МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко
Е. В. Гутова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем в качестве электронного учебного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Прокопенко Е. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

Николаева Евгения Александровна
Чередниченко Алла Валериевна
Гутова Елена Владимировна
Математический анализ [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко. Е. В. Гутова; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Математический анализ» и организовать самостоятельную работу.

© КузГТУ, 2018
© Николаева Е. А.,
Чередниченко А. В.,
Гутова Е. В.
составление, 2018

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по курсу «Математический анализ» очной формы обучения.

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Математический анализ», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Введение в математический анализ функции одной переменной. *1.1. Общие представления о функции одной переменной. Понятие функции одной переменной и способы ее задания. Область определения. Сложная и обратная функции. Характеристики поведения функции. Основные элементарные функции и их графики. 1.2. Теория пределов. Предел функции на бесконечности. Предел функции в конечной точке. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых функций и их связь с бесконечно большими. Основные свойства пределов. Нахождение пределов. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции. 1.3. Непрерывность функции. Определение функции, непрерывной в точке. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.*

Практическое занятие:

1. Решить:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2+x-2} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right), \quad \lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2},$$

2. Решить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin5x} \quad \lim_{x\to 0} x\cdot ctgx \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{sin^3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{sin5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2arcsinx}{3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{3x}{5}\right)}{x^2},$$

3. Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{5x} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{3x^2-2}\right)^{5x} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{3n^2-2n}\right)^{5n}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+11}{3x^2-2x}\right)^{5x} \quad \lim_{x\to\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(x+3)-\ln x\right]\right\}$$

4. Решить:

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{1-cos8x}{2x^2} \quad \lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{ln(1+5x)}{sin3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg(5/2\cdot x)}{6x}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{arcsin^2 2x}{5x^2} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}-1}{sin10x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+7x)}{sin7x}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 3}\frac{sin(x-3)}{x^3-27} \quad \lim_{x\to -5}\frac{tg(x+5)}{x^2-25} \quad \lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{sin^2(3x)}{ln^2(1+2x)}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{sin3x-sinx}{5x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{cos3x-cos^3 3x}{x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-cosx}$$

5. Исследовать на непрерывность функции. Сделать рисунок.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi/2\\ 1-x, & x\ge\pi/2\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ (x-1)^2, & 0\le x<2\\ 4-x, & x\ge 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2^x, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1<x\le 1\\ Lnx, & x>1\end{cases}$$

$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1$ в точках $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

$f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$ в точках $x_1 = 4$, $x_2 = 3$

6. Решить:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7x+3}{x^4+2x-4}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$$

Самостоятельная работа:

1. Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^3-1}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+21}{2-4x-2x^2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$$

2. Решить:

$$\lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^3-2x+5}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}\quad \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}\quad \lim_{x\to2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{12-x-x^2}{x^3-27}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$$

3. Доказать непрерывность функции $f(x)$ во всей ее области определения по определению.

$$f(x) = x2 - x + 2 \qquad f(x) = x3 - 2x \qquad f(x) = \cos x$$

4. Найти точки разрыва функции $f(x)$, исследовать их характер. Построить схематично график функции:

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0\\ 2^x, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2, & x<-1\\ 1-x, & -1\le x\le 1\\ Lnx, & x>1\end{cases}$$

5. Исследовать поведение функции в указанных точках, схематично построить график.

$$f(x)=4^{\frac{1}{1-x}}+2,\quad x_1=1,\ x_2=2$$

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}-1,\quad x_1=2,\ x_2=3$$

$$f(x)=7^{\frac{1}{x+4}}-1,\quad x_1=-5,\ x_2=-4$$

$$f(x)=6^{\frac{2}{4-x}},\quad x_1=3,\ x_2=4$$

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. *2.1. Производная. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Таблица производных. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Уравнение касательной и нормали к графику. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений. 2.2. Производные высших порядков. 2.3. Правило Лопиталя. 2.4. Полное исследование функции. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика.*

Практическое занятие:

1. Найти производные функций по определению:

$$f(x)=x^2-7 \quad f(x)=2-4x+x^2 \quad f(x)=\sin 2x$$

2. Найти производные функций:

$$y=\sqrt[3]{x^2}, \quad y=2\log_3 x+7x, \quad y=2x^4+\frac{3}{x}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \quad y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{8}{x^3}$$

$$y=x^3\cdot\log_5 x \quad y=\sqrt[5]{x^4}\cdot\ln x \quad y=\sin x+2\cos x, \quad y=(\sin x+2x)\cdot\sqrt[3]{x},$$

$$y=\sqrt{x}\cdot\cos x+\frac{3}{x^2} \quad y=x\cdot tgx, \quad y=\frac{2x}{ctgx}, \quad y=3\sin x-\frac{x^2}{tgx}.$$

$$y=2\arcsin x, \quad y=-3\cdot arcctgx \quad y=-3\arccos x+4\sqrt{x}, \quad y=\frac{2-9x^3}{1-\cos x}$$

$$f(x)=\frac{2ctgx}{1-2\sqrt{x}} \quad y=x\cdot arctgx-5\arccos x+\frac{\arccos x}{x^2}$$

3. Производная сложной функции.

$$y=\left(1+3x^2\right)^3 \quad y=(3x+1)^4 \quad y=\sin 2x \quad y=\sin x^2 \quad y=\sin^2 x$$

$$y=\sin e^x \quad y=\sin(3x+5) \quad y=(4x+5)^5 \quad y=\sqrt{x^2+2} \quad y=\sqrt{\cos x}$$

$$y=tg(\ln x) \quad y=\cos(tg3x) \quad y=\sin(\ln x) \quad y=\ln x^3 \quad y=tg\left(6^x\right)$$

$$y=3^{5x} \quad y=\ln(2x-8) \quad y=\arcsin 6x \quad y=(\arcsin 8x)^2$$

$$y=\ln^4(2x-6) \quad y=10^{\cos 5x} \quad y=3^{\arcsin 4x} \quad y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$y = x^3 \cdot \sin(\cos x) \quad y = \log_6 \sin 4x \quad y = \left(1 + tg^2 3x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y = 3^{x^2} \cdot \sqrt{x^3} - 5x \quad y = \cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad y = \frac{\sin^2 x}{ctg\, x + 1} + \frac{\cos^2 x}{tg\, x + 1}$$

