Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
А. В. Дягилева
И. С. Кузнецов

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математика» для студентов очной формы обучения

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки
15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»
в качестве электронного издания для использования в учебном процессе

Кемерово 2017

Рецензент

Чичерин И. В. – председатель учебно-методической комиссии направления подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Анна Владимировна Дягилева
Игорь Сергеевич Кузнецов
Применение интегралов к вычислению объемов пространственных тел: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «**Математика**» [Электронный ресурс] для студентов направлений подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения / сост.: А. В. Дягилева, И. С. Кузнецов; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – Систем. требования : Pentium IV ; ОЗУ 8 Мб ; Windows XP ; мышь. – Загл. с экрана.

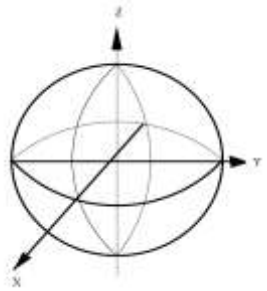
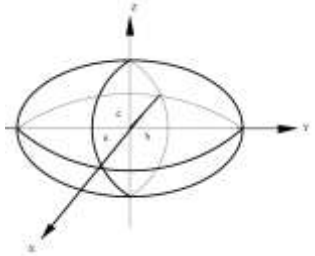
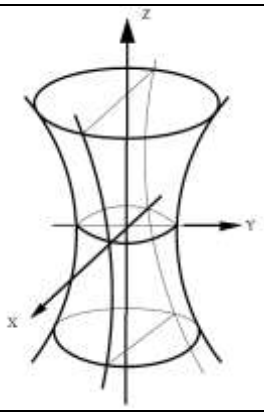
Приведены теоретические положения и задания для решения.

© КузГТУ, 2017
© Дягилева А. В., Кузнецов И. С., составление, 2017

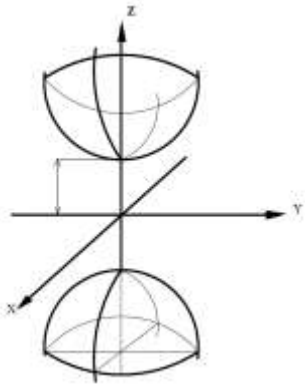
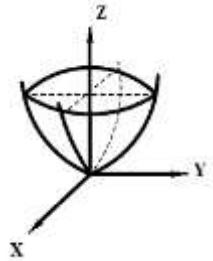
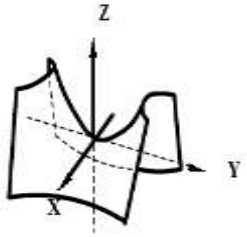
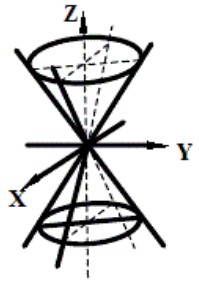
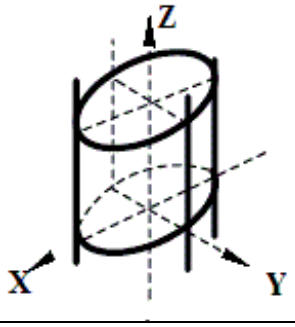
1 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данное методическое указание подготовлено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов по теме «Вычисление объемов при помощи кратных интегралов». Для успешного освоения темы студент должен знать основы аналитической геометрии в пространстве. Необходимо также владеть одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению – методом сечения поверхности координатными плоскостями. Напомним, что невырожденные алгебраические поверхности второго порядка можно отнести в одному из видов, канонического уравнения примеры которых приведены в таблице 1-1.

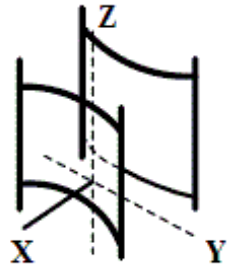
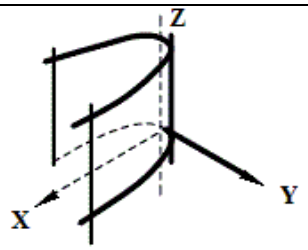
Таблица 1-1 – Канонические уравнения поверхностей

Внешний вид	Название поверхности	Уравнение поверхности
	Сфера	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Продолжение таблицы 1-1

Внешний вид	Название поверхности	Уравнение поверхности
	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$
	Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
	Эллиптический цилиндр второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Продолжение таблицы 1-1

Внешний вид	Название поверхности	Уравнение поверхности
	Гиперболический цилиндр второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	Параболический цилиндр второго порядка	$y^2=2px$

Тройным интегралом от непрерывной функции *f (x, y, z)* по ограниченной замкнутой пространственной области *V* называется предел последовательности интегральных сумм:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{d_k\}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint_V f(x,y,z)dx,dy,dz, \qquad (1)$$

если этот предел не зависит ни от способа разбиения области *V* на элементарные области ΔV_k, ни от выбора промежуточных точек $M_k(x_k, y_{k,} z_k) \in \Delta V_k$.

Вычисление тройного интеграла в декартовых системах координат сводится к последовательному вычислению однократного интеграла по одной из координат и двойного интеграла по проекции области *V* на одну из координат плоскостей. Например, если область ограничена сверху и снизу гладкими поверхностями $z_2(x,y)$ и $z_1(x,y)$ и однозначно проектируется на плоскость Oxy в область D, вычисление интеграла проводят по формуле

$$\iiint_V f(x,y,z)dx,dy,dz = \iint_D dx,dy = \iint_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (2)$$

где $y_1(x), y_2(x)$ – уравнения границ области *D*.

Для вычисления объема в формулу (2) полагаем, что $f(x,y,z)=1$ получим формулу (3):

$$V=\iiint\limits_V dv=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} dz=\iint\limits_D (z_2(x,y)-z_1(x,y))dxdy \qquad (3)$$

При проектировании области V на плоскости Oxz объем вычисляют по формуле

$$V=\iint\limits_D dxdz=\int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \qquad (4)$$

При проектировании на плоскость Oyz по формуле:

$$V=\iint\limits_D dxdz=\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx \qquad (5)$$

Для того чтобы проводить вычисления по формулам, необходимо научиться уверенно расставлять пределы в повторных интегралах. Этому помогут приведенные ниже задачи, которые сопровождаются детальными схематическими рисунками поверхностей, ограничивающих пространственные тела, и проекциями этих тел на соответствующие координатные плоскости.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача №1

Вычислить объем, ограниченный поверхностями $y^2=x$, $z=0$, $z=\frac{1}{2}(4-x)$. Параболический цилиндр $y^2=x$, пересекаясь с плоскостью $z=0$ и с плоскостью $z=\frac{1}{2}(4-x)$, ограничивает на плоскости Oxy область D, которая и является проекцией рассматриваемой пространственной области V на данную координатную плоскость (рис.1-1):

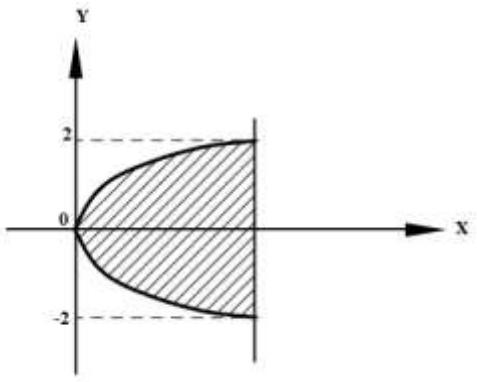


Рисунок 1-1

Полагая, что снизу область V ограничена плоскостью $z=0$, а сверху плоскостью $z=\frac{1}{2}(4-x)$, она схематично имеет вид (рис. 1-2):

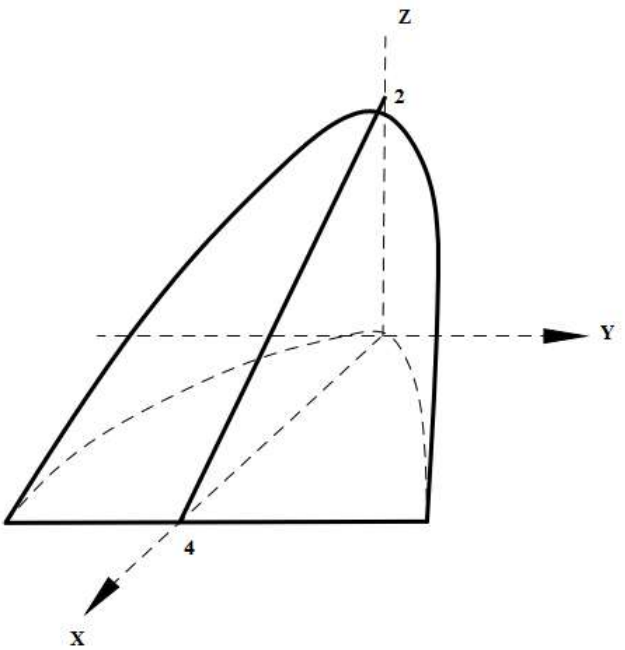


Рисунок 1-2

$$V=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)}dz=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{y^2}^{4}dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)}dz=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{y^2}^{4}(\frac{1}{2}(4-x))dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}\frac{(4-x)^2}{2}\Big|_{y^2}^{4}=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2}(4-y^2)^2=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^2(16-8y^2+y^4)dy=\frac{1}{2}(16y-8\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5})\Big|_0^2=\frac{128}{15}$$

