МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ ИГР

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем в качестве электронного учебного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Прокопенко Е. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Николаева Евгения Александровна
Чередниченко Алла Валериевна
Исследование операций и теория игр [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Исследование операций и теория игр» и организовать самостоятельную работу.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся очной формы обучения по курсу «Исследование операций и теория игр».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Исследование операций и теория игр», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены решения типовых заданий, задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Математическое моделирование. Виды математических моделей. Алгоритм построения математической модели реальной ситуации.

Пример:

1. (Задача об использовании ресурсов)

Для изготовления двух видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	*P2*
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	–	1
S4	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции, 2 и 3 руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно *P1* и *P2*, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(1 \times x_1 + 3 \times x_2)$ единиц ресурса *S1*, $(2 \times x_1 + 1 \times x_2)$ единиц ресурса *S2*, $(1 \times x_2)$ единиц ресурса *S3* и $(3 \times x_1)$ единиц ресурса *S4*. Так как потребление ресурсов *S1*, *S2*, *S3* и *S4* не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$2x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3x_1 \le 21.$$

По смыслу задачи переменные неотрицательны

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции *P1* и $3x_2$ руб. – от реализации продукции *P2*, т.е.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

2. (Задача о раскрое материалов) Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить математическую модель задачи.

Решение: Определим всевозможные способы распила бревен.

Способ распила	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим: x_i – число бревен, распиленных i-м способом (i = 1, 2, 3, 4); x – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$f = x \to max$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195,$$
$$5x_1 + 2x_2 = 2x,$$
$$x_2 + 2x_3 = x,$$
$$x_4 = 3x,$$
$$x_i \ge 0\ (i = 1,2, 3,4).$$

Практическое занятие:

1. Фирма производит 2 вида продукции: А и В, объём сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объёма реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырьё, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В – 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 $ соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

2. Процесс изготовления 2 видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объёмы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 $
2	5	20	15	3 $

3. В трёх хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т. бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Самостоятельная работа:

1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной

1000 $ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5$, а каждая минута телерекламы – в 100$. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу между радио и телерекламой.

2. У врача диетолога имеется пять видов продуктов. Из них он должен составить наиболее экономную диету. Требуется, чтобы меню содержало 20 единиц белка и 20 единиц жиров. Содержание белков и жиров в единице каждого вида продукта, а также стоимость единицы продукта заданы таблицей:

	Виды продуктов				
	I	II	Ш	IV	V
Белки	1	2	1	1	3
Жиры	2	1	1	2	4
Стоимость	12	10	9	18	7

3. Фирма получила заказ на n разных блоков, которые могут изготовить n фирм. Каждый блок настолько велик, что фирма – поставщик не может выполнить более одного заказа. Известна цена изготовления разных блоков в каждой фирме. Фирма должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом общие затраты на приобретение блоков.

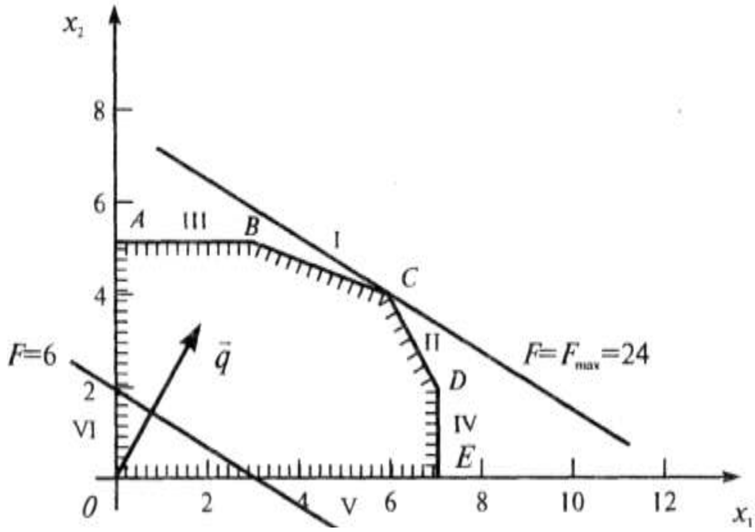
Раздел 2. Линейное программирование. Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача. Метод потенциалов.

Пример:

1. Определить точку максимума, вычислить ее координаты и значение целевой функции в ней

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$
$$x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$2x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3x_1 \le 21,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Изобразим многоугольник решений



Очевидно, что при $f = 0$ линия уровня $2x_1 + 3x_2 = 0$ проходит через начало координат. Зададим, например, $f = 6$ и построим линию уровня $2x_1 + 3x_2 = 6$. Ее расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор q). Так как рассматриваемая задача – на отыскание максимума, то оптимальное решение – в угловой точке C, находящейся на пересечении прямых I и II, т.е. координаты точки C определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$$

откуда $x_1 = 6,\ x_2 = 4$, т.е. $C(6;4)$.

