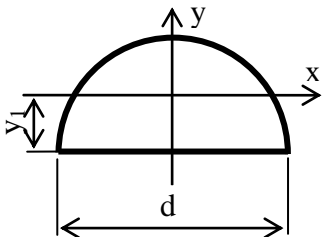


## 10. ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

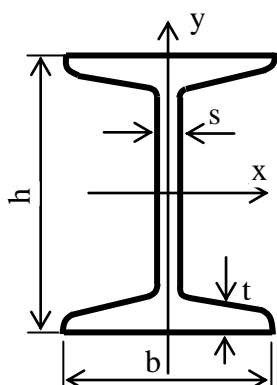
#### 1.1. Геометрические характеристики простых фигур

№№ ПП	Эскиз	Площадь сечения F	Моменты инерции $J_x, J_y, J_{xy}$	Коорд. крайн. точек
1	2	3	4	5
Прямоугольник		$F = bh$	$J_x = \frac{bh^3}{12}$ $J_y = \frac{b^3h}{12}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Прямоугольный треугольник		$F = \frac{bh}{2}$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$x_1 = \frac{b}{3}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Равнобедренный треугольник		$F = \frac{bh}{2}$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{b^3h}{48}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Круг		$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = y_1 = r$

1	2	3	4	5
Сектор круга		$F = \alpha r^2$ $\alpha$ – в рад	$J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha})$ $J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Сегмент круга		$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \cos \alpha \sin^3 \alpha)$ $J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha) \quad J_{xy} = 0$	$x_1 = r \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos \alpha \right)$
Четверть круга		$F = 0,785r^2$	$J_x = J_y = 0,0549r^4$ $J_{xy} = -0,0165r^4$	$x_1 = y_1 = 0,424r$
Половина круга		$F = 0,393d^2$	$J_x = 0,11r^4$ $J_y = 0,393r^4$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = 0,424r$

## 1.2. Сортаменты прокатных профилей

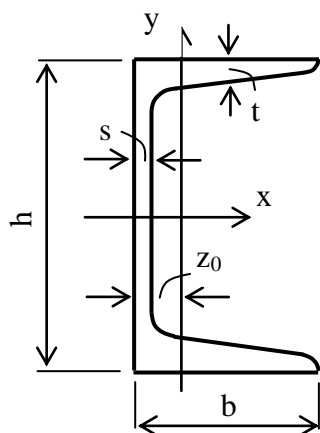
### 1.2.1. Двутавры стальные горячекатанные (по ГОСТ 8239-89)



$h$  - высота двутавра;  $J$  - моменты инерции сечения;  
 $b$  - ширина полок;  $W$  - моменты сопротивления сечения;  
 $s$  - толщина стенки;  $S_x$  - статический момент половины сечения.  
 $t$  - средняя толщина полок;  
 $F$  - площадь сечения;

Номер двутавра	Масса 1 м. кг	Размеры, мм				$F$ , $\text{см}^2$	$J_x$ , $\text{см}^4$	$W_x$ , $\text{см}^3$	$S_x$ , $\text{см}^3$	$J_y$ , $\text{см}^4$	$W_y$ , $\text{см}^3$
		$h$	$b$	$s$	$t$						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23	17,9	6,49
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	545	667	86,1
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	919	1043	123
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	1181	1356	151
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	1491	1725	182

### 1.2.2. Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-97)

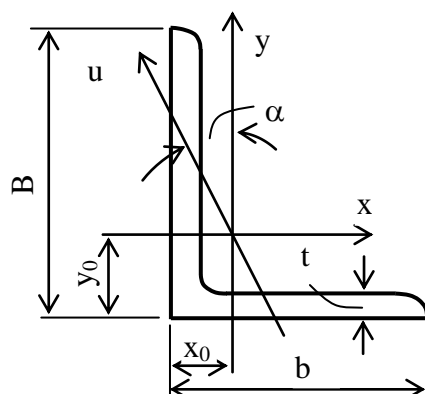


$h$  - высота швеллера;  
 $b$  - ширина полок;  
 $s$  - толщина стенки;  
 $t$  - средняя толщина полок;  
 $F$  - площадь сечения;