4. Найти производные функций, используя правило логарифмического дифференцирования:

$$y = x^{\sin x} \quad y = x^{x^2} \quad y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 \cdot (x+4)^4} \quad y = \left(x^2 + 1\right)^{2x} \quad y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$y = \sqrt[x]{(2x \sin x + 1)^2} \quad y = \sqrt{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}} \quad y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x+7} \cdot (x-3)^4}{(x+2)^5} \quad y = \frac{(x-3)^5 \cdot (x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

5. Продифференцировать функции, заданные параметрически:

$$\begin{cases} x = k \sin t + \sin kt \\ y = k \cos t + \cos kt \end{cases} \quad \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+t^4}{\left(1+t^2\right)^2} \\ y = \dfrac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$$

6. Продифференцировать функции, заданные неявно:

$$x^3 + y^3 = \sin(x - 2y) \quad x \sin y + y \sin x = 0 \quad x^4 - y^4 = x^2 y^2$$

$$y^2 - x = \cos y \quad 3x + \sin y = 5y$$

7. Найти предел функции, используя правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} \quad \lim_{x\to 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x} - 1} \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2} - e}{\sin(x^2-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x} - 1} \quad \lim_{x\to 2\pi} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 2x} \quad \lim_{x\to 1} (1-x)^{\cos\pi x/2}$$

$$\lim_{x\to 0} (ctgx)^{\sin x} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} \quad \lim_{x\to 3} \sin\pi x \cdot \ln\left(2 - \frac{x}{3}\right) \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}$$

8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y = x^3 - 4x^2 + 3x \quad y = \frac{x^2}{x-2} \quad y = \ln\left(1 - x^2\right) \quad y = x^2 \cdot e^{-x}$$

$$y = x - \ln x \quad y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

9. Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции:

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad f(x) = e^{x^2} \quad f(x) = x^5 - 10x^2 + 7x - 9$$

Самостоятельная работа:

1. Раскрыть неопределенности

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)1},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}, \quad \lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} \quad \lim_{x\to2}\left(\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right),$$

$$\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x+1}{3-\sqrt{4+x}} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3-1}{3-5x-x^3}$$

2. Раскрыть неопределенности, используя эквивалентные бесконечно малые функции

$$\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, \quad \lim_{x\to0} \frac{\arcsin 2x}{x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{arctg\, 4x}{\exp(2x)-1}, \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x},$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-e^{4x}}{\sin 2x} \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1-3x^2)}{x\sin 5x} \quad \lim_{x\to0} \frac{arctg(x^3)}{x\sin 2x^2} \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 4x}{x\sin 5x},$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-5x^{2)}}{\exp(x^2)-1} \quad \lim_{x\to0} \frac{4\sin 2x}{\arcsin 2x}$$

3. Раскрыть неопределенности

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^x, \quad \lim_{x\to0}\left(1-2x^3\right)^{1/x^3}$$

4. Найти производную функции:

$$y = 2x^4 + \frac{3}{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \quad f(x) = 3^x \cdot tg(x/2) \quad \varphi(x) = \frac{2\cos x - \sin x}{2 - tgx}$$

$$y=\sqrt{\left(2-5x^2\right)^3} \quad y=\sin^2\left(\frac{2x+1}{3}\right) \quad y=0{,}2x^5+\frac{4}{x^2}-6\sqrt{x^3}$$

$$f(x)=e^{2x}\cdot\sin x \quad \varphi(x)=\frac{7-x^2}{\sqrt{x+3}} \quad y=\ln^3\left(1-2x^2\right) \quad y=\ln\left(\sin x+tg2x\right)$$

$$y=\frac{2}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{7}{x^3} \quad f(x)=2^x\cdot\cos 3x \quad \varphi(x)=\frac{\sin 2x}{x^2-9} \quad y=0{,}5e^{\sin 2x}$$

$$y=arctg\left(e^{x/2}\right) \quad tg\,y=3x+5y \quad y^2+x^2=\sin y$$

$$y=\left(7-3x^2\right)\cos(2/x) \quad y=\arcsin\left(e^{x^2}\right) \quad y=e^{-arcctgx} \quad y=sin^3 2x$$

$$y=\frac{(x+2)^7\cdot(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}} \quad y=\frac{(x-1)^4\cdot(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t} \\ y=t\cdot\ln t \end{cases}$$

5. Вычислить производные, используя линейность операции дифференцирования и правила дифференцирования произведения и частного:

$$y=z^2\,\mathrm{arctg}(z) \quad y=(t+1)\,\mathrm{tg}(t) \quad y=4\sin(x)\cos(x)$$

$$y=\exp(t)\sin^2(t) \quad y=x^2\exp(x)\ln(x) \quad y=\frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)-\cos(t)}$$

$$y=\frac{z^2-5z+6}{z^2+z+7} \quad y=\frac{\sqrt{t}}{2+\sqrt[3]{t}} \quad y=\frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$$

$$y=(x^2-7x+8)\exp(-x)$$

6. Вычислить производные, используя правило дифференцирования сложной функции (выписывать цепочку промежуточных переменных):

$$y(t)=\sqrt[3]{(3t-8)^5} \qquad y=(1-x)^{100}$$

$$y=\sqrt[3]{(1-z^3)(z^3+1)} \qquad x(t)=A\cos(\Omega t+\varphi)$$

$$y=\exp(-t)\ln(2t+1) \qquad y(z)=\exp(-z^2/2)$$

$$y=\mathrm{ctg}(x^2)-\mathrm{tg}^2(2x) \qquad y=2^x\log_4(x)$$

$$y=\mathrm{arctg}(\exp(-t)) \qquad y=\ln(\sin(z))$$

$y = \ln(\ln(\ln(\ x)))$ $\qquad$ $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$y = \dfrac{\mathrm{tg}^2(x)}{\mathrm{tg}(x^2)}$ $\qquad$ $y = \left(\sqrt{z} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)^{12}$

$y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $y = \ln(z + \sqrt{1+z^2})$

$y = \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}$ $\qquad$ $y = t\{\sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t))\}$

$y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$ $\qquad$ $y = \ln(arctg 5x)$

7. Найти производную по определению: $f(x) = 2 - 4x + x^2$

8. Вычислить:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}. \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}. \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{sin 2x - \sin x}.$$

9. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

$f(x) = x^5 - 10x^2 + 7x - 9 \qquad f(x) = (x-2)^2(x+2) \qquad f(x) = x + e^{-x}$