Максимальное значение функции $f_{max} = 2\times6 + 3\times4 = 24$.

2. (Бесконечное множество решений)

$$f(x) = 2\,x_1 + 4\,x_2 \to max$$
$$x_1 + 2\,x_2 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение: Особенность данной задачи, состоит в том, что линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей ограничению:

$$x_1 + 2\,x_2 \le 5$$

Это, вместе с направлением градиента, обуславливает наличие альтернативных оптимальных решений. Таким образом, $x^* = (),\ f(x^*) = 10$, т.е. в каждой из этих точек целевая функция имеет одно и тоже значение.

3. (Целевая функция не ограничена на допустимом множестве)

$$f(x) = 20\,x_1 + 10\,x_2 \to max$$
$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение: При параллельном переносе линии уровня в направлении градиента, эта прямая всегда пересекает многогранник решений (крайнюю точку найти не удается), при этом значение целевой функции $f(x)$ может быть сделано сколь угодно большим. Таким образом, данная задача решения не имеет, вследствие неограниченности сверху целевой функции на допустимом множестве.

4. (Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует)

$$f(x) = 6\,x_1 - 2\,x_2 \to max$$
$$2\,x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение: Очевидно, что фактором, определяющим, будет ли существовать решение в случае неограниченности допустимого множества, является направление градиента целевой функции. $x^* = (4, 6)$ – точка максимума, $f(x^*) = 12$.

5. (Отсутствие допустимых решений)

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение: Полуплоскости, соответствующие неравенствам системы ограничений не имеют общих точек пересечения, следовательно, нет ни одной допустимой точки.

Допустимое множество пусто, задача не имеет решения.

Итак, при решении задачи ЛП возможны следующие исходы:

1. Допустимое множество – ограниченный многогранник, оптимальное решение – единственная вершина допустимого множества.

2. Задача ЛП может иметь бесконечное множество решений – одна из граней многогранника решений (на плоскости – отрезок, луч)

3. Целевая функция не ограничена на допустимом множестве. Задача ЛП не имеет решения.

4. Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует.

5. Допустимое множество пусто, задача ЛП не имеет решения.

Чтобы решить графическим методом задачу линейного программирования произвольной размерности, записанную в каноническом виде, необходимо выразить m неизвестных через какие-нибудь другие 2 или 1 переменные. После этого, пользуясь условиями неотрицательности, перейти к системе неравенств.

6. Найти оптимальный план задачи линейного программирования графическим методом

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to max$$

при следующих условиях:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 9,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 7,$$
$$x_i \geq 0, I = 1,\ldots,5.$$

Решение: Система ограничений состоит из трех уравнений, число неизвестных $n = 5$, следовательно, задачу можно решить графически. Перейдем от исходной задачи к задаче с двумя переменными. Выразим переменные x_3, x_4, x_5 через свободные переменные x_1 и x_2

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2,$$
$$x_4 = 9 - 2x_1 - x_2,$$
$$x_5 = 7 - x_1 - 2x_2,$$

Тогда целевая функция принимает вид:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - 5 + x_1 + x_2 + 9 - 2x_1 - x_2 - 7 + x_1 + 2x_2 =$$
$$= 2x_1 + 3x_2 - 3.$$

С учетом условий неотрицательности, получаем

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 3 \rightarrow max.$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 9,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

Из графика следует $x^* = (3, 2)$. Из выражений для x_3, x_4, x_5 находим: $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5=0$.

Таким образом, $x^* = (3, 2, 0, 1, 0)$ точка максимума, а значение целевой функции $f(x^*) = 9$.

Метод решения транспортной задачи рассмотрим на примере. В таблицу внесем данные:

$$a = (60, 120, 100),$$
$$b = (20, 110, 40, 110),$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Найдем начальный план перевозок по методу минимальной стоимости: находим в таблице клетку с наименьшим тарифом, таких клеток две. Найдем максимально возможные поставки для этих клеток: $x_{11} = min\{60,20\} = 20$, $x_{21} = min\{120,20\} = 20$, за-

полним клетку (1, 1), т. о. спрос первого потребителя полностью удовлетворен, вычеркиваем соответствующий ему столбец. Затем в оставшейся части таблицы снова находим клетку с наименьшим тарифом и заполняем ее.