$J$  - моменты инерции сечения;  
 $W$  - моменты сопротивления сечения;  
 $S_x$  - статический момент половины сечения;  
 $z_0$  - расстояние от центра тяжести до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса $l$ м, кг	Размеры, мм				$F$ , $см^2$	$J_x$ , $см^4$	$W_x$ , $см^3$	$S_x$ , $см^3$	$J_y$ , $см^4$	$W_y$ , $см^3$	$z_0$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$							
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,00	8,70	3,68	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	23,30	12,80	4,75	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	20,40	20,40	6,46	1,44
12	10,40	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	29,60	31,20	8,52	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	40,80	45,40	11,00	1,67
16	14,20	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	54,10	63,30	13,80	1,80
16a	15,30	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103,0	59,40	78,80	16,40	2,00
18	16,30	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,0	69,80	86,00	17,00	1,94
18a	17,40	180	74	5,1	9,3	22,20	1190,0	132,0	76,10	105,00	20,00	2,13
20	18,40	200	76	5,2	9,0	23,40	1520,0	152,0	87,80	113,00	20,50	2,07
22	21,00	220	82	5,4	9,5	26,70	2110,0	192,0	110,00	151,00	25,10	2,21
24	24,00	240	90	5,6	10,0	30,60	2900,0	242,0	139,00	208,00	31,60	2,42
27	27,70	270	95	6,0	10,5	35,20	4160,0	308,0	178,00	262,00	37,30	2,47
30	31,80	300	100	6,5	11,0	40,50	5810,0	387,0	224,00	327,00	43,60	2,52
33	36,50	330	105	7,0	11,7	46,50	7980,0	484,0	281,00	410,00	51,80	2,59
36	41,90	360	110	7,5	12,6	53,40	10820,0	601,0	350,00	513,00	61,70	2,68
40	48,30	400	115	8,0	13,5	61,50	15220,0	761,0	444,00	642,00	73,40	2,75

### 1.2.3. Уголки стальные горячекатанные неравнополочные (по ГОСТ 8510-86)



$B$  - ширина большой полки;

$b$  - ширина малой полки;

$t$  - толщина полок;

$F$  - площадь сечения;

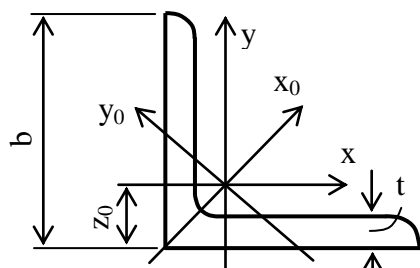
$J$  - моменты инерции сечения;

$x_0, y_0$  - расстояния от центра тяжести до наружных  
граней полок.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			$F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$J_{u, \min}$ , см <sup>4</sup>	$ J_{xy} $ , см <sup>4</sup>	$x_0$ , см	$y_0$ , см	$\operatorname{tg} \alpha$
		$B$	$b$	$t$								
2,5/1,6	0,91	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,22	0,42	0,86	0,392
3/2	1,12	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
	1,46			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,54	0,54	1,04	0,421
3,2/2	1,17	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,47	0,49	1,08	0,382
	1,52			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,59	0,53	1,12	0,374
4/2,5	1,48	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,96	0,59	1,32	0,385
	1,94			4	2,47	3,93	1,18	0,71	1,22	0,63	1,37	0,281
	2,37			5	3,03	4,73	1,41	0,86	1,44	0,66	1,41	0,374
4/3	2,26	40	30	4	2,67	4,18	2,01	1,09	1,68	0,78	1,28	0,544
	2,46			5	3,28	5,04	2,41	1,33	2,00	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	1,68	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,72	1,38	0,64	1,47	0,382
	2,20			4	2,80	5,68	1,69	1,02	1,77	0,68	1,51	0,379
5/3,2	1,90	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	2,01	0,72	1,60	0,469
	2,40			4	3,17	7,98	2,56	1,52	2,59	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	2,81	56	36	4	3,58	11,37	3,79	2,19	3,74	0,84	1,82	0,406
	3,46			5	4,41	13,82	4,48	2,65	4,50	0,88	1,87	0,404
6,3/4,0	3,17	63	40	4	4,04	16,33	5,16	3,07	5,25	0,91	2,03	0,397
	3,91			5	4,98	19,91	6,26	3,73	6,41	0,95	2,08	0,396
	4,63			6	5,90	23,31	7,29	4,36	7,44	0,99	2,12	0,393
	6,03			8	7,68	29,60	9,15	5,58	9,27	1,07	2,20	0,386
6,5/5	4,36	65	50	5	5,56	22,41	12,08	6,41	9,77	1,26	2,00	0,576
	5,18			6	6,60	27,46	14,12	7,52	11,46	1,30	2,04	0,575
	5,98			7	7,62	31,32	16,05	8,68	12,94	1,34	2,08	0,571
	6,77			8	8,62	35,00	18,88	9,65	13,61	1,37	2,12	0,570
7/4,5	4,39	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	9,12	1,05	2,28	0,406
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	12,00	1,17	2,39	0,436
	5,69			6	7,25	40,92	14,60	8,48	14,10	1,21	2,44	0,435
	6,57			7	8,37	46,77	16,61	9,69	16,18	1,25	2,48	0,435
	7,43			8	9,47	52,38	18,52	10,87	17,80	1,29	2,52	0,430

Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм			F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>u, min</sub> см <sup>4</sup>	J <sub>xy</sub>  , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	tgα
		B	b	t								
8/5	4,49	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	13,20	1,13	2,60	0,387
	5,92			6	7,55	48,98	14,85	8,88	15,50	1,17	2,65	0,386
8/6	6,39	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	20,98	1,49	2,47	0,547
	7,39			7	9,42	59,61	28,74	15,58	24,01	1,53	2,52	0,546
	8,37			8	10,67	66,88	32,15	17,49	26,83	1,57	2,56	0,544
9/5,6	6,17	90	56	5,5	7,86	65,28	19,67	11,77	20,54	1,26	2,92	0,384
	6,76			6	8,54	70,58	21,22	12,70	22,23	1,28	2,95	0,384
	8,77			8	11,18	90,87	27,08	16,29	28,33	1,36	3,04	0,380
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,29	30,58	18,20	31,50	1,42	3,23	0,393
	8,70			7	11,09	112,86	34,99	20,83	36,10	1,46	3,28	0,392
	9,87			8	12,57	126,96	39,21	23,38	40,50	1,50	3,32	0,391
	12,14			10	15,47	153,95	47,18	28,34	48,60	1,58	3,40	0,387
10/6,5	8,81	100	65	7	11,23	114,05	38,32	22,77	38,00	1,52	3,24	0,415
	9,99			8	12,73	128,31	42,96	25,24	42,64	1,56	3,28	0,414
	12,30			10	15,67	155,52	51,68	30,60	51,18	1,64	3,37	0,410
11/7	8,98	110	70	6,5	11,45	142,42	45,61	26,94	46,80	1,58	3,55	0,402
	10,93			8	13,93	171,54	54,64	32,31	55,90	1,64	3,61	0,400
12,5/8	11,04	125	80	7	14,06	226,53	73,73	43,40	74,70	1,80	4,01	0,407
	12,58			8	15,98	225,62	80,95	48,82	84,10	1,84	4,05	0,406
	15,47			10	19,70	311,61	100,47	59,33	102,0	1,92	4,14	0,404
	18,34			12	23,36	364,79	116,84	69,47	118,0	2,00	4,22	0,400
14/9	14,13	140	90	8	18,00	363,68	119,79	70,27	121,0	2,03	4,49	0,411
	17,47			10	22,24	444,45	145,54	85,51	147,0	2,12	4,58	0,409
16/10	17,96	160	100	9	22,87	605,97	186,03	110,4	194,0	2,24	5,19	0,391
	19,85			10	25,28	666,59	204,09	121,16	213,0	2,28	5,23	0,390
	23,58			12	30,04	784,22	238,75	142,14	249,0	2,36	5,32	0,388
	27,26			14	34,72	897,19	271,60	162,49	282,0	2,43	5,40	0,385
18/11	22,20	180	110	10	28,33	952,28	276,37	165,44	295,0	2,44	5,88	0,376
	26,40			12	33,69	1122,56	324,09	194,28	348,0	2,52	5,97	0,374
20/12,5	27,37	200	125	11	34,87	1449,02	446,36	263,84	465,0	2,79	6,50	0,392
	29,74			12	37,89	1568,19	481,93	285,04	503,0	2,83	6,54	0,392
	34,43			14	43,87	1800,83	550,77	326,54	575,0	2,91	6,62	0,390
	39,07			16	49,77	2026,08	616,66	366,99	643,0	2,99	6,71	0,388

### 1.2.4. Уголки стальные горячекатанные равнополочные (по ГОСТ 8509-93)



$b$  - ширина полка;

$t$  - толщина полка;

$F$  - площадь сечения;

$J$  - моменты инерции сечения;

$J_{xy}$  - центробежный момент инерции;

