

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т.Ф. Горбачева»

Кафедра автомобильных перевозок

Составители  
**А. В. Косолапов**  
**Н. А. Стенина**  
**А. А. Штоцкая**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ**

**Методические указания к практическим занятиям**

Рекомендовано учебно-методической комиссией  
по направлению 23.03.01 «Технология транспортных процессов»  
в качестве электронного издания  
для использования в учебном процессе

Кемерово 2016

Рецензенты:

Ю. Е. Воронов – доктор технических наук, профессор, председатель учебно-методической комиссии направления 23.03.01 «Технология транспортных процессов»

В. Л. Жданов – кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильных перевозок

**Косолапов Андрей Валентинович**

**Стенина Наталья Александровна**

**Штоцкая Анастасия Аркадьевна**

**Моделирование дорожного движения** : методические указания к практическим занятиям [Электронный ресурс] для студентов направления 23.03.01 «Технология транспортных процессов», профиль «Организация и безопасность дорожного движения» очной формы обучения / сост. : А. В. Косолапов, Н. А. Стенина, А. А. Штоцкая; КузГТУ. – Кемерово, 2016. – Систем. требования : Pentium IV ; ОЗУ 8 Мб ; Windows 2003 ; мышь. – Загл. с экрана.

Приводятся цели проведения практических занятий, последовательность их выполнения и задания, а также список рекомендуемой литературы.

Издание предназначено для студентов направления 23.03.01 «Технология транспортных процессов», профиль «Организация и безопасность дорожного движения».

© КузГТУ, 2016

© Косолапов А. В., Стенина Н. А.,  
Штоцкая А. А., составление, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	3
Практическая работа № 1. Оценка условий движения на основе измерения скорости автомобиля-лаборатории в транспортном потоке на улицах г. Кемерово .....	4
Практическая работа № 2. Изучение закономерностей распределения интервалов и скоростей в транспортном потоке .....	10
Практическая работа № 3. Статистическая оценка характеристик и параметров транспортного потока .....	15
Практическая работа № 4. Двумерные выборки. Числовая линейная связь между случайными характеристиками транспортных и пешеходных потоков .....	31
Практическая работа № 5. Теоретические основы движения потока автомобилей .....	34
Практическая работа № 6. Соотношение между основными характеристиками транспортного потока. Макромодели транспортного потока .....	38
Практическая работа № 7. Микромодели транспортного потока. Динамическая теория следования за лидером .....	43
Приложение .....	47
Список рекомендуемой литературы .....	48

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания составлены на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и с учётом рекомендаций основной образовательной программы по направлению подготовки бакалавров 23.03.01 «Технология транспортных процессов», профиль 23.03.01.02 «Организация и безопасность дорожного движения».

Дисциплина «Моделирование дорожного движения» опирается на знания, полученные при изучении дисциплин «Математика», «Прикладная математика», «Информатика» и «Организация дорожного движения».

«Моделирование дорожного движения» является дисциплиной, формирующей у студентов общее представление о характеристиках транспортных потоков, их взаимозависимостях, различных моделях макроскопического, мезоскопического и микроскопического порядка. Это позволяет им осознанно подойти в дальнейшем к выполнению выпускной квалификационной работы.

Целью изучения дисциплины «Моделирование дорожного движения» является изложение теоретических, практических и методических положений о современном состоянии и развитии математического и программного обеспечения, используемого в настоящее время для моделирования дорожного движения в городах.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

### Тема: Оценка условий движения на основе измерения скорости автомобиля-лаборатории в транспортном потоке на улицах г. Кемерово

Цель занятия: изучить и проанализировать энергетические критерии условий дорожного движения на примере одной из улиц г. Кемерово.

Рекомендуемая литература к занятию: [2, 4, 5-8, 11, 13-16, 21]

#### Теоретические положения

Многие работы отечественных и зарубежных исследователей показывают, что условия безопасности, а также расход топлива в значительной мере зависят от стабильности скоростного режима на протяжении маршрута. Чем больше частота и диапазон колебаний (дисперсия) скорости автомобилей при проезде по магистрали, тем ниже относительный уровень безопасности движения и топливная экономичность. Представляется возможным в качестве объективного метода для оперативной оценки эффективности организации движения использовать анализ пространственно-временной характеристики скоростного режима, полученной ходовыми лабораториями. Наличие пространственно-временной характеристики скоростного режима позволяет определить математический шум ускорения (среднее квадратическое отклонение ускорения) на исследуемом участке:

$$\sigma_a = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T a_i^2 dt \right]^{1/2}, \quad (1.1)$$

где  $T$  – время движения по исследуемому участку, с;

$a_i$  – мгновенные значения ускорения, м/с<sup>2</sup>;

$dt$  – промежуток времени, принятый для фиксации ускорения при анализе непрерывной записи скорости движения автомобиля в потоке, с.

Дорожно-транспортные условия движения можно ориентировочно охарактеризовать в соответствии со следующими значениями шума ускорения, м/с<sup>2</sup>:

благоприятные	менее 0,25
удовлетворительные	0,25–0,45
сложные (неудовлетворительная организация дорожного движения)	более 0,45

Показатель шума ускорения может быть успешно применён для характеристики стабильности скоростного режима на перегоне при безостановочном движении. Однако он не чувствителен к наличию полных перерывов движения (остановок), поэтому для объективной оценки, особенно городских магистралей с регулируемыми пересечениями, следует применять показатель *колебаний скорости* (градиент скорости)  $G_v$ . Он является отношением шума ускорения к скорости сообщения на протяжении исследуемого участка:  $G_v = \sigma_a/v_c$ .

Дорожно-транспортные условия движения характеризуются в соответствии со следующими значениями градиента скорости,  $c^{-1}$ :

Благоприятные	менее 0,05
Удовлетворительные	0,05–0,1
Сложные (неудовлетворительная организация дорожного движения)	более 0,1

Кроме вышеупомянутых шума ускорения и градиента скорости, используют такие распространённые параметры, как *шум энергии и градиент энергии*.

Чтобы пояснить значение энергетических критериев, следует подчеркнуть, что физический смысл их применения заключается в возможности оценить потери энергии в транспортном потоке вследствие неблагоприятных условий движения (неоднородности потока, перенасыщения дороги потоком, некачественной координации светофорного регулирования и т.д.).

Применение критериев шум энергии  $\sigma_E$  и градиент энергии  $G_E$  оправдано при более глубоких исследованиях характеристик транспортных потоков. При анализе скоростных режимов на городских магистралях было установлено, что с увеличением скорости движения и продолжением движения в этом режиме уменьшаются мгновенные и средние значения ускорений. В ре-

зультате при высокой скорости не учитывается одно из основных противоречий дорожного движения «скорость – опасность». Однако данным обстоятельством обычно пренебрегают при определении оптимальных скоростных режимов по шуму ускорения.

Поэтому дальнейшее направление развития оценочных критериев связано с разработкой критерия, сформированного на основе оценки среднего квадратического отклонения произведения мгновенных значений  $a_i$  и  $v_i$  от среднего значения  $\overline{av}$ . Этот критерий назван шумом энергии:

$$\sigma_E = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i v_i - \overline{av})^2 \right]^{1/2}, \quad (1.2)$$

где  $a_i$  и  $v_i$  – мгновенные значения соответственно ускорения,  $\text{м/с}^2$ , и скорости,  $\text{м/с}$ , в одной и той же точке;

$\overline{av}$  – среднее значение произведения скорости на ускорение на исследуемом участке,  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;

$n$  – число измерений скорости и ускорения.

Рассмотрим обоснованность такого названия критерия. Кинетическая энергия движения автомобиля

$$E = \frac{mv^2}{2}, \quad (1.3)$$

где  $m$  – масса автомобиля

Производная энергии по времени характеризует процесс изменения кинетической энергии движущегося автомобиля:

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = mva. \quad (1.4)$$

Поскольку за промежуток времени  $dt$  между двумя замерами (2–3 с) масса автомобиля не изменяется, можно считать, что изменение энергии характеризуется произведением ускорения на скорость.

В отличие от ускорения, произведение  $\overline{av}$  возрастает с увеличением скорости при неравномерном движении, а в случае приближения к устойчивому режиму движения остаётся на одном уровне при скорости выше 40–45 км/ч. Это принципиальное различие позволяет получать более точную оценку режима движения, характеризуемого относительно высокой скоростью.

Шум энергии сравнительно редко используется при оценке условий движения. Принято считать условия движения сложны-

ми при шуме энергии выше  $5 \text{ м}^2/\text{с}^3$ , удовлетворительными при значениях  $4\text{--}5 \text{ м}^2/\text{с}^3$ , благоприятными при шуме энергии ниже  $4 \text{ м}^2/\text{с}^3$ .

Градиент энергии  $G_E$  является более универсальным критерием. Расчётная формула для его определения получается при преобразовании шума энергии:  $G_E = \frac{\sigma_E}{v_c}$ .

Экспериментальные исследования, проведённые проф. В.В. Зыряновым [4, 5], показали, что наиболее существенное влияние на градиент энергии оказывают длительность задержек и неравномерность движения. Степень взаимосвязи этих факторов с градиентом энергии примерно одинакова. Такие свойства позволяют успешно применять градиент энергии для оценки эффективности методов организации дорожного движения на регулируемой светофорами транспортной сети.

В результате этих исследований установлены следующие зависимости между градиентом энергии и основными характеристиками транспортных потоков:

- с увеличением интенсивности движения градиент энергии возрастает, т.е. критерий отражает те качественные изменения состояния транспортного потока, которые происходят при изменении уровня загрузки дороги;
- увеличение скорости сообщения и снижение задержек приводят к уменьшению градиента энергии;
- повышение стабильности скоростного режима способствует снижению градиента энергии;
- разнородность состава транспортного потока приводит к увеличению градиента энергии.