Пункты отправления	Пункты назначения				a_i
	1 $(v_1 = 1)$	2 $(v_2 = 2)$	3 $(v_3 = 6)$	4 $(v_4 = 6)$	
1 $(u_1 = 0)$	1 20	2 – 40	5 + 	3	60
2 $(u_2 = -1)$	1	6	5 10	2 110	120
3 $(u_3 = 1)$	6	3 + 70	7 – 30	4	100
b_j	20	110	40	110	

2. Полученный план перевозок необходимо проверить на оптимальность. Для этого используем метод потенциалов. Обозначим $u = (u_1,\dots,u_m)$, $v = (v_1,\dots,v_n)$, потенциалы потребителей и поставщиков соответственно. Чтобы рассчитать потенциалы, составляем систему уравнений для заполненных клеток:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Поскольку неизвестных больше, чем уравнений, произвольно полагают одно из значений $u_1 = 0$. Остальные находим из системы:

$$u_1 + v_1 = 1,$$

$$u_1 + v_2 = 2,$$

$$u_2 + v_3 = 5,$$

$$u_2 + v_4 = 2,$$

$$u_3 + v_2 = 3,$$

$$u_3 + v_3 = 7$$

Условие оптимальности записываются в виде

$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

оно должно выполняться для пустых клеток.

Если условие оптимальности не выполнено выбирается переменная x_{ij} с наибольшим положительным значением величины $u_i + v_j - c_{ij}$.

Вычислим значения критерия

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 1, \leftarrow$$
$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0,$$
$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1,$$
$$u_2 + v_2 - c_{22} = -5,$$
$$u_3 + v_1 - c_{31} = -6,$$
$$u_3 + v_4 - c_{34} = 0$$

Отсюда следует, что переменную x_{13} следует заполнить.

Далее строится замкнутый цикл, состоящий из горизонтальных и вертикальных линий, который начинается в клетке (1, 3), а остальные узлы находятся в заполненных клетках таблицы.

Клетку (1, 3) будем заполнять, поэтому в ней ставим «+». Для сохранения объемов перевозок в соседних к ней узлах цикла клетках значения x_{ij} должны убывать пометим их знаком «–». Общая величина убывания определяется минимальным значением заполненных клеток, которые убывают. Обозначим эту величину d. После определения величины d производится изменение переменных в соответствии со знаком, поставленным при обходе цикла. Результаты сводятся в новую таблицу.

	1 $(v_1 = 2)$	2 $(v_2 = 3)$	3 $(v_3 = 6)$	4 $(v_4 = 3)$
1 $(u_1 = -1)$	1 20	2 10	5 30	3
2 $(u_2 = -1)$	1	6	5 10	2 110
3 $(u_3 = 0)$	6	3 100	7	4

Полученный план перевозок снова проверяется на оптимальность:

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = -1$$
$$u_2 + v_1 - c_{21} = 0$$
$$u_2 + v_2 - c_{22} = -4$$
$$u_3 + v_1 - c_{31} = -4$$
$$u_3 + v_3 - c_{33} = -1$$
$$u_3 + v_4 - c_{34} = -1$$

На этом процесс вычислений заканчивается, решение найдено.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(X) = 1 \times 20 + 2 \times 10 + 5 \times 30 + 5 \times 10 + 2 \times 110 + 3 \times 100 = 760$ – минимальная стоимость перевозок.

Практическое занятие:

1) $f(x) = x_1 - x_2 \to max$

$3x_1 + 2x_2 \le 14$

$x_1 - 4x_2 \le 0$

$3x_1 - x_2 \ge 0$

$-x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to min$

$x_1 + 2x_2 \le 7$

$2x_1 + x_2 \le 8$

$x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

3) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to min$

$x_1 + x_2 \ge 1$

$2x_1 - x_2 \ge -1$

$x_1 - 2x_2 \le 0$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4) $f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to max$

$2x_1 - x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

5) Решить транспортную задачу

$$a = (160, 400, 240)$$
$$b = (170, 190, 140, 180, 120)$$
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа:

1) Найти такие значения параметров p и q, при которых задача

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to max$$
$$x_1 + p\,x_2 \le 1$$
$$x_1 - x_2 \ge q$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0$$

а) имеет пустое допустимое множество;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечно много решений;

г) не имеет решений, так как функция бесконечно возрастает.

2) Решить транспортную задачу

$$a = (200, 250, 150)$$
$$b = (120, 180, 105, 90, 105)$$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Раздел 3. Теория игр. Моделирование конфликтных ситуаций в виде матричных игр. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.

Пример:

1. Построить модель игры.

Пусть игрок I имеет две, а игрок II – три фишки. Независимо и тайно друг от друга игроки откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок I. В противном случае фишки выигрывает игрок II.

Ясно, что игрок I имеет две, а игрок II – три стратегии. В игре нет случайного хода. Вследствие одновременного выбора стратегий дерево игры имеет вид либо а), либо б) (рис. 1).

