

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители  
Е. А. Николаева  
А. В. Чередниченко

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ**

### **Методические материалы**

Рекомендовано учебно-методической комиссией  
специальности 10.05.03 Информационная безопасность  
автоматизированных систем в качестве электронного учебного  
издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты    Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»  
Прокопенко Е. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

**Николаева Евгения Александровна**

**Чередниченко Алла Валериевна**

**Математическая логика и теория алгоритмов** [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» и организовать самостоятельную работу.

© КузГТУ, 2018

© Николаева Е. А.,  
Чередниченко А. В.,  
составление, 2018

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся очной формы обучения по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

## Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

*Раздел 1. Логика высказываний. 1.1. Высказывания и операции над ними: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность высказываний. 1.2 Формулы алгебры высказываний и их классификация: выполнимые, опровержимые, тождественно-истинные, тождественно-ложные формулы. 1.3. Логическая равносильность формул алгебры высказываний: основные равносильности алгебры высказываний. 1.4 Нормальные формы. Совершенные нормальные формы: СДНФ, СКНФ.*

### Практическое занятие:

1. Разложить логическую функцию четырех переменных:

- а) по одной переменной  $x_1$ ;
  - б) по двум переменным  $x_2, x_3$ ;
  - в) по трем переменным  $x_1, x_3, x_4$ ;
  - г) по всем переменным,
- если ДНФ функции имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

2. Упростить формулу  $F(x, y, z)$ , используя эквивалентные преобразования. Построить вектор-столбец функции, описываемой этой формулой. Построить СДНФ функции, используя:

- а) вектор-столбец,
- б) закон расщепления по недостающим переменным

$$F(x, y, z) = xy \vee (xy \vee y\bar{z}) \vee xz \vee \bar{x}(z \vee \bar{y}).$$

3. Привести формулу к ДНФ. Найти СКНФ функции, описываемой данной формулой, используя табличное представление (вектор-столбец)

$$F(x, y, z) = \overline{\overline{xy \vee (x\bar{z} \vee y)}} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}.$$

4. Найти функцию  $f^*(x_1, x_2, x_3)$ , двойственную к функции, описываемой формулой

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

5. Получить тупиковую ДНФ функции, описываемой формулой

$$f(x, y, z) = \bar{y}z \vee xz \vee \bar{y}\bar{z} \vee (xy \vee \bar{x}\bar{z}).$$

6. Проверить функциональную полноту системы логических функций

$$\Sigma = \{\rightarrow, \oplus\}.$$

### Самостоятельная работа:

1. Найти сокращенную ДНФ функции с помощью метода Блейка-Порецкого. Построить таблицу покрытия и найти все тупиковые ДНФ.

$$1.1) f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$$

$$1.2) f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

$$1.3) f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

2. Продолжить равенство.

$$2.1) (x_1 \& x_2) \& x_3 =$$

$$2.2) x_1 \& x_2 =$$

$$2.3) (x_1 \& x_2) \vee x_3 =$$

3. Упростить выражение (привести к ДНФ). Построить СДНФ и СКНФ из вектор-столбца.

$$3.1) F(x, y, z) = \overline{\overline{xy} \vee (\overline{xz \vee y}) \vee \overline{x\bar{y}z} \vee \bar{x}(\bar{y} \vee z)}$$

$$3.2) f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$$

$$3.3) f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

*Раздел 2. Исчисление высказываний. 2.1. Построение исчисления высказываний. 2.2. Теорема дедукции и ее применение. 2.3. Свойства исчисления высказываний.*

### **Практическое занятие:**

1. Определить, какая логическая связка используется в следующих словесных выражениях : "А, если В", "коль скоро А, то В", "в случае А имеет место В", "как А, так и В", "для А необходимо В", "для А достаточно В", "А вместе с В", "А нет имеет мест а", "А, только если В", "А, пока В", "или А, или В", "А одновременно с В", "А – то же самое, что и В".

2. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний:

2.1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

2.2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

2.3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

### **Самостоятельная работа:**

1. Логичны ли следующие рассуждения?

1.1. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи.

чи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

1.2. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

1.3. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

1.4. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

2. Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных выключателей таким образом, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он был выключен, и выключению, если он был включен. Построить по возможности более простую цепь, удовлетворяющую этому требованию.

3. Пусть каждый из трех членов комитета голосует "за", нажимая кнопку. Построить по возможности более простую цепь, которая была бы замкнута тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют "за".

### ***Раздел 3. Алгебра предикатов и исчисление предикатов.***

- 3.1. Логические и кванторные операции над предикатами. 3.2. Формулы логики предикатов. 3.3. Приведенная форма и предваренная нормальная форма. 3.4. Проблема разрешения формул логики предикатов.*

#### **Практическое занятие:**

1. Подберите сигнатуру и представьте следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

1.1. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, какие-то первокурсники знакомы с некоторыми спортсменами.