Рассматриваемое пространственное тело можно однозначно спроектировать на плоскость Oxz. Тогда область D имеет вид (рис. 1-3):

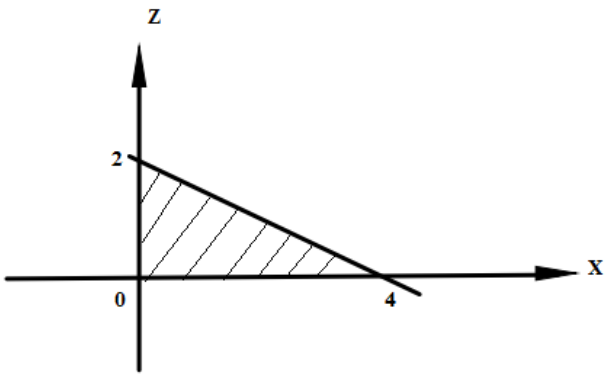


Рисунок 1-3

Объем находится по формуле

$$V = 2\int_0^4 dx \int_0^{\frac{1}{2}(4-x)} dz \int_0^{\sqrt{x}} dy = \int_0^4 \sqrt{x}(4-x)dx = \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x})dx = (\frac{8}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5})\Big|_0^4 = \frac{128}{15}$$

При проектировании на плоскость *Oyz* область *D* имеет вид (рис. 1-4):

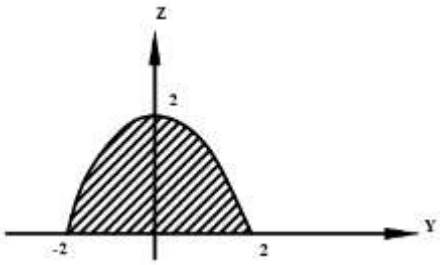


Рисунок 1-4

с границами $z = 0$, $z = \frac{1}{2}(4 - y^2)$, $x = y^2$, $x = 4 - 2z$.

Следовательно, объем находим по формуле

$$V = 2\int_0^2 dy \int_0^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dz \int_{y^2}^{4-z^2} dx = 2\int_0^2 dy \int_0^{\frac{1}{2}(4-y^2)} (4 - 2z - y^2)dz = 2\int_0^2 (4z - z^2 - y^2 z)\Big|_0^{\frac{1}{2}(4-y^2)} =$$

$$= 2\int_0^2 (4 - 2y^2 + \frac{1}{4}y^4)dy = \frac{128}{15}$$

В тех случаях, когда объем *V* проектируется на координатную плоскость в круг или часть круга, используют криволинейные системы координат, простейшими из которых являются цилиндрическая и сферическая.

В цилиндрической системе координат каждой точке пространства приписывают три координаты: φ – полярный угол, ρ – полярный радиус, *z* – декартова координата *z*.

Задача №2

Найти объем между сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и параболой $x^2 + y^2 = 6z$ (внутри параболоида).

Прежде всего, найдем уравнение линии пересечения сферы и параболоида *L*, решая систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 6z \end{cases}$ путем подстановки второго уравнения в первое: $z^2 + 6z - 16 = 0$. Решение z=-8 не соответствует

данной задаче, поэтому добавляя значение $z = 2$ в одно из уравнений системы, получаем L: $\{\begin{matrix} x^2+y^2=12 \\ z=2 \end{matrix}$

Таким образом, объем V проектируется на плоскость Oxy в круг в радиусе $R = 2\sqrt{3}$ (рис. 1-5).

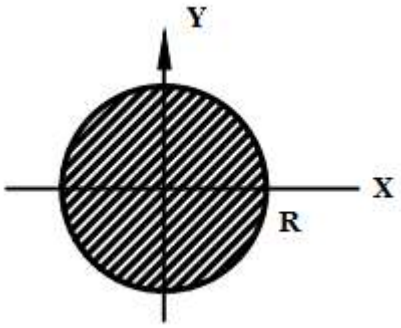


Рисунок 1-5

Пространственное тело имеет вид (рис. 1-6):

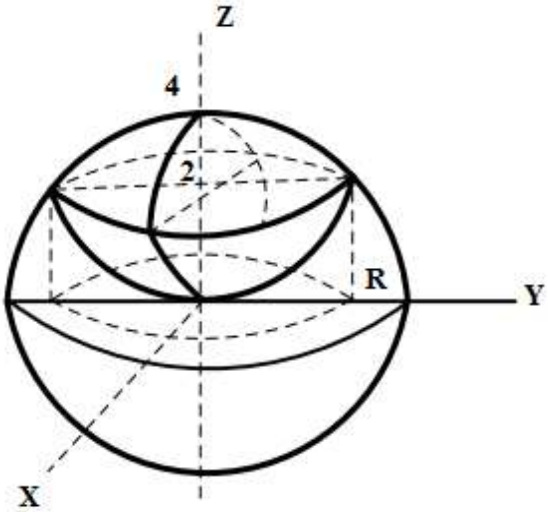


Рисунок 1-6

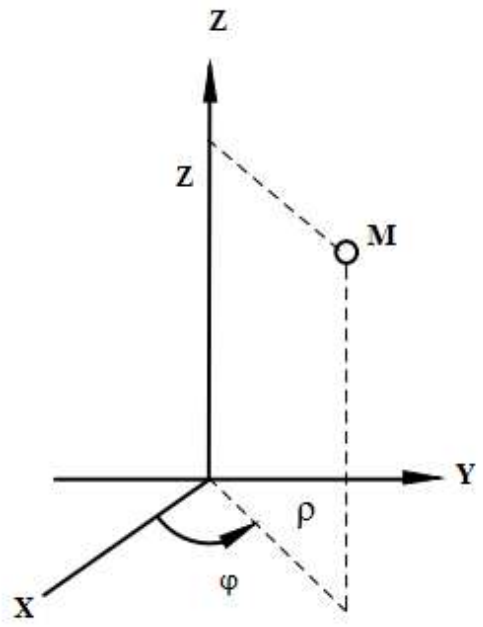


Рисунок 1-7

Плоскость на рис. 1-7 описывается следующими формулами: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$.

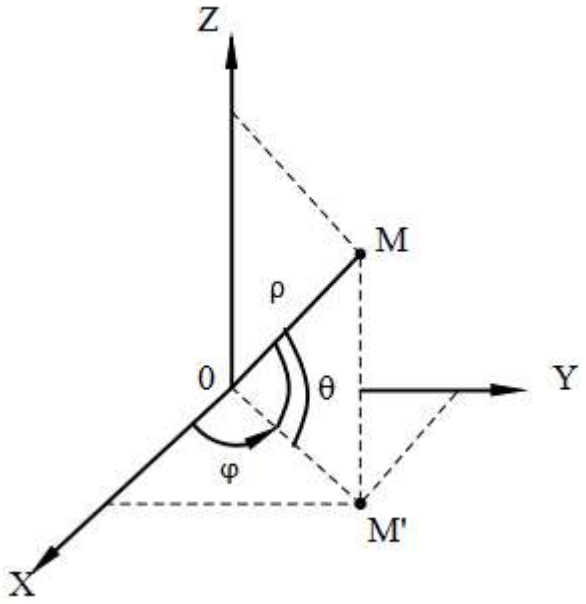
Записывая уравнение границ области в цилиндрической системе координат $z_1 = \rho^2/6$, $z_2 = \sqrt{16-\rho^2}$, объем вычисляем по следующей формуле:

$$V = \iiint\limits_V dv = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/6}^{\sqrt{16-\rho^2}} dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \rho(\sqrt{16-\rho^2} - \frac{\rho^2}{2})d\rho = 2\pi(\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \rho(\sqrt{16-\rho^2}d\rho - \frac{1}{6}\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \rho^3 d\rho) =$$

$$= 2\pi(-\frac{1}{3}\sqrt{(16-\rho\ \ )^3} - \frac{1}{24}\rho^4)|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}(-8+64-18) = \frac{76}{3}\pi$$

В тех случаях, когда пространственное тело ограничено сферическими поверхностями, удобно использовать сферическую систему координат, которая в каждой точке пространства приписывает три координаты: φ – полярный угол, θ – азимутальный угол, ρ – расстояние от начала координат (рис. 1-8, 1-9).



