**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»**

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко
Е. В. Гутова

# АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

## Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем в качестве электронного учебного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Прокопенко Е. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

**Николаева Евгения Александровна**
**Чередниченко Алла Валериевна**
**Гутова Елена Владимировна**
**Алгебра и геометрия** [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко, Е. В. Гутова; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Алгебра и геометрия» и организовать самостоятельную работу.

© КузГТУ, 2018
© Николаева Е. А.,
Чередниченко А. В.,
Гутова Е. В.,
составление, 2018

Предлагаемые методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся очной формы обучения по курсу «Алгебра и геометрия».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Алгебра и геометрия», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

## Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

***Раздел 1. Линейная алгебра.*** *1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства. 1.2. Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). 1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса. 1.4. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица. 1.5. Матричный метод решения СЛАУ.*

**Практическое занятие:**

1. Вычислить определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. С помощью разложения по элементам первого столбца вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Вычислите определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Найти сумму и разность матриц $A + B$, $A - B$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Найти $A^{-1}$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

8. Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix};\qquad \begin{vmatrix}a & в\\ 0 & 0\end{vmatrix};\qquad \begin{vmatrix}x^2 & x\\ xy^2 & y^2\end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 4 & 6 & 7\end{vmatrix};\qquad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}.$$

10. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases}x+y=1\\ 3x+3y=-2\end{cases}.$$

11. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases}3x+2y=7,\\ x-y=4.\end{cases}$$

12. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases}2x+y+z=2,\\ 5x+y+3z=14,\\ 2x+y+2z=5.\end{cases}$$

13. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1+3x_2+2x_3=2,\\ 4x_1+5x_2+2x_3=1,\\ 5x_1+6x_2+4x_3=3.\end{cases}$$

14. Решить матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

16. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}.$$

17. Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

**Самостоятельная работа:**

1. Найти линейную комбинацию матриц:

$3A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$A - 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Транспонировать матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение матриц $AB$ и $BA$ (если они существуют):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти $A^3$ для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицы, обратные матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

7. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2};$$

$$\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$$

8. Решите неравенства:

$$\begin{vmatrix} 2x-4 & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} 4x+4 & 8 \\ 3x-7 & 2 \end{vmatrix} < 0; \quad \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$$

9. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ x+2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$$

12. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 6y + 5z = 1 \\ 5x + 3y - 2z = 0 \\ 7x + 4y - 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 3z = -2 \\ -4x - 3y - 5z = 1 \\ 5x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 7x + 9y + 5z = -3 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + z = 9 \\ 2x + 4y + 5z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 3x + 4y + 7z = 1 \end{cases}$$

13. Исследовать, будет ли система уравнений совместна, и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

***Раздел 2. Векторная алгебра.*** *2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Длина (норма) вектора и отрезка, направляющие косинусы, нормированный вектор. 2.2. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности векторов. 2.3. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл. Условие коллинеарности двух векторов. 2.4. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.*

**Практическое занятие:**

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:1) длину ребра $A_1A_2$; 2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$; 3) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой $A_1A_2$; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(1,\ 3,\ 0),\ A_2(3,\ -1,\ 4),\ A_3(-2,\ 5,\ 6),\ A_4(0,\ 4,\ -2)$$

$$A_1(3,\ 1,\ 4),\ A_2(-1,\ 6,\ 1),\ A_3(-1,\ 1,\ 6),\ A_4(0,\ 4,\ -1).$$

2. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$$\vec{a}=\{1,\ 1,\ 1\};\ \vec{b}=\{1,\ 1,\ 2\};\ \vec{c}=\{1,\ 2,\ 3\};\ \vec{e}=\{6,\ 9,\ 14\}$$

$$\vec{a}=\{6,\ 4,\ 3\};\ \vec{b}=\{3,\ 3,\ 2\};\ \vec{c}=\{8,\ 1,\ 3\};\ \vec{e}=\{-1,\ 4,\ 1\}$$