10. По формулам функций схематически построить их графики. В точках разрыва вычислить односторонние пределы и указать характер точек разрыва:

$$y = 1/|x^2 - 4x + 3|; \quad y = \exp(-1/x^2); \quad z = 1/\ln(t);$$

$$y = \mathrm{arctg}(1/t); \quad y = \mathrm{arctg}(1/t^2), \quad y = \frac{th\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)}{x+5},$$

$$y = \frac{2^{-\frac{1}{x^2}}}{x-3}, \qquad y = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x-5}, \qquad y = arcc\,\mathrm{tg}(1/t),$$

$$y = arcc\,\mathrm{tg}(1/t^2)$$

Раздел 3. Функции нескольких переменных. *3.1. Понятие функции двух переменных, область определения. 3.2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.*

Практическое занятие:

1. Запишите производные первого и второго порядка для указанной функции в указанной точке. Запишите выражение для первого дифференциала. Запишите выражение для второго дифференциала.

$$f(x,y)=\ln(X^2+У);\quad M_0(0;1);$$

$$f(x,y)=\exp(X^2У);\quad M_0(0;1);$$

2. Исследуйте функцию на локальный экстремум:

$$f=X^3-2У^3-3X+6У;\quad f=8-6X+4У-2Z-X^2-У^2-Z^2$$

$$f=3X^3+У^2+Z^2+6XУ-2Z+1;$$

3. Найти частные производные функций:

$$z=xy^2-\frac{x}{y}\quad z=\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\quad z=\frac{x}{y^3}+\frac{y}{x^3}-\frac{1}{6x^2y}$$

$$z=\cos\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{y}{x}$$

$$z=y^5\sin^2(x+y)\quad z=\left(x^3+y^4\right)\cdot\cos(2xy)\quad z=\ln\left(x^3+y^2\right)$$

$$z=6x^2+x^6y-y^4+5x^3y^5-x+5\quad u=x^3+yz^2+3yx-x+z$$

$$z=e^{x^2+y^3}\quad z=\sqrt{4x^3+6y^5}\quad z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$

$$z=x^4\cos y-y^5\sin x\quad z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$$

4. Найти $u'_x+u'_y+u'_z$ при $x=y=z=1$, если $u=\ln\left(1+x+y^2+z^3\right)$.

5. Найти $\dfrac{z'_x + z'_y}{z'_x z'_y}$ при $x = 1$ и $y = 2$, если $z = x^3 y - xy^3$

6. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^3 - x^2 y - y^3; \quad z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3; \quad z = \sin x \cdot \sin y;$$

$$z = xy + \sin(x + y); \quad z = \ln(tg(x + y)); \quad z = x^2 \ln(x + y);$$

$$z = x \cdot \sin xy + y \cdot \cos xy; \; z = \sin(x + \cos y); \quad z = \left(x^2 + y^2\right)^3;$$

$$z = \ln\sqrt{x^2 + y}; \quad z = x \cdot \ln(xy)$$

7. Дано $u = e^{xyz}$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z}$.

8. Дано $v = \sin xyzu$. Найти $\dfrac{\partial^4 v}{\partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial u}$.

9. Найти частные производные первого порядка:

$$z = 2x^3 y^5 - 6xy^5 + 5xy - 3 \quad z = \ln(\sqrt{xy} + y^2 - e^{x^2})$$

$$z = \arcsin(xy) - 3xy^2 \qquad z = \cos\frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

10. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \sin\sqrt{x^3 y} \qquad z = \cos(xy^2) \qquad z = e^{\sqrt{4x^2 - 7}}$$

11. Найти $\dfrac{z'_x + z'_y}{z'_x z'_y}$ при $x = 1$ и $y = 2$, если $z = x^3 y - xy^3$

12. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \qquad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

$$z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y \qquad z = xy(12 - x - y)$$

$$z = (x - 1)^2 + 2y^2 \qquad z = xy - 3x^2 - 2y^2$$

13. Найти область определения функции:

$$z = \ln(y - x^2 + 2x). \quad z = \arcsin(x - 3y).$$

14. Найти область определения функций:

$a)\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $b)\ z = \ln(x + y)$; $c)\ z = x + \arccos(y)$;

$d) z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; $e)\ z = \sqrt{x \cdot \cos y}$; $f)\ u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

15. Построить линии уровня функций:

$a)\ z = \ln(x^2 + y);\ \ b)\ z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

16. Найти точки разрыва функции:

$a)\ z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}\ ; b)\ z = \frac{1}{1-x^2-y^2}; c)\ z = \frac{1}{(x-y)^2}$.

17. Найти частные производные I порядка:

$a)\ z = x^3 \cdot y + x \cdot y^2 + 3xy + 7x - y\ ; b)\ z = \frac{y}{x}; c)\ z = \frac{(x^2-y)}{(x+y^2)};$

$d)\ z = arctg\ \dfrac{y}{x}; e)\ z = x^y; g)\ z = e^{\sin(y \cdot x^2)}; f)\ z = \ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$.

18. Показать, что функция $z = z(x,y)$ или $u = u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению:

$a)\ z = \ln(x^2 + xy + y^2)\ , x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2;$

$b)\ z = xy + x \cdot e^{\frac{y}{x}},\quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z;$

$c)\ u = x + \frac{x-y}{y-z}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1;$

$d)\ u = (x-y)(y-z)(z-x),\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

19. Найти частные производные II порядка:

$a)\ z = xy^2 + \ln(x^3 + y) - 3x + y$.

$b)\ u = xy + y^2 z - z^3 xy$.

20. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}$ для функции $z = \sin(xy)$.

21. Показать, что функция $u = arctg\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

22. Проверить, что функция $u = \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

23. Найти полные дифференциалы функций:

$a)\ \ z = 2^{x^2+y^2}$

$b)\ z = x^2 + \ln(x + y^3)$

$c)\ z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ в точке $P(2,1)$.

24. Вычислить: $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$.

25. Найти производную функции $z = x^3 + 2x^2y^3 + xy^2 + 1$ в направлении вектора $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$ в точке M, если $M(1,2), N(4,6)$.

26. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $P(1,2,-1)$ в направлении вектора, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

27. Найти $\overrightarrow{grad(z)}$ в точке $P(5,3)$, если $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

28. Найти угол между градиентами функции $z=\ln\frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ и $B(1,1)$.

29. Найти экстремумы функций:

$a)\ z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

$b)\ z=x^3+y^3-3xy$;

$c)\ z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

30. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в ограниченной, замкнутой области:

$a)\ z=xy(2-x-y)$ в области $x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

$b)\ z=x^2-y^2$ в области $x^2+y^2\le 1$.

