

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»**

Кафедра автомобильных дорог и городского кадастра

Составитель  
С. В. Богомолов

## **ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ**

**Методические указания к лабораторным занятиям  
и самостоятельной работе для магистрантов  
всех форм обучения**

Рекомендованы учебно-методической комиссией  
направления подготовки 08.04.01 «Строительство»  
в качестве электронного издания  
для использования в учебном процессе

Кемерово 2016

## Рецензенты

Шабаев С. Н. – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автомобильных дорог и городского кадастра, председатель учебно-методической комиссии направления подготовки 08.04.01 «Строительство»

Шаламанов В. А. – доктор технических наук, профессор кафедры автомобильных дорог и городского кадастра

### **Богомолов Сергей Вадимович**

**Информационные технологии в науке и технике** [Электронный ресурс]: методические указания к лабораторным занятиям и самостоятельной работе для магистрантов направления подготовки 08.04.01 «Строительство», образовательная программа «Автомобильные дороги» всех форм обучения / сост.: С. В. Богомолов; КузГТУ. – Кемерово, 2016.

Предназначены для практического освоения вычислительных возможностей табличного процессора *LibreOffice Calc* в целях их применения в исследованиях, инженерных и технико-экономических расчетах практике научных исследований и профессиональной деятельности. В состав указаний входят рекомендации и задания для выполнения лабораторных работ в соответствии с рабочей программой дисциплины «Информационные технологии в науке и технике».

© КузГТУ, 2016  
© Богомолов С. В.,  
составление, 2016

## 1 СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Рабочей программой предусмотрено шесть лабораторных работ, выполняемых в программной среде табличного процессора *LibreOffice Calc*.

**Лабораторная работа № 1** – «Обработка результатов измерений методами математической статистики средствами *LibreOffice Calc*».

### **Цель:**

- приобретение навыков обработки результатов наблюдений, измерений, статистических данных в среде *LibreOffice Calc*.

### **Задачи:**

1. Вычислить статистические характеристики с помощью встроенных функций *LibreOffice Calc*:
  - минимальное значение;
  - максимальное значение;
  - среднее значение;
  - стандартное отклонение;
  - стандартное отклонение среднего;
  - коэффициент Стьюдента;
  - доверительный интервал для вероятности  $P = 0.90; 0.95$ .
2. Построить графические характеристики распределения результатов наблюдений, включая:
  - гистограмму,
  - кумулятивную кривую (кривую накопленной частоты),
  - теоретическую кривую.

**Лабораторная работа № 2** – «Построение и анализ парной регрессии по наблюдаемым зависимостям в программе *LibreOffice Calc*».

### **Цель:**

- освоение возможностей табличного процессора *LibreOffice Calc* в регрессионном анализе.

### **Задачи:**

- вычислить параметры (коэффициенты уравнения, показатель тесноты связи) и построить график линейной регрессии с использованием:
  - метода наименьших квадратов в табличной форме;
  - графического метода (линия тренда);
  - статистической функции *LINEST()*.
  - инструмента «Решатель...».

По заданной преподавателем выборке значений измеряемого свойства выполнить обработку результатов наблюдений в последовательности, приведенной в ПРИЛОЖЕНИИ А с использованием *LibreOffice Calc* в следующем порядке.

- 1) По исходным данным построить уравнения парной регрессии  $y$  от  $x$ :
  - линейное;
  - степенное;

- экспоненты;
- параболы второго порядка (полиномиальное 2-й степени).

2) Сравнить по тесноте связи и выбрать для дальнейшего анализа линейное и одно нелинейное уравнение регрессии, более близко описывающее взаимосвязь (обосновать выбор) между переменными.

3) С использованием встроенных инструментов *LibreOffice Calc* выполнить:

- оценку степени связи между величинами;
- проверку адекватности регрессионной модели;
- оценку значимости параметров модели регрессии;
- интерпретацию и анализ полученных результатов.

Указания по использованию *LibreOffice Calc* в данной работе приведены в ПРИЛОЖЕНИИ А.

**Лабораторная работа № 3** – «Построение и анализ множественной регрессии с использованием табличного процессора *LibreOffice Calc*».

**Цель:**

- освоение приемов регрессионного анализа многофакторной модели с использованием табличного процессора *LibreOffice Calc*.

**Задачи:**

- вычислить параметры (коэффициенты, показатели тесноты связи) и построить уравнение множественной регрессии график линейной регрессии с использованием статистических функций *LINEST*, *CORREL*, *TREND*, *STEXY*.

По заданной преподавателем выборке значений измеряемого свойства выполнить обработку результатов наблюдений в последовательности, приведенной в ПРИЛОЖЕНИИ А с использованием *LibreOffice Calc* в следующем порядке.

1) По исходным данным построить уравнения множественной регрессии.

2) С использованием встроенных инструментов *LibreOffice Calc* выполнить:

- оценку степени связи между величинами;
- проверку адекватности регрессионной модели;
- оценку значимости параметров модели регрессии;
- интерпретацию и анализ полученных результатов.

Указания по использованию *LibreOffice Calc* в данной работе приведены в ПРИЛОЖЕНИИ А.

**Лабораторная работа № 4** – «Обоснование инженерных решений с применением модели линейного программирования в *LibreOffice Calc*».

**Цель:**

- изучение инструментальных возможностей *LibreOffice Calc* и приобретение навыков в решении задач оптимизации.

**Задачи:**

- ознакомиться с методологией постановки задач, решаемых с помощью методов линейного программирования, представленной в ПРИЛОЖЕНИИ Б;

- с использованием инструмента «*Решатель...*» сформировать исходные данные и найти решение задачи линейного программирования.