$z_0$  - расстояние от центра тяжести до наружной грани полка.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$J_{x0, \max}$ см <sup>4</sup>	$J_{y0, \min}$ , см <sup>4</sup>	$ J_{xy} $ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см
		$B$	$t$						
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,63	0,17	0,23	0,60
	1,15		4	1,46	0,50	0,78	0,22	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	1,29	0,34	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	1,62	0,44	0,59	0,76
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	1,84	0,48	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	2,30	0,60	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	2,92	0,77	1,08	0,89
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	2,80	0,74	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	3,58	0,94	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	3,72	0,97	1,37	0,97
	2,10		4	2,67	3,01	4,76	1,25	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	5,71	1,52	2,10	1,05
4	1,85	40	3	2,35	3,55	5,63	1,47	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	7,26	1,90	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	8,75	2,30	3,22	1,17
4,5	2,08	45	3	2,65	5,13	8,13	2,12	3,00	1,21
	2,73		4	3,48	6,63	10,52	2,74	3,89	1,26
	3,37		5	4,29	8,03	12,74	3,33	4,71	1,30
5	2,32	50	3	2,96	7,11	11,27	2,95	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	14,63	3,80	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,20	17,77	4,63	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	20,72	5,43	7,65	1,46
5,6	3,44	56	4	4,38	13,10	20,79	5,41	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	15,97	25,36	6,59	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,86	29,90	7,81	11,00	1,69
	4,81		5	6,13	23,10	36,80	9,52	13,70	1,74
	5,72		6	7,28	27,06	42,91	11,18	15,90	1,78
7	4,87	70	4,5	6,20	29,04	465,03	12,04	17,00	1,88
	5,38		5	6,86	31,94	50,67	13,22	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	59,64	15,52	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	68,19	17,77	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	76,35	19,97	28,20	2,02

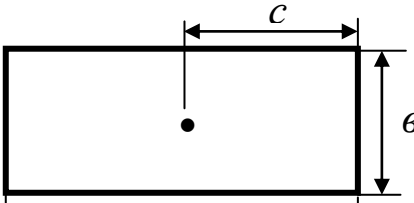
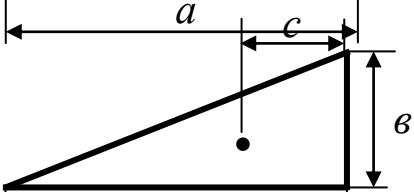
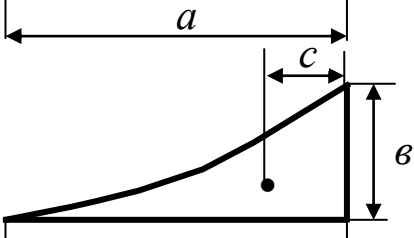
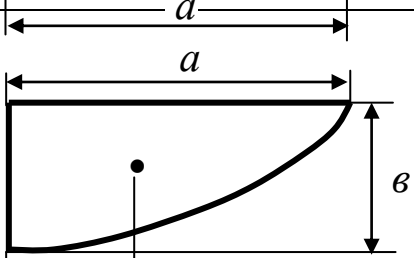
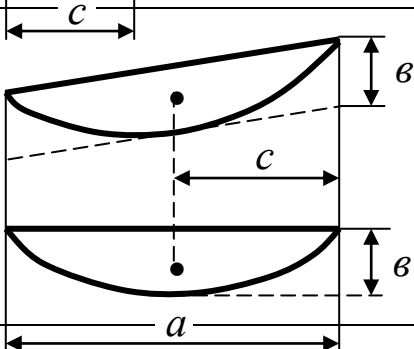
Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>x0, max</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y0, min</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>xy</sub>  , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
		B	t						
7,5	5,80	75	5	7,39	39,53	62,65	16,41	23,10	2,02
	6,89		6	8,78	46,57	73,87	19,28	27,30	2,06
	7,96		7	10,15	53,34	84,61	22,07	31,20	2,10
	9,02		8	11,50	59,84	94,89	24,80	35,00	2,15
	10,07		9	12,83	66,10	104,72	27,48	38,60	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,68	82,56	21,80	30,90	2,17
	7,36		6	9,38	56,97	90,40	23,54	33,40	2,19
	8,51		7	10,85	65,31	103,60	26,97	38,30	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	116,39	30,32	43,00	2,27
9	8,33	90	6	10,61	82,10	130,00	33,97	48,10	2,43
	9,64		7	12,28	94,30	149,67	38,94	55,40	2,47
	10,93		8	13,93	16,36	168,42	43,80	62,30	2,51
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	193,46	50,73	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	207,01	54,16	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	233,46	60,92	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	283,83	74,08	110,00	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	330,95	86,84	122,00	2,91
11	11,89	110	7	15,15	175,61	278,54	72,68	106,00	2,96
	13,50		8	17,20	198,17	314,51	81,83	116,00	3,00
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	466,76	121,98	172,00	3,36
	17,36		9	22,00	327,48	520,00	135,88	192,00	3,40
	19,10		10	24,33	359,82	571,04	148,59	211,00	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	670,02	174,43	248,00	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	763,90	199,62	282,00	3,61
	29,65		16	37,77	538,56	852,84	224,29	315,00	3,68
14	19,41	140	9	24,72	465,72	739,42	192,03	274,00	3,76
	21,45		10	27,33	512,29	813,62	210,96	301,00	3,82
	25,50		12	32,49	602,49	956,98	248,01	354,00	3,90
16	24,67	160	10	31,43	774,24	1229,10	319,33	455,00	4,30
	27,02		11	34,42	844,21	1340,06	347,77	496,00	4,35
	29,35		12	37,39	912,89	1450,00	375,78	537,00	4,39
18	30,47	180	11	38,80	1216,44	1933,10	499,78	716,00	4,85
	33,12		12	42,19	1316,62	2092,78	540,45	776,00	4,89
20	36,97	200	12	47,10	1822,78	2896,16	749,40	1073,00	5,37
	39,92		13	50,85	1960,77	3116,18	805,35	1156,00	5,42
	42,80		14	54,60	2097,00	3333,00	861,00	1236,00	5,46
	60,08		16	61,98	2362,57	4860,42	969,74	1393,00	5,54
22	47,40	220	14	160,38	2814,36	4470,15	1158,56	1655,00	5,91
	53,83		16	68,58	3175,44	5045,37	1305,52	1869,00	6,02



Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм		F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>x0, max</sub> см <sup>4</sup>	J <sub>y0, min</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>xy</sub>  , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
		B	t						
25	61,55	250	16	78,40	4717,1	7492,1	1942,09	2775,00	6,75
	68,86		18	87,72	5247,24	8336,9	2157,78	3089,00	6,83
	76,11		20	96,96	5764,87	9159,3	2370,01	3395,00	6,91
	83,31		22	106,12	6270,32	9961,3	2579,04	3691,00	7,00
	93,97		25	119,71	7006,39	1112,52	2887,26	4119,00	7,11

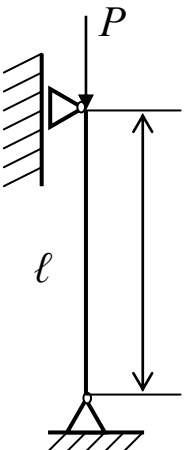
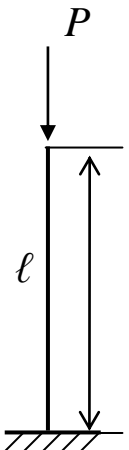
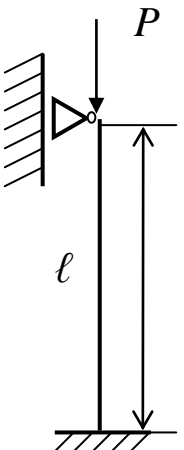
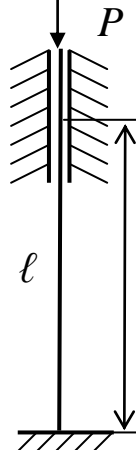
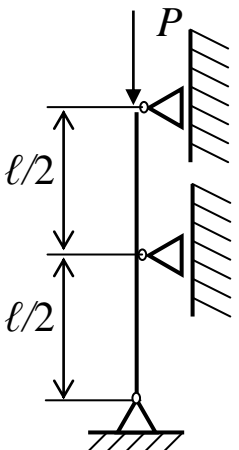
## Приложение 2

Площади (ω) и координаты центра тяжести (с) простых фигур

Фигура	Схема	ω	с
Прямоугольник		$ab$	$\frac{1}{2}a$
Треугольник		$\frac{1}{2}ab$	$\frac{1}{3}a$
Вогнутый параболический треугольник		$\frac{1}{3}ab = \frac{qa^3}{6}$	$\frac{1}{4}a$
Выпуклый параболический треугольник		$\frac{2}{3}ab = \frac{qa^3}{3}$	$\frac{3}{8}a$
Параболический сегмент		$\frac{2}{3}ab = \frac{qa^3}{12}$	$\frac{1}{2}a$