**Самостоятельная работа:**

1. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$$\vec{a}=\{4,\ -5,\ 2\};\ \vec{b}=\{2,\ -2,\ 1\};\ \vec{c}=\{2,\ -1,\ 0\};\ \vec{e}=\{2,\ -5,\ 3\}$$

$$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\};\ \vec{b}=\{3,\ -3,\ 1\};\ \vec{c}=\{2,\ -1,\ 2\};\ \vec{e}=\{6,\ -8,\ 1\}$$

$$\vec{a}=\{4,\ 5,\ 2\};\vec{b}=\{3,\ 0,\ 1\};\vec{c}=\{1,\ 4,\ 2\};\vec{e}=\{5,\ 7,\ 8\}$$
$$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\};\vec{b}=\{1,\ 5,\ -4\};\vec{c}=\{4,\ 1,\ -3\};\vec{e}=\{6,\ -15,\ 7\}$$
$$\vec{a}=\{3,\ -5,\ 2\};\vec{b}=\{4,\ 5,\ 1\};\vec{c}=\{-3,\ 0,\ -4\};\vec{e}=\{-4,\ 5,\ 16\}$$

2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:1) длину ребра $A_1A_2$; 2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$; 3) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой $A_1A_2$; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(-4,-2,\ 0), A_2(-1,\ -2,\ 4), A_3(3,\ 1,\ -2), A_4(3,\ -2,\ 1)$$
$$A_1(3,\ 2,\ -3), A_2(5,\ 1,\ -1), A_3(2,\ -1,\ 0), A_4(1,\ -2,\ 1)$$
$$A_1(1,\ 2,\ 1), A_2(3,\ -1,\ 7), A_3(0,\ -3,\ 5), A_4(7,\ 4,\ -2)$$
$$A_1(3,\ 3,\ 9),\ A_2(6,\ 9,\ 1), A_3(1,\ 7,\ 3),\ A_4(8,\ 5,\ 8).$$

3. Даны две силы $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, приложенные к точке $A$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B$.

$$\overrightarrow{F_1}=\{1,\ -1,\ 3\}, \overrightarrow{F_2}=\{2,\ 0,\ -3\}, A(4,\ 3,\ 6), B(0,\ 1,\ 2)$$
$$\overrightarrow{F_1}=\{4,\ 2,\ -1\}, \overrightarrow{F_2}=\{3,\ 4,\ 5\}, A(-1,\ 0,\ -2), B(1,\ -2,\ 2)$$
$$\overrightarrow{F_1}=\{3,\ -1,\ 2\}, \overrightarrow{F_2}=\{5,\ -3,\ -2\}, A(3,\ 1,\ 1),\ B(6,\ -7,\ 5)$$

4. Даны две силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, приложенные к точке $A$. Найти работу, которую совершает равнодействующая этих сил, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B$.

$$\overrightarrow{F_1}=\{4,\ 4,\ -9\}, \overrightarrow{F_2}=\{5,\ 3,\ -1\}, A(4,\ 3,\ -1), B(-7,\ 3,\ 2)$$
$$\overrightarrow{F_1}=\{8,\ 8,\ -2\}, \overrightarrow{F_2}=\{-3,\ -5,\ 1\}, A(0,\ 2,\ 9), B(3,-1,8)$$
$$\overrightarrow{F_1}=\{13,\ -10,\ 5\}, \overrightarrow{F_2}=\{4,\ 8,\ 11\}, A(-1,\ 2,\ 4), B(3,\ 1,\ 1).$$

5. Тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти линейную скорость точки $A$ этого тела.

$$\vec{\omega}=3\vec{k},\qquad A(5,\ 3,\ -1)$$
$$\vec{\omega}=4\vec{i},\qquad A(2,\ -4,\ 0)$$
$$\vec{\omega}=7\vec{j},\qquad A(3,\ -7,\ 2)$$

6. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Определить, будут ли они компланарны.

$$\vec{a}=\{1,\ 1,\ 1\},\quad \vec{b}=\{1,\ 1,\ -1\},\quad \vec{c}=\{1,\ -1,\ 1\}.$$

$$\vec{a}=\{3,\ 5,\ 0\},\quad \vec{b}=\{1,\ -1,\ 2\},\quad \vec{c}=\{5,\ 3,\ 4\}$$

$$\vec{a}=\{1,\ -2,\ 1\},\quad \vec{b}=\{3,\ 2,\ 1\},\quad \vec{c}=\{1,\ 0,\ -1\}$$

***Раздел 3. Аналитическая геометрия****. 3.1. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой. 3.2. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду. 3.3. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами. 3.4. Плоскость и прямая в пространстве. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Точка пересечения трех плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности. 3.5. Поверхности второго порядка в пространстве. Цилиндрические поверхности. Эллипсоид. Сфера. Однополостной гиперболоид. Двуполостной гиперболоид. Эллиптический параболоид. Конус. Гиперболический параболоид.*

**Практическое занятие:**

1. Дано: A(2;1;-1), B(3;3;1), C(4;5;3). Найти:

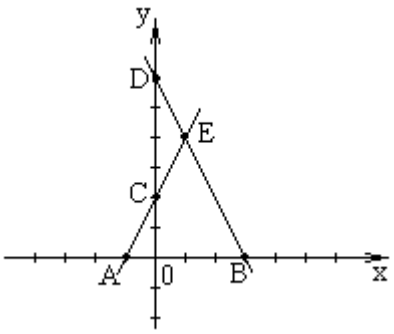
$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}$ $\qquad \overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ $\qquad \cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$

2. Дано: A(3;-4;1), B(5;-1;7), C(7;2;13)

$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}$ $\qquad \overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ $\qquad \cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$

3. Даны уравнения сторон треугольника; $4x-y-12=0$ (AB); $3x-7y+41=0$ (BC) и $9x+4y-2=0$ (AC). Написать уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C на сторону AB.

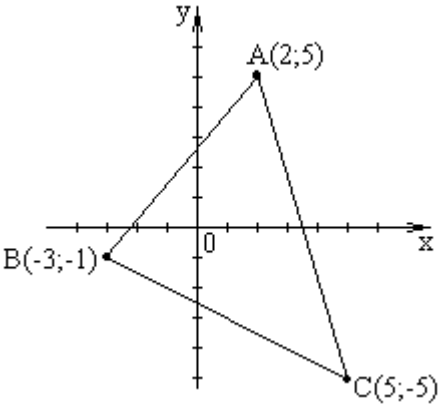
4. По данным, указанным на чертеже, определить острый угол между прямыми AC и BD.




5. Установить, лежит ли точка (1/3; 2) на прямой $18x - 5y+4=0$?

6. Прямая проходит через точку A(1; 5; 6) и точку пересечения прямых $2x - 7y+4=0$ и $x + y - 6{,}5=0$. Составить её уравнения.

7. По данным, указанным на чертеже, определить угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенных из вершины A.




8. Точка M($x$;-3) принадлежит прямой $3x+y+27=0$. Определить абсциссу точки M.

9. Даны точки 0(0; 0), $P_1$(-C;0); $F_2(-C;0), M(0; y_0)$. Составить: Уравнение окружности с центром в точке $F_2$ и радиусом $F_2M$. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках $F_1; F_2$; M. Уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1, F_2$ и малой осью [OM]. Уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1$ , $F_2$ и мнимой осью $|OM|$. Если

C = 7 $y0 = -6$

C = 6 y0 = 5
C = 5 y0 = 4
C = 4 y0 = -3
C = 3 y0 = 2.

