

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители  
А. В. Дягилева  
И. С. Кузнецов

## **ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ**

**Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине  
«Математика» для студентов очной формы обучения**

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки  
15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»  
в качестве электронного издания для самостоятельной работы

Кемерово 2017

Рецензент

Чичерин И. В. – председатель учебно-методической комиссии направления подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»

**Анна Владимировна Дягилева**

**Игорь Сергеевич Кузнецов**

**Интегрирование функций:** методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «**Математика**» [Электронный ресурс] для студентов направлений подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения / сост.: А. В. Дягилева, И. С. Кузнецов; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – Систем. требования : Pentium IV ; ОЗУ 8 Мб ; Windows XP ; мышь. – Загл. с экрана.

Приведены теоретические положения по методам интегрирования, примеры решения, задания для самостоятельного решения.

© КузГТУ, 2017

© Дягилева А. В., Кузнецов И. С.,  
составление, 2017

**Цель работы** – приобретение практических навыков по интегрированию функций.

## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Интеграл – одно из важнейших понятий математического анализа, возникшее в связи с задачами отыскания функции по заданной производной и вычисления площади криволинейной трапеции. Эти задачи привели к двум видам интеграла: неопределенному и определенному. Изучение свойств и методов вычисления этих интегралов составляет задачу интегрального исчисления. Интегральное исчисление неразрывно связано с дифференциальным исчислением и составляет вместе с ним основу математического анализа.

### Методы интегрирования:

**1. Метод разложения.** Метод основан на разложении подынтегральной функции в линейную комбинацию более простых функций и применение свойства линейности интеграла формула (1).

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \quad (1)$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)} dx - \int \frac{x^2 dx}{x^2(x^2+1)} = \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - \arctg x + C$$

### 2. Инвариантность формул интегрирования.

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то и  $\int f(u) du = F(u) + C$ , где  $u = \varphi(x)$  – производная функции, имеющая непрерывную производную, т.е. формула для определенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная независимой или любой функции от нее. Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции  $\varphi(x)$ , т.е. выражение  $\varphi(x) dx$ , то имеет смысл попробовать подстановку  $t = \varphi(x)$ . Поэтому целесообразно

запомнить следующие формулы (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) и так далее, для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$$\cos(x)dx = d(\sin x) \quad (2)$$

$$e^x dx = d(e^x) \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln x) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x^2} dx = -d\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\frac{dx}{\cos^2(x)} = d(\operatorname{tg}(x)) \quad (6)$$

$$\sin(x)dx = -d(\cos(x)) \quad (7)$$

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x}) \quad (9)$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b) \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} dx = -d(\operatorname{ctg}(x)) \quad (11)$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Любой сложный интеграл можно привести к простому (табличному) интегралу и используя основные формулы интегрирования решить исходный интеграл. В таблице 1 приведены наиболее часто встречающиеся формулы интегралов с примерами.

Таблица 1

## Табличные формулы интегрирования

Формула	Примеры
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ $\int \sin(x) d(\sin(x)) = \frac{(\sin(x))^2}{2} + C$ $\int \ln(x) d(\ln(x)) = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C$
$\int \cos(u) du = \sin(u) + C$ $\int \sin(u) du = -\cos(u) + C$ $\int \frac{du}{\cos^2(u)} = \operatorname{tg}(u) + C$ $\int \frac{du}{\sin^2(u)} = -\operatorname{ctg}(u) + C$	$\int \cos(\operatorname{tg}(x)) d(\operatorname{tg}(x)) = \sin(\operatorname{tg}(x)) + C$ $\int \sin(e^x) d(e^x) = -\cos(e^x) + C$ $\int \frac{d(4x)}{\cos^2(4x)} = \operatorname{tg}(4x) + C$ $\int \frac{d(10x)}{\sin^2(10x)} = -\operatorname{ctg}(10x) + C$
$\int \frac{du}{u} = \ln  u  + C$	$\int \frac{d(\sin(x))}{\sin(x)} = \ln  \sin(x)  + C$ $\int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln  e^x + 1  + C$ $\int \frac{dx}{5x+3} =  d(5x+3) = 5dx  =$ $= \int \frac{1}{5} 5dx = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+3)}{5x+3} = \frac{1}{5} \ln  5x+3  + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{\cos(x)} d(\cos(x)) = e^{\cos(x)} + C$ $\int e^{x^2} x dx =  dx^2 = 2x dx  = \int e^{x^2} \frac{1}{2} 2x dx =$ $= \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$ $\int -\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arccos\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\int \frac{d(e^{2x})}{\sqrt{1 - (e^{2x})^2}} = \arcsin e^{2x} + C$ $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5 - x^6}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5 - (x^3)^2}} =  d(x^3) = 3x^2 dx  =$ $= \int \frac{\frac{1}{3} 3x^2 dx}{\sqrt{5 - (x^3)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (x^3)^2}} =$ $= \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{x^3}{\sqrt{5}}\right) + C$