$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi$$

$$y = \rho \cos\theta \sin\varphi$$

$$z = \sin\theta$$

$$du = \rho^2 \cos\theta d\varphi d\theta d\rho$$

Рисунок 1-8

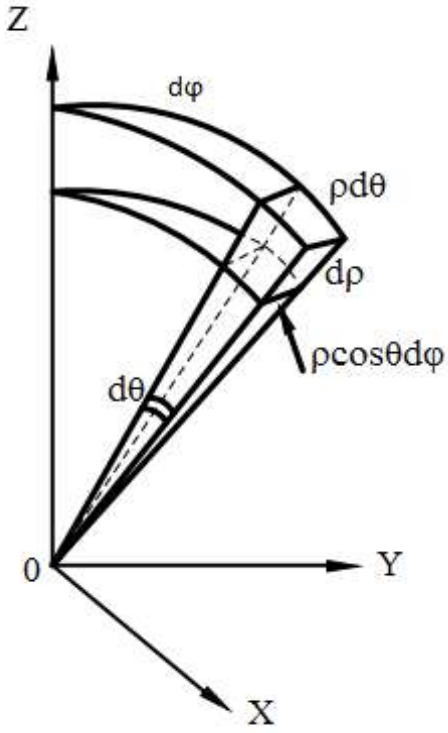


Рисунок 1-9

При движении точки по всей сфере радиуса R координаты измеряются в пределах: $0 \le \varphi \le 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \rho \le R$.

Задача №3

Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

Выделим полный квадрат по переменной z, видим, что данные поверхности являются сферами, смещенными по оси *Oz* (рис. 1-10):

$$x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4$$

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

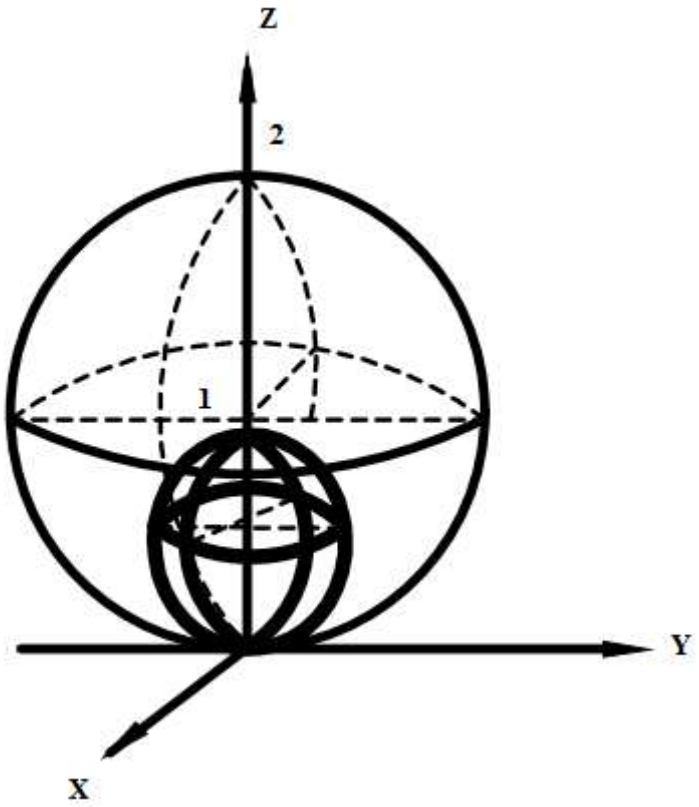


Рисунок 1-10

С учетом того, что уравнения поверхностей в системе координат имеют вид:

$$x^2+y^2+z^2=z \qquad\qquad x^2+y^2+z^2=2z$$

$$\rho^2=\rho\sin\theta \qquad\qquad \rho^2=2\rho\sin\theta$$

$$\begin{cases}\rho=0\\ \rho=\sin\theta\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}\rho=0\\ \rho=2\sin\theta\end{cases}$$

получаем, что

$$V=\iiint\limits_V dv=\iiint\limits_V \rho^2\cos\theta d\varphi d\theta d\rho=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int\limits_{\sin\theta}^{2\sin\theta}\rho^2 d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\frac{\rho^3}{3}d\theta\Big|_{\sin\theta}^{2\sin\theta}=\frac{14\pi}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=$$

$$=\frac{14}{3}\pi\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{7}{6}\pi$$

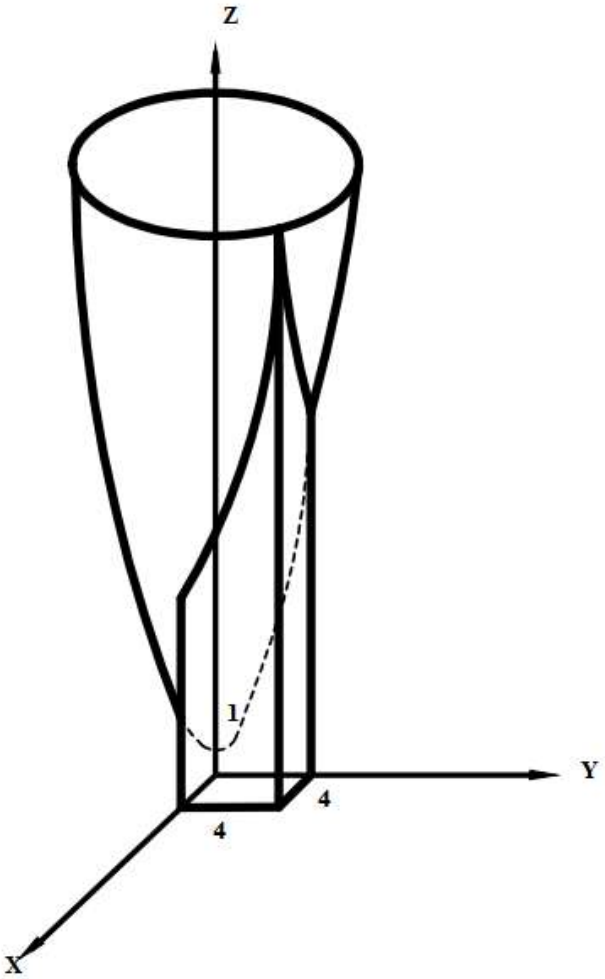
2 НОМЕРА ЗАДАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