Дорожно-транспортные условия движения можно ориентировочно охарактеризовать в соответствии со следующими значениями градиента энергии,  $\text{м}/\text{с}^2$ :

Благоприятные	менее 0,3
Удовлетворительные	0,3–0,55
Сложные (неудовлетворительная организация дорожного движения)	более 0,55

При проведении исследований с целью оценки условий дви-

жения по энергетическим критериям необходимо измерять мгновенные значения скорости  $v_i$  и ускорения  $a_i$  через определённые интервалы времени. При выборе дискретности отсчётов надо учитывать, что при малых интервалах регистрации данных увеличивается трудоёмкость обработки эксперимента, а при больших интервалах возможен пропуск существенной информации об изменении режима движения. На основе проведённых в МАДИ исследований показателя  $G_E$  рекомендуется регистрация параметров через каждые 2 секунды с помощью автоматизированной аппаратуры и микропроцессора для обработки данных.

### Задание

Работа проводится на основе данных, полученных с помощью навигатора компании Garmin, изображённого на рис. 1.1.



Рисунок 1.1 – Навигатор Garmin модели eTrex Vista Cx

С помощью программного обеспечения сформировать базу данных скорости автомобиля-лаборатории на заданном преподавателем маршруте.

По результатам замеров скорости движения автомобиля-лаборатории установить:

- ❖ Значения продольных ускорений автомобиля-лаборатории.

- ❖ Максимальные, минимальные, средние значения скорости, продольного ускорения.
- ❖ Рассчитать среднюю задержку на пересечениях.
- ❖ Определить динамический габарит, учитывающий полный тормозной путь ведомого автомобиля при внезапной остановке ведущего в каждой точке фиксации скорости.
- ❖ Построить эпюры изменений ускорения скорости и динамического габарита по исходным данным.
- ❖ Рассчитать шум ускорения, градиент скорости, шум энергии, градиент энергии. На основе полученных результатов сделать вывод об условиях движения на магистрали.
- ❖ Произвести разбивку местности по показаниям навигатора (программа).
- ❖ Прodelать вышеописанные действия для своего участка.
- ❖ Сделать вывод об условиях движения на заданной магистрали, сравнить условия движения на выделенном индивидуальном участке с данными по исследуемой магистрали.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

### Тема: Изучение закономерностей распределения интервалов и скоростей в транспортном потоке

Цель занятия: выполнить экспериментальные измерения скоростных параметров на выбранной улице г. Кемерово и провести статистическую обработку выборки полученных значений скоростей и интервалов движения.

Рекомендуемая литература к занятию: [1, 3, 7, 9, 12]

#### Теоретические положения

Одним из основных способов получения информации об окружающем мире является сбор и обработка статистической информации. В области автомобильного транспорта исследованию подлежат множество параметров, например, временные параметры выполнения транспортных операций (движение по перегону улицы, простои на перекрёстках и т.д.). Большинство подобных параметров подвержено влиянию случайных факторов, что требует при исследовании сбора и обработки больших массивов статистической информации.

Практическая работа состоит из двух частей – проведения экспериментальных замеров и статистической обработки полученных результатов.

#### *Методика проведения экспериментальных исследований*

1. Сбор экспериментальных данных проводится на участке улично-дорожной сети (УДС), указанном преподавателем, в разное время суток.

2. Проводятся измерения временных интервалов между автомобилями с помощью секундомера, не реже, чем раз в 15 секунд. В результате измерений получают выборку, объёмом 100-150 значений.

3. Проводятся измерения времени прохождения автомобилем участка магистрали, длиной 100 м. Замеры производятся сплошным наблюдением за автомобилями, идущими по каждой полосе движения. Объём выборки, достаточный для проявления устойчивых закономерностей, составляет 100-200 измерений.

4. Результаты измерений оформляются в виде протокола (см. табл. 2.1) с помощью редактора EXCEL.

Таблица 2.1 – Протокол наблюдений

Место измерения –			
Направление движения –			
Время проведения замеров, ч : м			
Номер замера	Временной интервал, с	Время прохождения мерного участка, с	Скорость движения, м/с

*Методика статистической обработки полученных результатов*

Процесс статистической обработки данных, построение кривой плотности распределения временных интервалов и кумулятивной кривой скоростей движения автомобилей, осуществляются по следующим этапам:

1. Находят предварительное количество интервалов, на которое необходимо разбить совокупность статистических данных временных интервалов и скоростей. Это количество  $K$  определяют с помощью оценочной формулы (формулы Стэрджеса):

$$K = 1 + 3,322 \cdot \lg n, \quad (2.1)$$

где  $n$  – количество наблюдений (объем выборки).

Найденное значение  $K$  округляют до большего целого значения.

2. Определяют длину интервала:

$$h = \Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{K}. \quad (2.2)$$

Величину  $\Delta X$  допускается несколько округлить для удобства вычислений.

Однако существуют нюансы при работе с реальными данными. Могут существовать случайные выбросы («большие» и «маленькие» значения признака). В этих условиях можно отбросить до 5 % таких редких значений. В некоторые интервалы может попасть незначительное количество наблюдений, поэтому если наблюдений в интервале менее 5, то соседние интервалы можно объединить.

3. Находят частоту попаданий значений выборки в каждый интервал,  $n_j$ .

4. Определяют относительную частоту попаданий значений в интервал:

$$m_i = \frac{n_i}{n}. \quad (2.3)$$

5. Рассчитывают накопленную частоту  $v_x$  – число вариант выборки, меньших данного числа  $x$ .

6. Определяют относительную накопленную частоту по формуле

$$\omega_x = \frac{v_x}{n}. \quad (2.4)$$

7. Результаты расчётов сводят в таблицу.

8. На основе относительной частоты строят кривую плотности распределения значений временных интервалов, а на основе относительной накопленной частоты скоростей – кумулятивную кривую.

9. По полученным графикам делают вывод о состоянии транспортного потока на выбранном участке в разное время суток и об изменении скорости на этом участке.

Рассмотрим **контрольный пример 1**. Приведены результаты исследований показаний GPS-приёмника о скорости движения общественного транспорта в конкретные моменты времени: 0,0; 0,4; 0,4; 0,5; 1,2; 1,3; 1,5; 1,7; 2; 2,1; 2,1; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 2,8; 2,9; 3,0; 3,1; 3,3; 3,3; 3,3; 3,4; 3,4; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 3,9; 3,9; 3,9; 4; 4,1; 4,1; 4,2; 4,2; 4,3; 4,4; 4,4; 4,4; 4,4; 4,5; 4,5; 4,6; 4,6; 4,6; 4,7; 4,7; 4,7; 4,8; 4,8; 4,8; 4,8; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,1; 5,1; 5,1; 5,2; 5,4; 5,5; 5,5; 5,6; 5,6; 5,6; 5,6; 5,6; 5,6; 5,7; 5,7; 5,7; 5,7; 5,8; 5,8; 5,9; 5,9; 5,9; 5,9; 6; 6; 6,1; 6,1; 6,1; 6,1; 6,2; 6,2; 6,3; 6,3; 6,3; 6,3; 6,4; 6,5; 6,7; 6,7; 6,7; 6,8; 7,0; 7; 7,1; 7,1; 7,1; 7,1; 7,1; 7,2; 7,2; 7,3; 7,6; 7,6; 7,6; 7,8; 7,9; 8,2; 8,3; 8,6; 8,7; 8,7; 8,9; 9; 9,1; 9,2; 9,4; 10,1; 10,2; 10,7; 10,9; 12,1; 12,5; 12,7; 13,5; 15,6.

Скорость изменялась от 0 до 15,6 м/с. Так как количество наблюдений составило 136, то по формуле Стёрджеса рекомендуемое количество интервалов равно 8, поэтому величина интервала приближённо равна 2. Данные замеров распределены по интервалам.

Таблица 2.2 – Табличное представление интервального ряда

$[y_{i-1}, y_i)$	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)
$n_i$	8	26	51	32	10	4	4	1
$m_i$	0,059	0,191	0,375	0,235	0,074	0,029	0,029	0,007
$v_i$	8	34	85	117	127	131	135	136
$\omega_i$	0,059	0,250	0,625	0,860	0,934	0,963	0,993	1

Для интервальной таблицы частот справедливы определения частоты, относительной частоты и относительной частоты.

Частость – это *относительная* частота. Определить нужно частоту, накопленную частоту, частость и накопленную частость.

Данную выборку отобразим графически. Рисунки и графики являются наглядными способами представления выборки. Интервальную выборку удобно представить в виде гистограммы (рис. 2.1).

Гистограмма – это фигура, состоящая из прямоугольников. Основания прямоугольников – это интервалы, на которые разбита выборка. Высота прямоугольника – относительная плотность интервала:

$$h_i = \frac{\omega_i}{y_i - y_{i-1}}. \quad (2.5)$$

Таким образом, площадь гистограммы равна 1, это необходимо для сравнения гистограммы с теоретической функцией плотности распределения.

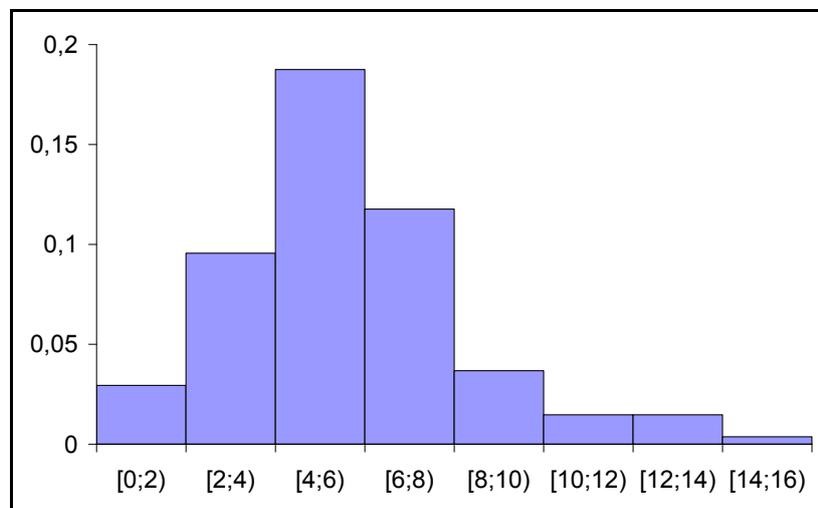


Рисунок 2.1 – Гистограмма для контрольного примера 1

Данная кривая возрастает с 0 до 1 и может быть сравнена с теоретической функцией распределения. Поэтому кумулятивная кривая называется эмпирической функцией распределения (рис. 2.2).