### Приложение 3

#### Коэффициент приведения длины $\mu$

				
$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,5$

### Приложение 4

#### Формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \text{ границы применимости } \lambda_0 < \lambda \leq \lambda_{пред}$$

Материал	$\lambda_0$	$\lambda_{пред}$	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$c$ , МПа
Ст.2, Ст.3	40	100	310	1,14	
Ст.5	40	100	465	3,26	
Сталь 40	60	90	321	1,16	
Кремнистая ст.	60	100	589	3,82	
Дерево (сосна)		70	29,3	0,194	
Чугун		80	776	12	0,053

### Приложение 5

#### Модуль продольной упругости, предел пропорциональности и основное допускаемое напряжение на сжатие

Материал	Сталь ст. 3	Сталь ст. 5	Чугун	Дюралюминий	Дерево (сосна)
$E$ , МПа	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$
$\sigma_{пц}$ , МПа	200	240	180	170	20
$[\sigma]^-$ , МПа	160	170	150	150	10



## Приложение 6

### Коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения $\varphi$

Гибкость, $\lambda$	Коэффициент, $\varphi$				
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст.5	Чугун	Дерево	Дюрал- юмений
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,96	0,98	0,97	0,99	0,999
20	0,96	0,95	0,91	0,97	0,998
30	0,94	0,92	0,81	0,93	0,835
40	0,92	0,89	0,69	0,87	0,700
50	0,89	0,86	0,57	0,80	0,568
60	0,86	0,82	0,44	0,71	0,455
70	0,81	0,76	0,34	0,60	0,353
80	0,75	0,70	0,26	0,48	0,269
90	0,69	0,62	0,20	0,38	0,212
100	0,60	0,51	0,16	0,31	0,172
110	0,52	0,43		0,25	0,142
120	0,45	0,36		0,22	0,119
130	0,40	0,33		0,18	0,101
140	0,36	0,29		0,16	0,087
150	0,32	0,26		0,14	0,076
160	0,29	0,24		0,12	
170	0,26	0,21		0,11	
180	0,23	0,19		0,10	
190	0,21	0,17		0,09	
200	0,19	0,16		0,08	

## 11. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО И ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ (ЭКЗАМЕНА)

### 11.1. Перечень вопросов для текущего контроля

#### Письменный опрос Т1:

1. Геометрические характеристики сечений.
2. Предмет сопротивления материалов, его задачи.
3. Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов.
4. Нагрузки и воздействия. Их классификация.
5. Метод сечений. Внутренние усилия, их определение.

6. Напряжение в точке сечения. Полное, нормальное и касательное напряжения.
7. Связь между напряжениями и внутренними усилиями.
8. Центральное растяжение и сжатие стержней. Продольные силы.
9. Нормальные напряжения при центральном растяжении и сжатии стержней.
10. Продольные и поперечные деформации при центральном растяжении-сжатии стержней. Их связь между собой.
11. Закон Гука при центральном растяжении-сжатии стержней.
12. Экспериментальное изучение механических свойств материалов.
13. Основные механические характеристики прочности пластичности материалов.
14. Условие прочности. Допускаемое напряжение.
15. Статически неопределимые системы, порядок их расчета.

### **Письменный опрос Т2:**

1. Кручение стержней круглого сечения. Крутящий момент.
2. Напряжения при кручении стержней круглого сечения.
3. Условие прочности при кручении стержней круглого сечения.
4. Углы закручивания, условие жесткости при кручении стержней круглого сечения.
5. Напряженное состояние в точке. Его виды.
6. Плоское напряженное состояние. Напряжения на наклонных площадках.
7. Главные напряжения и главные площадки.
8. Экстремальные касательные напряжения.
9. Теории прочности и эквивалентное напряжение.
10. Классические теории прочности.
11. Внутренние усилия при изгибе.
12. Правила контроля эпюр внутренних усилий при изгибе.
13. Нормальные напряжения при изгибе. Формула Навье.
14. Условие прочности при изгибе.
15. Касательные напряжения при изгибе. Формула Журавского.