Самостоятельная работа:

1. Найти частные производные первого порядка:

$$z=2x^3y-4xy^5 \quad z=5xy^4+2x^2y^7 \quad z=\arcsin\sqrt{xy}$$

$$z=\ln(y^2-e^x) \quad z=5xy^2-3x^3y^4+2 \quad z=arctg(x^2+y^2)$$

$$z=xy^4-3x^2y-5 \quad z=\ln(3x^2-y^4) \quad z=2x^2y^2+x^3-y^2-3$$

$$z=\sin\sqrt{xy^3} \quad z=7x-x^3y^2+9-y^4 \quad z=tg(x^3+y^2)$$

2. Найти частные производные второго порядка:

$$z=e^{x^2-y^2} \quad z=ctg(x+y) \quad z=\ln(3x^2-2y^2) \quad z=\cos(xy^2)$$

$$z=\ln(3xy-4) \quad z=e^{\sqrt{x+y}}$$

3. Исследовать на экстремумы функцию.

$$z=x^3+8y^3-6xy+5 \quad z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$$

$$z=1+6x-x^2-y^2-xy \quad z=2x^3+2y^3-6xy+5$$

$$z=x^2+xy+y^2+x-y+1 \quad z=x^2+xy+y^2-6x-9y$$

4. Найти область определения функции $z=z(x,y)$.

$z=\frac{3xy}{2x-5y}$ $\quad z=\frac{1}{36-4x^2-y^2}$ $\quad z=\ln(xy)$. $\quad z=\ln(4-x^2-y^2)$ $\quad z=\frac{2}{6-x^2-y^2}$.

$z=\arccos(x+y)$. $\quad z=\frac{3x+y}{2-x+y}$ $\quad z=\sqrt{9-3x^2-y^2}$ $\quad z=\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$ $\quad z=\arcsin\frac{x}{y}$.

5. Найти частные производные первого порядка.

$z=\ln(y^2-e^{-x})$ $\quad z=arctg\frac{x}{y^2}$ $\quad z=2^{3x^2-xy}$ $\quad z=arcsin\sqrt{xy}$ $\quad z=sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}$.

$z=tg(x^3+y^2)$ $\quad z=ctg\sqrt{xy^3}$ $\quad z=e^{-x^2+y^2}$ $\quad z=\ln(3x^2-y^4)$ $\quad z=arccos\left(\frac{y}{x}\right)$.

6. Найти частные производные первого порядка для функции $U=U(x,y,z)$ в точке $M_o(x_o,y_o,z_o)$.

$U=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_o(0,-1,1)$ $\quad U=z\cdot\ln(x^3+y^2), M_o\,(1,2,3)$

$U=zx\cdot\sin(2x+y), M_o\,(\frac{\pi}{4},0,2)$ $\quad U=\ln(x^3+2y^3-z^3)$, $M_o(2,1,0)$.

$U=\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $M_o(1,0,1)$ $\quad U=\ln(\cos(x^2y^2+z))$, $M_o(0,0,\frac{\pi}{4})$

$U=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$, $M_o(3,4,2)$ $\quad U=arctg(xy^2+z), M_o(2,1,0)$.

$U=\arcsin\left(\frac{x^2}{y}-z\right), M_o(2,5,0)$ $\quad U=\sqrt{z}\ \sin(2x-y)$, $M_o\,(0,0,4)$.

7. Найти полный дифференциал функции $z=z(x,y)$

$z=2x^3y-4xy^5-\frac{6x}{y^2}-5x.$ $\quad z=xy\cdot\sin(xy)$ $\quad z=\frac{3x+y}{xy-5}$

$z=5xy^4+2x^2y^7-3x+y$ $\quad z=3y^2x^3-5x-4y^2+1$ $\quad z=\cos(x^2-y^2)+x^3$

$z=\ln(3x^2-2y^2)$ $\quad z=5xy^2-3x^3y^4+x-3y$ $\quad z=e^{x^2+xy}$ $\quad z=arctg(2x-y)$.

8. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функции $z=z(x,y)$.

$z=e^{x^2-y^2}$ $\quad z=2^{(7x^2y+5)}$ $\quad z=arcctg(xy-3)$ $\quad z=\cos(xy^2)$

$z=arctg(x+y).$ $\quad z=\arcsin(x-y).$ $\quad z=\sin(x^2-y)$ $\quad z=\arccos(2x-y).$

$z=arcctg(x-2y).$ $\quad z=\ln(3x^2-y^2)$.

9. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению функция $u=u(x,y)$

$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=\frac{y}{x}$ $\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3).$

$u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=\ln(x^2+(y+1)^2)$

$y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}, u=x^y$ $\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u, u=\frac{xy}{x+y}$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, $u=arctg\frac{x+y}{1-xy}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

$u=\ln(x^2+y^2+2x+1)$ $\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0, u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1, u=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u, u=(x^2+y^2)tg\frac{x}{y}$

10. Исследовать функцию $z=z(x,y)$ на экстремум.

$z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$. $\quad z=x^3+8y^3-6xy+5$.

$z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$. $\quad z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

$z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$. $\quad z=2x^3+2y^3-6xy+5$.

$z=3x^3+3y^3-9xy+10$. $\quad z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

$z=4(x-y)-x^2-y^2$. $\quad z=6(x-y)-3x^2-3y^2$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z=z(x,y)$ в области D.

$z=3x+y-xy$, $\quad D: y=x, y=4, x=0.$

$z=xy-x-2y,$ $\quad D: x=3, y=x, y=0.$

$z=x^2+2xy-4x+8y$, $\quad D: x=0, x=1, y=0, y=2.$

$z=5x^2-3xy+y^2,$ $\quad D: x=0, x=1, y=0, y=1$.

