Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Кафедра информационных и автоматизированных производственных систем

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯТОРА

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «**Специальные главы механики**»
для студентов направления 15.04.04,
образовательная программа «Роботы и робототехнические системы», очной формы обучения

Составители Н. П. Курышкин
С. А. Смирнов

Утверждены на заседании кафедры
Протокол №2 от 30.09.2017
Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
направления 15.04.04
Протокол №39 от 19.10.2017

Электронная копия находится
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2017

ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Цель работы – практическое освоение метода кинематического анализа манипуляторов с использованием метода преобразования координат.

С этой целью строится кинематическая схема предложенного манипулятора с шестью степенями свободы в начальном положении. Методом преобразования координат в матричной форме выводятся уравнения связи обобщённых координат с координатами объекта, находящегося в захвате, относительно стойки. Используя эти уравнения, по заданным значениям обобщённых координат вычисляются координаты объекта в абсолютной системе координат.

Работа рассчитана на 6 часов.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Рассмотрим манипулятор обобщённой структуры (рис. 1). Он имеет n подвижных звеньев, соединённых между собой последовательно произвольными кинематическими парами. Центр схвата – точка M. В схвате зажат объект цилиндрической формы.

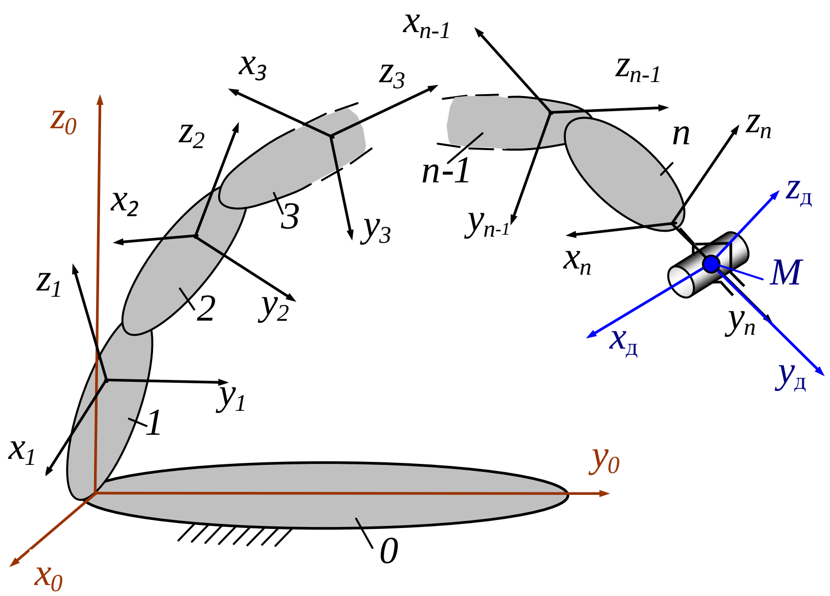

Рис. 1 Манипулятор обобщённой структуры

Для того чтобы получить координаты точки M в абсолютной системе координат ($x_0\, y_0\, z_0$), необходимо последовательно выполнить преобразования: из системы координат схвата в абсолютную систему по следующей цепочке: ($x_n\, y_n\, z_n$) → ($x_{n\text{-}1}\, y_{n\text{-}1}\, z_{n\text{-}1}$) → …

$\to (x_3\, y_3\, z_3) \to (x_2\, y_2\, z_2) \to (x_1\, y_1\, z_1) \to (x_0\, y_0\, z_0)$. Каждое преобразование выполняется по уравнениям:

$$\begin{cases} x_{M_i} = a_{11}x_{M_j} + a_{12}y_{M_j} + a_{13}z_{M_j} + a; \\ y_{M_i} = a_{21}x_{M_j} + a_{22}y_{M_j} + a_{23}z_{M_j} + b; \\ z_{M_i} = a_{31}x_{M_j} + a_{32}y_{M_j} + a_{33}z_{M_j} + c, \end{cases} \qquad (1)$$