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln  u + \sqrt{u^2 \pm a^2}  + C$	$\int \frac{d(\sin(x))}{\sqrt{\sin^2 x \pm a^2}} = \ln  \sin(x) + \sqrt{\sin^2 x \pm a^2}  + C$
$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{u-a}{u+a} \right  + C$ $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+u}{a-u} \right  + C$	$\int \frac{d(\cos(x))}{\cos^2(x) - 4} = \frac{1}{4} \ln \left  \frac{\cos(x)-2}{\cos(x)+2} \right  + C$ $\int \frac{d(\sin(x))}{4 - \sin^2(x)} = \frac{1}{4} \ln \left  \frac{2+\sin(x)}{2-\sin(x)} \right  + C$
$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\int \frac{d(\sin(x))}{4 + \sin^2(x)} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) + C$
$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\int \frac{d(\sin(x))}{\sin^2(x) + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) + C$

### ЗАДАЧИ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-13}}$                   | 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2(x)}$ |
| 2) $\int \frac{xdx}{(7x^2-4)^4}$                    | 15) $\int \frac{dx}{x(2\ln(x)+9)^4}$            |
| 3) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx$              | 16) $\int (\sqrt{3-5e^x} e^x - 1) dx$           |
| 4) $\int -\frac{tg^2(x)}{\cos^2(x)} dx$             | 17) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2x+7}}$            |
| 5) $\int \frac{dx}{x(4\ln(x)+9)^3}$                 | 18) $\int \frac{xdx}{(3x^2-1)^4}$               |
| 6) $\int \sqrt[4]{2e^x-4e^x} dx$                    | 19) $\int \frac{\cos(x)dx}{\sqrt[5]{\sin(x)}}$  |
| 7) $\int \frac{2\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx$ | 20) $\int \frac{ctg(x)}{\sin^2(x)} dx$          |
| 8) $\int \frac{\arccos^3(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$      | 21) $\int \frac{\arccos^3(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| 9) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x-4}}$                 | 22) $\int \frac{d(4\ln(x)+5)}{(4\ln(x)+5)^4}$   |
| 10) $\int \frac{xdx}{(6x^2+7)^2}$                   | 23) $\int \frac{dx}{x(9\ln(x)-4)^3}$            |
| 11) $\int \sqrt[10]{\cos(x)} \sin(x) dx$            | 24) $\int (\sqrt{1-3e^x} e^x + 5) dx$           |
| 12) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^5(x)} dx$             | 25) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-10}}$           |
| 13) $\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx$ | 26) $\int \frac{xdx}{(2x^2+5)^4}$               |