10. Даны точки $A(3;1;5)$, $B(7;-3;-2)$, $C(-1;5;3)$. Найти: косинус угла между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; площадь треугольника $ABC$; уравнение прямой $AB$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;9;-4)$ перпендикулярно прямой (β): $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{-3}$.

12. Найти направляющий вектор прямой:

$$\begin{cases} -x+4y+z=5 \\ 3x-2y+7z=12 \end{cases}$$

13. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины $A$ в треугольнике $ABC$, если $A(-4;3)$, $B(2;2)$, $C(-1;5)$.

14. Написать уравнение линии центров двух окружностей $x^2+y^2-6x=0$ и $x^2+y^2+6x-4y=12$.

15. Дан треугольник с вершинами А (-2; 5), В(4; -3), С(6; 0). Составить: уравнение прямой АВ; уравнение медианы из вершины А; уравнение средней линии, параллельной стороне АВ; уравнение высоты из точки С; найти внутренний угол при вершине В.

16. Точка $A(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой линии $x-2y-7=0$. Вычислить площадь квадрата.

17. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3,1)$, $B(7,5)$, $C(5,-3)$.

18. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой линией $y=2x+5$.

19. Точка $A(5,-4)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x-7y-8=0$. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

20. Установите, какие линии определяются уравнениями, и схематично их постройте:

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$$
$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$$

$$x = -\frac{1}{4}y^2 + y$$

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$$

21. Найдите координаты фокуса параболы по координатам ее вершины $A(6,-3)$ и уравнению ее директрисы $3x - 5y + 1 = 0$.

22. На гиперболе $x^2/2 - y^2 = 1$ найти точку, ближайшую к точке $(3;0)$.

23. Найдите угол между прямыми:

$$\frac{X}{1} = \frac{У-1}{-2} = \frac{Z}{3}; \quad \begin{cases} 3X + У - 5Z + 1 = 0 \\ 2X + 3У - 8Z + 3 = 0 \end{cases}$$

24. Найдите угол между прямой $\begin{cases} 3X - У - Z + 5 = 0 \\ X - У - Z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $4X-8У+Z-3=0$.

25. Найдите точку пересечения прямой $\frac{X-7}{5} = \frac{У-4}{1} = \frac{Z-5}{4}$ и плоскости $3X-У+2Z-5=0$.

26. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку M (3; 4; 1) перпендикулярно прямой $X=5-t$; $Y=4t$; $Z=-2+t$.

27. Покажите, что прямые $\frac{X-1}{2} = \frac{У+2}{-3} = \frac{Z-5}{4}$ и $X = 7 + 3t$; $У=2+2t$; $Z=1-2t$ лежат в одной плоскости и найдите её уравнение.

28. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямые и найдите расстояние между ними:

$$\begin{cases} X = 2 + 3t \\ У = -1 + 4t \\ Z = 2t \end{cases}; \qquad \begin{cases} X = 7 + 3t \\ У = 1 + 4t \\ Z = 3 + 2t \end{cases}$$

**Самостоятельная работа:**

1. Дано: A(-2;3;-4), B(5;7;0), C(2;6;-4). Найти:

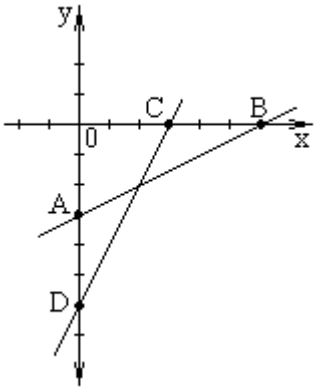
$$(2\overline{AB} - \overline{BC}) \cdot \overline{BA} \qquad \overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{BC} \qquad \cos(\overline{AC} \wedge \overline{BC})$$

2. Дано: A(3;2;-5), B(11;8;-5), C(4;4;-3). Найти:

$$(2\overline{AB} - \overline{BC}) \cdot \overline{BA} \qquad \overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{BC} \qquad \cos(\overline{AC} \wedge \overline{BC})$$

3. Даны вершины треугольника A(-3; 2), B(-3;-4), C(9;-4). Определить длину высоты, проведенной из вершины A.

4. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD.

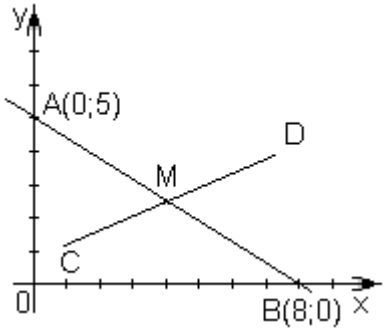



5. Написать уравнения семейства (множества) прямых, угловой коэффициент которых равен (-2/7).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку (-2;5) и отсекающей на оси OY, отрезок, равный 3.

7. Прямые AB и CD пересекаются в точке M(4; 2.5) под углом 45°. По данным, указанным на чертеже, написать уравнение прямой CD.

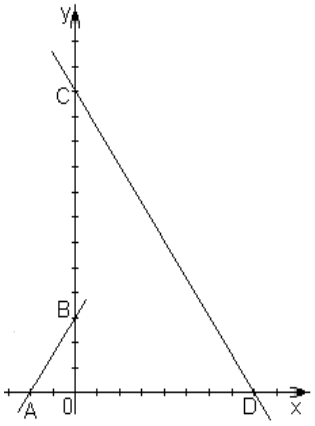
.




8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y - 2 = 0$ и $3x - y + 12 = 0$, перпендикулярно к прямой $5x+2y+ 8=0$.

9. Найти площадь треугольника, ограниченного координатными осями к прямой $3x + 10y - 30 = 0$.

10. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD.




11. Доказать, что треугольник с вершинами A(-8; -3), B(6;-1), C(-2; 5) равнобедренный.

12. Даны точки 0(0; 0), P (-C;0); $F_2(-C;0), M(0;y_0)$. Составить: Уравнение окружности с центром в точке $F_2$ и радиусом $F_2M$. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках $F_1; F_2$; M. Уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1, F_2$ и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1$, $F_2$ и мнимой осью $|OM|$. Если

C = 6 $y_0 = 4$
C = 4 $y_0 = -2$
C = 6 $y_0 = 2$
C = 3 $y_0 = -1$.

13. Составить уравнение диаметра окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=30$, перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

14. Даны вершины пирамиды A1A2A3A4. A1 (1, 2, 1), A2 (3, -1, 7), A3 (0, -3, 5), A4(7, 4, -2). Составить: уравнение плоскости A1A2A3; уравнение плоскости, которая проходит через точку A4 параллельно плоскости A1A2A3; найти угол между прямыми A1A4 и A2A3; найти угол между прямой A1A4 и плоскостью A1A2A3; высоту пирамиды, опущенной из вершины A4 на плоскость A1A2A3 .

15. Даны точки M(2, -3), N(3, 5), K(-1, 3). Составить: уравнение прямой MN; уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно прямой MN; найти расстояние от точки K до прямой MN.

16. Составить уравнение эллипса, если 2a = 30, ε =3/5.

17. Даны вершины пирамиды A1A2A3A4. A1 (1, 3, 0), A2 (3, -1, 4), A3 (-2, 5, 6), A4(0, 4, -2). Составить: уравнение плоскости A1A2A3; уравнение плоскости, которая проходит через точку A4 параллельно плоскости A1A2A3; найти угол между прямыми A1A4 и A2A3; найти угол между прямой A1A4 и плоскостью A1A2A3; высоту пирамиды, опущенной из вершины A4 на плоскость A1A2A3.

18. Даны точки M(2, -5), N(-2, 3), K(4, 5). Составить: уравнение прямой MN; уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно прямой MN; найти расстояние от точки K до прямой MN.