где x_{M_i}, y_{M_i}, z_{M_i} – координаты точки M в i-той системе координат, куда выполняется преобразование (рис. 2); x_{M_j}, y_{M_j}, z_{M_j} – координаты точки M в j-той системе координат, из которой выполняется преобразование; a, b, c – координаты точки 0_j в i-той системе координат; a_{11}, …, a_{33} – направляющие косинусы углов между осями: $a_{11} = \cos(\widehat{x_j; x_i})$, $a_{12} = \cos(\widehat{y_j; x_i})$, $a_{13} = \cos(\widehat{z_j; x_i})$, $a_{21} = \cos(\widehat{x_j; y_i})$, $a_{22} = \cos(\widehat{y_j; y_i})$, $a_{23} = \cos(\widehat{z_j; y_i})$, $a_{31} = \cos(\widehat{x_j; z_i})$, $a_{32} = \cos(\widehat{y_j; z_i})$, $a_{33} = \cos(\widehat{z_j; z_i})$.

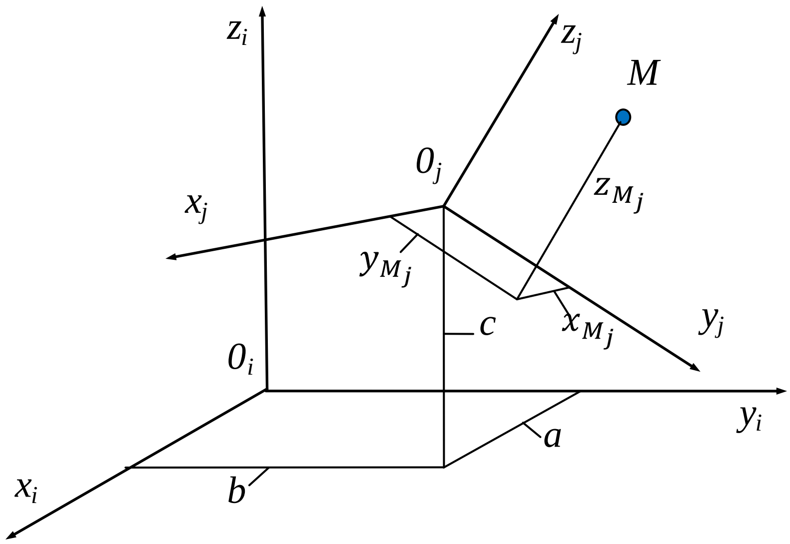

Рис. 2 К уравнениям преобразования координат

Ввиду громоздкости записей уравнений преобразования их принято представлять в матричной форме, добавив к уравнениям (1) фиктивное тождество: 1=0·1+0·1+0·1+1. Добавление тождества делает матрицы перемножаемыми. Учитывая это, запишем матрицы компонент уравнений (1):

$$R_{M_i} = \begin{bmatrix} x_{M_i} \\ y_{M_i} \\ z_{M_i} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_{M_j} = \begin{bmatrix} x_{M_j} \\ y_{M_j} \\ z_{M_j} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T_{ji} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Матрицу T_{ji} называют матрицей кинематической пары. Запишем уравнение (1) в матричной форме:

$$R_{M_i} = T_{ji} R_{M_j}. \tag{3}$$

Тогда для манипулятора обобщённой структуры (рис. 1) уравнение преобразования в матричной форме будет иметь вид:

$$R_{M_0} = T_{10} T_{21} T_{32} \dots T_{n(n-1)} R_{M_n}. \tag{4}$$

Необходимо отметить, что при умножении матриц менять их местами нельзя. Уравнение (4) равносильно системе трёх алгебраических уравнений, связывающих обобщённые координаты с координатами центра схвата.