**Лабораторная работа № 5** – «Решение двухиндексных задач линейного программирования средствами *LibreOffice Calc*».

**Цель:**

- изучение инструментальных возможностей *LibreOffice Calc* и приобретение навыков в решении задач оптимизации с использованием методом линейного программирования.

**Задачи:**

- ознакомиться с методологией постановки производственных задач, решаемых с помощью методов линейного программирования, представленной в ПРИЛОЖЕНИИ Б;

- с использованием инструмента «*Решатель...*» сформировать исходные данные и найти решение задачи линейного программирования.

**Лабораторная работа № 6** – «Поиск оптимальных решений задачи о назначениях с использованием табличного процессора *LibreOffice Calc*».

**Цель:**

- изучение вычислительных возможностей *LibreOffice Calc* и приобретение навыков в решении задач целочисленной оптимизации.

**Задачи:**

- с использованием инструмента «*Решатель...*» сформировать исходные данные и найти оптимальное решение производственной задачи;

- выполнить анализ и интерпретацию полученных результатов.

Исходные данные по каждому варианту задания представляются в электронном виде преподавателем на первом занятии.

## 2 ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

Задание для каждой лабораторной работы состоит из 10...20 вариантов. Номер варианта определяется по зачетной ведомости, актуальной на день выдачи заданий.

Результаты выполнения лабораторных работ представляются на бумажном и электронном носителях.

На листах *LibreOffice Calc* все исходные, расчетные и итоговые показатели, таблицы и графики должны быть подписаны в соответствии с принятой методикой расчета.

Все листы *LibreOffice Calc* (в электронном варианте) должны быть именованы (иметь названия, сокращенные и близкие к темам задания), лишние пустые листы необходимо удалить.

Формировать листы *LibreOffice Calc* следует компактно и из расчета – один способ решения на отдельный лист.

На бумажном носителе решение каждой задачи представляется распечаткой листов с книжной или альбомной ориентацией – в зависимости от компоновки содержимого.

К оформлению отчета на бумажном носителе предъявляются следующие требования:

1. Решение каждой задачи представляется распечаткой листов бумаги формата А4 с книжной ориентацией.

2. Отчет должен быть выполнен в соответствии с требованиями ГОСТ 2.105-95\* с общим титульным листом.

3. На второй странице отчета указывается содержание выполненных работ с указанием номеров страниц по заданиям.

4. На первой странице каждого задания сначала приводится его полное наименование, номер варианта, условие задачи и исходные данные, а затем – решение в виде таблиц и снимков рабочих областей экрана с соответствующими комментариями.

5. Отчет по лабораторным работам на бумажном носителе представляются после проверки заданий в электронном виде.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богданова, С. В. Информационные технологии: учеб. пособие для студентов высших учебных заведений. – Ставрополь: Сервисшкола, 2014. – 211 с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277476>.
2. Жданов, С. А. Информационные системы: учебник. – Москва: Прометей, 2015. – 302 с. – Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=426722](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=426722)
3. Информационные системы и технологии управления: учебник. – Москва: Юнити-Дана, 2015. – 591 с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115159>.
4. Бедердинова, О. И. Информационные технологии общего назначения: учеб. пособие. – Архангельск: САФУ, 2015. – 168 с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436288>.
5. Грошев, А. С. Информационные технологии: лабораторный практикум. – Москва, Берлин: Директ-Медиа, 2015. – 285 с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434666>.
6. Васильев, А. Н. Числовые расчеты в Excel. – Санкт-Петербург: Лань, 2014. – 608 с. – Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=68464](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68464).
7. Козодаев, Р. Ю. OpenOffice.org 3 [Текст]: полное руководство пользователя / Р. Ю. Козодаев, А. В. Маджугин; под ред. Е. В. Ушаковой. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010. – 704 с.
8. Вуколов, Э. А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL [Текст]: учеб. пособие по специальности «Менеджмент организации» / Э. А. Вуколов. – Москва: Форум, 2008. – 464 с.
9. ГОСТ 2.105-95. Единая система конструкторской документации. Общие требования к текстовым документам / Госстандарт РФ. – Москва: Издательство стандартов, 2001. – 28 с.  
<http://docs.cntd.ru/document/gost-2-105-95-eskd>
10. ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления / Госстандарт РФ. – Москва: Издательство стандартов, 2004. – 166 с.  
<http://docs.cntd.ru/document/gost-7-1-2003-sibid>

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Построение и анализ регрессионной модели

#### Теоретическая часть

Для решения задач проектирования транспортных сооружений и принятия обоснованных решений при планировании, контроле и управлении технологическими процессами дорожного строительства необходимо выявлять взаимосвязи между параметрами, определяющими ход этих процессов, и представлять их в количественной форме – в виде математических моделей.

В связи с широким развитием автоматизированных систем расчета и проектирования, задача описания (аппроксимации) экспериментальных данных математическими уравнениями становится особенно актуальной, так как использование компактных формул взамен громоздких табличных данных и сложных графиков позволяет эффективнее и глубже изучить исследуемые взаимосвязи.

Вопросами получения и анализа статистических математических моделей занимаются методы корреляционного и регрессионного анализа.

**Корреляционный анализ** позволяет оценить степень взаимосвязи между переменными, а регрессионный анализ определяет форму связи между этими переменными. Таким образом, регрессионный анализ всегда проводится после корреляционного анализа, когда между переменными установлена взаимосвязь.

**Регрессионный анализ** – метод моделирования измеряемых данных и исследования их свойств путем выявления взаимосвязи между зависимой переменной  $y$  и одной или несколькими независимыми переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Независимые** переменные иначе называют факторами, аргументами, или регрессорами, а **зависимые** переменные – функциями, откликами, результирующими, объясняемыми.

В общем случае регрессионный анализ решает следующие задачи:

- выбор уравнения регрессии;
- расчет коэффициентов регрессии;
- оценка адекватности регрессионных моделей.