1.2. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

1.3. Таможенники обыскивают всякого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Некоторые люди, способствующие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков. Никто из высокопоставленных лиц не способствовал провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

2. Установить, какой из кванторов определяется следующими выражениями: “для всякого  $x$  истинно  $F(x)$ ”, “ $F(x)$  при произвольном  $x$ ”, “найдется  $x$ , такой что  $F(x)$ ”, “для подходящего  $x$  верно  $F(x)$ ”, “всегда имеет мест о  $F(x)$ ”, “каждый элемент обладает свойством  $F$ ”, “найдется, по крайней мере, один  $x$  такой, что  $F(x)$ ”, “существует не менее одного  $x$ , такого что  $F(x)$ ”, “свойство  $F$  присуще всем”, “каким бы ни был  $x$   $F(x)$  истинно”, “хотя бы для одного  $x$  верно  $F(x)$ ”.

3. Дана алгебраическая структура  $\langle N; x \leq y \rangle$ . Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры  $\sigma = (\leq)$ :

- а) “ $x$  меньше  $y$ ”,                      б) “ $y$  равно  $x+1$ ”,  
 в) “ $x$  равно 1”, г) “ $x$  равно 2”,      д) “ $y$  лежит между  $x$  и  $z$ ”.

**Самостоятельная работа:**

1. Указать, в каких из приведенных пунктов записаны предикаты:

- а)  $x^2 + 2 > 0$ ;                                      б)  $x > 3$ ;  
 в)  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;                                г) студент второго курса;  
 д) волк – травоядное животное.

Для предикатов указать предметную область и множество истинности.

2. Доказать для предикатов равносильности:

- а)  $\forall x(P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$ ;  
 б)  $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$ .

3. Показать (приведя примеры), что квантор всеобщности не дистрибутивен относительно дизъюнкции, а квантор существования – относительно конъюнкции предикатов.

*Раздел 4. Элементы теории алгоритмов. 4.1 Понятие алгоритма. 4.2. Определение машины Тьюринга. 4.3. Конструирование машин Тьюринга. 4.4. Операции над машинами Тьюринга.*

### **Практическое занятие:**

1. Построить машину Тьюринга для функции-разветвления типа  $f(x) : N_0 \rightarrow N_0$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2, & x \neq 0. \end{cases}$$

2. Построить дерево, диаграмму Мура, каноническую таблицу в векторной и скалярной форме для ограниченно-детерминированной функции, заданной своим описанием:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y(t) = x(t) \rightarrow x(t-1). \end{cases}$$

3. Записать коды E, E5, E6 для следующих чисел: 29, 43, 85, 120, 167.

4. Построить для следующего распределения частот код Фано и код Хаффмена.

A	B	C	D	E	F	G	H
0,53	0,15	0,07	0,06	0,01	0,05	0,04	0,09

5. Являются ли элементами множества кодовых слов Хемминга (элементами кода Хемминга)  $H_n$  следующие слова:

$$n = 5 \quad 01010,$$

$$n = 11 \quad 00110100110.$$

6. Закодировать по Хеммингу слова:

$$1110, 101101100.$$

### **Самостоятельная работа:**

1. Построить машину Тьюринга для функции-разветвления типа  $f(x) : N_0 \rightarrow N_0$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Построить дерево, диаграмму Мура, каноническую таблицу в векторной и скалярной форме для ограниченно-детерминированной функции, заданной своим описанием:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(t) = x(t) \sim y(t-1). \end{cases}$$

3. Записать коды E, E5, E6 для следующих чисел: 24, 40, 70, 124, 163.

4. Построить для следующего распределения частот код Фано и код Хаффмена.

К	L	M	N	O	P	Q	R
0,21	0,01	0,48	0,22	0,03	0,03	0,01	0,01

5. Являются ли элементами множества кодовых слов Хемминга (элементами кода Хемминга)  $H_n$  следующие слова:

$$n = 6 \quad 110010,$$

$$n = 0 \quad 0011001010.$$

6. Закодировать по Хеммингу слова:

$$0111, \quad 10011100.$$

### **Самостоятельная работа студентов**

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

*К зачету (экзамену) необходимо выполнить все виды работ.*

### **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов»:**

#### Основная литература

1. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Ставрополь : СКФУ, 2017. – 418 с. – Режим доступа:

[http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=467015](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=467015). – Загл. с экрана. (09.06.2018)

2. Перемитина, Т. О. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Томск : ТУСУР, 2016. – 132 с. – Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=480886](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=480886). – Загл. с экрана. (09.06.2018)

3. Глухов, М. М. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов [Текст] : учебное пособие / М. М. Глухов, А. Б. Шишков. – Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 416 с. – Доступна электронная версия: <https://e.lanbook.com/book/40412>.

#### Дополнительная литература

1. Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Томск : Эль Контент, 2015. – 236 с. – Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=480935](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=480935). – Загл. с экрана. (09.06.2018)

2. Просолупов, Е. В. Курс лекций по дискретной математике: учебное пособие, Ч. 2. Математическая логика [Электронный ресурс]. – Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2013. – 74 с. – Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=458100](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=458100). – Загл. с экрана. (09.06.2018)

3. Лихтарников, Л. М. Математическая логика [Текст] : курс лекций : задачник-практикум и решения : учебное пособие [для студентов университетов и педагогических вузов] / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 288 с.