Для задания положения объекта, находящегося в схвате, линейных координат одной точки М недостаточно. Необходимы ещё три угловые координаты, характеризующие ориентацию осей системы координат объекта ($x_д y_д z_д$) относительно системы координат схвата ($x_n y_n z_n$). В этом случае достаточно столбцовую матрицу R_{M_n} заменить наддиагональной матрицей P_{M_n}:

$$P_{M_n} = \begin{bmatrix} \cos(\widehat{x_д; x_n}) & \cos(\widehat{y_д; x_n}) & \cos(\widehat{z_д; x_n}) & x_{M_n} \\ \dots & \cos(\widehat{y_д; y_n}) & \cos(\widehat{z_д; y_n}) & y_{M_n} \\ \dots & \dots & \cos(\widehat{z_д; z_n}) & z_{M_n} \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Тогда левая часть матричного уравнения (4) будет также наддиагональной матрицей P_{M_0}, элементами которой будут шесть алгебраических уравнений связи обобщённых координат манипулятора с координатами объекта:

$$P_{M_0} = \begin{bmatrix} \dots & \cos(\widehat{y_д; x_0}) & \cos(\widehat{z_д; x_0}) & x_{M_0} \\ \dots & \dots & \cos(\widehat{z_д; y_0}) & y_{M_0} \\ \dots & \dots & \dots & z_{M_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, применение метода преобразования координат в матричной форме позволяет легко получить уравнения связи обобщённых координат с координатами объекта в схвате. Процесс получения этих уравнений сводится к операции перемножения матриц.

ПРИМЕР КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В качестве примера рассмотрим манипулятор с тремя степенями свободы (рис. 3). В схвате зажат объект с характерной точкой *M*. Согласно методу преобразования координат, с каждым звеном манипулятора связывают систему координат, расположенную, например, как показано на рис. 3.

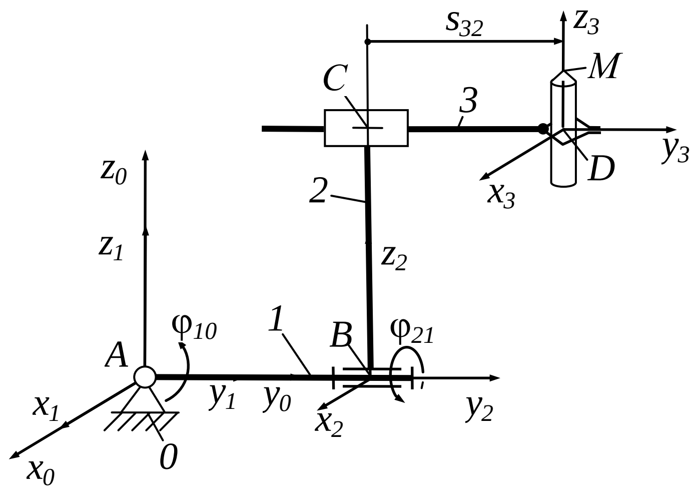

Рис. 3 Манипулятор с тремя степенями свободы

В исходном положении манипулятора оси всех систем направляют параллельно одноимённым осям системы *0* ($Ax_0\, y_0\, z_0$).

Координаты точки *M* последовательно преобразуют из системы *3* в *2*, из *2* в *1*, из *1* в *0*. В матричной записи формула преобразования имеет вид:

$$R_{M_0} = T_{10} \cdot T_{21} \cdot T_{32} \cdot R_{M_3}, \tag{7}$$

где R_{M_0} и R_{M_3} – столбцовые матрицы искомых и заданных координат:

$$R_{M_0} = \begin{vmatrix} x_{M_0} \\ y_{M_0} \\ z_{M_0} \\ 1 \end{vmatrix}; \qquad R_{M_3} = \begin{vmatrix} x_{M_3} \\ y_{M_3} \\ z_{M_3} \\ 1 \end{vmatrix};$$

В результате перемножения матриц по формуле (7) получают столбец R_{M_0}, содержащий формулы искомых координат. Для манипулятора, изображенного на рис. 3, координаты точки *M* в системе *3*: $x_{M_3} = 0$; $y_{M_3} = 0$; $z_{M_3} = l_{DM}$. На этом основании:

$$R_{M_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{DM} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для составления матриц преобразования T_{ji} изобразим каждую пару систем координат отдельно, причём с совмещёнными началами (рис. 4).