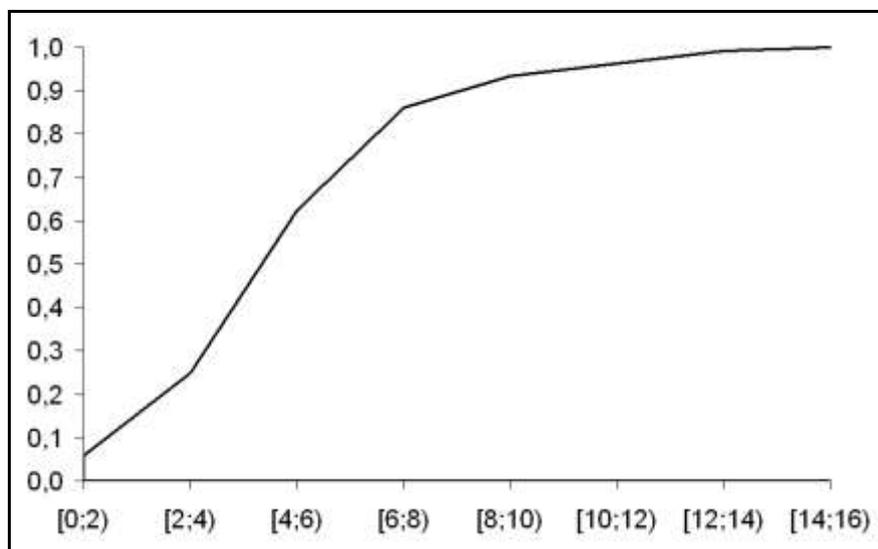


Рисунок 2.2 – Эмпирическая функция распределения для интервального ряда (контрольный пример 1)

**Задание:** на заданном участке УДС оценить режим движения транспортного потока и произвести статистическую обработку полученных значений скоростей.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3**  
**Тема: Статистическая оценка характеристик**  
**и параметров транспортного потока**

Цель занятия: опираясь на полученные ранее исходные данные, рассчитать критерии согласия по выбранным гипотезам распределения и оценить условия движения транспортного потока.

Рекомендуемая литература к занятию: [1, 3, 9, 12, 13, 19]

Теоретические положения

Одним из способов получения информации о дорожном движении на УДС с целью использования её для возможности моделирования движения, является сбор и обработка статистической информации. С помощью числовых характеристик выборки проводят анализ имеющихся данных.

***Числовые характеристики выборки***

*Выборочное среднее*  $\bar{x}$  – это среднее арифметическое элементов выборки. Можно рассмотреть несколько вариантов расчёта выборочного среднего:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^k y_i m_i . \quad (3.1)$$

Для интервальной таблицы частот принимают, что значения в интервале сгруппированы вокруг среднего значения, поэтому

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{y_{i-1} + y_i}{2} n_i}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{y_{i-1} + y_i}{2} m_i . \quad (3.2)$$

Свойства выборочного среднего (а также математического ожидания) следующие:

1. Средняя арифметическая от постоянной величины равна этой постоянной.
2. Если все элементы ряда уменьшить на одно число, то средняя арифметическая уменьшится на это же число.

3. Если частоты ряда увеличить в одно и тоже число раз, то средняя арифметическая возрастет в это число раз.

4. Сумма отклонений элементов ряда от средней арифметической равна нулю.

*Модой*  $M_0$  называют такое значение признака, которое наблюдалось наибольшее число раз. Модой дискретной случайной величины является значение, имеющее наибольшую вероятность.

Для таблицы частот – это значение, в котором частота (или частость) принимает наибольшее значение. Если мода единственна, то ряд называется унимодальным.

Для интервальной таблицы сначала необходимо определить модельный интервал  $j$  – в котором частота принимает наибольшее значение.

$$M_0 = y_{j-1} + h_j \frac{n_j - n_{j-1}}{2n_j - n_{j-1} - n_{j+1}}. \quad (3.3)$$

*Медианой*  $M_e$  называют значение признака, приходящее на середину ранжированного ряда наблюдений. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – ранжированный ряд наблюдений, тогда возможны две ситуации, когда объём выборки составляет нечётное число  $n = 2l - 1$ , то

$$M_e = x_l, \quad (3.4)$$

если же чётное число  $n = 2l$ , то

$$M_e = \frac{x_l + x_{l+1}}{2}. \quad (3.5)$$

Для интервального ряда сначала необходимо определить медианный интервал  $j$  (в котором накопленная частость впервые превосходит 0,5).

$$M_e = y_{j-1} + h_j \frac{0,5 - \omega_{j-1}}{\omega_j - \omega_{j-1}} = y_{j-1} + h_j \frac{0,5 - \omega_{j-1}}{m_j}. \quad (3.6)$$

Рассчитаем статистики для **контрольного примера 1**.  
Средняя арифметическая:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{y_{i-1} + y_i}{2} n_i}{n} =$$

$$= \frac{1 \times 8 + 3 \times 26 + 5 \times 51 + 7 \times 32 + 9 \times 10 + 11 \times 4 + 13 \times 4 + 15 \times 1}{136} = 5,63.$$

Модальный интервал [4;6) – у него наибольшая частота.  
Значение моды:

$$M_0 = y_{j-1} + h_j \frac{n_j - n_{j-1}}{2n_j - n_{j-1} - n_{j+1}} = 4 + 2 \frac{51 - 26}{2 \times 51 - 26 - 32} = 5,14.$$

Медианный интервал также [4;6). Значение медианы:

$$M_e = y_{j-1} + h_j \frac{0,5 - \omega_{j-1}}{m_j} = 4 + 2 \frac{0,5 - 0,25}{0,375} = 5,33.$$

*Квартили*  $Q_1, Q_2, Q_3$  в отличие от медианы делят выборку на 4 равные части. Второй квартиль совпадает с медианой  $Q_2$ . Первый или нижний квартиль – это значение, при котором доля значений меньше  $Q_1$  равна 0,25 (25 %). Третий или верхний квартиль – это значение, при котором доля значений меньше  $Q_3$  равна 0,75 (75 %).

Аналогичным образом *декатили*  $D_1, D_2, \dots, D_9$  делят выборку на 10 равных частей.

Для того чтобы представить непрерывный ряд данных, интервалы  $h_i$  можно сделать неравномерными, например,  $y_i$  определить по декатилям или квартилям. Такая информация часто содержится в статистических ежегодниках.

*Размах вариации* – простейшая мера разброса значений данной выборки  $R = x_{\max} - x_{\min}$ , где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  – соответственно максимальный и минимальный варианты.

*Выборочной дисперсией*  $S^2$  называют среднюю арифметическую квадратов отклонений результатов наблюдений от их средней арифметической  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . Если по результатам

наблюдений построена таблица частот, то выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 m_i = \sum_{i=1}^k x_i^2 m_i - \bar{x}^2.$$

Для интервального ряда используется среднее значение интервала:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left( \frac{y_{i-1} + y_i}{2} - \bar{x} \right)^2 n_i = \sum_{i=1}^k \left( \frac{y_{i-1} + y_i}{2} - \bar{x} \right)^2 m_i = \sum_{i=1}^k \left( \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \right)^2 m_i - \bar{x}^2$$

Сложность состоит в том, что неизвестно точное значение математического ожидания  $\bar{x}$ . В этом случае данный параметр заменяем на выборочное среднее.

Свойства выборочной дисперсии (а также дисперсии):

- 1) дисперсия постоянной величины равна нулю;
- 2) если все элементы ряда увеличить на одно и то же число, то дисперсия не изменится;
- 3) если все частоты ряда увеличить в одно и то же число раз, то дисперсия не изменится;
- 4) если все элементы ряда увеличить в одно и то же число раз, то дисперсия увеличится в квадрат от этого числа.

Выборочным среднеквадратическим отклонением  $S$  (*стандартным отклонением*) называется корень из дисперсии.

*Коэффициент вариации* служит для стандартного отклонения со средним  $V = \frac{S}{\bar{x}}$ .

Рассчитаем статистики для **контрольного примера 1**.

Размах вариации  $R = x_{\max} - x_{\min} = 15,6 - 0 = 15,6$ . Выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{(1-5,63)^2 \times 8 + (3-5,63)^2 \times 26 + (5-5,63)^2 \times 51 + (7-5,63)^2 \times 32 + (9-5,63)^2 \times 10 + (11-5,63)^2 \times 4 + (13-5,63)^2 \times 4 + (15-5,63) \times 1^2}{136} = 6,97.$$

Коэффициент вариации:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6,97}}{5,63} = 0,47.$$

### ***Моделирование случайных величин***

Обработка статистической информации необходима для применения полученных закономерностей при моделировании поведения рассматриваемой системы в новых условиях. Существует несколько способов использования собранной информа-

ции для моделирования параметров системы (способы расположены по предпочтительности использования).

1. Значение данных используются непосредственно при моделировании. То есть, если собрано 200 данных о времени прохождения мерного участка дороги, то при моделировании этого времени выбирается одно из этих значений.

2. Значения данных используются для построения эмпирической функции распределения. Генератором случайных чисел выкидывается значение по оси  $OY$  и находится соответствующее значение моделируемого параметра на оси  $OX$ .

3. Методом статистической проверки гипотез определяется форма теоретического распределения. Полученное распределение используется при моделировании параметров системы.

Первый способ не позволяет моделировать значения, которые не наблюдались (хотя они и вероятны). Вторым способом можно моделировать только значения между минимальным и максимальным из наблюдаемых. К тому же редкие значения могут привести к высокой погрешности «хвостов». Третьим способом можно моделировать все значения, а также легко изменять параметры системы. Однако получение теоретического распределения представляется нетривиальной и неоднозначной задачей.

Задачу подбора теоретического распределения можно разбить на следующие действия:

#### *1. Гипотеза о семействе распределений*

- построение гистограммы (полигона);
- эмпирической функции распределения;
- расчёт характеристик выборки (выборочное среднее, дисперсии, размаха вариации, коэффициента асимметрии и т.д.);
- подбор семейства распределений, описывающих выборку (например, гамма-распределение).