- 27)  $\int \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx$
- 28)  $\int \sqrt[7]{\cos(x)} \sin(x) dx$
- 29)  $\int \frac{d(\ln(x)-5)}{(\ln(x)-5)^5}$
- 30)  $\int \frac{dx}{x(10\ln(x)+1)^2}$
- 31)  $\int (2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arccos^2(x)}) dx$
- 32)  $\int \sin(6x) dx$
- 33)  $\int \cos(4x-5) dx$
- 34)  $\int x^2 \cos(x^3) dx$
- 35)  $\int \sin(x^3) d(x^3)$
- 36)  $\int e^x \sin(e^x) dx$
- 37)  $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$
- 38)  $\int \sin(\frac{x}{3}) dx$
- 39)  $\int x \cos(x^2+6) dx$
- 40)  $\int (4x^3-1) \sin(x^4-x) dx$
- 41)  $\int \cos(\frac{1}{x}) \frac{dx}{x^2}$
- 42)  $\int \sin(7x) d(7x)$
- 43)  $\int \cos(5x+3) dx$
- 44)  $\int x^2 \sin(x^3) dx$
- 45)  $\int e^{3x} \cos(e^{3x}) dx$
- 46)  $\int \frac{2\cos(\ln(x))}{x} dx$
- 47)  $\int \sin(\frac{x}{5}) dx$
- 48)  $\int x \cos(4-x^2) dx$
- 49)  $\int (3x^2+2) \sin(x^3+2x) dx$
- 50)  $\int (\frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} - 2) dx$
- 51)  $\int \sin(\frac{1}{x}) \frac{dx}{x^2}$
- 52)  $\int \sin(8x) d(8x)$
- 53)  $\int \cos(5x-7) dx$
- 54)  $\int \cos(x^3) d(x^3)$
- 55)  $\int x^2 \sin(x^3+3) dx$
- 56)  $\int e^{2x} \cos(e^{2x}) dx$
- 57)  $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$
- 58)  $\int \cos(\frac{x}{13}) dx$
- 59)  $\int x \cos(x^2-5) dx$
- 60)  $\int \frac{x \sin(2x) + \sqrt[3]{x} \cos(x)}{x \cos(x)} dx$
- 61)  $\int (2\sin(x) - 3\cos(4x)) dx$
- 62)  $\int \frac{d(10x)}{\cos^2(10x)}$
- 63)  $\int \sec^2(2-x) dx$
- 64)  $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+2)}$
- 65)  $\int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x)}$
- 66)  $\int \frac{dx}{4\sqrt{x} \sin^2(\sqrt{x})}$
- 67)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} \sin^2 \sqrt{x-1}}$
- 68)  $\int (x^2 + \frac{x}{\cos^2(x^2)}) dx$
- 69)  $\int \cos ec^2(4-2x) dx$
- 70)  $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+3)}$
- 71)  $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x} dx$
- 72)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2(\sqrt{x})}$
- 73)  $\int (x + \frac{4}{x^2 \cos^2(\frac{1}{x})}) dx$

- |     |                                       |      |   |
|-----|---------------------------------------|------|---|
| 74) | $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln(x))}$    | 95)  | $\int (x^2 + \frac{2x-9x^2}{x^2-3x^3})dx$             |
| 75) | $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(4x^3)}$    | 96)  | $\int \frac{dx}{x(3\ln(x)-7)}$                        |
| 76) | $\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$         | 97)  | $\int \frac{\cos(x)dx}{\sin(x)-4}$                    |
| 77) | $\int \frac{xdx}{2x^2+5}$             | 98)  | $\int \frac{dx}{x(3\ln(x)-7)}$                        |
| 78) | $\int \frac{x^2 dx}{x^3-10}$          | 99)  | $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1} dx$                       |
| 79) | $\int \frac{\sin(x)dx}{3\cos(x)+4}$   | 100) | $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$                      |
| 80) | $\int \operatorname{ctg}(2x)dx$       | 101) | $\int x \cos(x^2-4)dx$                                |
| 81) | $\int \frac{d(2\ln(x)-5)}{2\ln(x)-5}$ | 102) | $\int (x^2-x)\sin(2x^3-3x^2)dx$                       |
| 82) | $\int \frac{dx}{x(4\ln(x)+3)}$        | 103) | $\int (2\sin(3x)+\cos(4x))dx$                         |
| 83) | $\int (4x+\frac{x^2-1}{3x-x^3})dx$    | 104) | $\int 5^x \cos(5^x-1)dx$                              |
| 84) | $\int \frac{d(6x+13)}{6x+13}$         | 105) | $\int x \sin(x^2+5)dx$                                |
| 85) | $\int \frac{xdx}{x^2+9}$              | 106) | $\int (\cos(4x)+\sin(\frac{x}{9}))dx$                 |
| 86) | $\int \frac{\sin(x)dx}{2\cos(x)-3}$   | 107) | $\int \frac{\cos(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}dx$          |
| 87) | $\int \operatorname{ctg}(x)dx$        | 108) | $\int \frac{xdx}{4+x^4}$                              |
| 88) | $\int \frac{dx}{x(2\ln(x)-3)}$        | 109) | $\int e^{9x} d9x$                                     |
| 89) | $\int \frac{x^2-1}{3x-x^3} dx$        | 110) | $\int e^{-\operatorname{tg}(x)} \sec^2(x)dx$          |
| 90) | $\int (x^3+\frac{e^x}{e^x+3})dx$      | 111) | $\int \frac{dx}{e^{5x}}$                              |
| 91) | $\int \frac{xdx}{2x^2-3}$             | 112) | $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}-6}{x^2} dx$               |
| 92) | $\int \frac{x^2 dx}{x^3-7}$           | 113) | $\int \frac{dx}{x(\ln^2(x)+1)}$                       |
| 93) | $\int \frac{\cos(x)dx}{4\sin(x)-3}$   | 114) | $\int \frac{\sin(x)dx}{3+\cos^2(x)}$                  |
| 94) | $\int \operatorname{tg}(x)dx$         | 115) | $\int \frac{dx}{\cos^2(x)(7+\operatorname{tg}^2(x))}$ |
|     |                                       | 116) | $\int \frac{\cos(2x)}{4+\sin^2(2x)} dx$               |



