МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТТИКА

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем в качестве электронного учебного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Прокопенко Е. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Николаева Евгения Александровна
Чередниченко Алла Валериевна
Вычислительная математика [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Вычислительная математика» и организовать самостоятельную работу.

© КузГТУ, 2018
© Николаева Е. А.,
Чередниченко А. В.,
составление, 2018

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся очной формы обучения по курсу «Вычислительная математика».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Вычислительная математика», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Уравнения математической физики. *1.1. Основные задачи математической физики. Вывод уравнений. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных и их решение. 1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных. 1.3. Основные типы дифференциальных уравнений второго порядка. Приведение уравнений к каноническому виду. 1.4. Аналитические методы решения уравнений математической физики. Метод Даламбера. Метод Фурье.*

Практическое занятие:

1. Найти общее решение линейного уравнения в частных производных:

1.1) $(y+xz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$;

1.2) $x(x^2+3y^2)\frac{\partial z}{\partial x}-y(3x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=2z(-x^2+y^2)$;

1.3) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2$;

1.4) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=y^3$;

1.5) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)z$.

2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению и проходящую через кривую:

2.1) $(2xy-1)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-2x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=2(x-yz)$;

2.2) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$; $\quad x^2+y^2=1,\quad z=2$;

2.3) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$; $\quad y^2=z,\quad x=0$;

2.4) $x(z-2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xz+2yz-2y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z(z+1)$; $\quad z^2=-4x,\quad y=0$;

2.5) $x(z+2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xz+2yz+2y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z(z-1)$; $\quad z^2+x(z+1)^2=0,\quad y=0$;

3. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

3.1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3.2) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3.3) $3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+10\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3.4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3.5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial z}{\partial x}+6\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. Используя формулу Даламбера, найти форму $U=U(x,t)$ однородной струны, определяемой волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, если в момент времени $t=0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой x, определяются соответственно функциями: $U\big|_{t=0}=\varphi(x)$ и $\left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$.

4.1) $a=1;\quad \varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x};\quad \psi(x)=0.$

4.2) $a=2;\quad \varphi(x)=x(2-x);\quad \psi(x)=e^{-x}.$

4.3) $a=1;\quad \varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x};\quad \psi(x)=\dfrac{x}{1+x^2}.$

4.4) $a=2;\quad \varphi(x)=x^2;\quad \psi(x)=\sin x.$

4.5) $a=1;\quad \varphi(x)=\dfrac{x}{1+x^2};\quad \psi(x)=\sin x.$

5. Используя метод Фурье найти форму $U=U(x,t)$ однородной струны для любого момента времени t, определяемой волно-

вым уравнением $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, если струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = \ell$ $(U(0,t) = U(\ell,t) = 0)$. При этом в момент времени $t = 0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой x, определяются соответственно функциями: $U\big|_{t=0} = \varphi(x)$ и $\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$.

5.1) $a = 2;\quad \ell = 1;\quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\sin 3\pi x;\quad \psi(x) = 0.$

5.2) $a = 1;\quad \ell = 1;\quad \varphi(x) = 0;\quad \psi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \ell/2 \\ \ell - x, & \ell/2 < x \le \ell \end{cases}$

5.3) $a = 2;\quad \ell = 1;\quad \varphi(x) = \sin^3 x;\quad \psi(x) = 0.$

5.4) $a = 1;\quad \ell = 1;\quad \varphi(x) = 0;\quad \psi(x) = 2(\ell - x).$

5.5) $a = 2;\quad \ell = 1;\quad \varphi(x) = 0;\quad \psi(x) = \frac{1}{3}\sin 5\pi x.$

Самостоятельная работа:

1. Найти общее решение линейного уравнения в частных производных:

1.1) $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 - y^2);$

1.2) $\sin x\frac{\partial z}{\partial x} + \sin y\frac{\partial z}{\partial y} = \sin z;$

1.3) $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy;$

1.4) $2x(y + z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + y(2y + z^2)\frac{\partial z}{\partial y} = z^3;$

1.5) $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = -(x^2 + y^2).$

2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению и проходящую через кривую:

2.1) $x(y^2 + z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(x^2 + z)\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 - y^2);\qquad x + y = 0,\quad z = 1;$

2.2) $y^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x(z - 2y);\qquad z = x^2 + 2,\quad y = 1;$

2.3) $2y(z - 3)\frac{\partial z}{\partial x} + (2x - z)\frac{\partial z}{\partial y} = y(2x - 3);\qquad x^2 + y^2 = 2x,\quad z = 0;$

2.4) $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy;\qquad x^2 + y^2 = 1,\quad z = 2;$

2.5) $(x-y)y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-x)x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\left(x^2+y^2\right);\qquad xz=1,\quad y=0.$

3. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

3.1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+13\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$

3.2) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;$

3.3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad x>0;$

3.4) $xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{2y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad x>0,\quad y>0;$

3.5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\cos^2 x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-ctgx\cdot\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$

4. Используя формулу Даламбера, найти форму $U=U(x,t)$ однородной струны, определяемой волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, если в момент времени $t=0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой x, определяются соответственно функциями: $U\big|_{t=0}=\varphi(x)$ и $\left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$.

4.1) $a=2;\quad \varphi(x)=e^x;\quad \psi(x)=4x.$

4.2) $a=1;\quad \varphi(x)=\dfrac{x}{1+x^2};\quad \psi(x)=\cos x.$

4.3) $a=2;\quad \varphi(x)=x^3;\quad \psi(x)=x.$

4.4) $a=1;\quad \varphi(x)=e^{-x^2};\quad \psi(x)=\dfrac{x}{1+x^2}.$

4.5) $a=2;\quad \varphi(x)=\sin x;\quad \psi(x)=\cos x.$

5. Используя метод Фурье найти форму $U=U(x,t)$ однородной струны для любого момента времени t, определяемой волновым уравнением $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, если струна закреплена на концах

$x=0$ и $x=\ell$ ($U(0,t)=U(\ell,t)=0$). При этом в момент времени $t=0$ форма струны и скорость точки струны с абсциссой x, определяются соответственно функциями: $U\big|_{t=0}=\varphi(x)$ и $\left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$.

5.1) $a=2;\quad \ell=2;\quad \varphi(x)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le \ell/2\\ x-\ell, & \ell/2<x\le \ell\end{cases};\quad \psi(x)=0.$

5.2) $a=1;\quad \ell=2;\quad \varphi(x)=2\sin\dfrac{\pi x}{\ell};\quad \psi(x)=1.$

5.3) $a=1;\quad \ell=2;\quad \varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le \ell/2\\ \ell-x, & \ell/2<x\le \ell\end{cases};\quad \psi(x)=0.$

5.4) $a=2;\quad \ell=1;\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{2}\sin 3\pi x;\quad \psi(x)=0.$

5.5) $a=1;\quad \ell=2;\quad \varphi(x)=0;\quad \psi(x)=2x$.

Раздел 2. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *2.1. Численное интегрирование ОДУ. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта. 2.2. Численные методы решения задач Коши. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта. 2.3. Решение систем ОДУ методом Рунге-Кутта.*

Практическое занятие:

1. Методом Рунге-Кутта вычислить на отрезке [a; b] решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $y(a) = y_0$, приняв шаг $h = \dfrac{b-a}{5}$.

Номер варианта	Уравнение	[a; b]	y_0
1	$y' = \dfrac{y-x}{y+x}$	[0; 0,5]	1
2	$y' = y - \dfrac{2x}{y}$	[0; 1]	1
3	$y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$	[0; 1]	1
4	$y' = 2y + 3e^x$	[0,3; 0,6]	1,415
5	$y' = x + y^2$	[0; 0,3]	0

2. Используя метод сеток (явную схему), составить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных и краевых условиях: $u(x,0) = f(x)$; $u(0,t) = \varphi(t)$; $u(0{,}6;t) = \Psi(t)$; $0 \le x \le 0{,}6$; $0 \le t \le 0{,}01$.