19. На гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ взята точка с абсциссой -8 и положительной ординатой. Найти фокальные радиусы до этой точки.

***Раздел 4. Комплексный анализ.*** *4.1. Комплексные числа. Формы записи и перевод из одной формы в другую. Действия с комплексными числами. Решение уравнений. 4.2. Определение функции комплексного переменного. 4.3. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность и особые точки.*

**Практическое занятие:**

1. Найти значение функции $f(z)=z^4+\frac{2+i}{z}-(-3+2i)$ при $z=1-2i$.

2. Решить уравнение $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z=2$; $z=-2$; $z=i$; $z=-i$; $z=1+i$; $z=-1+i$; $z=-1-\sqrt{3}i$.

4. Выполнить действия $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}$.

5. Найти все корни $\sqrt[4]{-4}$.

6. Вычислить $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$.

7. Провести вычисления в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{5+i}+(i-1)(2-3i); \quad \left(\frac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2 \quad \frac{4-i}{5+i}+(i-1)(2+3i);$$

$$\frac{2+i}{5+i}+(i-3)(2-3i); \quad \frac{3-i}{5-i}+(i-5)(2-3i); \quad \frac{7-i}{5+i}+(4i-1)(2-2i);$$

$$\frac{2-i}{3+i}+(3i-1)(2-3i); \quad \left(\frac{i^6+2}{i^{21}-1}\right)^2 \quad \left(\frac{i^4+2}{i^{18}-1}\right)^2 \quad \left(\frac{i^{12}+2}{i^{15}-1}\right)^2$$

8. Для комплексных чисел определите реальную часть , мнимую часть, модуль и аргумент. Построить вектор комплексного числа на плоскости. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

$$z=4 \quad z=-4 \quad z=2i \quad z=-3i \quad z=1+i$$

$$z=-1+\sqrt{3}i \quad z=-2-2i \quad z=4-4i$$

9. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа. Дайте геометрическую интерпретацию операции извлечения корня:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}; \quad \sqrt[4]{-4}; \quad \sqrt[3]{8}; \quad \sqrt[6]{1}; \quad \sqrt[4]{1+i}$$

$$\left(\frac{+1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}; \quad \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}; \quad \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}; \quad \left(\frac{+1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}; \quad \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24};$$

10. Выражение $(2+i)(3+2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

11. Дано $z_1=1-2i$, $z_2=2+i$. Тогда z1·z2 ; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

12. Число $z=x^2-3(x+1)+2i+5$ – чисто мнимое при $x$, равном:

13. Число $z=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

14. Выражение $(3i-1)(2i+5)-4i$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

15. Дано $z_1=1+3i$, $z_2=-2+2i$. Тогда z1·z2; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

16. Определить, при каком действительном значении x числа $z_1 = (2 - xi) + (3 + 4i)$ и $z_2 = 5 + 3xi$ будут сопряженными.

17. Число $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

18. Выражение $(2+3i)(3-2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

19. Дано $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - i$. Тогда $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

20. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто действительное при $x$, равном:

21. Число $z = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

22. Выражение $(2+3i)^2 - 2$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

23. Дано $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$. Тогда $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

24. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто мнимое при $x$, равном:

25. Число $z = 6e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

**Самостоятельная работа:**

1. Определить *x* так, чтобы комплексные числа были равны, $z_1 = x^2 - 7x + 9xi$ и $z_2 = x^2 i + 20i - 12$.

2. При каких значениях x и y комплексное число $3y - x - 6 + 2yi - 3xi + 10i$ будет равно 0?

3. При каких действительных значениях x комплексное число $x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ будет чисто мнимым?

4. Найти модуль и аргумент комплексных чисел $-1 + \sqrt{3}i$, $-7 + i$; $-3 - 2i$, числа сопряженные данным и изобразить их геометрически.

5. Представить в тригонометрической и показательной форме числа: 2+4*i*, 12*i*, –4–3*i*.