- |      |  |      |   |
|------|--|------|---|
| 117) | $\int \frac{\cos(x)}{8 + \sin^2(x)} dx$      | 137) | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 36}}$            |
| 118) | $\int \frac{e^{\arctg(x)} + 3x}{1 + x^2} dx$ | 138) | $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^4 - 15}}$           |
| 119) | $\int \frac{3x - 7}{x^4 + 9} dx$             | 139) | $\int \frac{dx}{\sqrt{15x^2 + 4}}$            |
| 120) | $\int \frac{\cos(x)dx}{\sin^2 x - 9}$        | 140) | $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 6}}$    |
| 121) | $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 16}$            | 141) | $\int \frac{xdx}{x^2 - 1}$                    |
| 122) | $\int \frac{dx}{x(\ln^2(x) - 2)}$            | 142) | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}$             |
| 123) | $\int (e^{3x} - \frac{x}{4 - x^4}) dx$       | 143) | $\int \frac{xdx}{x^4 - 1}$                    |
| 124) | $\int \frac{dx}{81 - x^2}$                   | 144) | $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 7}$                 |
| 125) | $\int \frac{d(14x)}{196x^2 - 9}$             | 145) | $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$          |
| 126) | $\int \frac{dx}{x(\ln^2(x) - 7)}$            | 146) | $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$       |
| 127) | $\int \frac{\sin(x)dx}{19 - \cos^2(x)}$      | 147) | $\int \frac{\ln(x-3)}{x\sqrt{\ln(x)}} dx$     |
| 128) | $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 5}$             | 148) | $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$                   |
| 129) | $\int \frac{dx}{\cos^2(x)(4 - \tg^2(x))}$    | 149) | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 15}}$            |
| 130) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$              | 150) | $\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2 - 21}}$            |
| 131) | $\int \frac{2x+1}{x^2 - 6} dx$               | 151) | $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2 - 3}}$             |
| 132) | $\int \frac{\sin(x)dx}{8 - \cos^2(x)}$       | 152) | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 7}}$             |
| 133) | $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 9} dx$      | 153) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2(\sqrt{x})}$   |
| 134) | $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 16}$            | 154) | $\int \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$ |
| 135) | $\int \frac{dx}{x(\ln^2(x) - 2)}$            | 155) | $\int \frac{1 + \tg(x)}{\cos^2(x)} dx$        |
| 136) | $\int (e^{3x} - \frac{x}{4 - x^2}) dx$       |      |   |

$$156) \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

$$165) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 9} dx$$

$$157) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 9}}$$

$$166) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2(x) + 2}}$$

$$158) \int \frac{\sin(x)dx}{\sqrt{\cos^2(x) - 1}}$$

$$167) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln(x))}$$

$$159) \int (e^{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})) dx$$

$$168) \int \frac{xdx}{\sqrt{25 - x^4}}$$

$$160) \int \frac{xdx}{\sqrt{7 - 4x^4}}$$

$$169) \int (\frac{2}{\cos^2(x)} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^6}}) dx$$

$$161) \int \frac{xdx}{x^2 - 4}$$

$$170) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$$

$$162) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 25}}$$

$$171) \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2(x)}}$$

$$163) \int \frac{xdx}{1 - x^2}$$

$$172) \int \frac{3^x}{\sqrt{1 - 2 \cdot 3^{2x}}}$$

$$164) \int \frac{xdx}{2x^4 - 1}$$

$$173) \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4 изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.: ил. – (Высшее образование)