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \qquad D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$$

12. Найти угол между градиентами скалярных полей $U = U(x,y,z)$ и $V = V(x,y,z)$ в точке M.

$$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3\ ,\ U = \frac{yz^2}{x^2}\ ,\ M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$V = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}\ ,\ U = x^2yz^3, M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$V = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}\ , U = \frac{z^3}{xy^2}\ , M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$V = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}\ , U = \frac{z}{x^3y^2}\ , M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3\ , U = \frac{x^2}{yz^2}\ , M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$V = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,\ U = \frac{z^2}{xy^2},\ M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

13. Найти производную скалярного поля $U = U(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{S}$.

$$U = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz,\ \ \vec{S} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}\ , M(1,1,1).$$

$$U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},\ \vec{S} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}\ , M(2,4,4).$$

$$U = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz,\ \ \vec{S} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}\ , M(1,1,1).$$

$$U = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}\ , \vec{S} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}, M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$U = xz^2 - \sqrt{x^3y}, \vec{S} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k},\ \ M(2,2,4).$$

$$U = x\sqrt{y} - yz^2,\ \vec{S} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, M(2,1,-1).$$

$$U = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz\ , \vec{S} = 14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}, M(1,1,1).$$

$$U = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + xz\ , \vec{S} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\ ,\ \ M(2,2,-1).$$

Раздел 4. Интегральное исчисление. *4.1. Неопределённый интеграл. Таблица и свойства неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования функции: замена переменной, по частям, дробнорациональных функций. 4.2. Определённый интеграл. Определение, геометрический смысл и свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла. Приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур, объёма тела вращения. 4.3. Несобственные интегралы. 4.4. Приближенное интегрирование: Метод прямоугольников, трапеций, Симпсона.*

Практическое занятие:

1. Найти неопределенные интегралы

$$\int \frac{x^4+2x^2+5}{x^3}dx \quad \int \frac{\sqrt[3]{x}+5}{\sqrt[3]{x}}dx \quad \int\left(\frac{5}{x}-\frac{10}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{x^2+9}\right)dx \quad \int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt[8]{x^2}-5}{\sqrt{x}}dx \quad \int \sqrt{x}\left(x^2-1\right)dx \quad \int \frac{3+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$\int\left(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx \quad \int\left(7^x-\frac{8}{x}+4\cos x\right)dx \quad \int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} \quad \int \cos 2x\,dx \quad \int (9x+12)^{17}dx$$

$$\int \frac{dx}{8x-1} \quad \int 4^{3-5x}dx \quad \int \sqrt{3x+4}dx \quad \int \sqrt[3]{(2+x)}^2\,dx \quad \int \sqrt[3]{(2-x)}^5\,dx$$

$$\int \frac{dx}{2x+9} \quad \int \sin(\frac{\tilde{o}}{3}-4)dx \quad \int \cos(5-3x)dx \quad \int e^{x+3}d\,x \quad \int 4^{3x}dx$$

$$\int 3^{2-9x}d\,x \quad \int \frac{dx}{x^2+16} \quad \int \frac{2dx}{9x^2+7} \quad \int \frac{dx}{(2x-8)^5} \quad \int \frac{6dx}{\left(9-\frac{x}{3}\right)^7} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+3}} \quad \int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}} \quad \int \frac{dx}{\sin^2(1+2x)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^4}} \quad \int \frac{x-2}{x+3}dx$$

$$\int \frac{x^2dx}{x^2-9} \quad \int \frac{x^2}{x^2+1}dx \quad \int \sin^2 x\,dx \quad \int \cos^2 x\,dx \quad \int \frac{\ln(3x+5)}{(3x+5)}dx$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3(2x-5)}}{(2x-5)}dx \quad \int\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(x+\frac{3}{x^2}\right)dx \quad \int\left(\frac{4}{x^2}+\sqrt{3x}\right)x^3dx$$

$$\int cos\left(\sqrt{x}+2\right)d\left(\sqrt{x}+2\right) \quad \int\frac{d\,x}{\sqrt{25-9x^2}} \quad \int\frac{d\,x}{\sqrt{7+4x^2}}$$

$$\int\frac{d\,x}{\sqrt{7-5x^2}} \quad \int 7^{\,2x\,-3}d\,x$$

2. Найти интегралы:

$$\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2} \quad \int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx \quad \int\frac{dx}{x^4-x^2} \quad \int\frac{dx}{x(x^2+1)} \quad \int\frac{x\,dx}{x^3-1}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+8} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}} \quad \int\frac{(3x-2)\,dx}{x^2+5x-1} \quad \int\frac{(21x^2+26)\,dx}{(x^2-5x+4)(x+3)}$$

$$\int\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx \quad \int\frac{x+1}{4x-x^2+3}dx \quad \int\frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2\left(x-1\right)}$$

$$\int\frac{(5x+3)\,dx}{(x+2)(x+1)(x-3)} \quad \int\frac{\left(1-2x^2\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4\right)} \quad \int\frac{dx}{2x^2+6x+3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad \int\frac{(x+2)\,dx}{3x^2-x+5} \quad \frac{(3x^2+24)dx}{\left(x^2+x-2\right)(x+1)}$$

3. Найти интегралы:

$$\int x\cdot\sin\tilde{o}dx \quad \int(x^2+4)Lnxdx \quad \int xe^{-2x}dx \quad \int x\sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int(2x+3)\cdot\cos xdx \quad \int x^3\cdot\cos x^2dx \quad \int e^{3x}\cdot 5xdx \quad \int\arcsin xdx$$

$$\int x^2\ln xdx \quad \int x\cdot\operatorname{arctg}2xdx \quad \int\left(x^2-4x+1\right)\cdot e^x dx$$

4. Найти интегралы:

$$\int(x+5)^8\,xdx \quad \int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \quad \int\frac{x^3dx}{(x-1)^2} \quad \int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

5. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx \quad \int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \int x\cdot(2x-9)^6\,dx \quad \int\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \int\frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)} \quad \int\sqrt{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{\arccos x\cdot\left(1-x^2\right)}}$$

$$\int\cos(3x)\cdot\sin(2x)dx \quad \int\sin(4x)\cdot\sin(5x)dx \quad \int\cos(4x)\cdot\cos xdx$$

$$\int\sin^3x\cdot\cos xdx \quad \int\cos^4x\cdot\sin^3xdx \quad \int\cos^3x\cdot\sin^5xdx$$

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx \quad \int \mathrm{tg}^4 x \cdot \sec^2 x dx \quad \int \mathrm{ctg}^4 x dx \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} \quad \int \frac{dx}{3+5\cos x}$$

6. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} (2x+\sin 2x)dx \quad \int_2^5 \frac{dx}{2x-3} \quad \int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx \quad \int_1^5 \frac{x}{1+x^2}dx \quad \int_0^{\pi}\left(\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x\right)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot (3-\cos 2x)dx \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 6x} \quad \int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx \quad \int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x}dx \quad \int_0^1 \frac{4\,arctg\,x - x}{1+x^2}dx \quad \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x}dx \quad \int_{0,5}^1 x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$$

$$\int_{-0,4}^0 (2+5x)^4\,dx \quad \int_{-1}^0 x e^{-x}dx \quad \int_{-1}^0 x\ln(x+2)dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\,dx$$

$$\int_0^1 (2x+3)3^x\,dx \quad \int_0^{0,2} x e^{5x}\,dx \quad \int_1^{e^2} \ln x\,dx \quad \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$$