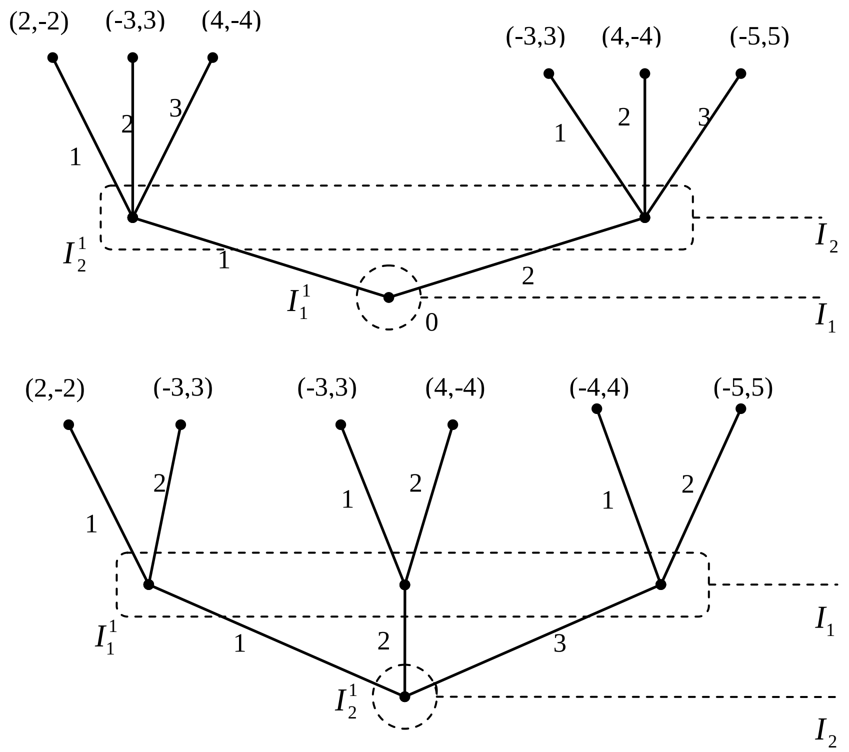


Рис. 1.

На рисунке пунктиром показаны информационные множества. В окончательной позиции первое число показывает выигрыш игрока I, второе – выигрыш игрока II.

Предположим, что в рассматриваемой игре первым ходит игрок II, а игрок I знает, четное или нечетное число фишек выбрано игроком II, но не знает, какое именно нечетное. В этом случае у игрока I имеется два информационных множества (рис. 2).

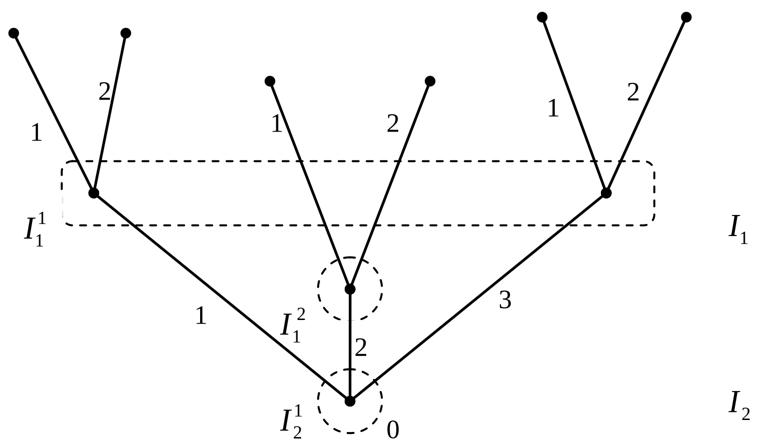


Рис. 2.

2. (Семейный спор). Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут пойти на соревнование по боксу или в театр. Причем в посещении бокса муж заинтересован в большей степени и от этого он получает удовлетворение, измеряемое двумя единицами, а жена – одну единицу. При посещении театра меры удовлетворенности мужа и жены соответственно 1 и 2. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по нулю.

Усложним эту известную игру. Допустим, что представления зависят от каких-то случайных факторов. Мы можем договориться так. Пусть в урне имеется семь шаров: три белых и четыре черных. Если случайным образом извлеченный шар оказывается белым, то представление в театре лучше, чем на боксе, в случае черного шара – наоборот.

Дерево этой игры показано на рис. 3.

Игра "семейный спор" в отличие от примера 1 является неантагонистической игрой.