Различают регрессию простую (парную) и множественную линейного и нелинейного типа.

#### Линейная регрессия

На практике уравнение регрессии чаще всего подбирается в виде линейной функции:

- парной:  $y = a_0 + a_1x$ ;
- множественной:  $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$ .

где  $a_0$  – свободный член;  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – коэффициенты регрессии;  $x_1, x_2, \dots, x_k$  – независимые переменные (регрессоры);  $k$  – число регрессоров в модели.

В данной работе будет рассмотрена парная регрессия, в уравнении которой коэффициент  $a_1$  определяет наклон прямой, а коэффициент  $a_0$  (константа регрессии) определяет сдвиг прямой по оси  $y$  – такое значение  $y$ , когда значение  $x$  равно нулю.

Параметры регрессии (свободный член и коэффициенты) определяются с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Сущность метода заключается в минимизации суммы квадратов отклонений эмпирических (фактических) значений результирующего признака от теоретических, полученных по выбранному уравнению регрессии

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \rightarrow \min,$$

где  $\hat{y}_i$  – значение, вычисленное по уравнению регрессии;  $(\hat{y}_i - y_i)$  – отклонение  $\varepsilon$  (ошибка, остаток);  $n$  – количество пар исходных данных (количество наблюдений).

После необходимых преобразований, будет получена система двух уравнений с двумя неизвестными  $a_0$  и  $a_1$ , которые могут быть найдены из выражений

$$a_1 = \frac{n(\sum_{i=1}^n y_i x_i) - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}; \quad (\text{A.1})$$

$$a_0 = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n y_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i). \quad (\text{A.2})$$

Направление связи между переменными определяется на основании знаков (отрицательный или положительный) коэффициента регрессии  $a_1$ .

Если знак при коэффициенте регрессии положительный, связь зависимой переменной с независимой будет также положительной – с увеличением  $x$  возрастает значение  $y$ .

Если знак при коэффициенте регрессии – отрицательный, связь зависимой переменной с независимой является отрицательной (обратной).

### **Нелинейная регрессия**

Наиболее простыми случаями нелинейной регрессии являются гипербола, экспонента и парабола. При нахождении коэффициентов гиперболы и экспоненты используют прием приведения нелинейной регрессионной зависимости к линейному виду. Это позволяет использовать для вычисления коэффициентов функций регрессии выше приведенные формулы.

## Гипербола

Для приведения уравнения вида  $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$  к линейному виду вводят

новую переменную  $z = \frac{1}{x}$ , тогда уравнение гиперболы принимает линейный вид  $y = a_0 + a_1 z$ . После этого используют формулы (A.1) и (A.2) для нахождения линейной функции, но вместо значений  $x_i$  используются значения  $z_i = \frac{1}{x_i}$

$$a_1 = \frac{n(\sum_{i=1}^n y_i z_i) - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i}{n(\sum_{i=1}^n z_i^2) - (\sum_{i=1}^n z_i)^2}; \quad a_0 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n y_i - a_1 \sum_{i=1}^n z_i). \quad (\text{A.3})$$

## Экспонента

Для приведения к линейному виду уравнения экспоненты  $y = a_0 e^{a_1 x}$  проводится логарифмирование

$$\ln y = \ln(a_0 e^{a_1 x});$$

$$\ln y = \ln a_0 + \ln(e^{a_1 x});$$

$$\ln y = \ln a_0 + \ln a_1 x.$$

Введя новые переменные  $b_0 = \ln a_0$  и  $b_1 = a_1$ , представляется возможность получить выражение  $\ln y = b_0 + b_1 x$ , откуда следует, что можно применять формулы (A.1) и (A.2), в которых вместо значений  $y_i$  надо использовать  $\ln y_i$

$$b_1 = \frac{n(\sum_{i=1}^n [\ln y_i] x_i) - \sum_{i=1}^n \ln y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}; \quad (\text{A.4})$$
$$b_0 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n \ln y_i - b_1 \sum_{i=1}^n x_i).$$

После получения численных значений коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$ , следует перейти к  $a_0$  и  $a_1$ , используемых в модели экспоненты. Исходя из введенных обозначений и определения логарифма, получаем

$$a_0 = e^{b_0}, a_1 = b_1.$$

## Парабола

Для нахождения коэффициентов уравнения параболы  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$  необходимо решить линейную систему из трех уравнений

$$\begin{cases} n a_0 + (\sum x_i) a_1 + (\sum x_i^2) a_2 = \sum y_i, \\ (\sum x_i) a_0 + (\sum x_i^2) a_1 + (\sum x_i^3) a_2 = \sum (y_i x_i), \\ (\sum x_i^2) a_0 + (\sum x_i^3) a_1 + (\sum x_i^4) a_2 = \sum (y_i x_i^2). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Сила регрессионной связи для гиперболы и параболы определяется непосредственно по той же формуле что и для линейной модели. При вычислении коэффициента детерминации для экспоненты все значения параметра  $y$  (исходные, регрессионные) необходимо заменить на их логарифмы, например  $\hat{y}_i = \ln(\hat{y}_i)$  и т. д.

Если функция регрессии определена, интерпретирована и обоснована, и оценка точности регрессионного анализа соответствует требованиям, можно считать, что построенная модель и прогнозные значения обладают достаточной надежностью.

Поэтому помимо установления связи между переменными в задачи регрессионного анализа входят:

- оценка степени связи между величинами;
- проверка адекватности регрессионной модели;
- оценка значимости параметров модели регрессии;
- интерпретация и анализ полученных результатов.

Для оценки степени связи и анализа общего качества уравнения регрессии используют обычно *коэффициент детерминации*  $R^2$ , называемый также квадратом коэффициента множественной корреляции  $R$ .