Систему, из которой ведётся преобразование, изобразим повернутой на небольшой положительный (независимо от действительного знака) угол, если поворот предусмотренным заданием. Угол поворота считается положительным, если поворот, наблюдаемый из конца в начало координатной оси поворота, происходит против часовой стрелки. На рис. 3 и 4 все углы – положительные.

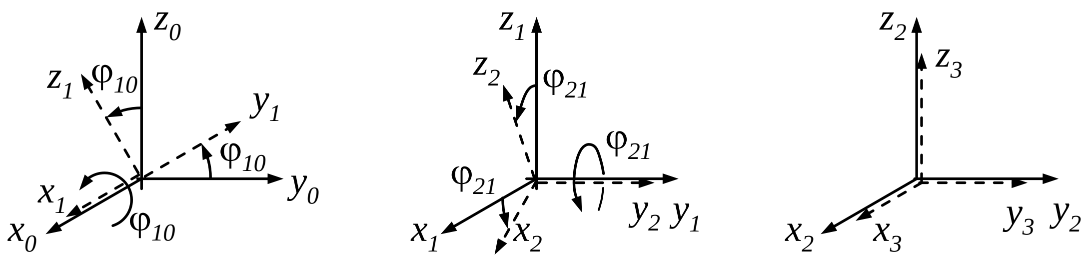

Рис. 4 К разработке матриц кинематических пар

Используя рис. 3, 4, составим матрицы преобразования. Результат показан на рис. 5.

Матрица T_{10}

	x_1	y_1	z_1	
x_0	1	0	0	0
y_0	0	$\cos\varphi_{10}$	$-\sin\varphi_{10}$	0
z_0	0	$\sin\varphi_{10}$	$\cos\varphi_{10}$	0
	0	0	0	1

Матрица T_{21}

	x_2	y_2	z_2	
x_1	$\cos\varphi_{21}$	0	$\sin\varphi_{21}$	0
y_1	0	1	0	l_{AB}
z_1	$-\sin\varphi_{21}$	0	$\cos\varphi_{21}$	0
	0	0	0	1

Матрица T_{32}

	x_3	y_3	z_3	
x_2	1	0	0	0
y_2	0	1	0	s_{32}
z_2	0	0	1	l_{BC}
	0	0	0	1

Рис. 5 Матрицы кинематических пар

Сверху и сбоку матриц расположены вспомогательные обозначения осей координат. Обозначения сверху принадлежат системе, из которой ведётся преобразование, обозначения сбоку – системе, в которую ведётся преобразование. Эти обозначения не являются элементами матриц. Они лишь подсказывают наименования осей, между которыми должен быть взят угол, стоящий под знаком косинуса.

Не во всех ячейках матриц оказались косинусы. Это объясняется тем, что углы между некоторыми осями координат равны 90°±φ. В таком случае по формулам приведения имеем:

$$\cos(90°+\varphi) = -\sin\varphi; \qquad \cos(90°-\varphi) = \sin\varphi.$$

Кроме того, некоторые углы равны 0 и 90°, косинусы таких углов, как известно, равны 1 и 0 соответственно. Осталось матрицы перемножить. Правило умножения матриц иллюстрирует рис. 6.

		B		
	A	b_{11}	b_{12}	
		b_{21}	b_{22}	
a_{11}	a_{12}	$a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}$	$a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22}$	$C=A\cdot B$
a_{21}	a_{22}	$a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}$	$a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22}$	

Рис. 6 К правилу умножения матриц

Здесь матрица A из элементов a_{ij} умножается на матрицу B из элементов b_{ij} и получается матрица C. Умножение матриц в соответствии с формулой (7) показано на рис. 7. Рекомендуется располагать перемножаемые матрицы вдоль длинной стороны листа формата А4 или на двух тетрадных листах.