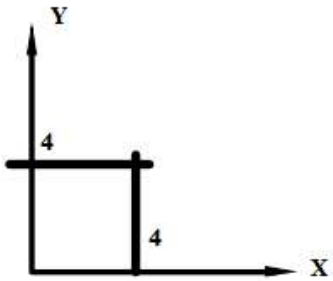
№1

$x = 0;\ y = 0;\ z = 0;$

$x = 4;\ y = 4;$

$z = x^2 + y^2 + 1$



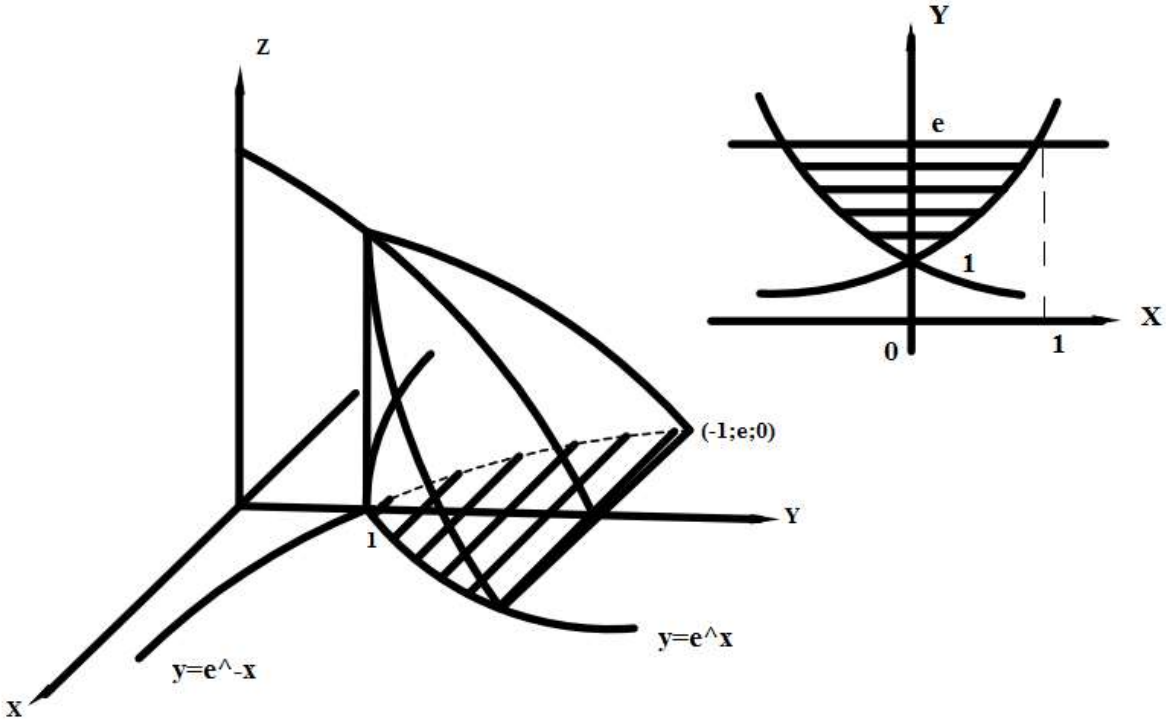


№2

$y = e^{x}; \; y = e^{-x}$

$z = e^{2} - y^{2}$

$z = 0$

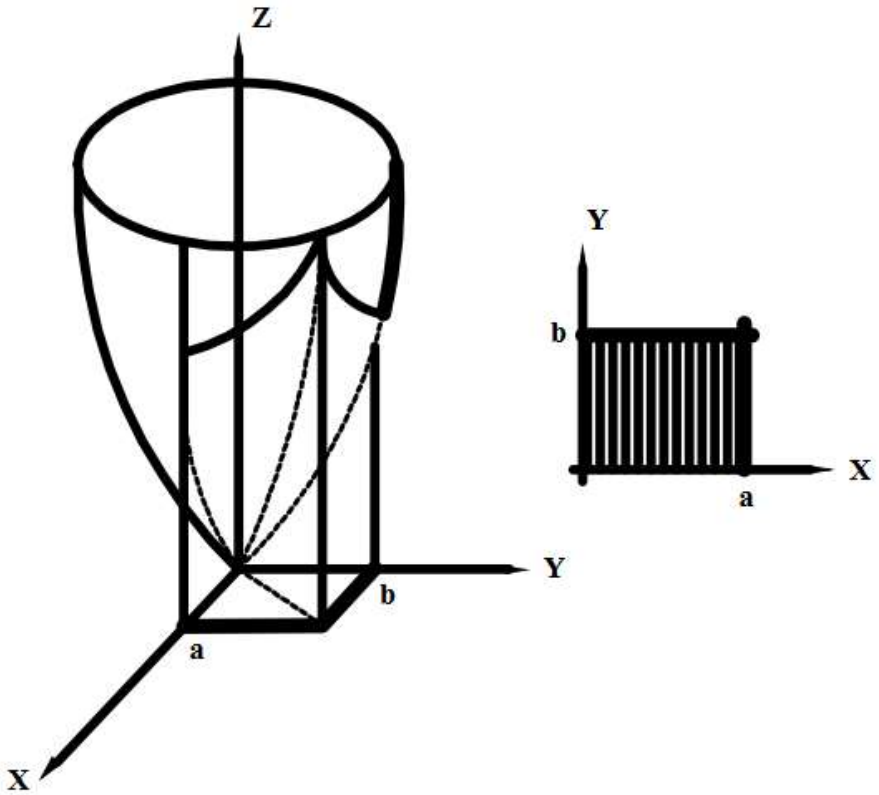


№3

$x = 0;\ y = 0;\ z = 0;$

$x = a;\ x = b;$

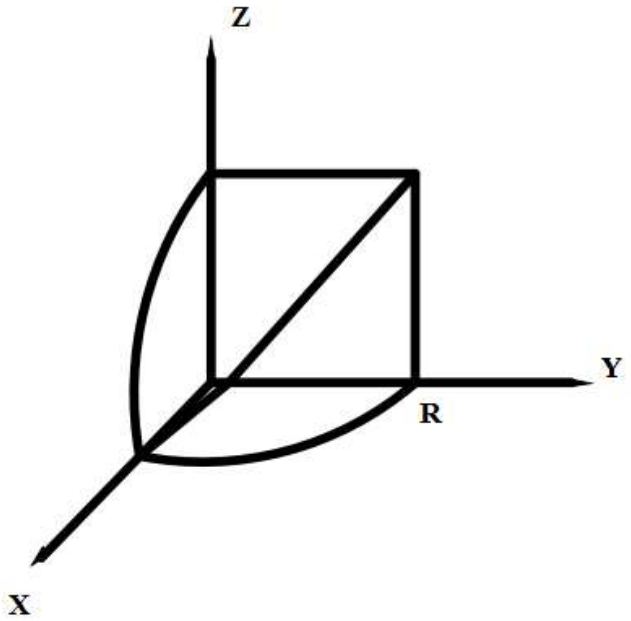
$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q};$$