### **Письменный опрос Т3:**

1. Виды перемещений при изгибе.
2. Определение перемещений при изгибе методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки.
3. Граничные условия и определение произвольных постоянных интегрирования.
4. Определение перемещений при изгибе методом начальных параметров.
5. Правила Клебша.
6. Определение перемещений при изгибе методом Максвелла-Мора.
7. Определение перемещений при изгибе по способу Верещагина.
8. Сложное сопротивление. Его виды.
9. Сложный (косой) изгиб. Внутренние усилия и напряжения.
10. Нейтральная ось и условие прочности при сложном (косом) изгибе.
11. Определение перемещений при сложном (косом) изгибе.
12. Изгиб со сжатием и растяжением. Внутренние усилия и напряжения.
13. Нейтральная ось и условие прочности при изгибе со сжатием и растяжением.
14. Внецентренное сжатие.
15. Ядро сечения.

### **Письменный опрос Т4:**

1. Виды упругого равновесия.
2. Понятие о потере устойчивости сжатых стержней.
3. Понятие о критической нагрузке.
4. Формула Эйлера.
5. Понятие о гибкости стержня.
6. Влияние способа закрепления сжатого стержня на его устойчивость.
7. Формула Ясинского.
8. Условие устойчивости сжатого стержня.

9. Расчет на устойчивость сжатого стержня с помощью коэффициента продольного изгиба.

10. Понятие об усталости материалов.

11. Понятие о пределе выносливости.

12. Факторы, влияющие на предел выносливости.

13. Понятие о динамическом воздействии.

14. Варианты динамического воздействия.

15. Понятие о коэффициенте динамичности.

## **10.2. Перечень вопросов для промежуточного контроля (экзамена)**

1. Предмет и задачи курса.

2. Виды конструктивных элементов.

3. Виды нагрузок.

4. Основные допущения курса сопротивления материалов.

5. Метод сечений.

6. Понятие напряжения. Его типы.

7. Связь напряжений с внутренними силовыми факторами.

8. Формула для нормальных напряжений при растяжении-сжатии.

9. Закон Гука при растяжении-сжатии.

10. Закон Пуассона.

11. Упругие постоянные материала.

12. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении-сжатии.

13. Диаграмма растяжения образца.

14. Диаграмма условных напряжений.

15. Механические характеристики материалов.

16. Допускаемое напряжение.

17. Типы задач решаемых на основе условия прочности при растяжении-сжатии.

18. Условие жесткости при растяжении-сжатии.

19. Статически определимые системы при растяжении-сжатии.

20. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии.

21. Напряженное состояние в точке. Виды напряженных состояний в точке.



22. Определение напряжений в наклонных сечениях при плоском напряженном состоянии.

23. Главные напряжения и главные площадки.

24. Закон парности касательных напряжений.

25. Экстремальные касательные напряжения.

26. Главные деформации.

27. Обобщенный закон Гука.

28. Потенциальная энергия деформации.

29. Потенциальная энергия изменения объёма.

30. Потенциальная энергия изменения формы.

31. Теории прочности.

32. I и II теории прочности.

33. III и IV теории прочности.

34. Теория прочности Мора.

35. Закон Гука при сдвиге.

36. Определение крутящих моментов.

37. Формула для касательных напряжений при кручении.

Условие прочности.

38. Формула для угла закручивания при кручении. Условие жесткости.

39. Типы задач решаемых на основе условия прочности при кручении.

40. Изгиб. Его разновидности.

41. Определения изгибающих моментов и поперечных сил.

42. Дифференциальные зависимости между  $M$ ,  $Q$  и  $q$ .

43. Правила контроля эпюр  $Q$  и  $M$ .

44. Построение эпюр  $Q$  и  $M$  методом уравнений.

45. Построение эпюр  $Q$  и  $M$  методом характерных сечений.

46. Формула для нормальных напряжений при изгибе. Условие прочности.

47. Геометрические характеристики сечений.

48. Зависимости между моментами инерции сечения относительно параллельных осей.

49. Главные оси инерции сечений и их свойства.

50. Определение перемещений при изгибе методом Клебша.

51. Определение напряжений при косом изгибе.

52. Определение перемещений при косом изгибе.

53. Изгиб со сжатием (растяжением) при продольно-поперечных нагрузках.

54. Внецентренное сжатие (растяжение) стержня.

55. Устойчивость сжатых стержней.

56. Проверочный расчет на устойчивость.

57. Проектировочный расчет на устойчивость.

58. Понятие о динамических нагрузках и их видах.

59. Расчет при ускоренном движении тела.

60. Расчет стержня на удар.

### **11.3. Типовые задачи для текущего и промежуточного контроля (экзамена)**

#### ***Геометрические характеристики сечений***

Для заданного поперечного сечения балки (рис. 10.1) определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции.