Значение  $R^2$  определяет, с какой степенью точности полученное регрессионное уравнение аппроксимирует исходные данные.

$R^2$  всегда находится в пределах интервала  $[0; 1]$ . Если значение  $R^2$  близко к единице, это означает, что построенная модель объясняет почти всю изменчивость соответствующих переменных. И наоборот, значение  $R^2$ , близкое к нулю, означает плохое качество построенной модели.

Статистически коэффициент детерминации показывает, на сколько процентов ( $R^2 \cdot 100\%$ ) найденная функция регрессии описывает связь между исходными значениями факторов  $x$  и  $y$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

где  $(\hat{y}_i - \bar{y})^2$  – объясненная вариация;  $(y_i - \bar{y})^2$  – общая вариация.

Соответственно, величина  $(1 - R^2) \cdot 100\%$  показывает, сколько процентов вариации параметра  $y$  обусловлены факторами, не включенными в регрессионную модель.

Для проверки пригодности полученного уравнения регрессии выполняется оценка адекватности модели. Количественная оценка адекватности регрессионного модели выполняется с помощью  $F$  – критерия (критерия Фишера)

$$F_{\text{факт}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / m}{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - m - 1)} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \quad (\text{A.6})$$

где  $m$  – число факторов, включенных в модель, (для парной регрессии  $m = 1$ );  $n$  – количество наблюдений.

Уравнение регрессии значимо (адекватно), если полученное значение  $F_{\text{факт}}$  больше критического  $F_{\text{табл}}$  для принятой доверительной вероятности. Таблицы критических значений  $F_{\text{табл}}$  приводятся в справочниках по математической статистике с учетом заданного уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $k_1 = m$  и  $k_2 = n - m - 1$ .

Оценка статистической значимости параметров регрессионного уравнения (коэффициентов регрессии) выполняется по  $t$ -критерию Стьюдента, который рассчитывается для каждого коэффициента  $a_i$  по формуле

$$t_{a_i} = \frac{a_i}{S_{a_i}},$$

где  $S_{a_i}$  – стандартные отклонения (ошибки) коэффициентов регрессии, вычисляемые по правилам математической статистики [9].

Рассчитанное значение критерия Стьюдента сравнивают с его табличным значением при выбранной доверительной вероятности (как правило, 0.95) и числе степеней свободы  $k = n - m - 1$ . Если вычисленное значение  $t_p$  больше табличного, то коэффициент регрессии является значимым с данной доверительной вероятностью.

В *LibreOffice Calc* для построения и исследования регрессионных зависимостей используются статистические функций *LINEST*, *CORREL*, *TREND*, *STEXY*.

### **Регрессионный анализ в *LibreOffice Calc***

Использование конструктора диаграмм с командой «Добавить линию тренда» позволяет произвести предварительную оценку тесноты (по значению  $R^2$ ) и формы связи (по уравнению и виду графика) между исследуемыми факторами, как это следует из рисунка А.1.

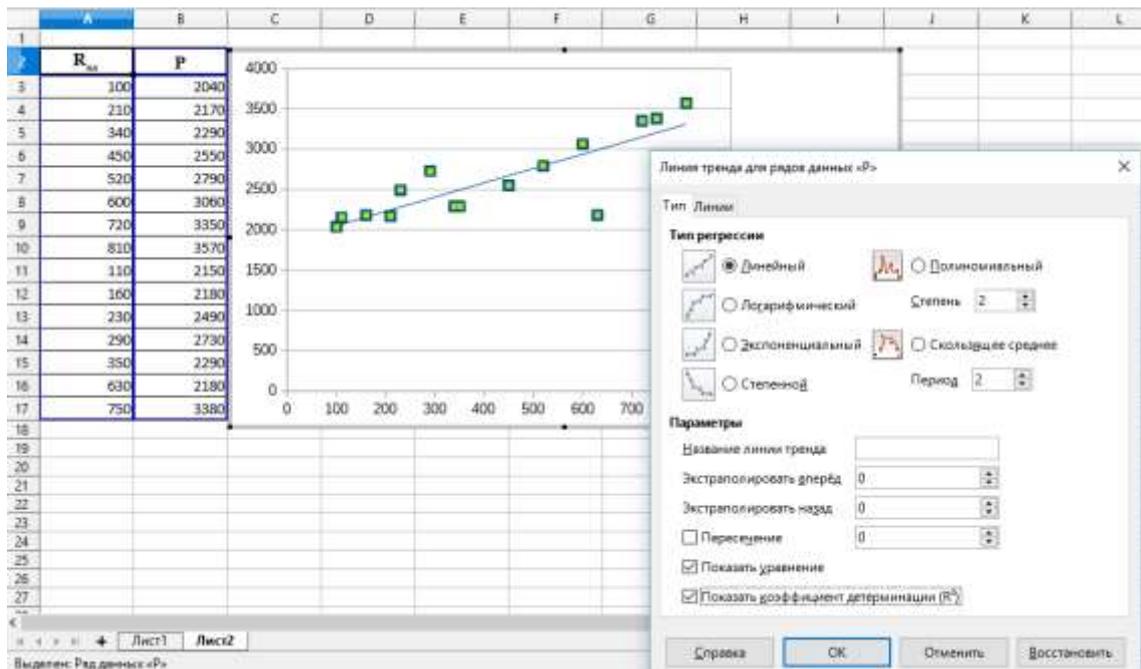


Рисунок А.1 – Вид окна формат линии тренда

При этом предоставляется возможность рассмотреть и сравнить графики линейной, полиномиальной, экспоненциальной, логарифмической и степенной функций, как это представлено на рисунке А.2.