№4

$x^2 + y^2 = R^2$

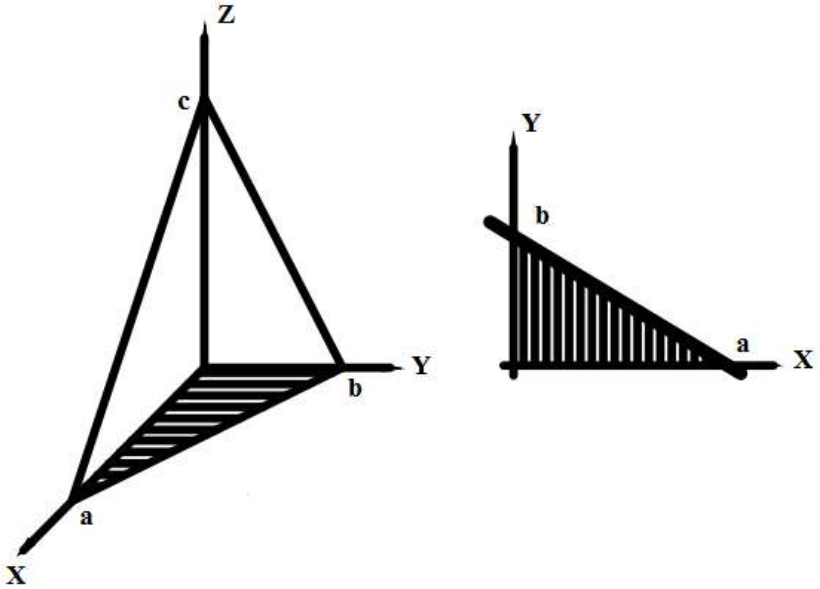
$x^2 + z^2 = R^2$



№5

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$$

$x = 0;\ y = 0;\ z = 0;$

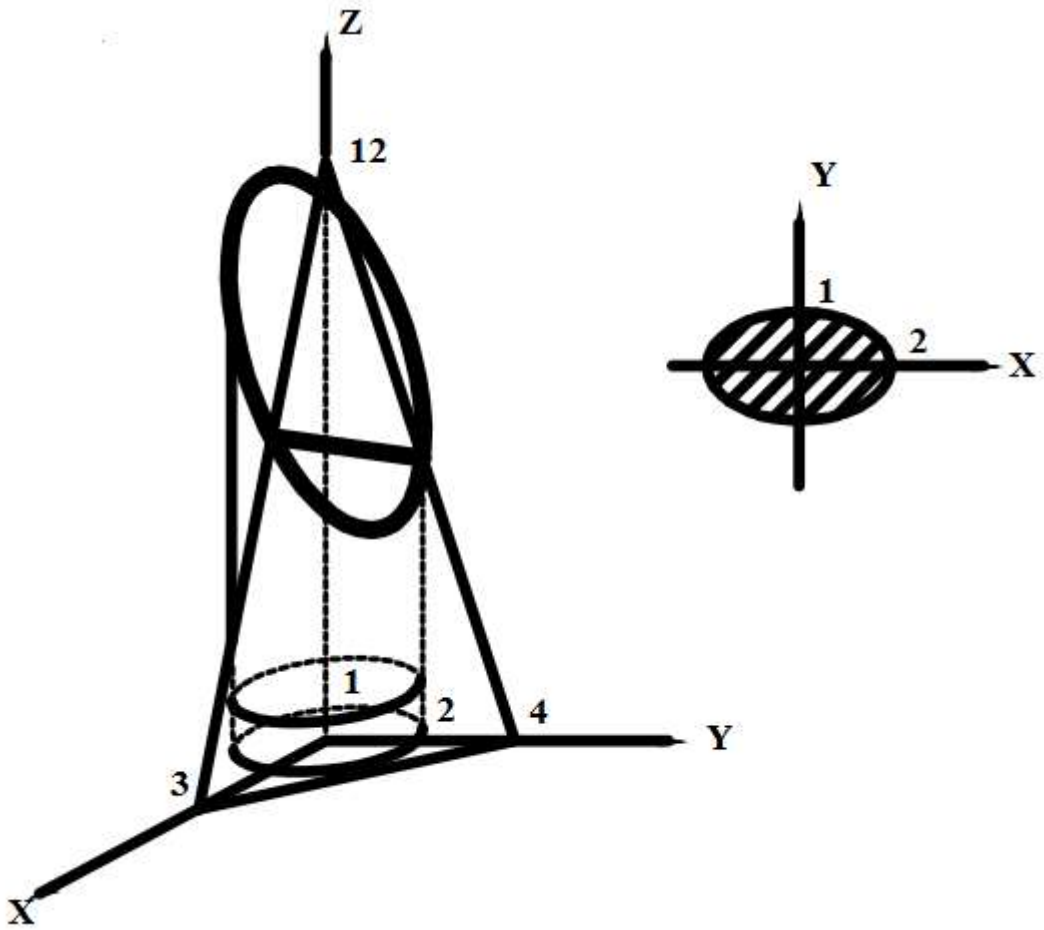


№6

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$z = 12 - 3x - 4y$$

$$z = 1$$

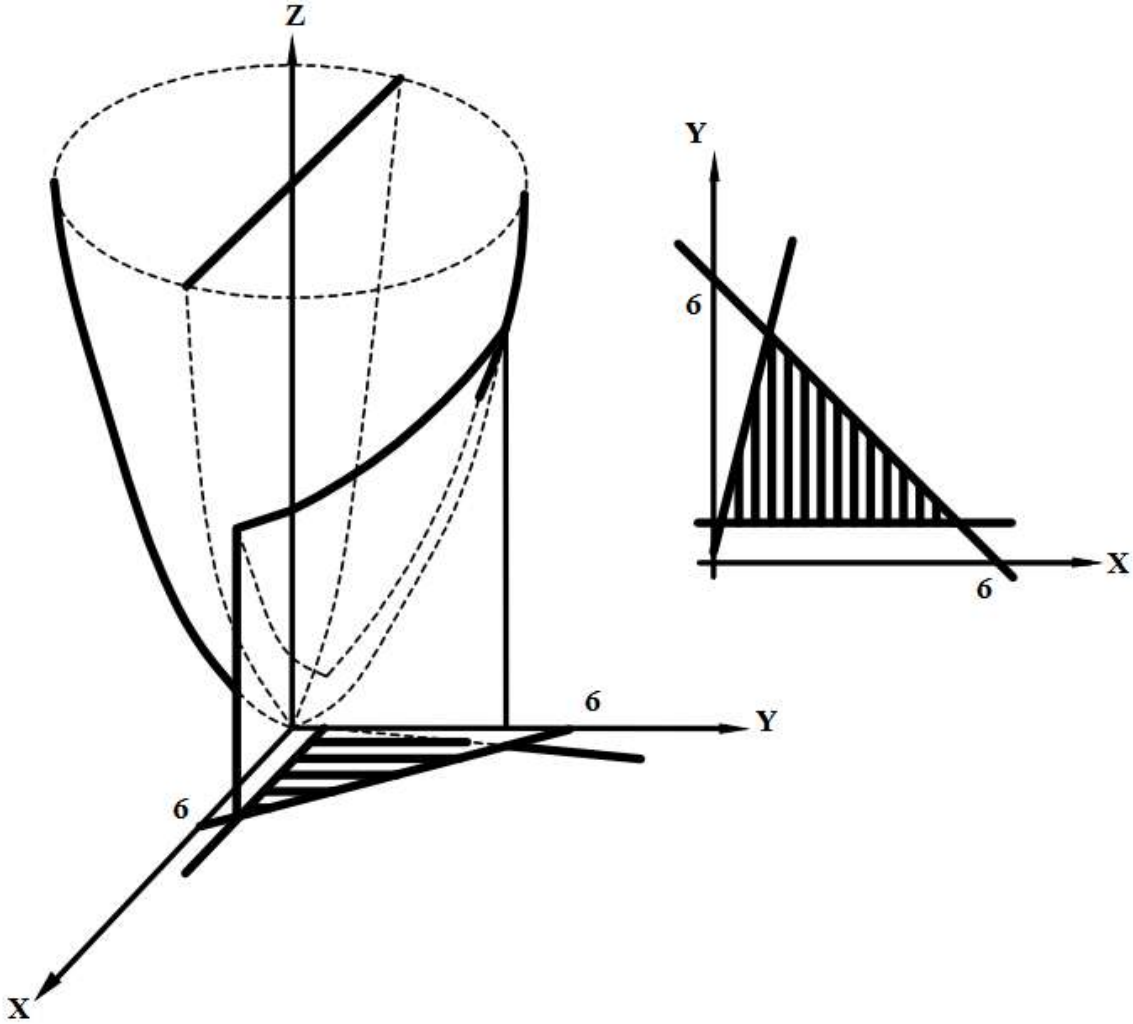


№7

$z = x^2 + y^2$

$z = 0;\ y = 1;\ y = 2x;$

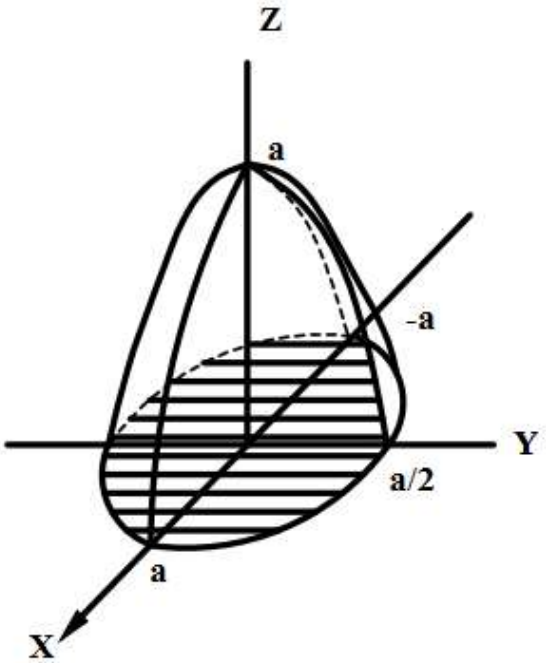
$y = 6 - x;$

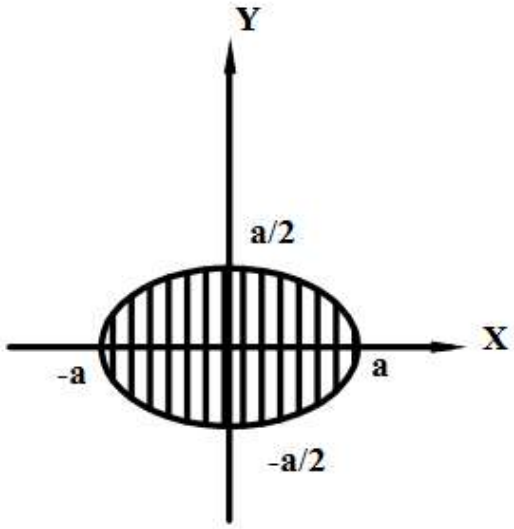