#### *2. Оценка параметров*

Определение параметров выбранных семейств распределений (например, по методу максимального правдоподобия или метода наименьших квадратов).

#### *3. Определение наиболее подходящего распределения*

- эвристические процедуры (графическое сравнение гистограммы и функции плотности распределения, эмпирической и теоретической функций распределения и т.д.);

- критерии согласия (например, «хи-квадрат» или Колмогорова-Смирнова).

Сначала рассмотрим виды теоретических распределений.

### *Теоретические распределения* НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

#### **Равномерное распределение**

*Варианты применения.* Используется как первая модель величины, которая изменяется в интервале, но ничего больше не известно. Используется для генерирования случайных значений из любых других распределений.

*Параметры.*  $a$  и  $b$ , причем  $a < b$ .

*Область допустимых значений.*  $[a, b]$ .

*Функция плотности распределения.*  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ .

*Функция распределения.*  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$

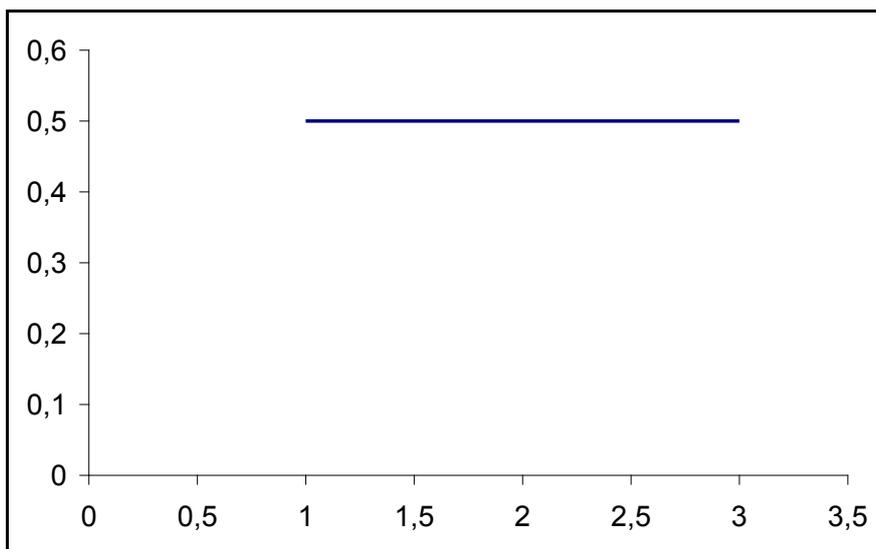


Рисунок 3.1. – Функция плотности равномерного распределения

### Экспоненциальное распределение

*Варианты применения.* Интервал времени между приходом пассажиров на остановочный пункт, время безотказной работы автомобиля.

*Параметры.*  $\beta > 0$ .

*Область допустимых значений.*  $[0, \infty)$ .

*Функция плотности распределения.*  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & \text{если } 0 \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ .

*Функция распределения.*  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta}, & \text{если } 0 \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ .

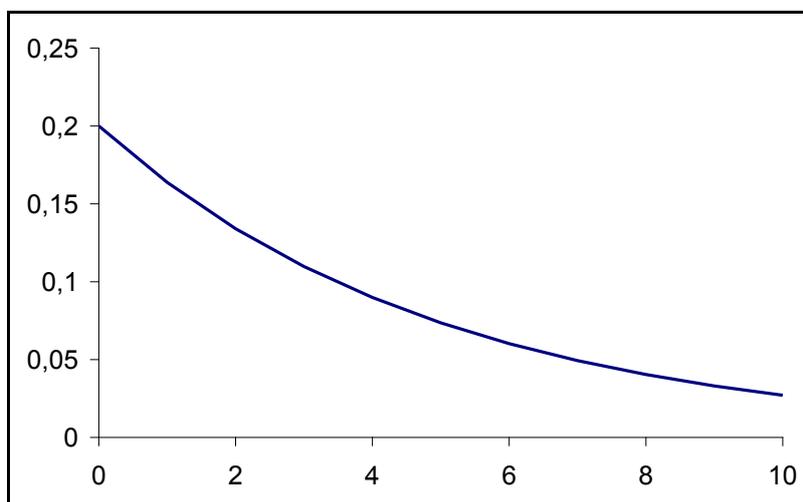


Рисунок 3.2 – Функция плотности экспоненциального распределения

### Гамма-распределение

*Варианты применения.* Время погрузки, движения с грузом, разгрузки, продолжительность ремонта и т.д.

*Параметры.*  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

*Область допустимых значений.*  $[0, \infty)$ .

*Функция плотности распределения.*

$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ , где  $\Gamma(\alpha)$  гамма-функция.

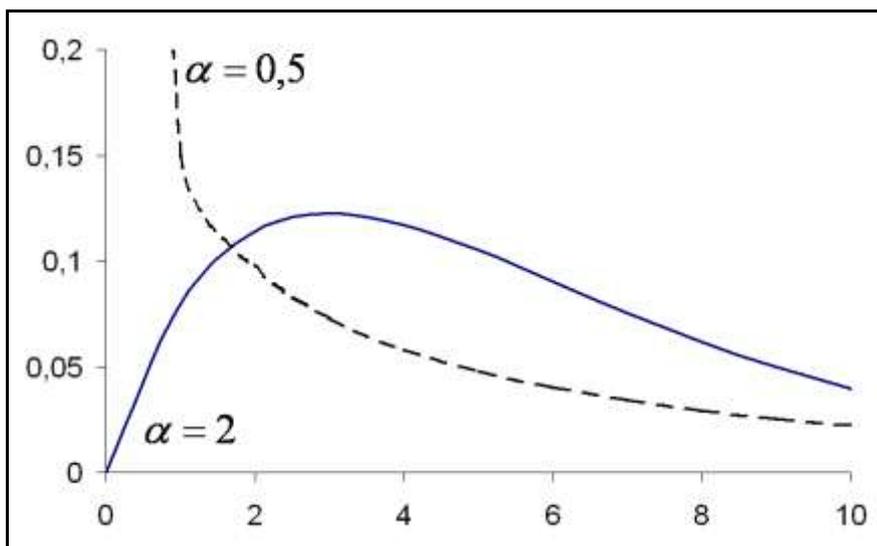


Рисунок 3.4 – Функция плотности гамма-распределения

### Распределение Вейбулла

*Варианты применения.* Время безотказной работы устройства автомобиля.

*Параметры.*  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

*Область допустимых значений.*  $[0, \infty)$ .

*Функция плотности распределения.*

*Функция распределения.* 
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}, & \text{если } 0 \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

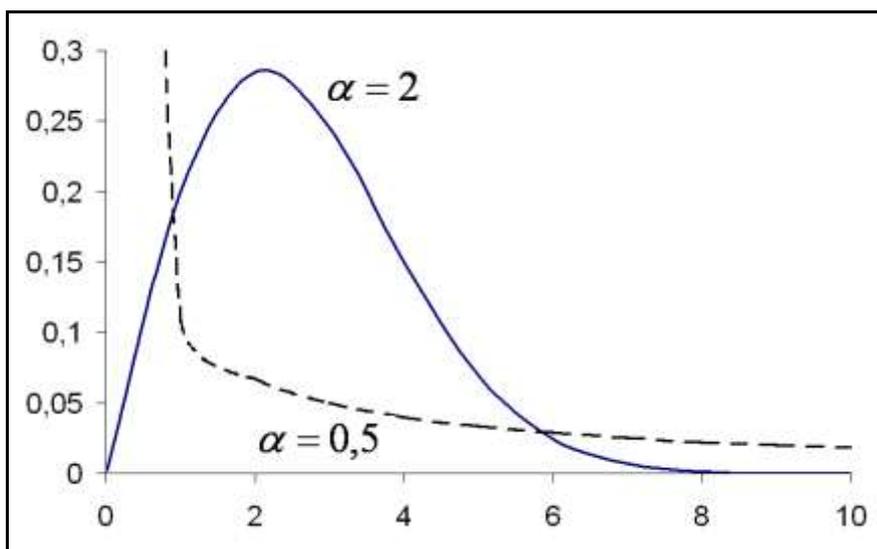


Рисунок 3.5 – Функция плотности распределения Вейбулла

## Нормальное распределение

*Варианты применения.* Ошибки различного типа (например, спидометра, навигатора и т.д.).

*Параметры.*  $\mu > 0, \sigma > 0$ .

*Область допустимых значений.*  $(-\infty, \infty)$ .

*Функция плотности распределения.*  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ .

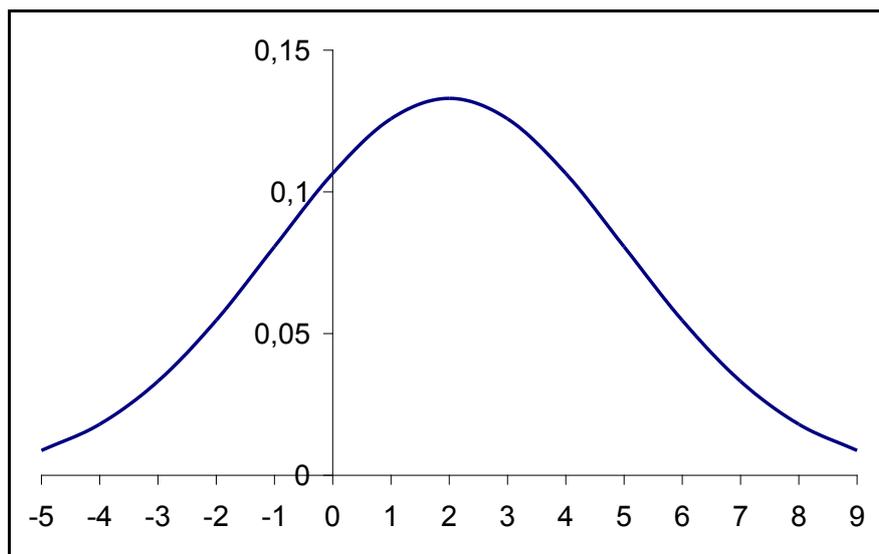


Рисунок 3.6 – Функция плотности нормального распределения

## ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

### Распределение Бернулли

*Варианты применения.* Случайное событие с двумя исходами.