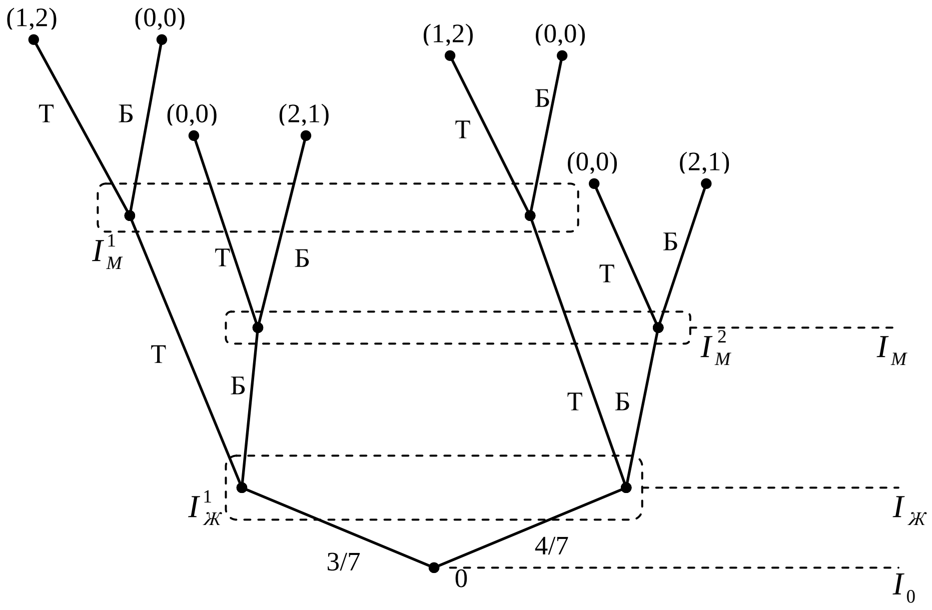


Рис. 3.

Рассмотренные примеры подтверждают, что игрок может заранее решить, что выбирать ему в каждом случае, т.е. в каждом информационном множестве.

3. Рассмотрим игру "Крестики-нолики" в квадрате *3 x 3*. Из двух игроков побеждает тот, кто поставит подряд три знака (крестики или нолики). Игроки ходят по очереди. Победитель получает +1, проигравший – –1. Если это не удается, то игроки получают по нулю – ничья.

Нас интересует не сама игра (в ней вряд ли можно проиграть), а ее развернутая форма (рис. 4б).

Нумерация клеток показана на рис. 4а. На рис. 4б приведены две партии (ситуации):

5 – 7 – 8 – 2 – 4 – 6 – 9 – 1,

5 – 7 – 8 – 2 – 4 – 6 – 9 – 3,

соответствующие ходы показаны на рис. 4в. Например, в первой партии стратегии игроков есть следующие цепочки:

5 – 8 – 4 – 9 – для игрока I, 7 – 2 – 6 – 1 – для игрока II.

Пример показывает, что для игр с большим количеством стратегий строить дерево практически невозможно.

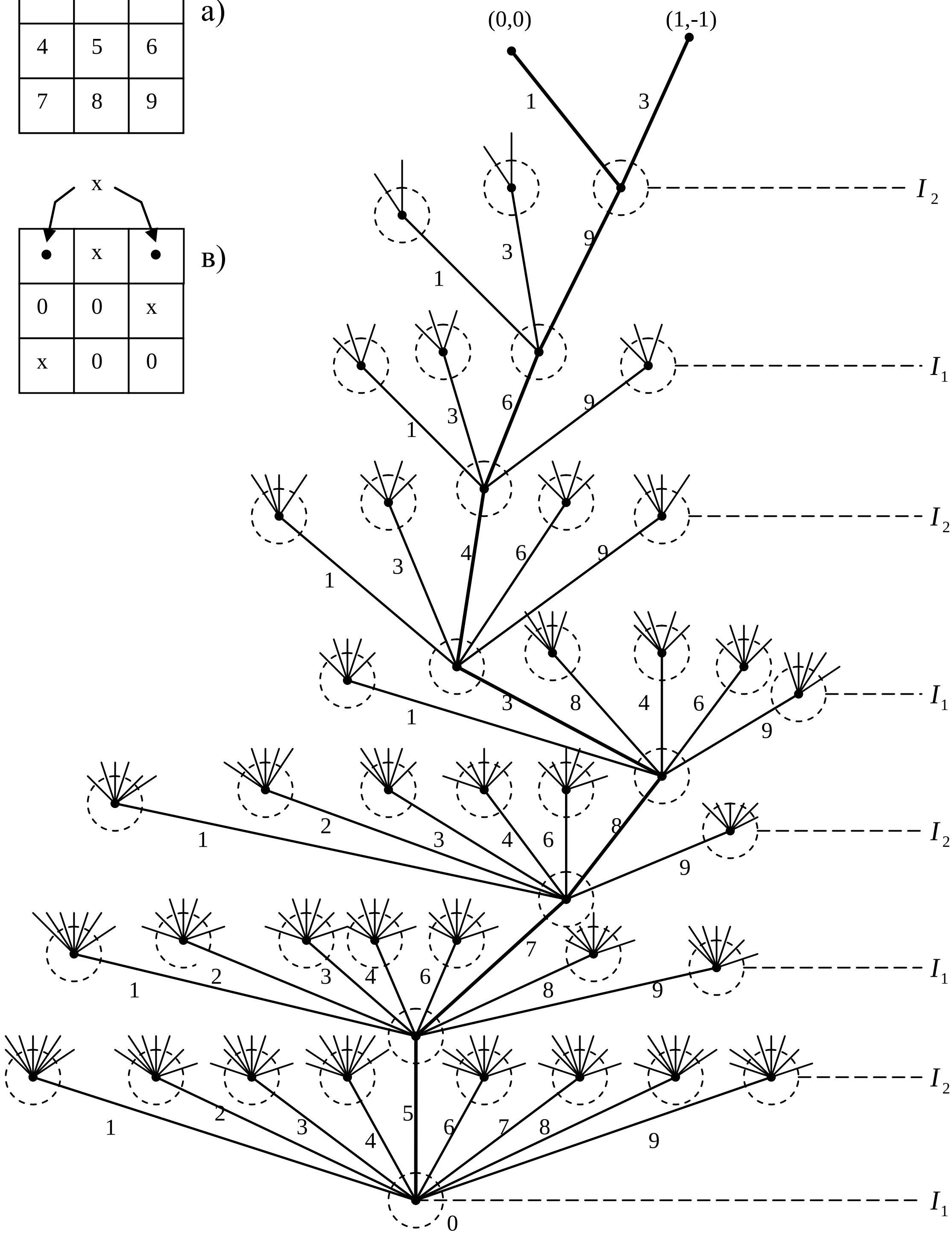
а)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