№8

$$z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$$

$$z = 0$$





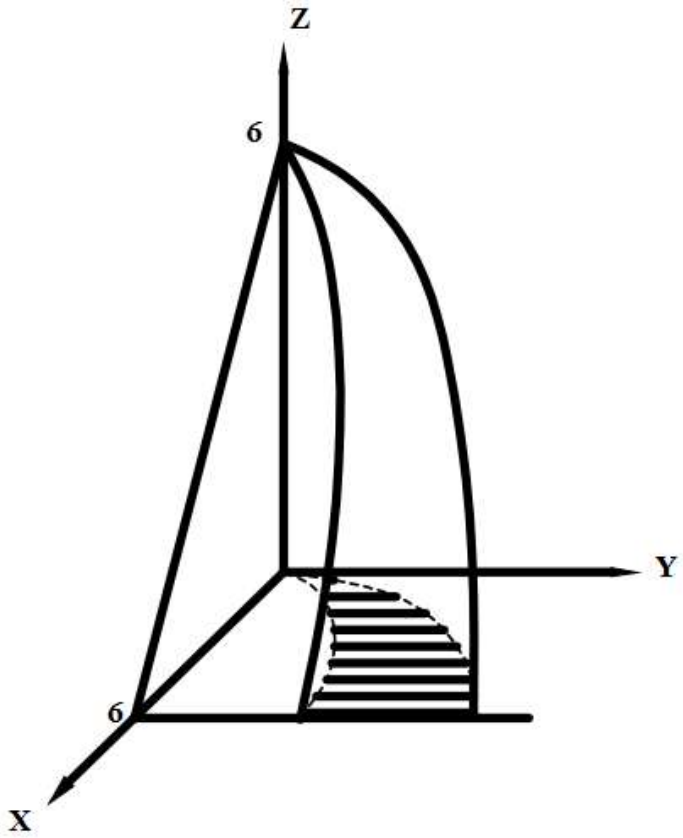
№9

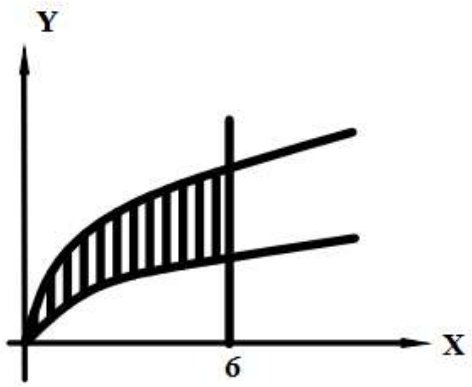
$y = \sqrt{x}$

$y = 2\sqrt{x}$

$z = 0$

$x + z = 6$



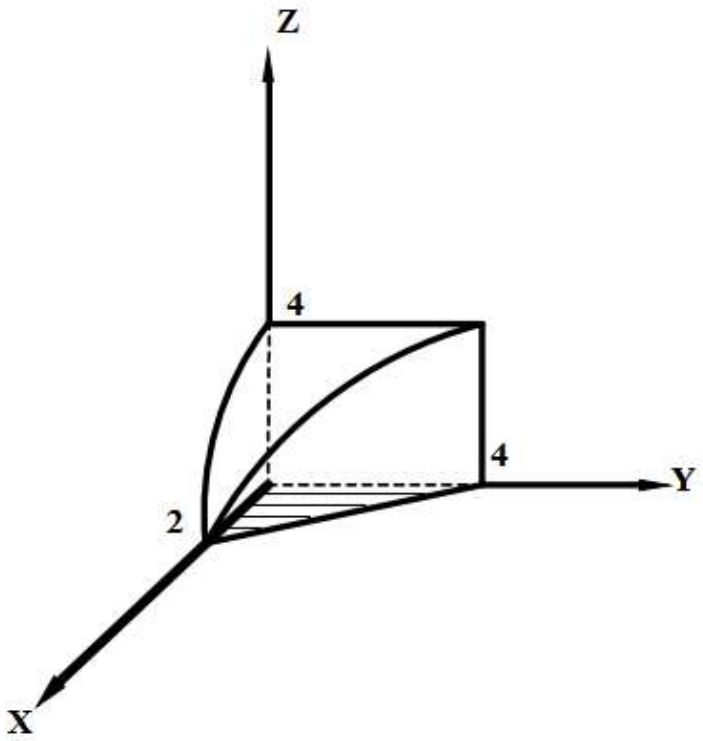


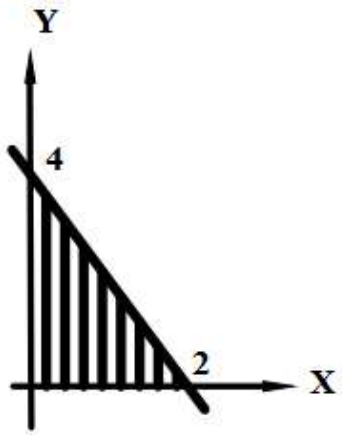
№10

$z = 4 - x^2$

$2x + y = 4 \ (x \geq 0)$

$x = 0;\ y = 0;\ z = 0;$



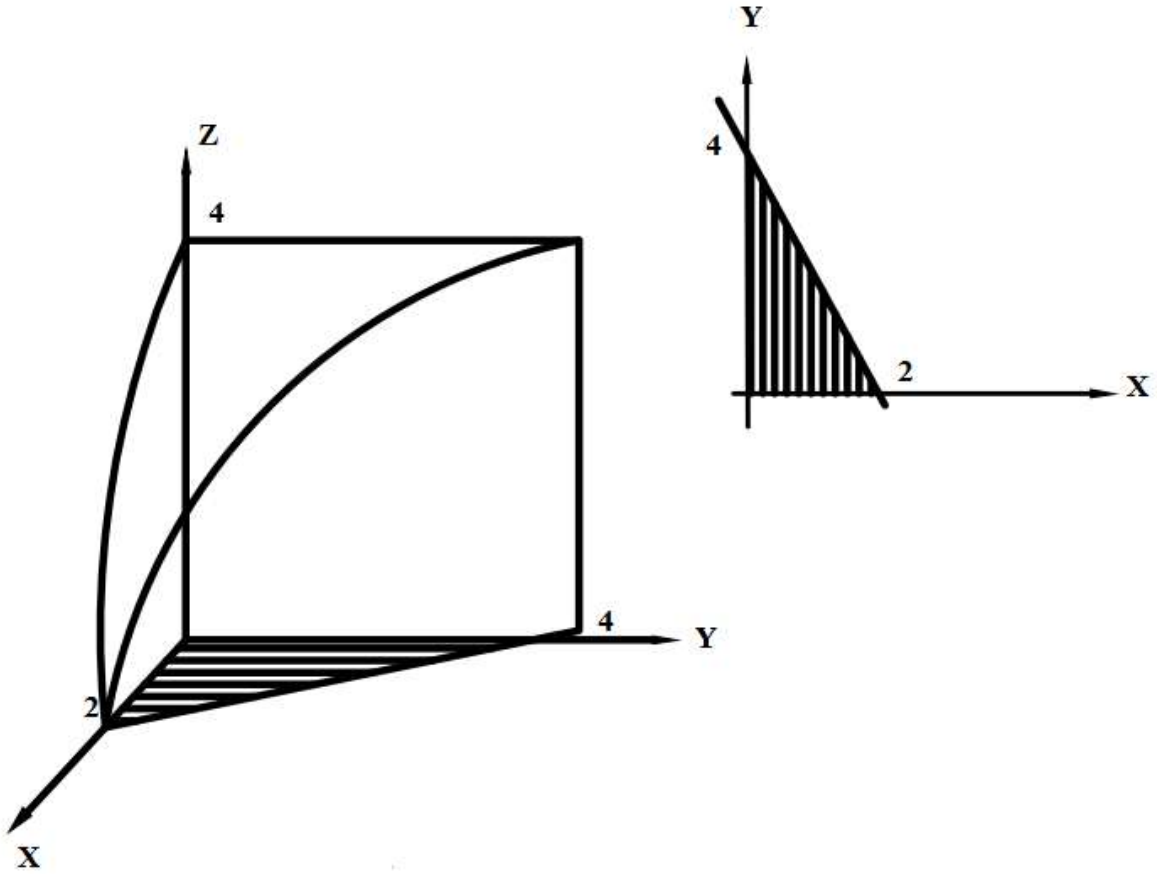


№11

$z = 4 - x^2$

$2x + y = 4 \ (x \geq 0)$