*Параметры.*  $p \in (0,1)$

*Область допустимых значений.*  $\{0, 1\}$ .

*Вероятностная мера.*  $p(x) = \begin{cases} 1-p, & \text{если } x=0 \\ p, & \text{если } x=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ .

*Функция распределения.*  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1-p, & \text{если } 0 \leq x < 1. \\ 1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$ .

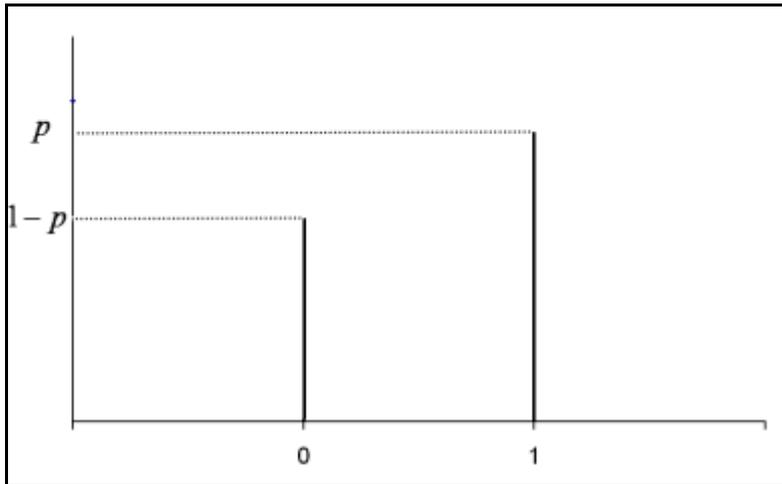


Рисунок 3.7 – Вероятностная мера распределения Бернулли

### Дискретное равномерное распределение

*Варианты применения.* Первая модель целочисленной величины, о которой известно лишь максимальное и минимальное значение.

*Параметры.*  $i$  и  $j$  – целые числа.

*Область допустимых значений.*  $\{i, i+1, i+2, \dots, j\}$ .

*Вероятностная мера.* 
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{j-i+1}, & \text{если } x \in \{i, i+1, i+2, \dots, j\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

*Функция распределения.*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < i \\ \frac{\lfloor x \rfloor - i + 1}{j - i + 1}, & \text{если } x \in \{i, i+1, i+2, \dots, j\} \\ 1, & \text{если } x \geq j \end{cases}$$

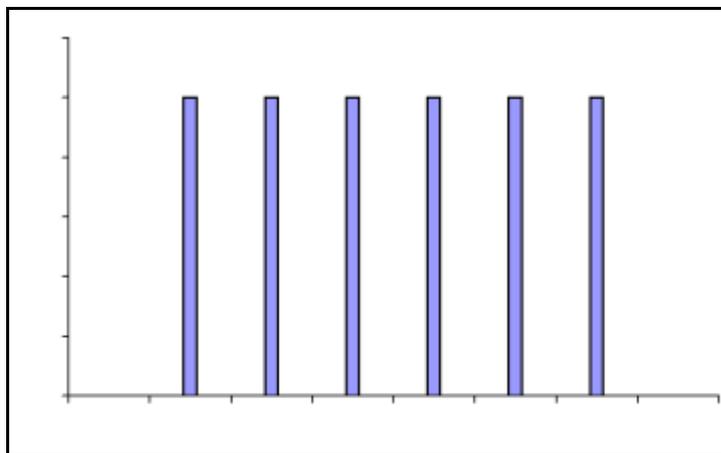


Рисунок 3.8 – Вероятностная мера равномерного распределения

### Биномиальное распределение

*Варианты применения.* Число автомобилей определенного типа или вида в случайной выборке.

*Параметры.*  $t$  положительное целое число,  $p \in (0,1)$ .

*Область допустимых значений.* Целые неотрицательные числа.

$$\text{Вероятностная мера. } p(x) = \begin{cases} \frac{t! p^x (1-p)^{t-x}}{x!(t-x)!}, & \text{если } x \in \{1, 2, 3, \dots, t\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

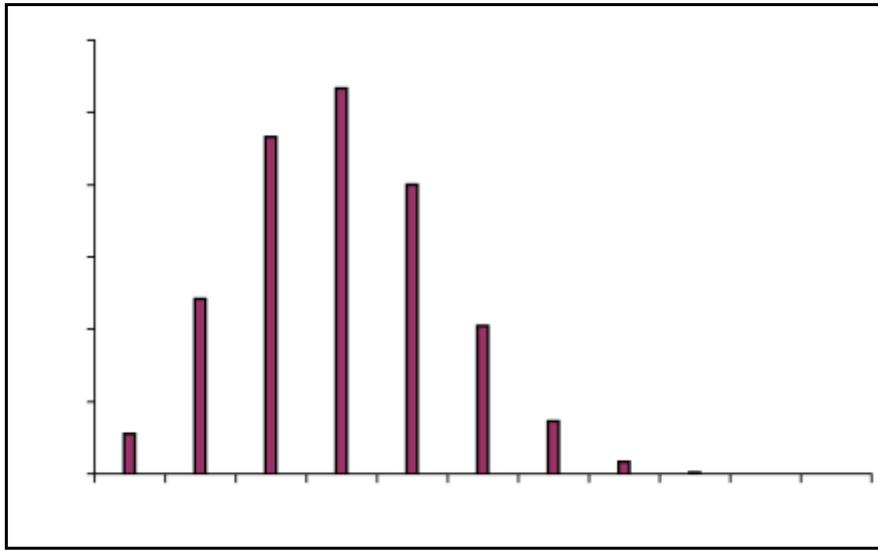


Рисунок 3.9 – Вероятностная мера биномиального распределения

### Распределение Пуассона

*Варианты применения.* Число автомобилей, проезжающих перекрёсток за светофорный цикл.

*Параметры.*  $\lambda > 0$ .

*Область допустимых значений.* Целые неотрицательные числа.

$$\text{Вероятностная мера. } p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & \text{если } x \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

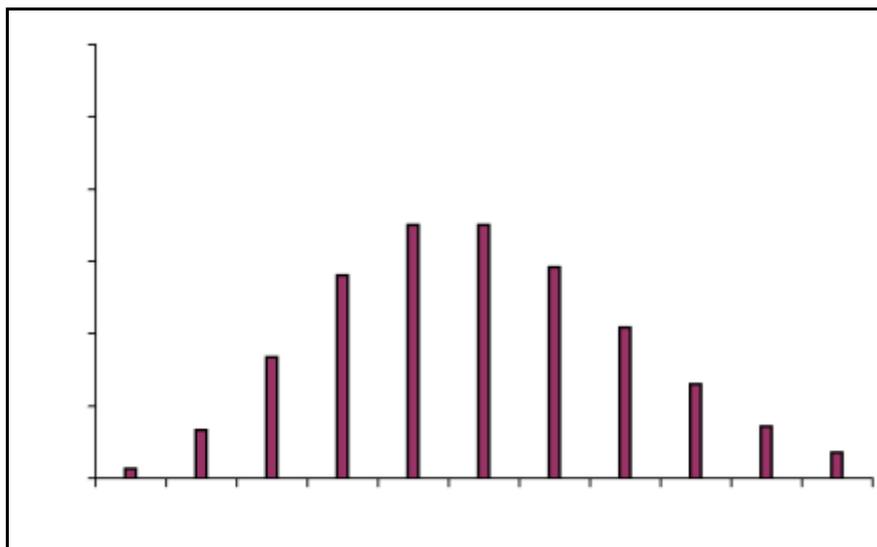


Рисунок 3.10 – Вероятностная мера распределения Пуассона

### Метод максимального правдоподобия

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результаты независимых наблюдений над случайной величиной  $X$ , которая может быть как дискретной, так и непрерывной;  $f(X, \Theta)$  – вероятность значения (если случайная величина дискретна) и плотность вероятности (если случайная величина непрерывна). Функция  $f(X, \Theta)$  зависит от неизвестного параметра  $\Theta$ , который требуется оценить по выборке.

Функцией правдоподобия называется выражение  $L(\Theta) = f(x_1, \Theta)f(x_2, \Theta) \dots f(x_n, \Theta)$ . Оценка параметра  $\Theta$  находится из условия

$$\hat{\Theta} = \arg \max L(\Theta).$$

Оценку  $\hat{\Theta}$  обычно называют *оценкой максимального правдоподобия*. Если  $L(\Theta)$  дифференцируема, то для отыскания максимума надо решить уравнение  $\frac{\partial L(\Theta)}{\partial \Theta} = 0$ . Иногда удобно рас-

сматривать уравнение  $\frac{\partial \ln L(\Theta)}{\partial \Theta} = 0$ . Отметим, что параметр  $\Theta$

может быть вектором, т.е. существует возможность поиска одновременно нескольких параметров распределения. Для некоторых распределений оценки параметров по методу максимального правдоподобия получены в аналитическом виде (например, равномерного, экспоненциального, нормального, логнормального, Бернулли, геометрического, Пуассона).

### *Критерий согласия $\chi^2$*

Важным этапом является проверка адекватности выбранного распределения. Для этого рекомендуется использовать критерии согласия. Критерии базируются на методах проверки гипотез.

Пусть  $X$  исследуемая случайная величина. Требуется проверить гипотезу  $H_0$  о том, что случайная величина подчиняется закону распределения  $F(x)$ . По выборке можно построить эмпирическое распределение  $F'(x)$  исследуемой случайной величины. Сравнение эмпирического  $F'(x)$  и теоретического распределений производится с помощью специально подобранной случайной величины – критерия согласия  $\chi^2$  (наиболее часто употребляемый критерий для проверки гипотезы о законе распределения).