Для оценки параметров модели парной линейной регрессии достаточно использовать статистическую функцию:

*LINEST* (*знач\_y*; *знач\_x*; *константа*; *стат*), где – *знач\_y* – диапазон значений *y*; *знач\_x* – диапазон значений *x*; *константа* – устанавливается на 0, если заранее известно, что свободный член равен 0; *стат* – устанавливается на 1 (вывод дополнительных сведений регрессионного анализа).



Рисунок А.2 – Графики функций парной регрессии в LibreOffice Calc

Функция  $LINEST()$  использует правила формул массива, когда перед вводом параметров функции необходимо выделить диапазон для размещения массива значений, возвращаемых этой функцией. После выделения диапазона нужно ввести функцию в строке формул, заполнить ее необходимыми параметрами, как это показано на рисунке А.3, и нажать  $Ctrl+Shift+Enter$ .

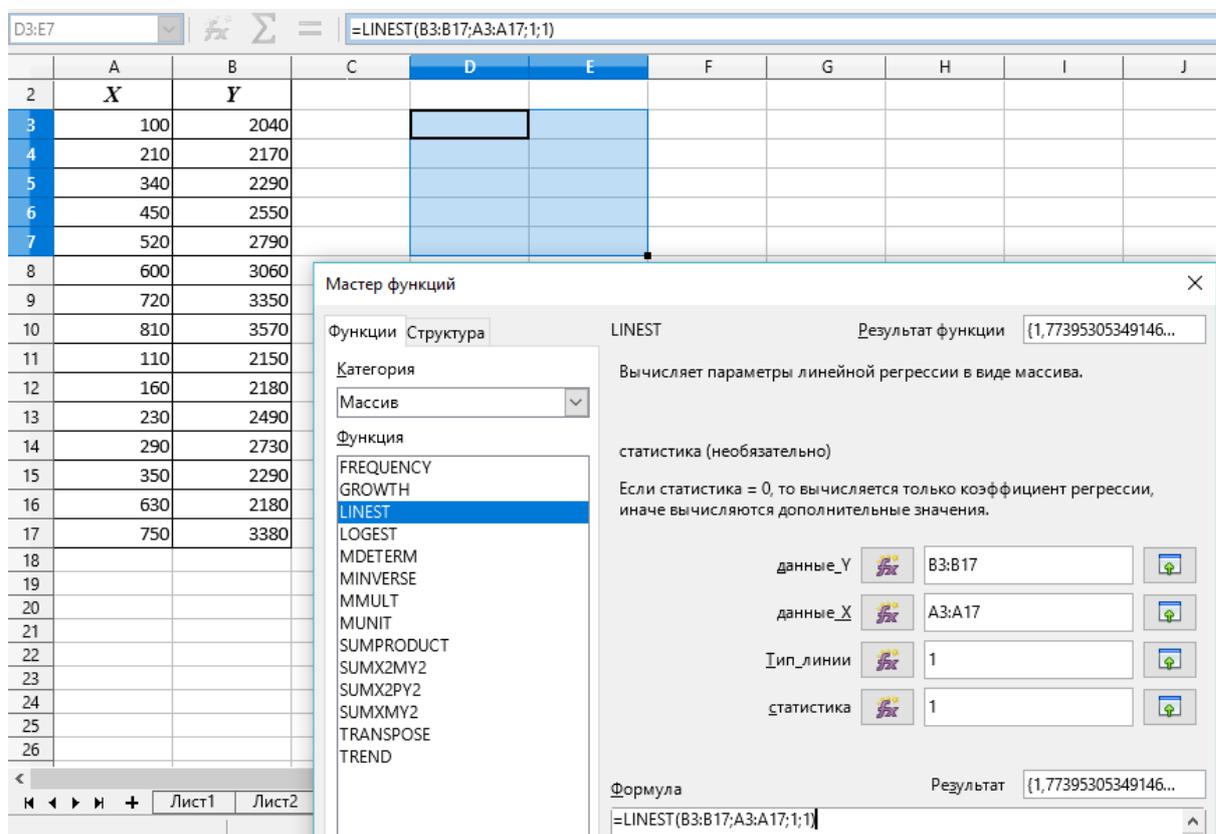


Рисунок А.3 – Мастер функции  $LINEST()$

Результаты выполнения функции будут содержать значения следующих статистических оценок параметров модели (для парной регрессии)

|              |                  |
|--------------|------------------|
| $b_1$        | $b_0$            |
| $\Delta b_1$ | $\Delta b_0$     |
| $R^2$        | $S_{\text{ост}}$ |
| $F$          | $n - k$          |
| $C_R$        | $C_{\text{ост}}$ |

где  $b_1$ ,  $b_0$  – искомые коэффициенты модели;  $\Delta b_1$ ,  $\Delta b_0$  – ошибки оценивания параметров соответственно  $b_1$ ,  $b_0$ ;  $R^2$  – коэффициент детерминации  $R^2$ ;  $S_{\text{ост}}$  – среднеквадратическое отклонение;  $C_R$  – сумма квадратов, обусловленная регрессией;  $C_{\text{ост}}$  – остаточная сумма квадратов отклонений;  $F$  – статистика Фишера для проверки значимости линейной регрессии; « $n - k$ » – число степеней свободы

$R$ -квадрат – коэффициент детерминации  $R^2$  – для характеристики качества регрессионного уравнения.

Например, значение  $R^2 = 0,599$  показывает, что 59,9 % вариации результирующего признака  $y$  объясняется вариацией фактора (регрессора)  $x$  или 59,9 % изменений признака  $y$  описывается регрессионным уравнением, а 40,1 % – другими причинами.