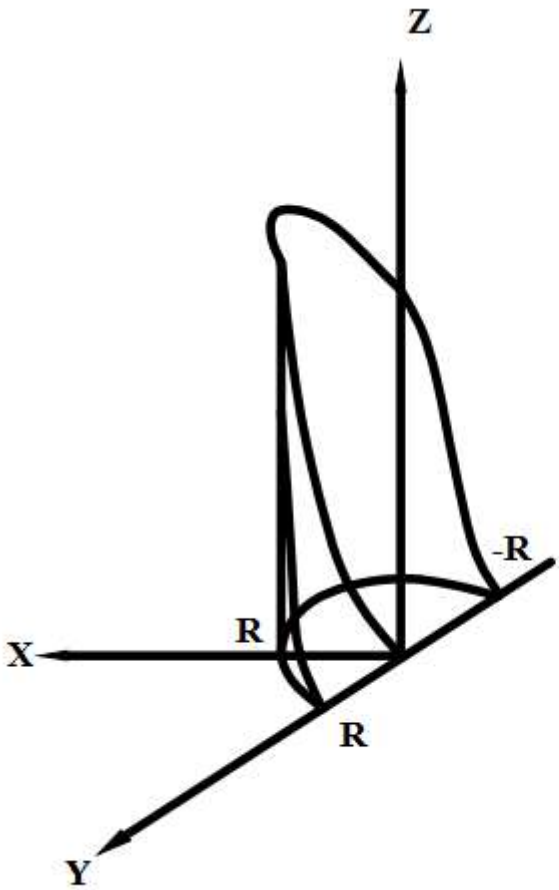
$x = 0;\ y = 0;\ z = 0;$

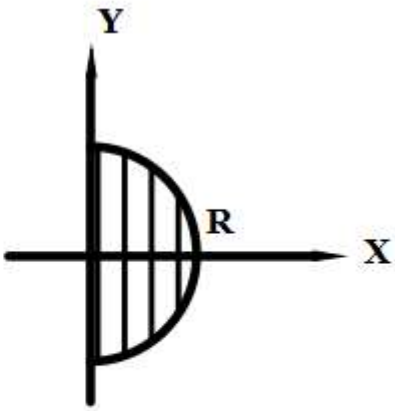


№12

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$z = \frac{x^3}{a^2};\ z = 0;\ (x \geq 0)$$



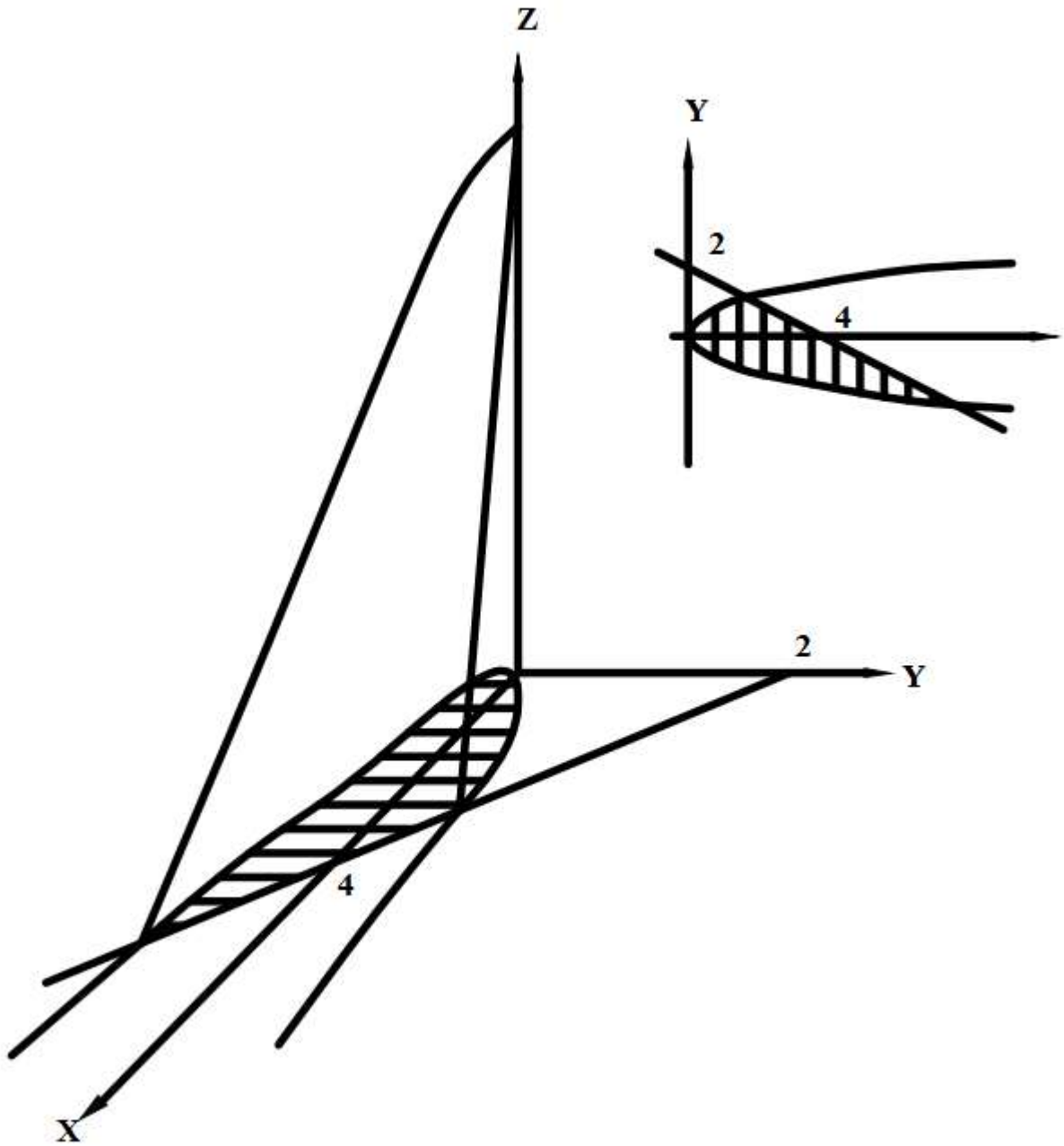


№13

$$2y^2 = x$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$$

$$z = 0$$

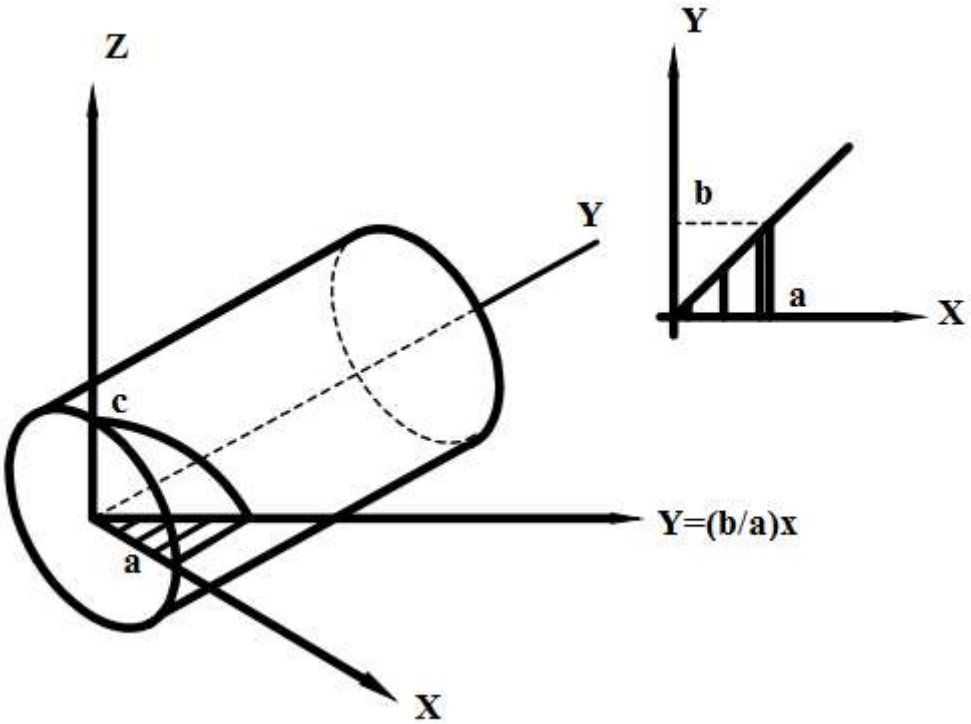


№14

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$y=\frac{b}{a}x;\ (y\geq 0)$$