Пусть по выборке построена таблица частот или интервальная таблица частот. Для теоретического распределения можно определить  $p_i$  (вероятность попадания случайной величины  $X$  в интервал  $i$ ), тогда теоретические частоты можно рассчитать по формуле  $n \cdot p_i$ . Для дискретных рядов рассчитывается вероятностная мера  $p_i = p(y_i)$ . Для непрерывных

$$p_i = \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x) dx = F(y_i) - F(y_{i-1}).$$

Если эмпирические частоты сильно отличаются от теоретических, то проверяемую гипотезу  $H_0$  следует отвергнуть, в противном случае – принять.

Сформулируем критерий, который бы характеризовал степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами. В литературе по математической статистике доказыва-

ется, что статистика  $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$  имеет распределение  $\chi^2$

с  $l = k - r - 1$  степенями свободы. Здесь  $r$  – число параметров распределения  $F(x)$ . Правило применения критерия  $\chi^2$  сводится к следующему. Необходимо выбрать уровень значимости критерия  $\alpha$ , по таблице находим  $\chi^2(l; \alpha)$ . Если  $\chi^2 > \chi^2(l; \alpha)$ , то гипо-

тезу  $H_0$  отвергают, если  $\chi^2 \leq \chi^2(l; \alpha)$ , то гипотезу принимают или, другими словами, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что генеральная совокупность подчинена закону распределения  $F(x)$ .

**Рассмотрим контрольный пример 2.** Предприятие «Кемеровское монтажное управление» занимается перевозкой щебня на Черниговский угольный разрез. Работа осуществляется круглосуточно в 2 смены по 12 часов. Интенсивная эксплуатация приводит к износу автосамосвалов МАЗ. Собрано 313 данных о времени простоя автосамосвалов. Простои в сутках представлены в верхней части таблицы.

Таблица 3.1 – Расчёт критерия согласия для интервального ряда

$[y_{i-1}, y_i)$	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;7)
$n_i$	161	74	39	15	14	10
$F(y_i)$	0,490	0,740	0,868	0,932	0,966	0,991
$p_i$	0,490	0,250	0,127	0,065	0,033	0,025
$\frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$	0,372	0,228	0,019	1,395	1,279	0,515

Средняя арифметическая составляет 1,48 суток. Наиболее подходящим является экспоненциальное распределение с параметром  $\beta = 1,48$ . Построим таблицу для расчёта критерия согласия  $\chi^2$ . Рассчитаем функцию распределения  $F(x) = 1 - e^{-x/\beta}$ , отметим, что  $F(0) = 0$ . Получим вероятность теоретического попадания в интервал  $p_i = F(y_i) - F(y_{i-1})$  и посчитаем нижнюю строку таблицы, сумма элементов которой 3,81. Количество степеней свободы:  $6 - 1 - 1 = 4$  (6 интервалов, 1 параметр распределения). В таблице для распределения  $\chi^2$  (см. приложение) видно, что вероятность совпадения экспоненциального распределения практическим данным составляет чуть меньше 50 %.

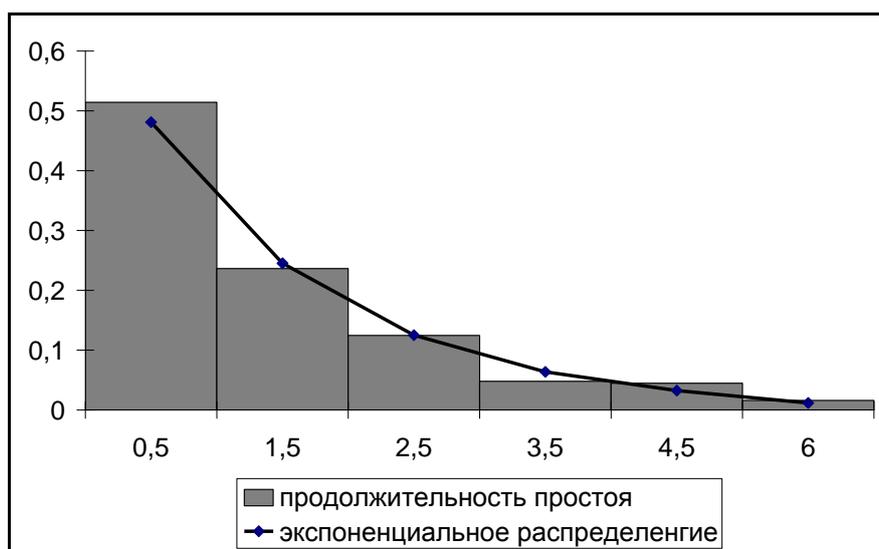


Рисунок 3.11 – Гистограмма и функция плотности теоретического распределения

**Рассмотрим контрольный пример 3.** Детектором, расположенным около общежития РИСИ в г. Ростове-на-Дону, 17 мая 2007 года получены данные о количестве «длинных автомобилей» проехавших за каждые 30 секунд (всего 550 замеров). Определить теоретическое распределение для этих данных.

Таблица 3.2 – Расчёт критерия согласия для дискретного ряда

$y_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_i$	61	137	134	100	70	27	15	5	1
$p_i$	0,102	0,233	0,266	0,202	0,115	0,052	0,020	0,006	0,002
$\frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$	0,382	0,577	1,027	1,102	0,719	0,115	1,504	0,581	0,000

Наиболее подходящим распределением, описывающим поток транспорта, является распределение Пуассона. Параметр распределения  $\lambda$  – это среднее количество автомобилей – 2,28. Рассчитаем теоретическую вероятностную меру по  $p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ .

Суммарное значение последней строки дает значение 6, количество степеней свободы  $9 - 1 - 1 = 7$ . В таблице критических зна-

чений критерия согласия  $\chi^2$  уровень доверия к теоретическому распределению чуть выше 50 %.

**Задание:** с помощью числовых характеристик выборки проанализировать данные, полученные экспериментальным путём в практической работе № 1, и сделать выводы о режиме движения на заданном участке УДС.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

### Тема: Двумерные выборки. Числовая линейная связь между случайными характеристиками транспортных и пешеходных потоков

Цель занятия: познакомится с приёмами статистической обработки исходных данных с подсчётом коэффициента корреляции.

Рекомендуемая литература к занятию: [1, 3, 9, 12, 13, 14, 19]

#### Теоретические положения

Генеральная совокупность случайных величин может быть не только одномерной, но и многомерной случайной величиной. Здесь мы ограничимся двумерными случайными величинами, которые могут быть как зависимыми, так и независимыми. Значения двумерной случайной величины – это упорядоченные пары чисел. Выборка объёма  $n$  из двумерной генеральной совокупности – это набор из  $n$  упорядоченных пар  $(x; y)$ . Такие выборки называются **двумерными**.

Графическое представление двумерной выборки – это диаграмма рассеяния. Каждый элемент двумерной выборки представляется точкой на плоскости с координатами  $(x_i; y_i)$ . Как правило, точки на диаграммах рассеяния группируются относительно некоторых прямых. При возрастании такой прямой говорят, что между данными существует **положительная линейная корреляция** (слово «корреляция» означает связь). Если воображаемая прямая убывает – прослеживается **отрицательная линейная корреляция**. Если точки на диаграмме рассеяния расположены хаотически или относительно некоторой кривой, например, параболы, то связь между данными отсутствует.

Числовой мерой линейной связи между случайными величинами  $(x; y)$ , является коэффициент корреляции  $r$ , определяемый по формуле:

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x S_y} . \quad (4.1)$$

Свойства коэффициента корреляции:

1.  $|r| \leq 1$ .
2.  $|r| = 1$  тогда и только тогда, когда точки  $(x_i; y_i)$  лежат на одной прямой.

3. Если точки  $(x_i; y_i)$  расположены на диаграмме рассеяния хаотически, то значение  $r$  близко к нулю. Значение  $r$  может оказаться близким к нулю и в случае группировки точек относительно некоторой кривой.

В дальнейшем выражение  $r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$  будем обозначать через  $S_{xy}$  и назовем его выборочной **ковариацией**.

На диаграммах рассеяния строят уравнения регрессии. Уравнения регрессии имеют следующий вид:

$$y = ax + b; \quad (4.2)$$

$$x = cy + d. \quad (4.3)$$

В первом случае говорят о регрессии  $y$  на  $x$ ; во втором – регрессии  $x$  на  $y$ . По методу наименьших квадратов, путём несложных математических преобразований получаем формулы для расчёта коэффициентов уравнений:

$$a = \frac{S_{xy}}{S_x^2}, \quad (4.4)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (4.5)$$

$$c = \frac{S_{xy}}{S_y^2}, \quad (4.6)$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y}, \quad (4.7)$$

где  $S_x^2, S_y^2$  – выборочная дисперсия соответственно по  $x$  по  $y$ .

$$S_x^2 = \overline{x_i^2} - \bar{x}_i^2, \quad (4.8)$$

$$S_y^2 = \overline{y_i^2} - \bar{y}_i^2. \quad (4.9)$$

**Задание:** с помощью экспериментальных исследований представить три различных вида числовой линейной связи между случайными характеристиками транспортных и пешеходных потоков, построить диаграммы рассеяния, рассчитать коэффициент корреляции, сделать выводы.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

### Тема: Теоретические основы движения потока автомобилей

Цель занятия: познакомится с видами статистических распределений, выбрать наиболее подходящие для описания поведения транспортного потока и провести расчёты вероятностей появления автомобилей на перекрёстке.

Рекомендуемая литература к занятию: [1, 3, 9, 12, 19]

#### Теоретические положения

Наиболее важной характеристикой движения транспортного потока является распределение интервалов между движущимися друг за другом автомобилями. В теории вероятностей распределение интервалов между случайными событиями является основой для вывода расчётных формул при определении характеристик случайного процесса. От правильности выбора закона распределения интервалов между наступлением событий (проезда автомобилей) зависит точность и достоверность получения конечных результатов. Для оценки вероятности появления того или иного события, происходящего при движении автомобилей, можно использовать один из двух методов. Первый метод даёт статистическую вероятность; второй метод приводит к теоретической вероятности. В теории вероятностей основные факторы известны, но результат нельзя предсказать с абсолютной достоверностью. В математической статистике имеется конечный результат, но причины, обусловившие его появление, неизвестны.