x

в)

•	x	•
0	0	x
x	0	0



б)

Рис. 4.

4. Определить седловую точку.

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccc} & & \end{array} \qquad \min\limits_j a_{ij} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \| \\
\mathrm{A} = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\
\max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & \quad 5 & \quad 4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2}
\end{array}
$$

Седловой точкой является пара (i_o = 3; j_o = 1), при которой ν = 2.

Заметим, что хотя выигрыш в ситуации (3;3) также равен 2 = $\underline{\nu} = \bar{\nu}$, она не является седловой точкой, так как этот выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца.

5. Выполнить доминирование.

Рассмотрим игру

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Стрелками показаны доминируемые стратегии.

Аналогично выполнено доминирование следующей игры.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

В результате доминирования получим игру A' размером *2x2*, в которой все стратегии недоминируемые.

6. Определить максиминную и минимаксную стратегии игроков.

$$
\begin{array}{cl}
A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \leftarrow \end{matrix} \\
\begin{matrix} \qquad\; 4 & \;\; 2 \\ & \uparrow \end{matrix} &
\end{array}
$$

Здесь $\underline{v}=1$, $\bar{v}=2$, $\underline{v}<\bar{v}$; 2-я строка – максиминная стратегия, 2-й столбец – минимаксная стратегия.

В A_1 применение минимаксной и максиминной стратегий приводит к выигрышу игрока I, равному $\underline{v}$ (α достается игроку II).

$$\begin{array}{cc} A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2 \leftarrow \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ \uparrow & & \end{array} & \end{array}$$

Здесь $\underline{v}=2$, $\bar{v}=3$, $\underline{v}<\bar{v}$; 1-я строка – максиминная стратегия, 2-й столбец – минимаксная стратегия.

В A_2 применение минимаксных и максиминных стратегий приводит к выигрышу игрока I, равному $\bar{v}$ (α достается игроку I).

Примеры показывают, что в случае, когда $\underline{v}<\bar{v}$, применение минимаксной и максиминной стратегий не приводит к определенному результату – в зависимости от игры имеет "выгоду" то один, то другой. Следовательно, когда $\underline{v}<\bar{v}$, минимаксная и максиминная стратегии не могут быть оптимальными (одностороннее отклонение от них может увеличить выигрыш "уклониста").

$$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \end{array}$$
$$\uparrow$$

Здесь $\underline{v}=2$, $\bar{v}=2$, $\underline{v}=\bar{v}$; Легко видеть, что в игре A_3 одностороннее отклонение от минимаксной (максиминной) стратегии невыгодно.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Здесь $\underline{v} = \overline{v} = 2$, $v = 2$; $i^* = 1{,}3$, $j^* = 2$. У игрока I – две, а у игрока II – одна оптимальная стратегия. Поэтому седловых точек две: (1,2) и (3,2).

Практическое занятие:

Построить математическую модель задачи.

1.1. (Планирование выпуска новых моделей одежды на швейном предприятии). Швейное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен, однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируется три возможных варианта выпуска данной модели (А, Б, В). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект.

Прибыль (тыс. руб.) которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

$$\begin{array}{cc} A \\ Б \\ B \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} +22 & +22 & +22 \\ +21 & +23 & +23 \\ +20 & +21 & +24 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

Требуется найти объем выпуска модели одежды, обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

1.2. (Планирование выпуска обуви). Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей А и В. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний I и II. В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $C = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$.

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

2. Найдите седловые точки и значение игры:

$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $б)\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Найти оптимальные стратегии и значения игр с матрицами

$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $б)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 7/4 \end{pmatrix}$

4. Преобразуя матрицу выигрышей, найти решение игр с матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $б)\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $в)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Самостоятельная работа:

Построить математическую модель задачи.