Значение *t-статистика* дает более точную оценку значимости коэффициентов и содержит значения *t-критерия*, рассчитанные по формуле

$$t_{a_i} = \frac{a_i}{S_{a_i}}$$

Для проверки значимости коэффициента  $b_i$  для регрессионного уравнения необходимо сравнить полученное значение *t-критерия* с критическим значением,  $\pm t_{кр}$

$$t_{кр} = TINV(1 - 0,95; 10 - 1 - 1) = 2,306$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Решение производственных задач методами линейного программирования в *LibreOffice Calc*

#### 1 Теоретическая часть

1.1 *Линейное программирование* (ЛП) – это метод, заключающийся в нахождении экстремальных (максимальных или минимальных) значений линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений. Он позволяет выбрать из множества вариантов наиболее оптимальный (лучший) путем решения системы линейных уравнений.

Типичными примерами задач, решаемых методом линейного программирования, являются задачи рационального использования сырья и оборудования, составления оптимального плана перевозок, и ряд других из области оптимального планирования

#### **Общая экономическая постановка задачи**

Предприятие планирует выпуск  $n$  видов продукции (смеси, конструкции). Для выпуска этой продукции необходимо  $m$  видов ресурсов (сырья, оборудования и др.). Ресурсы выделены предприятию в количествах  $b_1, \dots, b_i, \dots, b_m$ . На производство одного изделия  $j$ -го вида расходуется  $a_{ij}$  ресурсов  $i$ -го вида. От реализации одного изделия  $j$ -го вида ожидается доход  $C_j$  (отпускная цена изделия).

Найти такой план выпуска продукции, чтобы суммарный доход от реализации продукции был наибольший.

#### **Математическая постановка задачи ЛП**

Если неизвестные количества изделий каждого  $j$ -го вида обозначить через  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ , то цель задачи можно записать следующим образом

$$L(x) = p_1x_1 + \dots + p_jx_j + p_nx_n = \sum_{j=1}^n p_jx_j \rightarrow \max \quad (\text{Б.1})$$

Величину  $L(x)$  называют *целевой функцией* задачи.

Анализ (1) показывает, что увеличение  $L(x)$  возможно при увеличении любого из  $x_j$ . Однако такое увеличение ограничено пределами выделенных на производство ресурсов  $a_{ij}$ , а суммарное количество каждого  $i$ -го ресурса, затраченное на производство всех  $n$  видов продукции, не может превышать имеющегося количества  $b_i$  этого ресурса.

Эти ограничения составляют следующую систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \leq b_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \leq b_m \end{array} \right. \quad (\text{Б.2})$$

Наконец, искомый объем производства не может быть отрицательным (продукция или производится, тогда  $x_j > 0$ , или не производится, тогда  $x_j = 0$ ).

Поэтому систему неравенств (Б.2), носящую название *системы ограничений*, следует дополнить следующими ограничениями:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots, x_n \geq 0 \quad (\text{Б.3})$$

Соотношения (Б.1), (Б.2), и (Б.3) представляют *математическую модель* задачи поиска оптимального по прибыли плана выпуска продукции из имеющихся ресурсов, или задачи оптимального использования ресурсов.

Неравенства (Б.2) и (Б.3) составляют систему ограничений, а выражение (Б.1) – *целевая функция*, служащая для оценки качества решения, как *критерий эффективности*.

Задача поиска оптимального по доходу плана использования ресурсов формулируется так:

«Найти набор неотрицательных значений  $x_j$  (Б.3), удовлетворяющий системе ограничений (2) и обеспечивающий максимальное значение целевой функции  $L(x)$  (Б.1).»

Любая совокупность неотрицательных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющих ограничениям, называется *допустимым планом*. Допустимый план, минимизирующий (максимизирующий) целевую функцию, считается *оптимальным*.

Линейное программирование широко применяется для решения таких производственных задач, как:

- планирование производства продукции
- оптимальная загрузка оборудования
- оптимальное распределение и использование ресурсов
- задача о назначениях ресурсов
- и др.

Задачи линейного программирования могут быть решены путем вычислений вручную или с помощью компьютера. В данном случае расчеты выполняются с использованием инструмента «*Решатель*» в программе *LibreOffice Calc*.

## ПРИМЕР

Бетоносмесительный узел может выпускать строительные смеси трех марок. Содержание (в долях единицы) компонентов в 1 м<sup>3</sup> смеси приведено в таблице Б.1.

Таблица Б.1 – Состав смесей

| Компонент | Марка смеси |      |       |
|-----------|-------------|------|-------|
|           | I           | II   | III   |
| Песок     | 0,5         | 0,5  | 0,75  |
| Известь   | –           | 0,25 | 0,125 |
| Цемент    | 0,5         | 0,25 | 0,125 |

Отпускная цена 1 м<sup>3</sup> раствора:

- I марки  $C_1 = 1200$  руб./м<sup>3</sup>;
- II марки  $C_2 = 1000$  руб./м<sup>3</sup>;
- III марки  $C_3 = 800$  руб./м<sup>3</sup>.

Ежемесячно бетоно-смесительному узлу поставляется:

- 400 м<sup>3</sup> песка;
- 80 м<sup>3</sup> извести;
- 90 м<sup>3</sup> цемента.

Минимальная месячная потребность в смеси каждой марки (на нужды предприятия) – 100 м<sup>3</sup>.

Определить месячный план выпуска смеси по маркам (м<sup>3</sup>), обеспечивающий наибольший суммарный доход от реализации продукции.

## РЕШЕНИЕ

Математическая постановка задачи.

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  искомые объемы выпуска смеси, соответственно, каждой из трех марок.

Тогда целевая функция математической модели задачи запишется в виде

$$L(x) = \sum_{i=1}^n x_i c_i \rightarrow \max$$

при ограничениях на:

- затраты ресурсов

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}$$

где  $a_{ij}$  – норма расхода  $j$ -го компонента на производство 1 м<sup>3</sup> смеси  $i$ -й марки ( $i = \overline{1, n}$ );  $b_j$  – месячные поставки  $j$ -го компонента для смесей.