Рассмотрим основные законы распределения, которые могут быть использованы для описания характеристик движения автомобилей, как вероятностного процесса, в котором появление одного автомобиля не связано с моментом появления впереди идущего автомобиля, а величины соседних интервалов не имеют корреляционной связи.

#### *1 Биномиальное распределение*

Первые исследования транспортных потоков носили статистический характер. Они включали измерения средних значений таких характеристик транспортных потоков, как скорость и ин-

тенсивность движения. Однако оказалось, что для полного описания поведения транспортных потоков недостаточно знания только этих показателей, необходимо рассматривать распределение вероятностей. Таким образом, оказалось, что биномиальный закон распределения – случайная величина – может широко использоваться при исследовании определённых закономерностей транспортных потоков. В общем случае биномиальное распределение выглядит следующим образом:

$$P(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad (5.1)$$

где  $n$  – число независимых испытаний;

$m$  – число успешных испытаний;

$p$  – вероятность успешного исхода в испытании;

$q$  – вероятность неудачного исхода в испытании.

Этим распределением может быть описано распределение автомобилей в транспортных потоках на некоторых перекрёстках.

## *2 Распределение Пуассона*

В большинстве случаев в теории вероятностей приходится решать задачи, когда общее число возможных исходов заранее известно и известно число случаев, когда событие может произойти или не произойти. Однако существуют задачи и другого типа, когда число неудачных исходов невозможно предсказать. Применительно к транспортному потоку это справедливо при рассмотрении прибытия автомобилей к перекрёстку: в этом случае невозможно определить, сколько автомобилей не прибыло к перекрёстку. В ситуациях такого рода необходимо применять распределение Пуассона.

Распределение Пуассона описывается следующим выражением:

$$P(m) = \frac{e^{-t} \cdot t^m}{m!}, \quad (5.2)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

Кроме этого, данное распределение достаточно хорошо описывает число отдельных событий  $m$ , выраженное через сред-

нее число этих событий  $t$ . При Пуассоновском распределении дисперсия равна среднему значению.

### 3 Отрицательное биномиальное распределение

Также большое значение в исследовании транспортных потоков играет отрицательное биномиальное распределение, которое является разновидностью биномиального распределения. В общем случае оно показывает вероятность проведения  $x$  наблюдений до появления  $R$  событий. Вид этого распределения следующий:

$$P_{(x/R)} = \frac{(R+x-1)!}{(R-1)! [R+x-1-(R-1)]!} \cdot p^R \cdot q^x \quad (5.3)$$

или

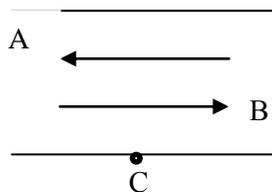
$$P_{(x/R)} = \frac{(R+x-1)!}{(R-1)! \cdot x!} \cdot p^R \cdot q^x. \quad (5.4)$$

#### Задача 5.1

Автомобили прибывают к точке А на дороге с интенсивностью в среднем 9 автомобилей за 1 минуту. Какова вероятность того, что в следующую минуту к точке А прибудут 15 автомобилей?

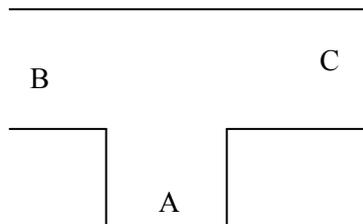
#### Задача 5.2

При наблюдении транспортного потока в точке С установлено, что 40 % автомобилей следуют в пункт А, а 60 % – в пункт В. Какова вероятность того, что из 8 последовательно движущихся автомобилей в пункт С будут ехать не менее 5 автомобилей?



**Задача 5.3**

При исследовании транспортного потока было установлено, что в среднем из 100 автомобилей, выезжающих из пункта А, 47 автомобилей прибывают в пункт В, а 53 автомобиль – в пункт С. Определить вероятность того, что для прибытия 3 автомобилей в пункт С необходимо, чтобы из пункта А выехало 7 автомобилей.

**Задача 5.4**

Автомобили двигаются по магистрали с интенсивностью 9 автомобилей за 2 минуты. Какова вероятность проезда 2 автомобилей за 0,5; 1,5 минуты?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

### Тема: Соотношение между основными характеристиками транспортного потока. Макромодели транспортного потока

Цель занятия: познакомится с видами математического моделирования транспортных потоков, с основными макромоделями описания поведения транспортного потока, получить навык построения основной диаграммы транспортного потока.

Рекомендуемая литература к занятию: [2, 4, 5-8, 10, 11, 13-16-20]

#### Теоретические положения

Основными характеристиками транспортного потока являются: интенсивность ( $q$ ), плотность ( $k$ ), скорость ( $v$ ). В общем виде соотношение между этими характеристиками описывается основным уравнением транспортного потока:

$$q = k \cdot v. \quad (6.1)$$

Графическое изображение этого уравнения носит название основной диаграммы транспортного потока, на которой прослеживаются основные общие закономерности изменения состояния транспортного потока. Однако основная диаграмма не может отразить всю сложность процессов, происходящих в транспортном потоке, поскольку на протекание этих процессов оказывает влияние большое число факторов системы ВАДС. При изменении этих факторов изменяется и характер процессов, происходящих в транспортном потоке. Поэтому была поставлена задача разработки моделей транспортных потоков, которые описывали бы различные состояния транспортных потоков. Модели транспортных потоков подразделяются на два основных вида: микроскопическая и макроскопическая. Макроскопические рассматривают поток в целом и поведение конкретного автомобиля в потоке имеет второстепенное значение. Большинство макромоделей строятся на применении аналогий транспортных потоков и потока жидкости или газа. Используя эту аналогию и различные законы (закон сохранения массы, количества движения, энергии), были получены различные макромодели транспортных потоков. Эти макро-

модели выражаются в виде обобщённых уравнений состояния транспортных потоков. При изменении значения  $n$  получают различные макромоделли транспортных потоков при различных состояниях транспортных потоков, что имеет важное значение при исследованиях. В общем виде они представлены ниже:

**Общий случай ( $n > -1$ ):**

Уравнение состояния:

$$q = k \cdot v_{\text{св}} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \right], \quad (6.2)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_{\text{св}}$  – скорость свободного движения.

Оптимальная плотность:

$$k_m = \left( \frac{n+3}{2} \right)^{-\frac{2}{n+1}} \cdot k_j, \quad (6.3)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$k_m$  – значение плотности, при котором интенсивность максимальна.

Оптимальная скорость:

$$v_m = \frac{n+1}{n+3} \cdot v_{\text{св}}, \quad (6.4)$$

где  $v_{\text{св}}$  – скорость свободного движения.

Пропускная способность:

$$q_m = \frac{(n+1) \cdot v_{\text{св}} \cdot k_j}{\left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{n+1}} \cdot (n+3) \left[ \frac{2}{n+1} + 1 \right]}, \quad (6.5)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_{\text{св}}$  – скорость свободного движения.

### Экспоненциальное уравнение ( $n = -1$ ).

#### Модель Гринберга

Уравнение состояния:

$$q = k \cdot v_m \cdot \ln \frac{k_j}{k}, \quad (6.6)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_m$  – значение скорости, при котором интенсивность максимальна.

Оптимальная плотность:

$$k_m = \frac{k_j}{e}, \quad (6.7)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока.

Оптимальная скорость:

$$v_m = C, \quad (6.8)$$

где  $C$  – постоянная величина.

Пропускная способность:

$$q_m = \frac{1}{e} \cdot v_m \cdot k_j, \quad (6.9)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_m$  – значение скорости, при котором интенсивность максимальна.

### Параболическое уравнение ( $n = 0$ ). Модель Дрю

Уравнение состояния:

$$q = k \cdot v_{св} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (6.10)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_{св}$  – скорость свободного движения.

Оптимальная плотность:

$$k_m = \frac{4}{9} \cdot k_j, \quad (6.11)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока.

Оптимальная скорость:

$$v_m = \frac{1}{3} \cdot v_{св}, \quad (6.12)$$

где  $v_{св}$  – скорость свободного движения.

Пропускная способность:

$$q_m = \frac{4}{27} \cdot v_{св} \cdot k_j, \quad (6.13)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_{св}$  – скорость свободного движения.

### **Линейное уравнение ( $n = 1$ ). Модель Гриншилдса**

Уравнение состояния:

$$q = k \cdot v_{св} \cdot \left(1 - \frac{k}{k_j}\right), \quad (6.14)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_{св}$  – скорость свободного движения.

Оптимальная плотность:

$$k_m = \frac{1}{2} \cdot k_j, \quad (6.15)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока.

Оптимальная скорость:

$$v_m = \frac{1}{2} \cdot v_{св}, \quad (6.16)$$

где  $v_{св}$  – скорость свободного движения.

Пропускная способность:

$$q_m = \frac{1}{4} \cdot v_{св} \cdot k_j, \quad (6.17)$$

где  $k_j$  – максимальная плотность транспортного потока;

$v_{св}$  – скорость свободного движения.

**Задание:** Дан однородный поток, состоящий из легковых автомобилей. Для этого потока максимальная плотность составляет 155 авт./км. Скорость свободного движения принята равной 90 км/ч. Построить основную диаграмму заданного транспортно-го потока в координатах «интенсивность-плотность», используя макромодели Гринберга, Гриншилдса, Дрю. Определить значения оптимальной скорости и максимальную интенсивность движения транспортного потока. Сравнить полученные результаты. Шаг расчёта 5 авт./км.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

### Тема: Микромодели транспортного потока. Динамическая теория «следования за лидером»

Цель занятия: познакомится с видами математического моделирования транспортных потоков, с основными микромоделями описания поведения транспортного потока, провести подсчёты динамического габарита автомобиля по длине с помощью уравнений «теории следования за лидером».

Рекомендуемая литература к занятию: [2, 6, 8, 11, 13, 16, 19]

#### Теоретические положения

При решении вопросов, связанных с уменьшением числа дорожно-транспортных происшествий (особенно вызванных столкновением автомобилями между собой), необходимо детально изучить взаимодействие движущихся друг за другом автомобилей.