$$z=0;(x\geq 0)$$

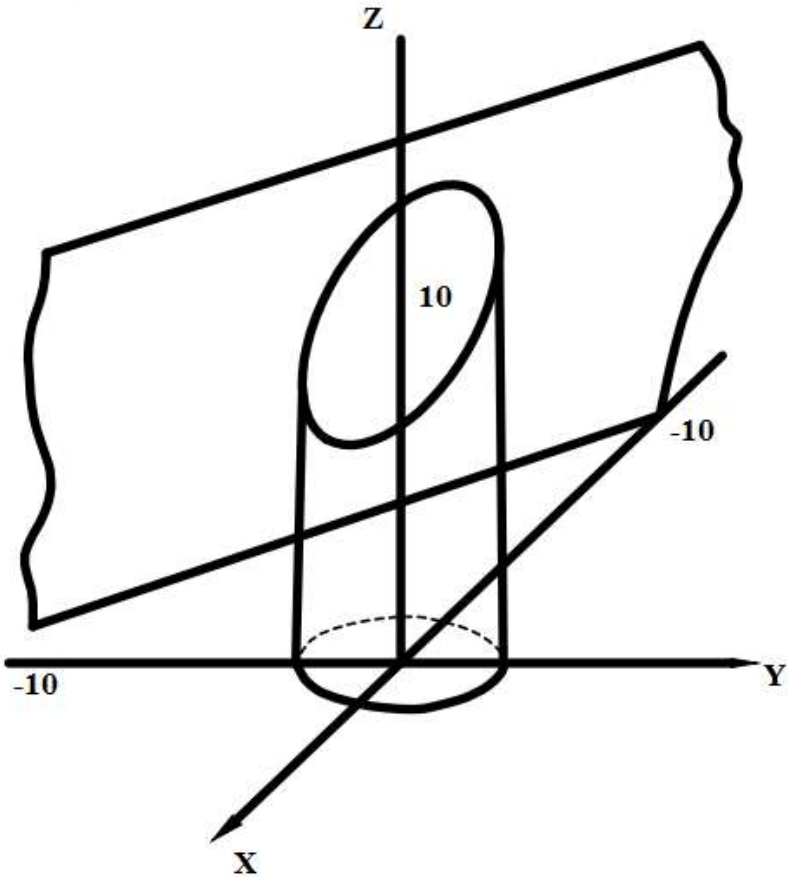


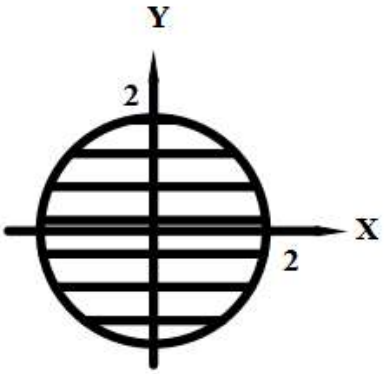
№15

$x^2 + y^2 = 4$

$z = x + y + 10;$

$z = 0;$

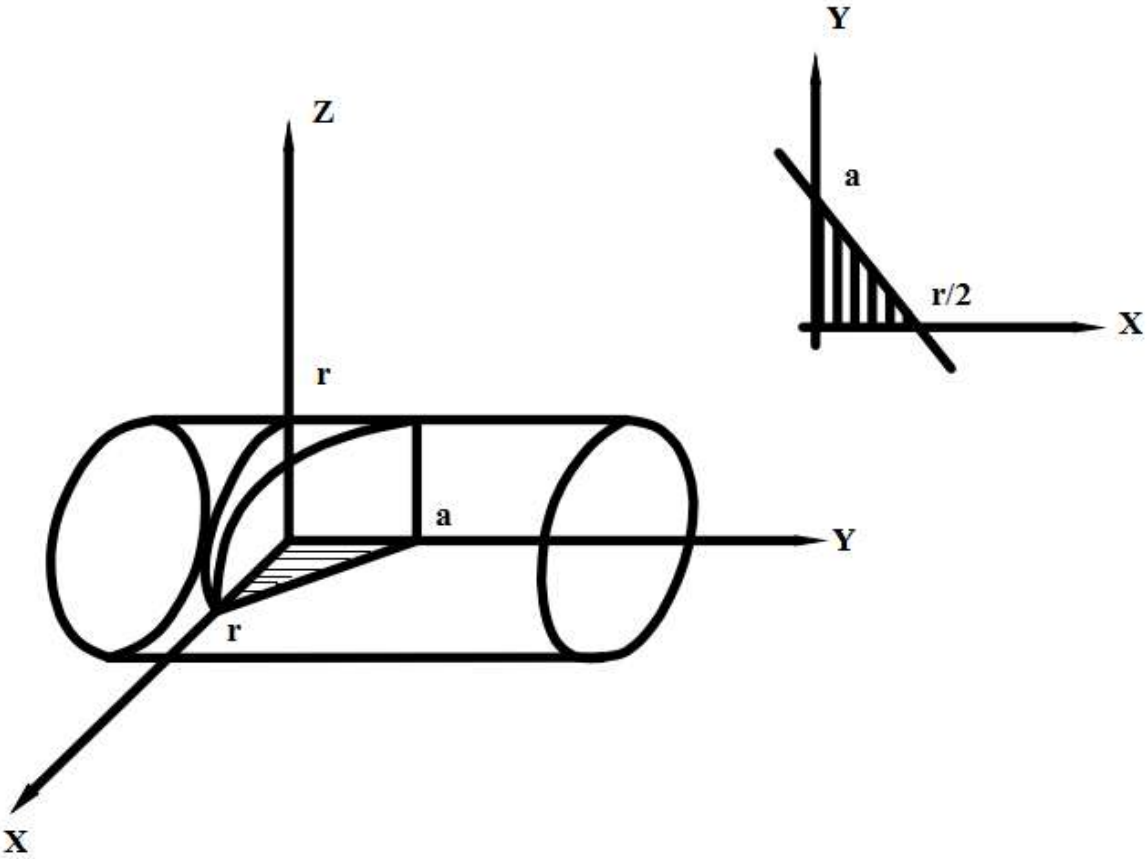




№16

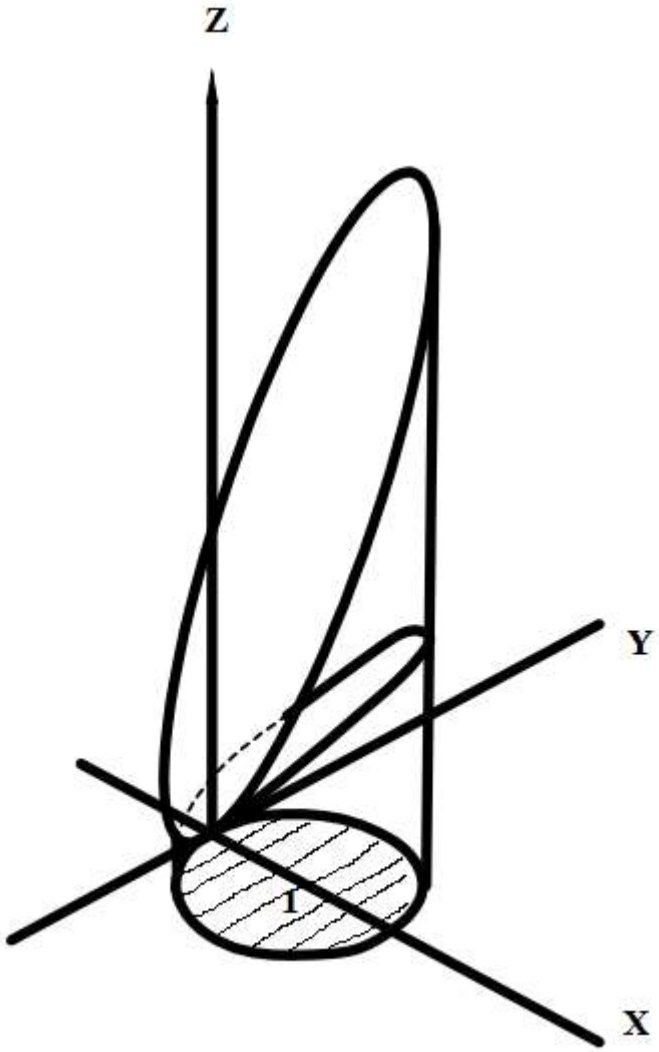
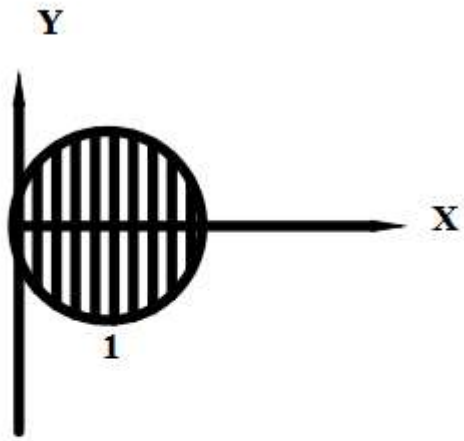
$$x^2 + z^2 = r^2$$

$$\frac{2x}{r} + \frac{y}{a} = 1$$



№17

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$2x - z = 0$$

$$4x - z = 0$$