1.1. (Планирование посева). Сельскохозяйственное предприятие может посеять одну из трех культур, которые обозначим через A_1, A_2, A_3. Необходимо определить, какую из культур сеять, если при прочих равных условиях урожаи этих культур зависят главным образом от погоды, а план должен обеспечить наибольший доход. Рассмотрим лишь три состояния природы: год может быть засушливым, нормальным и дождливым.

Решить численный пример для исходных данных, приведенных в таблице.

Исходные условия	Урожайность (в ц)		
	A_1	A_2	A_3
Нормальная погода	5	12,5	7,5
Дождливая погода	15	5	10
Сухая погода	20	7,5	0
Цена за один центнер в ед. стоимости	2	4	8

1.2. (Распределение конкурсных работ). Пусть имеется два конструкторских бюро (КБ), причем одно из КБ имеет 4 отдела, а другое – 3 отдела. Объявлен конкурс на создание проектов двух агрегатов. Эти проекты должны будут оцениваться некоторой комиссией, которая выбирает лучший проект каждого агрегата.

То конструкторское бюро, чей проект первого агрегата лучше, получит «а» рублей премии; аналогично, за принятый второй проект выплачивают «b» рублей. Предполагается, что если в одном КБ над проектом одного агрегата работало больше отделов, чем в другом, то, наверное, будет принят проект первого КБ, если же в каждом КБ число отделов, работающих над аналогичным проектом, одинаково, то вероятность принятия данного проекта равна 1/2.

Требуется определить, какое количество отделов каждое КБ должно выделить для создания того или иного проекта с тем, чтобы каждое КБ могло рассчитывать на максимально возможную для него величину премии.

Решить эту задачу при условии, что $a = b$, т. е. премии за каждую из двух работ равны.

Указание. В качестве выигрыша первого игрока принять разницу между математическим ожиданием фактически получаемой премии и величиной $(a + b)/2$, равной половине величины премии за оба проекта.

2. Найти оптимальные стратегии и значения игр с матрицами

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & -8 \\ -2 & 4 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Преобразуя матрицу выигрышей, найти решение игр с матрицами:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & -2/3 & -1/6 & 2/3 \\ 1/2 & -1/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1/2 & -2/3 & -1/3 & -5/6 & -1/6 \\ 2/3 & 1/6 & -5/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Выполните доминирование:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 11 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Определение смешанной стратегии, ожидаемого выигрыша, верхней и нижней цен игры в смешанных стратегиях, смешанного расширения игры, седловой точки, оптимальной смешанной стратегии. Принцип минимакса в смешанных стратегиях. Нахождение решения МИ в чистых стратегиях, использование доминирования для уменьшения размерности игры. Решение игры “2×2”. Решение игр “$2\times n$” и “$m\times2$”. Решение игр “$m\times n$” ($m,n>2$). Сведение игры к паре двойственных задач, определение оптимальных стратегий и цены игры.

Пример:

1. Рассмотрим игру, заданную матрицей (графоаналитический метод).

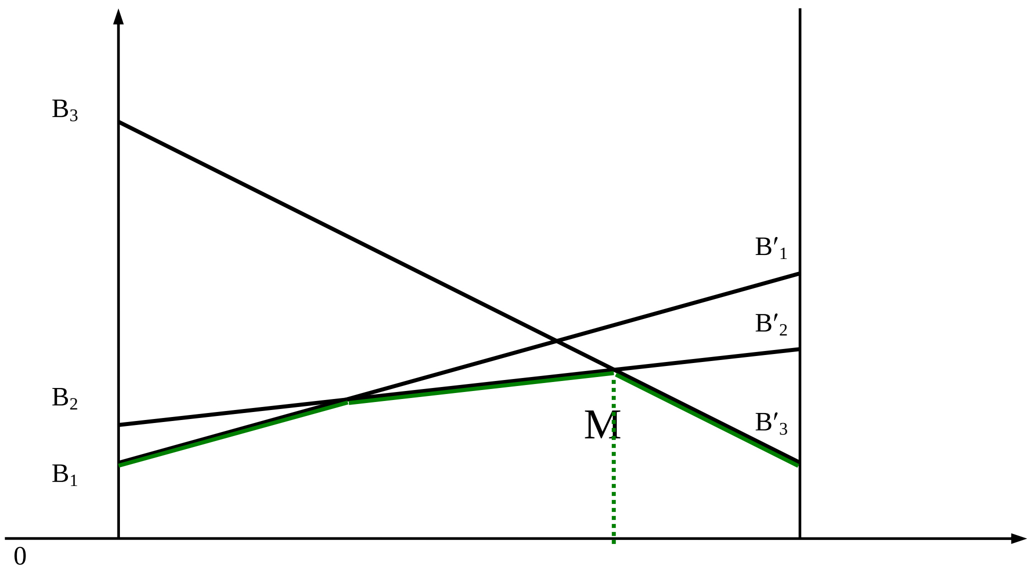
$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1 \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На плоскости *xOy* введём систему координат и на оси *Ox* отложим отрезок единичной длины C_1C_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 $(u,\ 1-u)$. В частности, точке $C_1(0;0)$ отвечает стратегия C_1, точке $C_2(1;0)$ – стратегия C_2 и т.д.