7. Найти значения несобственных интегралов или установить их расходимость:

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2}dx \quad \int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} \quad \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12} \quad \int_0^{+\infty} 2x\sin x\,dx \quad \int_{-\infty}^0 \cos 3x\,dx \quad \int_{-\infty}^0 x\cos x\,dx$$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y^2 = x \quad y = 0$$

$$x = 1, \quad x = 4$$

$$y = -x^2 + 4$$

$$y = 0$$

$$y = \cos x \quad y = 0$$

$$x = 0, \qquad x = \pi/2$$

Самостоятельная работа:

1. Найти интегралы:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin(x)}dx \quad \int e^x \cos(e^x)dx \quad \int \frac{x^2}{(1+x^3)^4}dx \quad \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$$

$$\int \frac{1}{x\ln^4(x)}dx \quad \int \frac{(x^3+3x^2-1/4)}{(x^4+4x^3-x+3)^5}dx \quad \int x^3\sqrt{x^4+2}dx \quad \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}} \quad \int \frac{\cos^4(x)}{\sin^2(x)}dx \quad \int\left(\frac{7x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^3}+5x\right)dx \quad \int\left(4x^5-\frac{2}{\sin^2 x}+\cos x\right)dx$$

$$\int\left(\frac{6}{1+x^2}-5^x+2\right)dx \quad \int \frac{dx}{\cos^2(2-5x)} \quad \int(12-5x)^6 dx \quad \int \frac{dx}{2x-7}$$

$$\int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{1-3x^4}} \quad \int\left(ax^3-b\right)^5\cdot x^2dx \quad \int 3^{2+3\cos x}\cdot\sin xdx \quad \int \frac{\sqrt[3]{\ln(8-x)}}{8-x}dx$$

$$\int \frac{dx}{b^2-8x^2} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-3\operatorname{tg}x)^2}\cdot\cos^2 x} \quad \int\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-3x}dx$$

$$\int(9+2x)\sin 7xdx \quad \int(8+5x)\ln xdx \quad \int\ln(6+x)dx$$

$$\int \operatorname{arcctg}\frac{5x}{2}dx \quad \int x\cdot\arccos 2xdx \quad \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx \quad \int \frac{x+1}{4x-x^2+3}dx$$

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx \quad \int \frac{3x-4}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx \quad \int \frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2(x-1)}$$

$$\int \frac{(5x+3)dx}{(x+2)(x+1)(x-3)} \quad \int \frac{\left(1-2x^2\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4\right)} \quad \int \cos\frac{4x}{3}\cdot\sin\frac{5x}{3}dx$$

$$\int\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^3 x\right)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} \quad \int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x} \quad \int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}} \quad \int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}$$

$$\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+3} \quad \int_3^5 \frac{dx}{x^2+4x-1} \quad \int \frac{3x+2}{(x-2)^3}\,d\,x$$

$$\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} \quad \int \frac{\ln x}{x^5}dx \quad \int_0^{\pi/2}(x-1)\cos x\,dx \quad \int \frac{dx}{x^3+x} \quad \int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$$

$$\int \sin 5x\cos 3x\,dx \quad \int \sin^2 3x\,dx \quad \int_{-1}^{4}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+5}} \quad \int_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx \quad \int x\sin 3x\,dx$$

$$\int x\ln 2x\,dx \qquad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} \qquad \int_6^7 \frac{dx}{x^2-7x+10} \qquad \int \frac{7x\,dx}{1+\sqrt{x}} \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx \qquad \int_0^{0-1} \ln(x+1)dx \qquad \int \frac{4+x^2}{x^3+3x}dx \qquad \int \frac{dx}{x^4-x^2} \qquad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx \qquad \int \sin^2 \frac{5}{2}x\,dx$$

$$\int_1^{-3} \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}} \qquad \int_0^1 x(x-5)^5\,dx \qquad \int arc\cos 3x\,dx \qquad \int \frac{\ln 3x}{4x^7}\,dx$$

2. Найти интегралы

$$\int \frac{1}{(x+1)(2x+3)}dx \qquad \int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx \qquad \int \frac{x^5}{x+1}dx$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}dx \qquad \int \frac{x-4}{\sqrt{4x-3-x^2}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx \qquad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx,$$

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}},$$

3. Найти интегралы:

$$\int x\exp(5x)dx \qquad \int x\cos(2x)dx \qquad \int x^2\ln(x)dx \qquad \int x^2\exp(x)dx$$

$$\int x ctg^2 x dx \qquad \int \arcsin^2 x dx \qquad \int \arcsin(4x)dx \qquad \int \mathrm{arctg}(3x)dx$$

$$\int \ln^2 x dx \qquad \int \ln(1+x^2)dx$$

4. Вычислить интегралы:

$$\int \sin^3(x)\cdot\cos^4(x)\cdot dx \qquad \int \cos^4(x)\cdot dx \qquad \int \mathrm{tg}^5(x)\cdot dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx \qquad \int \mathrm{ctg}^4(x)\cdot dx \qquad \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx \qquad \int \sqrt{x^2-4x+3}\cdot dx \qquad \int x\sqrt{2x-x^2}dx$$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

5. Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^x \exp(-t^2)dt \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$$

6. Вычислить определенные интегралы

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} (tgx)^4 dx, \quad \int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2+9)^2}dx, \quad \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2}$$

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 4 - x^2,\ x^2 + 2x + y = 0, \quad x^2 - 2x + y = 0$$

$$y = \sqrt{x-4};\ y = 4 - x;\ x = 8$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

$$x + y - 5 = 0 \qquad y = 0$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y = 0 \qquad x = -1$$

$$y = 1/x \qquad y = 0$$

$$x = 1, \qquad x = 3$$

8. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг заданной оси:

$$y = a - \frac{x^2}{a}, \quad x + y = a, \quad a > 0 \quad \text{вокруг оси} \quad 0y$$

$$y = 4 - x^2, \quad y = 0 \quad \text{вокруг оси} \quad x = 3$$

9. Найдите длину дуги кривой:

$$y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad x \in [1/4, \quad 1]$$

Раздел 5. Дифференциальные уравнения. *5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения, задача коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения, уравнения Бернулли. 5.2. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения, задача коши. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. 5.3. Дифференциальные уравнения высших порядков.*

Практическое занятие:

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$(xy^2 + x)dx+(y - x^2y)dy = 0$ $\quad xy\cdot y'=1-x^2$ $\quad y'= 10x + y$