				T_{21}				T_{32}				R_{M_3}
				$\cos\varphi_{21}$	0	$\sin\varphi_{21}$	0	1	0	0	0	0
				0	1	0	l_{AB}	0	1	0	s_{32}	0
				$-\sin\varphi_{21}$	0	$\cos\varphi_{21}$	0	0	0	1	l_{BC}	l_{DM}
				0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	$\cos\varphi_{21}$	0	$\sin\varphi_{21}$	0	$\cos\varphi_{21}$	0	$\sin\varphi_{21}$	$l_{BC}\sin\varphi_{21}$	$l_{DM}\sin\varphi_{21}+l_{BC}\sin\varphi_{21}$
0	$\cos\varphi_{10}$	$-\sin\varphi_{10}$	0	$\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{21}$	$\cos\varphi_{10}$	$-\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21}$	$l_{AB}\cos\varphi_{10}$	$\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{21}$	$\cos\varphi_{10}$	$-\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21}$	$s_{32}\cos\varphi_{10}-l_{BC}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21}+l_{AB}\cos\varphi_{10}$	$-l_{DM}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21}+s_{32}\cos\varphi_{10}-l_{BC}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21}+L_{AB}\cos\varphi_{10}$
0	$\sin\varphi_{10}$	$\cos\varphi_{10}$	0	$-\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{21}$	$\sin\varphi_{10}$	$\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21}$	$l_{AB}\sin\varphi_{10}$	$-\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{21}$	$\sin\varphi_{10}$	$\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21}$	$s_{32}\sin\varphi_{10}+l_{BC}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21}+l_{AB}\sin\varphi_{10}$	$l_{DM}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21}+s_{32}\sin\varphi_{10}+l_{BC}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21}+l_{AB}\sin\varphi_{10}$
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	T_{10}				$T_{10}\cdot T_{21}$				$T_{10}\cdot T_{21}\cdot T_{32}$			R_{M_0}

Рис. 7 Умножение матриц

Формулы координат точки M находятся в столбце R_{M_0} и, как видно по рис. 7, имеют следующие выражения:

$x_{M_0} = l_{DM}\sin\varphi_{21} + l_{BC}\sin\varphi_{21}$;

$y_{M_0} = -\, l_{DM}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + s_{32}\cos\varphi_{10} - l_{BC}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + l_{AB}\cos\varphi_{10}$;

$z_{M_0} = l_{DM}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + s_{32}\sin\varphi_{10} + l_{BC}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + l_{AB}\sin\varphi_{10}$.

Подставляя в формулы размеры звеньев и обобщённые координаты, получают численные значения искомых координат.

ПОРЯДОК РАБОТЫ

1. Начертить схему манипулятора в исходном положении и связать с каждым звеном систему координат как на рис. 8.