- условия неотрицательности

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Подставив значения исходных данных в выражения целевой функции и ограничений можно сформулировать экономико-математическую модель задачи следующим образом.

Определить объемы  $x_i$  выпуска смесей каждой  $i$ -й марки, обращающие в максимум функцию

$$L(x) = 1200x_1 + 1000x_2 + 800x_3$$

при условиях (ограничениях)

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,75x_3 \leq 400 \\ \phantom{0,5x_1} + 0,25x_2 + 0,125x_3 \leq 80 \\ 0,5x_1 + 0,25x_2 + 0,125x_3 \leq 90 \\ \phantom{0,5x_1} \phantom{+ 0,25x_2} \phantom{+ 0,125x_3} x_1 \geq 100 \\ \phantom{0,5x_1} \phantom{+ 0,25x_2} \phantom{+ 0,125x_3} \phantom{x_1} x_2 \geq 100 \\ \phantom{0,5x_1} \phantom{+ 0,25x_2} \phantom{+ 0,125x_3} \phantom{x_1} \phantom{x_2} x_3 \geq 100 \end{cases}$$

### Результаты решения задачи

При оптимальном плане суммарная стоимость продукции бетоносмесительного узла 316 000 руб. При этом ежемесячный выпуск смесей составит: марки 1 – 100 м<sup>3</sup>, марки 2 – 100 м<sup>3</sup> и марки 3 – 120 м<sup>3</sup>.

Будет израсходовано:

- ✓ песка – 190 м<sup>3</sup>,
- ✓ извести – 40 м<sup>3</sup>,
- ✓ цемента – 90 м<sup>3</sup>.

Из чего следует, что ежемесячно будет оставаться песка – 210 м<sup>3</sup> (400 – 190); извести – 40 м<sup>3</sup>, а цемент является лимитирующим компонентом, ограничивающий производство смесей на узле.

Решение в *Excel* с использованием инструмента *Поиск решения* выглядит следующим образом, рисунок Б.1

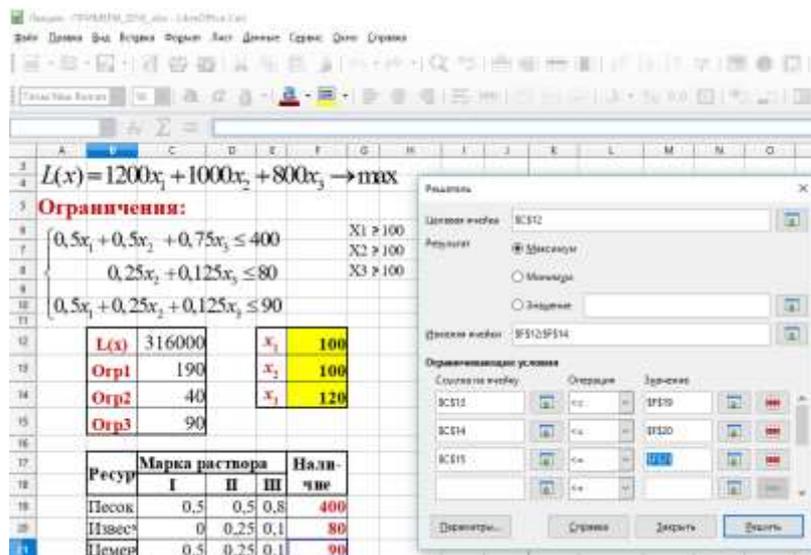


Рис. Б.1 – Решение в *Excel*

Решение двухиндексных задач линейного программирования может быть выполнено как для транспортной задачи (ТЗ) – одной из разновидности распределительных задач линейного программирования. В классическом виде ТЗ заключается в следующем.

Требуется составить план перевозок, при котором все запасы (строительных материалов или конструкций) поставщиков (заводы, карьеры) будут вывезены, спрос потребителей (объекты строительства, участки) полностью удовлетворен, и при этом суммарные транспортные издержки будут минимальными (стоимость перевозок, сроки, другие ресурсы).

Обозначим нужды  $j$ -го потребителя через  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ); запасы  $i$ -го поставщика –  $a_i$ ; ( $i = 1, 2, \dots, m$ ); количество груза (материалов), перевозимого из  $i$  в  $j$  –  $x_{ij}$ , стоимость перевозки единицы груза от  $i$ -го поставщика (пункта отправления, склада) к  $j$ -му потребителю (пункт получения) –  $c_{ij}$ .

Тогда математическая модель ТЗ может быть представлена так.

Требуется найти план перевозок  $x_{ij}$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

чтобы суммарные затраты на перевозку груза были минимальными

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} \rightarrow \min \quad (Г.4)$$

При ограничениях на:

- запасы груза у поставщиков (объем вывозимого груза не может превышать его наличия или запаса)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (Г.5)$$

- спрос потребителей, который должен быть полностью удовлетворен

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (Г.6)$$

- условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (Г.7)$$

Исходные данные ТЗ принято представлять в виде таблицы Б.2, в клетках которой указывается в левом верхнем углу – стоимость перевозок  $c_{ij}$  от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю (задано в условии задачи), а в правом нижнем – значения объемов поставок  $x_i$ , которые требуется найти.

«Вручную» решение ТЗ сводится к построению начального базисного плана с использованием любого из методов, например, северо-западного уг-

ла, минимальной стоимости, двойного предпочтения и др., и доведению его до оптимального, например, с помощью метода потенциалов.