$y\cdot y'=\frac{1-2x}{y}$ $\quad xy' + y = y^2$ $\quad y'\mathrm{tg}\, x - y = 2$

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

$y'\cdot \sin 2x = y\cdot \ln y,\quad y(\pi/4) = e$

$\sin y\cdot \cos x\, dy = \cos y\cdot \sin x\, dx,\quad y(0) = \pi/4;$

$x - xy' = 2(1 + x^2y'),\quad y(1) = 1;$

$(1 + x^2)dy + y\,dx = 0,\quad y(1) = 1.$

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$y' = \frac{y+1}{x}$ $\quad y' = \frac{1+y^2}{xy}$ $\quad (x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$ $\quad xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$ $\quad xyy' = y^2 + 2x^2$

$\frac{xy' - y}{x} = tg\frac{y}{x}$ $\quad y' = -\frac{x+y}{x}$ $\quad xy' = y + x\cdot cos^2\frac{y}{x}$

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

$xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y,\quad y(1)=1$

$$xy' - y = xtg\frac{y}{x},\ y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x},\ y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' + 2xy - x = 0,\ y(0)=2,5$$

$$xy'+y = x2 +1,\ y(3) = 2$$

4. Построить интегральную кривую уравнения $(x - 2)dy - (y + 3)dx = 0$, проходящую через точку М (3; -1)

5. Решить уравнения:

$$\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2 \qquad \left(1-x^2\right)y' - xy = 1$$

$$y' - \frac{1+2x}{x^2}y = 1 \qquad y' - y = xe^x$$

6. Решить дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$y - x\cdot y' = y\cdot\ln\frac{x}{y} \qquad y' - 2y = e^{2x} \qquad y(1+x^2)y' = 1 + y^2$$

$$xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$$

$$xy' + 3y = 7x^4 + 2x^3 \qquad (3x^2y^2 - 1)dx + (2x^3y + 4)dy = 0$$

$$(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$$

7. Найти решения дифференциальных уравнений:

y''=sinx

(1+x2)y''-2xy'=0, y(1)=0, y'(1)=1

1+(y')2=2yy'

8. Найти решения дифференциальных уравнений:

$y''=e^x$, y''=3x2-4x+1, y(0)=1, y'(1)=1, $y''=x^2$-cosx,

$y'''=2x^2+3$, (1+x)y''-y'=0, y''=y'+x,

y''=3y'+y xy''=y' y(1)=1 y'(0)=2 y''=y'/x+x.

9. Найти общие решения уравнений:

а) y''+y'-2y=0; б) y''-2y'+y=0 в) y''+6y'+13y=0;

г) y''+24y'-144y=0; д) y''+15y'=0; е) y''+3y=0.

10. Найти частные решения уравнений:

y''-4y'+3y=0, y(0)=6, y'(0)=10

y''+4y'+29y=0, y(0)=0, y'(0)=15

4y''+4y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=0

11. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни его характеристического уравнения, и написать его общее решение:

а) $к_1=2$, $к_2=-1$

б) $к_1=1$, $к_2=3$

в) $к_1=2j$, $к_2=-2j$

г) $к_1=1+3j$, $к_2=1-3j$

д) $к_1=2$, $к_2=2$

12. Решить уравнения:

y''+4y'+3y=9e-3x y''-y=2x

y''-4y'+4y=x2 y''+2y'+2y=1+x

y''+4y'=12x2-2x+2, y(0)=2, y'(0)=0.

y''-3y' =2·e^{3x} y''-3y' =2x+5.

y''+8y'+16y=x^2-2 y''+8y'+16y=3e-4x

$$y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$$

y''+y=-8cos3x y''+100y=sin2x,

y''-3y'+2y=2excos(x/2), y''+y+sin2x=0, y(π)=y'(π)=1.

y''+3y'=9cos3x-4sin3x, y''+6y'+9y=e-xsinx.

y''-7y'+6y=sinx, 5y''-6y'+5y=e0,6xsin$\frac{4}{5}$x.

13. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $\dfrac{dy}{x^2+x+1} - \dfrac{dx}{y(x-1)} = 0, \quad y(0) = 2$

б) $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 1/2, \quad y'(\pi/2) = 7$

14. Найти общие решения уравнений:

а) $y' + (1 + \dfrac{1}{x^2})y = e^{1/x}$

б) $(3x^2 + xy - y^2)dx + x^2 dy = 0$

в) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$

14. Записать в общем виде частные решения уравнений:

$$2y'' - 3y' - 14y = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \\ xe^{-2x} \\ 3\cos 2x \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям

$a)\ y'\ tgx - y = 1, \quad y(\pi/2) = 1$

$б)\ y'' - 2y' + 2y = 0, \ \ y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$

2. Найти общие решения уравнений:

$a)\ y' + 2y \ = e^{-x}$ $\qquad$ $б)\ xy' = y1n\dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $в)\ y'' - 5y' = -9e^{5x}$

3. Записать в общем виде частные решения уравнений:

$$y'' + 4y = \begin{cases} e^{3x} \\ x - 5 \\ 8\sin 2x \\ e^{2x}\cos x \\ 3x^2 + 5 + e^{-x} \end{cases}$$

4. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $y' = y, \quad y(0) = 1$

б) $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

5. Найти общие решения уравнений :

а) $y' + 2xy = e^{=x^2}$ б) $2xy\,y' = 3y^2 + 4x^2$ в) $y'' - 2y' = e^{2x}$

6. Записать в общем виде частные решения уравнений.

$$4y'' + 4y' + y = \begin{cases} 3x^2 - 8x + 2 \\ e^{-x/2} \\ 2\cos x \\ e^{3x}\sin(x/2) \\ 3x - 2e^x \end{cases}$$

7. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $(y-4)dx - (x+1)dy = 0, \quad y(1) = 10$

б) $y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 10$

8. Найти общие решения уравнений :

$$2xy' - y = 3x^2 \qquad y - xy' = \frac{x}{\cos(y/x)} \qquad y'' + 2y' + 2y = x + 1$$

9. Записать в общем виде частные решения уравнений.

$$y'' + 16y = \begin{cases} 1 - 6x \\ 8e^{3x} \\ \sin 2x - 3\cos 2x \\ x^2 + 1 - e^x \\ 3\cos 4x \end{cases}$$

10. Найти общие решения уравнений:

$a)\ y' + 2y = e^{-x}$ $\qquad$ $б)\ xy' = y1n\dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $в)\ y'' - 5y' = 0$

11. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

$a)\ y'\,tgx - y = 1, \quad y(\pi/2) = 1 \qquad б)\ y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$

12. Решить уравнение:

$$y'' + 4y' + 29y = x^2 - x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0$$

13. Найти общие решения уравнений:

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \qquad 2xy\,y' = 3y^2 + 4x^2 \qquad y'' - 2y' = 0$$

14. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $y' = y, \quad y(0) = 1$

б) $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

15. Решить уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Раздел 6. Ряды. *6.1. Числовые ряды. Общие понятия. Сумма ряда геометрической прогрессии. 6.2. Сходимость числовых рядов. Необходимый и достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Сходимость знакочередующегося ряда. 6.3. Степенные ряды. Радиус и область сходимости. Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена. Приложения степенных рядов*

Практическое занятие:

1. Написать первые четыре члена ряда, если: $u_n = \frac{1+n}{n^2}$.