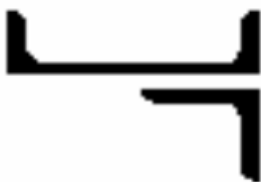


Рис. 10.1

#### ***Растяжение – сжатие***

Абсолютно жёсткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору (рис. 10.2), шарнирно прикреплен к трём стержням (медному –  $m$  и стальному –  $c$ ) и нагружен равномерно распределённой нагрузкой  $q$  и силой  $P$ .

Определить усилия в стержнях, площади их поперечных сечений из условия прочности от внешней нагрузки, изменения температуры и неточности изготовления стержней.

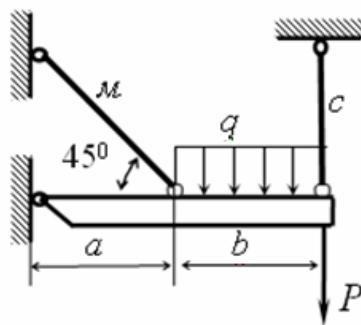


Рис. 10.2

### ***Кручение***

Круглый стальной брус (рис. 10.4), жестко закрепленный обоими концами, нагружен тремя моментами  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Из условия прочности при кручении вычислить диаметр вала, построить эпюру углов поворота, вычислить наибольший относительный угол закручивания.

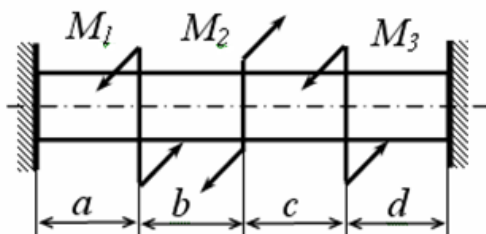


Рис. 10.3

### ***Изгиб***

Для балки (рис. 10.4) построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  и подобрать двутавровое сечение.

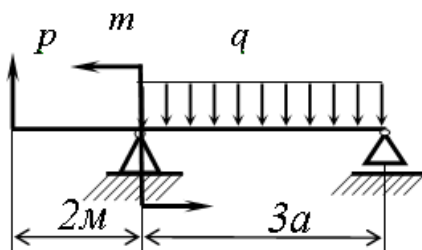


Рис. 10.4

### *Устойчивость центрально сжатых стержней*

Для стойки (рис. 10.5), нагруженной осевой сжимающей силой  $P$ , подобрать прямоугольное сечение:  $(\frac{h}{b} = \frac{2}{1})$ ,  $h$  – высота сечения балки,  $b$  – ширина сечения,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

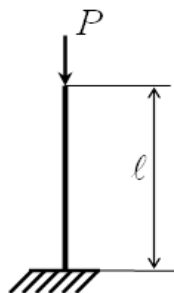


Рис. 10.5

## 12. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, В. И. Техническая механика [Текст] : учебник для студентов строительных вузов и факультетов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 270800 «Строительство» / В. И. Андреев, А. Г. Паушкин, А. Н. Леонтьев. – Москва : АСВ, 2012. – 256 с.

2. Степин, П. А. Сопротивление материалов. – Санкт-Петербург : Лань, 2014. – 320 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/3179>. – Загл. с экрана.

3. Степин, П. А. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для студентов техн. специальностей 1537402191 12 вузов / П. А. Степин. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 320 с.

4. Паначев, И. А. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов всех технических специальностей / И. А. Паначев, Ю. Ф. Глазков, М. Ю. Насонов ; ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. сопротивления материалов. – Кемерово, 2011. – 229 с. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – Доступна электронная версия:

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90643&type=utchposob:common>

5. Паначев, И. А. Сопротивление материалов [Текст] : учебное пособие / И. А. Паначев, Г. В. Широколов, Ю. Ф. Глазков ; ГОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т». – Кемерово, 2010. – 208 с. – Доступна электронная версия:

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90680&type=utchposob:common>

6. Паначев, И. А. Справочное пособие к решению задач по сопротивлению материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов всех технических специальностей / И. А. Паначев, Ю. Ф. Глазков ; ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. сопротивления материалов. – Кемерово, 2012. – 58 с. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – Доступна электронная версия: <http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90572&type=utchposob:common>

7. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для машиностроительных специальностей вузов / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.

8. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для студентов вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – Москва : Высшая школа, 2004. – 560 с.

9. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для втузов / Н. М. Беляев. – Москва : Наука, 1976. – 608 с.

10. Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] : учебное пособие для студентов втузов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров ; под ред. Л. С. Минина. – Москва : Высшая школа, 2001. – 592 с.