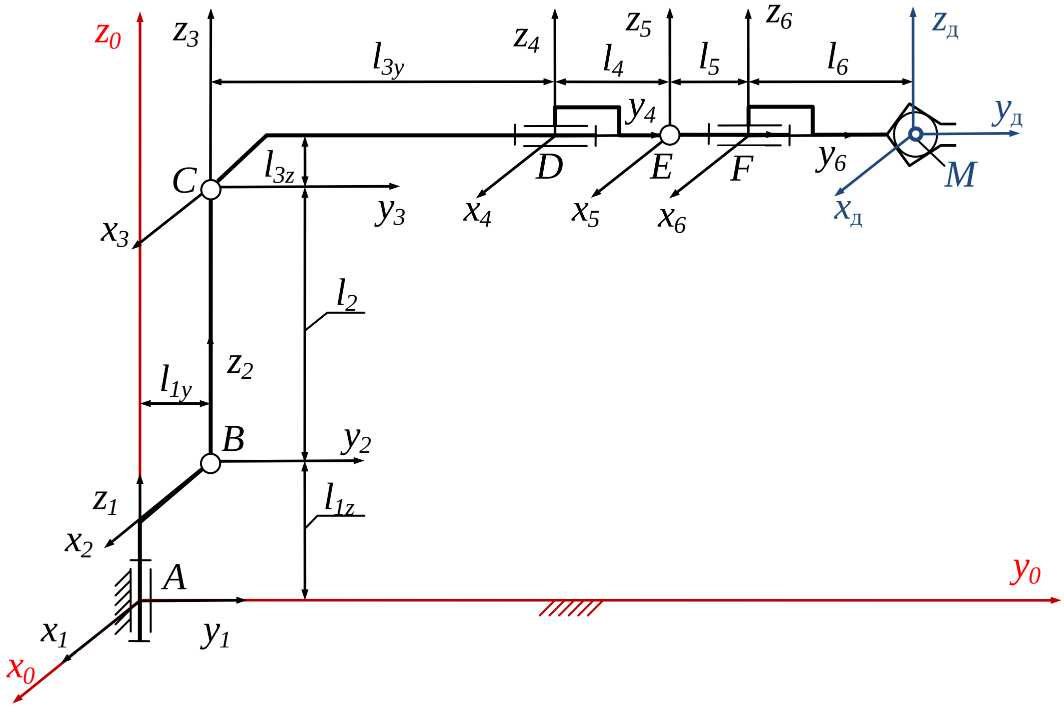

Рис. 8 Кинематическая схема манипулятора

2. Изобразить системы координат попарно (подобно показанному на рис. 4) и составить матрицы T_{10}, T_{21}, T_{32}, T_{43}, T_{54}, T_{65}, P_{M_6}.

3. Перемножить матрицы, расположив их уступом, как на рис. 7.

4. Извлечь из наддиагональной матрицы P_{M_0}, формулы координат точки M и трёх направляющих косинусов и найти их численные значения. Обобщённые координаты взять из таблицы,

приведённой ниже, согласно варианту. Размеры звеньев: l_{1y} = 0,2 м; l_{1z} = 0,4 м; l_2 = 1,0 м; l_{3y} = 0,8 м; l_{3z} = 0,2 м; l_4 = 0,3 м; l_5 = 0,1 м; l_6 = 0,15 м.

Обобщённые координаты	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ_{10}, град.	15	30	45	–30	–60	–75	60	75	–15	–45
φ_{21}, град.	–20	–10	30	60	50	–30	60	20	40	60
φ_{32}, град.	–40	–80	–90	–60	40	110	30	50	120	50
φ_{43}, град.	–10	–20	–30	–40	–50	–60	–70	–80	–15	–45
φ_{54}, град.	60	50	–20	40	30	50	–10	–30	–20	20
φ_{65}, град.	60	–40	–30	140	120	170	50	–20	45	150

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова структура матрицы преобразования координат?
2. Каково назначение четвёртой строки матрицы преобразования?
3. Составьте одну из ваших матриц преобразования координат.
4. Сформулируйте правило умножения матриц.
5. Напишите матричную формулу преобразования координат.
6. Что получается в результате умножения матриц T_{65} на P_{M_6}?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Курышкин, Н. П. Основы робототехники: учеб. пособие / Н. П. Курышкин; Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 2012. – 165 с.

Составители
Николай Петрович Курышкин
Сергей Александрович Смирнов

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯТОРА

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «**Специальные главы механики**»
для студентов направления 15.04.04,
образовательная программа «Роботы и робототехнические системы», очной формы обучения

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 23.10.2017. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе
Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 10 экз. Заказ
КузГТУ, 650000, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр УИП КузГТУ, г. Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а