В точках C_1 и C_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью *Oy*) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии C_1, а на втором – при стратегии C_2. Если игрок 1 применит стратегию C_1, то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – *2*, при стратегии B_2 – *3*, а при стратегии B_3 – *11*. Числам *2, 3, 11* на оси *Ox* соответствуют точки B_1, B_2 и B_3.

Если же игрок 1 применит стратегию C_2, то его выигрыш при стратегии B_1 равен 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Эти числа определяют точки B_1', B_2', B_3' на перпендикуляре, восстановленном в точке C_2.Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B'_2, B_3 и B'_3 получим три прямые, расстояние до которых от оси *Ox* определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной $B_1MNB'_3$, определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке *N;* следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $u^* = (u,\ 1-u)$, а её ордината равна цене игры *v*. Координаты точки *N* находим как точку пересечения прямых $B_2B'_2$ и $B_3B'_3$.



Соответствующие два уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 3u + 5(1-u) = v \\ 11u + 2(1-u) = v \end{cases} \Rightarrow u = \frac{3}{11}, v = \frac{49}{11}.$$

Следовательно, $u^* = (\frac{3}{11}; \frac{9}{11})$ при цене игры $v = \frac{49}{11}$. Таким образом, мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

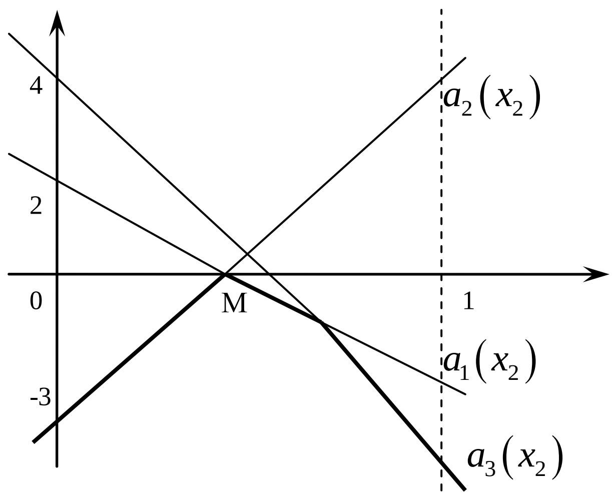
$$\begin{cases} 3w + 5(1-w) = v \\ 5w + 2(1-w) = v \end{cases} \Rightarrow w = \frac{9}{11}$$

и, следовательно, $w^* = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (Из рисунка видно, что стратегия B_1 не войдёт в оптимальную стратегию).

2. Решить игру

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Строим:



$a(x_2)=\min\{-5x_2+2, 7x_2-3, -8x_2+4\}$. В точке М пересекаются $a_1(x_2)$ и $a_2(x_2)$, поэтому решаем систему:

$$\begin{cases} -5x_2^*+2=v, \\ 7x_2^*-3=v. \end{cases}$$

и находим $x_2^*=\dfrac{5}{12}$, $x^*=(7/12,\ 5/12)$, $v=-1/12$.

Применяя к игре $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ формулу, находим $y^*=(7/12,\ 5/12,\ 0)$.

Практическое занятие:

1. Решение матричной игры: а) показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий; б) выполнить доминирование; в) свести исходную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования и решить их.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Найти решение матричных игр.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix};$$

Самостоятельная работа:

1. Решение матричной игры: а) показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий; б) выполнить доминирование; в) свести исходную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования и решить их.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2 Найти решение матричных игр.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Используя геометрический метод, найти решения игр с матрицами:

$$а)\ \begin{pmatrix} 10 & 7 & 11 & 0 \\ -8 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad в)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найдите решение игр, определяемых следующими матрицами:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \qquad б)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$в)\ A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \qquad г)\ A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Исследование операций и теория»:

Основная литература

1. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 448 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/90066. – Загл. с экрана. (05.06.2018)

2. Ловянников, Д. Г. Исследование операций: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Ставрополь : СКФУ, 2017. – 110 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=467012. – Загл. с экрана. (06.06.2018)

3. Черников, Ю. Г. Системный анализ и исследование операций [Текст] : учебное пособие для вузов / Ю. Г. Черников ; Моск. гос. горн. ун-т. – Москва : Издательство МГГУ, 2006. – 370 с. – Доступна электронная версия: http://www.biblioclub.ru/book/83573/

Дополнительная литература

1. Салмина, Н. Ю. Теория игр: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Томск : ТУСУР, 2015. – 107 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=480902. – Загл. с экрана. (06.06.2018)

2. Исследование операций: лабораторный практикум [Электронный ресурс]. – Ставрополь : СКФУ, 2017. – 108 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=483073. – Загл. с экрана. (06.06.2018)