6. Представить в алгебраической и показательной форме числа: $2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $-\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{4}-i\cdot sin\frac{\pi}{4}\right)$

7. Представить в тригонометрической и алгебраической форме числа: $3\cdot e^{\frac{i\cdot\pi}{6}}$ $4\cdot e^{\frac{-i\cdot 2\pi}{3}}$ $5\cdot e^{\frac{i\cdot 4\pi}{3}}$

8. Выполнить сложение комплексных чисел $z=z_1+z_2+z_3$, где $z_1=3-2i$, $z_2=-3+4i$, $z_3=2-i$.

9. Вычислить: а) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; б) $\frac{1+i}{1-i}$; в) $\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}$; г) $(2-3i)^2$; д) $(-3+2i)\cdot 2+(7-5i)\cdot 3$; е) $\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^2}$.

10. Найти комплексное число z из уравнения $(2+5i)\cdot z=2-5i$.

11. Найти два действительных числа, удовлетворяющих равенству: а) $\frac{2i}{x}+iy-2=3i-\frac{3}{x}+y$; б) $3x+xi-5i-y=yi-7$; в) $(2+3i)(x-i)+(y+5i)=1-3i$.

12. Найти x, если $(1+2xi)^3+11$ есть чисто мнимое число.

13. Найти x, если $(x-2i)^3-2xi$ есть действительное число.

14. Найти такие действительные *x*, *y*, при которых выполняется равенство: $x+2xi+3+(y-2i)^2=\frac{18-14i}{3+i}$.

15. Найти *a* и *b*, если: а) $\sqrt{a+bi}=5+3i$; б) $\sqrt{a+bi^{17}}=1+2i$.

16. Провести вычисления в алгебраической форме: $\frac{2-i}{5+i}+(i-1)(2-3i)$; $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2$

17. Для указанных комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Постройте вектор комплексного числа на плоскости. Запишите число в тригонометрической и показательной формах: $z=4$ $z=-4$ $z=2i$ $z=-3i$ $z=1+i$ $z=-1+\sqrt{3}i$ $z=-2-2i$ $z=4-4i$.

18. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа: $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}$

19. Найти корни уравнений: $z^2+6z+13=0$, $z^2-8z+20=0$, $z^3+27=0$.

20. Выражение $(3+2i)^2+5\imath$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

21. Дано $z_1=3+i$, $z_2=2-i$. Тогда $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

23. Число $z=4x\ i+(3i+2)^2+x^2$ – чисто действительное при $x$, равном:

22. Число $z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

23. Выражение $(3-2i)^2-4$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

24. Дано $z_1=2-i$, $z_2=1+i$. Тогда $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

25. Число $z=4x\ i+(3i+2)^2+x^2$ – чисто мнимое при $x$, равном:

26. Число $z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

## Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

*К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.*

**Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Алгебра и геометрия»:**

Основная литература

1. Сборник задач по алгебре: в 2 т. Т. 1. Ч. I и II. Основы алгебры. Линейная алгебра и геометрия [Электронный ресурс]. – Москва : Физматлит, 2007. – 263 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82941. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

2. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва : Высшая школа, 2010. – 479 с.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах [с решениями]: в 2 ч. [Текст] Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. – Москва : ОНИКС, 2008. – 368 с.

Дополнительная литература

1. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Москва : Физматлит, 2009. – 512 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=68387. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

2. Зуланке, Р. Алгебра и геометрия. Т. 1. Введение [Электронный ресурс]. – Москва : МЦНМО, 2004. – 405 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=69113. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

3. Трухан, А. А. Линейная алгебра и линейное программирование. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 316 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/99214. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

4. Горлач, Б. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 300 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/99103. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

4. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва : ОНИКС, 2007. – 304 с.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва : ОНИКС, 2006. – 304 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : ОНИКС 21 век, 2005. – 304 с.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч [Текст] Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : ОНИКС 21 век, 2003. – 304 с.