Таблица Б.2 – Матрица исходных данных ТЗ

| Поставщик                | Потребитель          |                      |            |                      | Производственные возможности (запасы материалов) |
|--------------------------|----------------------|----------------------|------------|----------------------|--|
|                          | $N_1$                | $N_2$                | ...        | $N_n$                |  |
| $M_1$                    | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | $c_{12}$<br>$x_{12}$ | ...<br>... | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$  |
| $M_2$                    | $c_{21}$<br>$x_{21}$ | $c_{22}$<br>$x_{22}$ | ...<br>... | $c_{2n}$<br>$x_{2n}$ | $a_2$  |
| ...                      | ...<br>...           | ...<br>...           | ...<br>... | ...<br>...           | ...  |
| $M_m$                    | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $c_{m2}$<br>$x_{m2}$ | ...<br>... | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$  |
| Потребность в материалах | $b_1$                | $b_2$                | ...        | $b_n$                |  |

Первый индекс обозначает номер строки и, следовательно, номер поставщика. Второй индекс – номер колонки (потребителя).

### ПРИМЕР

На четырех различных по протяженности участках дороги производятся работы по устройству выравнивающего слоя основания из песчано-гравийной смеси. Имеются три песчано-гравийного карьера, мощности которых достаточны для покрытия общей потребности участков в материале и составляет соответственно 60, 120, 100 тыс. м<sup>3</sup> смеси. Потребность каждого участка в песчано-гравийной смеси равна соответственно 20, 110, 40, 110 тыс. м<sup>3</sup>. Карьеры и участки дороги связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки, и соответственно затраты (ден. ед.) на перевозку 1 тыс. м<sup>3</sup> смеси  $c_{ij}$  ( $i = \underline{1, 3}; j = \underline{1, 4}$ ), представленные в таблице Б.3.

Таблица Б.3 – Затраты на перевозки

| Карьеры | Участки |   |   |   |
|---------|---------|---|---|---|
|         | 1       | 2 | 3 | 4 |
| 1       | 1       | 2 | 5 | 3 |
| 2       | 1       | 6 | 5 | 2 |
| 3       | 6       | 3 | 7 | 4 |

Требуется закрепить карьеры по участкам дороги таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в смеси при минимальных общих затратах на перевозки.

## РЕШЕНИЕ

Математическая постановка задачи.

Обозначим нужды  $j$ -го участка через  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ); производственные мощности  $i$ -го карьера –  $a_i$ ; ( $i = 1, 2, 3$ ); искомые объемы и стоимость транспортирования смеси, перевозимой из  $i$ -го карьера на  $j$ -й участок, соответственно, через  $x_{ij}$  и  $c_{ij}$ .

Тогда математическая модель ТЗ может быть представлена так.

Найти план перевозок  $x_{ij}$  смеси между карьерами и строящимися участками, чтобы суммарные транспортные затраты были минимальными:

$$L(x) = x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23} + 2x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min$$

При ограничениях на:

- объем производства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 120 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \end{cases}$$

- объем потребления

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110 \end{cases}$$

- условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Исходные данные ТЗ сведены в таблицу Б.4.

Таблица Б.4 – Исходные данные

| Поставщики | Мощность поставщиков | Потребители и их спрос |               |               |               |
|------------|----------------------|------------------------|---------------|---------------|---------------|
|            |                      | 1                      | 2             | 3             | 4             |
|            |                      | 20                     | 110           | 40            | 110           |
| 1          | 60                   | 1<br>$x_{11}$          | 2<br>$x_{12}$ | 5<br>$x_{13}$ | 3<br>$x_{14}$ |
| 2          | 120                  | 1<br>$x_{21}$          | 6<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 2<br>$x_{24}$ |
| 3          | 100                  | 6<br>$x_{31}$          | 3<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 4<br>$x_{34}$ |

Решение этой задачи в *LibreOffice Calc* реализуется с помощью инструмента «*Решатель...*».

Для этих целей рекомендуется разделить таблицу Б.4 на две отдельные матрицы «Объем перевозок» ( $x_{ij}$ ) и «Стоимость перевозок» ( $c_{ij}$ ), разместив их рядом на рабочем листе *LibreOffice Calc*, как показано на рисунке Б.2.

После найденного решения интерпретировать результаты (дать производственную и экономическую оценку результата) по ограничениям задачи (спрос – предложения), сформированному плану поставок, схема прикрепления карьеров к строящимся участкам и т. п.

The screenshot displays the LibreOffice Calc interface with a spreadsheet and a Solver dialog box. The spreadsheet is organized as follows:

- Исходные данные (Initial data):**
  - Rows 4-5: Demand and supply data. Row 4: Потребитель (Consumer) with columns  $N_1, N_2, N_3, N_4$ . Row 5: Поставщик (Supplier) with columns 'Склад' (Warehouse) and 'Запасы на складе' (Inventory). Values:  $M_1=50, M_2=60, M_3=110$ .
  - Row 6: Cost matrix  $c_{ij}$  for routes between consumers and suppliers.
  - Row 7: Demand matrix  $N_{ij}$ .
  - Row 8: Supply matrix  $M_{ij}$ .
  - Row 10: Потребность в материалах (Material requirements) with values 80, 10, 30, 100.
  - Row 11: Target function  $L(x) = 850$ .
- Решение (Solution):**
  - Rows 6-8: Optimal flow matrix  $x_{ij}$  showing the distribution of goods.
  - Row 10: Доставлено потребителю (Delivered to consumer) with values 80, 10, 30, 100.
- Решатель (Solver) Dialog Box:**
  - Целевая ячейка (Target cell): \$F\$11
  - Результат (To What Of):  Минимум (Minimum)
  - Изменяемые ячейки (Changing Variable Cells): \$B\$10:\$B\$18
  - Ограничения (Constraints):
    - \$B\$10:\$D\$10 <= \$A\$10:\$D\$10
    - \$B\$16:\$B\$18 <= \$F\$16:\$F\$18
    - \$H\$16:\$K\$18 >= 0

Рисунок Б.2 – Форма постановки и решения транспортной задачи в *LibreOffice Calc*