Номер варианта	$u(x,0) = f(x)$	$u(0,t) = \varphi(t)$	$u(0{,}6;t) = \Psi(t)$
1	$\cos 2x$	$1 - 6t$	0,3624
2	$x(x + 1)$	0	$2t + 0{,}96$

Номер варианта	$u(x,0) = f(x)$	$u(0,t) = \varphi(t)$	$u(0,6;t) = \Psi(t)$
3	$\sin 2x$	$2t$	0,932
4	$3x(2 - x)$	0	$t + 2{,}52$
5	$\sin(0{,}55x+0{,}03)$	$t + 0{,}03$	0,354

Самостоятельная работа:

1. Методом Рунге-Кутта вычислить на отрезке $[a;\ b]$ решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $y(a) = y_0$, приняв шаг $h = \dfrac{b-a}{5}$.

Номер варианта	Уравнение	$[a;\ b]$	y_0
1	$y' = y^2 - x^2$	[1; 2]	1
2	$y' = x^2 + y^2$	[0; 1]	0,27
3	$y' = xy(y^2 - 1)$	[0; 1]	0,5
4	$y' = x^2 + y^2 - xy$	[0; 1]	0,1
5	$y' = \dfrac{2y - x}{y}$	[1; 2]	2
6	$y' = \dfrac{1}{y^2 - x}$	[1; 2]	0
7	$y' = x^3 - y$	[1; 2]	- 1
8	$y' = xy - e^x$	[0; 0,1]	0
9	$y' = 2xy + x^2$	[0; 0,5]	0
10	$y' = x + \sin\dfrac{y}{3}$	[0; 2]	1
11	$y' = 2x + \cos y$	[0; 0,1]	0
12	$y' = y^3 + x^2$	[0; 1]	1
13	$y' = xy - y^2$	[0; 1]	0,5
14	$y' = xy^3 - y$	[0; 1]	1
15	$y' = y^2 e^x - 2y$	[0; 1]	1

2. Используя метод сеток (явную схему), составить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных и краевых условиях: $u(x,0) = f(x)$; $u(0,t) = \varphi(t)$; $u(0{,}6;t) = \Psi(t)$; $0 \le x \le 0{,}6$; $0 \le t \le 0{,}01$.

Номер варианта	$u(x,0) = f(x)$	$u(0,t) = \varphi(t)$	$u(0{,}6;t) = \Psi(t)$
1	$2x(1 - x) + 0{,}2$	$0{,}2$	$t + 1$
2	$\sin x + 0{,}08$	$0{,}08 + 2t$	$0{,}6446$
3	$\cos(2x + 0{,}19)$	$0{,}932$	$0{,}1798$
4	$2x(x + 0{,}2) + 0{,}4$	$2t + 0{,}4$	$1{,}36$
5	$\sin(x + 0{,}45)$	$0{,}435 - 2t$	$0{,}8674$
6	$x(x + 0{,}4) + 0{,}3$	$0{,}3$	$6t + 0{,}9$
7	$x(x + 0{,}8)$	$6t$	$0{,}84$
8	$x(2x + 0{,}3)$	0	$6t + 0{,}9$
9	$\sin(x + 0{,}48)$	$0{,}4618$	$3t + 0{,}882$
10	$\sin(x + 0{,}02)$	$3t + 0{,}02$	$0{,}581$
11	$\cos(x + 0{,}48)$	$6t + 0{,}887$	$0{,}4713$
12	$1{,}5 - x(1 - x)$	$3(0{,}5 - t)$	$1{,}26$
13	$x(0{,}8 - x) + 0{,}6$	$0{,}6$	$3(t + 0{,}24)$
14	$2x(1 - x) + 0{,}9$	$3(0{,}3 - 2t)$	$1{,}38$
15	$x(1 - x) + 0{,}2$	$0{,}2$	$2(t + 0{,}22)$

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Вычислительная математика»:

Основная литература

1. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 368 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/96854. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

2. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для техн. и экон. ун-тов и вузов / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 368 с.

Дополнительная литература

1. Чикильдин, Г. П. Вычислительная математика : учебное пособие / Г. П. Чикильдин ; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 111 с. – Режим доступа: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=29814&type=nstu:common. – Загл. с экрана. (01.03.2018)

2. Высшая математика: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Минск : Вышэйшая школа, 2012. – 392 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=135993. – Загл. с экрана. (02.04.2018)