Теория «следования за лидером» является развитием теории упрощённых динамических моделей, она основана на гипотезе о существовании определённой закономерности взаимодействия автомобилей, движущихся друг за другом на близком расстоянии. Дифференциальное уравнение теории «следования за лидером» получено из начального условия, что все автомобили движутся в колонне на расстоянии, требуемом Правилами дорожного движения. Из рис. 7.1 видно, что при соблюдении Правил дорожного движения координаты положения  $x_i$ -го и  $x_{i+1}$ -ого автомобилей можно выразить зависимостью:

$$x_i = x_{i+1} + (l_0 + t_p \cdot v_{i+1}) + l_i, \quad (7.1)$$

где  $l_0$  – минимальное расстояние между стоящими автомобилями;

$t_p v_n$  – расстояние между автомобилями, устанавливаемое в зависимости от скорости движения;

$l_{n+1}$  – длина автомобиля;

$n$  – порядковый номер автомобиля.

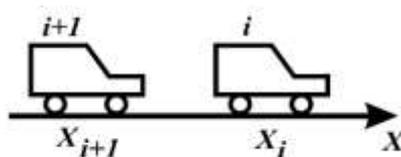


Рисунок 7.1 – Координаты положения автомобилей при движении

Дифференцируя уравнение (7.1) по времени, получаем:

$$\frac{dx_{i+1}}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + t_p \frac{dv_i}{dt} . \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2) может быть выражено через скорость в следующем виде:

$$v_{i+1} = v_i + t_p \frac{dv_i}{dt} ,$$

или

$$v_{i+1} - v = t_p \frac{dv_i}{dt} ,$$

или

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{t_p} (v_{i+1} - v_i) , \quad (7.3)$$

где  $\frac{dv_i}{dt}$  – ускорение ведомого автомобиля;

$v_i$  и  $v_{i+1}$  – скорости ведомого и ведущего автомобилей;

$t_p$  – продолжительность реакции водителя.

Уравнение (7.3) является первым дифференциальным уравнением теории «следования за лидером». Полученное правило может быть сформулировано следующим образом: при следовании двух автомобилей друг за другом на достаточно близком расстоянии, когда оказывается их взаимное влияние, ускорение ведомого автомобиля прямо пропорционально разности скоростей ведущего и ведомого автомобилей (относительной скорости). Это основной и наиболее простой закон теории «следования за лидером».

Дробь  $\frac{1}{t_p}$  – обычно обозначают буквой  $\alpha$  и называют коэффициентом пропорциональности или чувствительностью водителя. Учитывая это, перепишем уравнение (7.3) в следующем виде:

$$\frac{dv_i}{dt} = \alpha \cdot (v_{i+1} - v_i). \quad (7.4)$$

Следовательно, основной принцип модели «следования за лидером» состоит в том, что водитель реагирует, главным образом, на раздражение, поступающее из окружающей среды (воздействие), в соответствии с соотношением

$$\frac{dv_i}{dt} = \alpha \cdot (v_{i+1} - v_i). \quad (7.5)$$

Дальнейшие исследования показали, что величина коэффициента  $\alpha$  зависит от расстояния между автомобилями. Д. Гейзис, Р. Герман и Р. Потс предположили, что показатель чувствительности водителя  $\alpha$  обратно пропорционален расстоянию между автомобилями:

$$\alpha = \frac{v_0}{d}, \quad (7.6)$$

где  $v_0$  – характерная скорость;

$d$  – расстояние между автомобилями.

В результате чего было получено второе основное уравнение теории «следования за лидером»:

$$\frac{dv_i}{dt} = v_0 \frac{v_{i+1} - v_i}{d}. \quad (7.7)$$

Этот закон следования за лидером можно выразить так: «ускорение ведомого автомобиля прямо пропорционально разности скоростей ведущего и ведомого автомобилей и обратно пропорционально расстоянию между ними».

### Задание 7.1

Рассчитать дистанцию между автомобилем-лабораторией и условным автомобилем-лидером на основе упрощённой формулы динамического габарита.

**Задание 7.2**

По результатам замеров скорости движения автомобиля-лаборатории за условно выбранным автомобилем-лидером по пр. Кузнецкому г. Кемерово, установить значения продольных ускорений ведомого автомобиля, в зависимости от длины пройденного маршрута.

**Задание 7.3**

Построить эпюры изменения скорости и ускорения по исходным данным.

**Задание 7.4**

Определить форму кривой зависимости по второму закону теории следования за лидером на основе установленных выше ускорений и дистанций между автомобилем-лабораторией и условным автомобилем-лидером.

## Приложение

Таблица 1 – Критические точки распределения  $\chi^2$

Число степеней свободы $k$	Уровень значимости $\alpha$					
	0,05	0,1	0,5	0,75	0,9	0,95
1	3,8	2,7	0,5	0,10	0,016	0,004
2	6,0	4,6	1,4	0,58	0,211	0,10
3	7,8	6,3	2,4	1,2	0,58	0,35
4	9,5	7,8	3,4	1,9	1,1	0,71
5	11,1	9,2	4,4	2,7	1,6	1,1
6	12,6	10,6	5,3	3,5	2,2	1,6
7	14,1	12,0	6,3	4,3	2,8	2,2
8	15,5	13,4	7,3	5,1	3,5	2,7
9	16,9	14,7	8,3	5,9	4,2	3,3
10	18,3	16,0	9,3	6,7	4,9	3,9
11	19,7	17,3	10,3	7,6	5,6	4,6
12	21,0	18,5	11,3	8,4	6,3	5,2
13	22,4	19,8	12,3	9,3	7,0	5,9
14	23,7	21,1	13,3	10,2	7,8	6,6
15	25,0	22,3	14,3	11,0	8,5	7,3
16	26,3	23,5	15,3	11,9	9,3	8,0
17	27,6	24,8	16,3	12,8	10,1	8,7
18	28,9	26,0	17,3	13,7	10,9	9,4
19	30,1	27,2	18,3	14,6	11,7	10,1
20	31,4	28,4	19,3	15,5	12,4	10,9
21	32,7	29,6	20,3	16,3	13,2	11,6
22	33,9	30,8	21,3	17,2	14,0	12,3
23	35,2	32,0	22,3	18,1	14,8	13,1
24	36,4	33,2	23,3	19,0	15,7	13,8
25	37,7	34,4	24,3	19,9	16,5	14,6
26	38,9	35,6	25,3	20,8	17,3	15,4
27	40,1	36,7	26,3	21,7	18,1	16,2
28	41,3	37,9	27,3	22,7	18,9	16,9
29	42,6	39,1	28,3	23,6	19,8	17,7

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для бакалавров : для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – Москва : Юрайт, 2013. – 479 с.
2. Дрю, Д. Теория транспортных потоков и управление ими [Текст] / Д. Дрю. – Москва : Транспорт, 1972. – 424 с.
3. Елисеева, И. И. Общая теория статистики: учебник / И. И. Елисеева, М. М. Юзбашев. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 656 с.
4. Зырянов, В. В. Критерии оценки условий движения и модели транспортных потоков / В. В. Зырянов; Кузбасский политехнический институт. – Кемерово, 1993. – 164 с.
5. Зырянов, В. В. Основы моделирования движения автомобилей [Текст] / В. В. Зырянов. – Ростов-на-Дону : Ростовский гос. строит. ун-т, 1998. – 16 с.
6. Иносэ, Х. Управление дорожным движением : пер. с англ. / Х. Иносэ, Т. Хамада. – Москва : Транспорт, 1983. – 248 с.
7. Клинковштейн, Г. И. Организация дорожного движения [Текст] : учебник. – 5-е изд., перераб. и доп. / Г. И. Клинковштейн, М. Б. Афанасьев. – Москва : Транспорт, 2001. – 247 с.
8. Коноплянко, В. И. Организация и безопасность дорожного движения / В. И. Коноплянко, О. П. Гуджоян, В. В. Зырянов, А. В. Косолапов. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 1998. – 236 с.
9. Козлов, А. Ю. Статистический анализ данных в MS Excel : учебное пособие для студентов вузов / А. Ю. Козлов, В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов. Москва : ИНФРА-М, 2014. – 320 с.
10. Кременец, Ю. А. Технические средства организации дорожного движения : учебник для вузов / Ю. А. Кременец, М. П. Печерский, М. Б. Афанасьев. – Москва : ИКЦ «Академкнига», 2005. – 279 с.
11. Организация дорожного движения : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / И. Н. Пугачев [и др.] ; под ред. А. Э. Горева. – Москва : Академия. 2013. – 240 с.
12. Палий, И. А. Прикладная статистика : учеб. пособие для вузов / И. А. Палий. – Москва : Высш. шк., 2004. – 176 с.

13. Пугачев, И. Н. Организация и безопасность дорожного движения : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / И. Н. Пугачев, А. Э. Горев, Е. М. Олещенко. – Москва : Академия, 2009. – 272 с.

14. Самойлов, Д. С. Организация и безопасность городского движения / Д. С. Самойлов, А. А. Юдин, А. А. Рушевский. – Москва : Высш. шк., 1981. – 256 с.

15. Сильянов, В. В. Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения / В. В. Сильянов. – Москва : Транспорт, 1977. – 303 с.

16. Сильянов, В. В. Транспортно-эксплуатационные качества автомобильных дорог и городских улиц : учебник / В. В. Сильянов, Э. Р. Домке. – Москва : ИЦ «Академия», 2007. – 352 с.

17. Советов, Б. Я. Моделирование систем: учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – Москва : Высш. шк., 2001. – 343 с.

18. Суворова, Н. И. Информационное моделирование: величины, объекты, алгоритмы / Н. И. Суворова. – Москва : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 128 с.

19. Хейт, Ф. Математическая теория транспортных потоков [Текст] / Ф. Хейт. – Москва : Мир, 1966. – 287 с.

20. Хомяк, Я. В. Организация дорожного движения / Я. В. Хомяк. – Киев : Высш. шк., 1986. – 271 с.

21. СП 34.13300.2012. Автомобильные дороги (Актуализированная редакция СНиП 2.05.02-85\*). – Введён 2013-07-01. [Электронный ресурс] Загл. с экрана. Режим доступа : <http://docs.cntd.ru/document/1200095524>