2. Найти u_{n+1}, если $u_n = \frac{3n+1}{n^2-1}$; $u_n = \frac{2^{3n}}{(n+2)!}$

3. Решить вопрос о сходимости рядов по необходимому признаку:

$$\sum_{к=1}^{\infty} \frac{к+1}{3к-1}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n+3}}; \qquad \frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n+1}{2n+2}+\ldots.$$

4. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n}$$

5. Исследовать ряд на сходимость по интегральному признаку Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}.$$

6. Исследовать ряд на сходимость по радикальному признаку Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

7. Применяя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2n+1};\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right).$$

8. Исследовать на условную и абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}.$$

9. Найти область сходимости степенного ряда:

$$x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ .\ .\ .\ +\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ .\ .\ .\ ,\qquad n=1,2,...;$$

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ .\ .\ .\ +\frac{x^n}{n!}+\ .\ .\ .\ ,\qquad n=1,2,...;$$

$$x+2!x^2+3!x^3+...+n!x^n+...,\qquad n=1,2,...\ .$$

10. Применяя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2n+1};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right).$$

11. Исследовать на условную и абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln 10)^n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}.$$

12. Исследовать ряды на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)};\qquad \sum(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(2n+1)^n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}.$$

13. Записать u_n и a_n для рядов:

$$x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+...+u_n+...,\qquad 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+u_n+...,$$

$$(x+1)+2!(x+1)^2+3!(x+1)^3+...+u_n+...$$

14. Найти область сходимости степенного ряда:

$x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots,$

$(x+3) + (x+3)^2 + \ldots + (x+3)^n + \ldots$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 10^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n n!}{3^n}$, $\sum_{\ddot{i}=1}^{\infty} 5^{\ddot{i}} \tilde{o}^{\ddot{i}}$,

e) $\sum_{\ddot{i}=1}^{\infty} \frac{\tilde{o}^{\ddot{i}}}{\ddot{i} \cdot 3^{\ddot{i}}}$, $\sum_{\ddot{i}=1}^{\infty} \frac{(\tilde{o}-3)^{\ddot{i}}}{\ddot{i} \cdot 5^{\ddot{i}}}$, $\sum_{\ddot{i}=1}^{\infty} \frac{(\tilde{o}-3)^{2\ddot{i}}}{\ddot{i}^2}$.

15. Разложить в ряд Тейлора функции:

$\frac{1}{x}$ при $x0 = -2$,

cos x при $x0 = \frac{\pi}{4}$.

16. Вычислить приближенные значения:
с погрешностью ε = 0,001

$\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$ $\int_{0}^{0.8} x \cdot \sin x \, dx$ $\int_{0}^{1} \frac{ln(1-x)}{x} dx$

с погрешностью ε = 0,0001
ln1,3, $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[3]{30}$, arctg 0,2, cos0,3, sin0,4.

17. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x \le 0 \\ 1, & \text{если } 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

18. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\pi < x \le 0 \\ 2x, & \text{если } 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

19. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -6 \le x < 0 \\ 3, & 0 \le x \le 6 \end{cases}.$$

20. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{x}{3}$, $-4 \le x \le 4$.

21. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x<-1 \\ 1, & -1\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}.$$

Самостоятельная работа:

1. Исследовать сходимость ряда:

а) по необходимому признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}$

б) по радикальному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n+1})^n$

в) по признаку Даламбера $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

г) по интегральному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$

2. Исследовать сходимость ряда:

а) по необходимому признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n-1}$

б) по радикальному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{5n}})^n$

в) по признаку Даламбера $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{2n}}$

г) по интегральному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+9}$

3. Исследовать сходимость ряда:

а) по необходимому признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^2-1}$

б) по радикальному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{3n+2}})^n$

в) по признаку Даламбера $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

г) по интегральному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{ï}\frac{1}{\sqrt{2ï-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{5^n}$$

5. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 5^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{2n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

6. Написать ряд по общему члену: $U_n=\dfrac{n}{3n+1}$

7. Исследовать сходимость ряда:

а) по необходимому признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}$

б) по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2^n+1}$

в) по признаку Даламбера $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$

г) по интегральному признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+2}$

8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n+1}$$

9. Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

10. Написать ряд по общему члену: $U_n=\dfrac{n+3}{n!}$

11. Исследовать сходимость ряда:

а) по необходимому признаку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n-1}$

б) по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n}}$

в) по признаку Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{2n}}$

г) по интегральному признаку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+9}$

12. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$

13. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$.

14. Написать ряд по общему члену: $U_n = (-1)^n \frac{3n}{2n+1}$

15. Исследовать сходимость ряда:

а) по необходимому признаку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2-1}$

б) по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$

в) по признаку Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

г) по интегральному признаку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

16. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+4}$

17. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{2n-1}}$.

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Математический анализ»:

Основная литература

1. Туганбаев, А. А. Математический анализ : производные и графики функций: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Москва : Флинта, 2017. – 91 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=103836. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

2. Туганбаев, А. А. Математический анализ : ряды: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Москва : Флинта, 2017. – 40 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=103837. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

3. Лисичкин, В. Т. Математика в задачах с решениями [Текст] : учебное пособие / В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. – Санкт-Петербург : Лань, 2014. – 464 с. – Доступна электронная версия: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2785

Дополнительная литература

1. Будаев, В. Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 456 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/96244. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

2. Туганбаев, А. А. Математический анализ : интегралы: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Москва : Флинта, 2017. – 76 с. – Режим доступа:

http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=103835. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

3. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин; под ред. В. Ф. Бутузова. – Москва : Высшая школа, 1993. – 479 с.

4. Герасимович, А. И. Математический анализ: в 2 ч. [Текст] Ч. 2 : справ. пособие / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 272 с.