МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
В. А. Гоголин
И. А. Ермакова
Е.А. Николаева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для магистрантов всех форм обучения

Рекомендованы учебно-методической комиссией направления подготовки 20.04.01 «Техносферная безопасность» в качестве электронного издания для использования в учебном процессе

Кемерово 2016

Рецензент

В. М. Волков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики

Гоголин Вячеслав Анатольевич
Ермакова Инна Алексеевна
Николаева Евгения Александровна

Математическое планирование эксперимента: методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для магистрантов направления подготовки 20.04.01 «Техносферная безопасность», образовательная программа «Безопасность технологических процессов и производств», всех форм обучения / сост.: В. А. Гоголин, И. А. Ермакова, Е. А. Николаева; КузГТУ. – Кемерово, 2017

Содержат тематику практических занятий и самостоятельной работы, а также вопросы к экзамену для магистрантов в соответствии с рабочей программой курса, изучаемого в 1 семестре.

ВВЕДЕНИЕ

Целями освоения дисциплины «Математическое планирование эксперимента» являются:

- показать необходимость и эффективность использования современных статистико-математических методов для моделирования и прогнозирования различных физико-технических процессов;
- ознакомить магистрантов с основными типами математических моделей и этапами математического моделирования;
- рассмотреть основные элементы статистического моделирования при построении моделей физико-технических процессов;
- привить умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по математическому моделированию;
- привить умение самостоятельно использовать методы математического моделирования при решении практических задач.

Практические занятия и самостоятельная работа предусматривают:

– углубленное изучение рекомендуемой основной и дополнительной литературы;

– подготовку к практическим занятиям;

– групповое и самостоятельное решение задач под контролем преподавателя и с его консультациями;

– изучение теории, составление конспектов и решение задач по самостоятельно изученным вопросам, предусмотренным рабочей программой дисциплины;

– подготовку к сдаче экзамена.

Методические указания содержат:

– задачи для практических занятий и самостоятельного решения;

– вопросы для подготовки к итоговой аттестации;

– список рекомендуемой основной и дополнительной литературы.

Вариант заданий самостоятельной работы выдается преподавателем после собеседования. Задания рекомендуется выполнять в EXCEL, выполненные задания должны содержать распечатки решения с объяснениями полученных результатов и выводами.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

РАЗДЕЛ 1: Элементы статистики при решении прикладных задач управления.

ТЕМА 1: Обработка выборки. Нахождение среднего значения, дисперсии и среднего квадратического отклонения для заданной выборки. Нахождение необходимого числа экспериментов. Проверка гипотезы о принадлежности «выброса» генеральной совокупности.

Задачи для решения

1. Для заданной выборки найти среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

X – себестоимость работ, *X* = 200, 300, 250, 500, 1000, 350 руб.

2. Для заданной выборки (50 значений) построить полигон и гистограмму относительных частот, предварительно сгруппировав ее. Найти точечные числовые характеристики.

№	*X*	№	*X*	№	*X*	№	*X*	№	*X*
1	0,32	11	0,19	21	0,16	31	0,15	41	0,15
2	0,16	12	0,16	22	0,33	32	0,18	42	0,19
3	0,27	13	0,14	23	0,23	33	0,21	43	0,31
4	0,25	14	0,27	24	0,35	34	0,26	44	0,22
5	0,29	15	0,18	25	0,20	35	0,27	45	0,23
6	0,17	16	0,24	26	0,17	36	0,22	46	0,36
7	0,18	17	0,12	27	0,25	37	0,23	47	0,31
8	0,22	18	0,24	28	0,20	38	0,16	48	0,21
9	0,29	19	0,21	29	0,18	39	0,18	49	0,16
10	0,25	20	0,23	30	0,17	40	0,17	50	0,28

3. Произведено несколько измерений некоторой величины. Требуется, чтобы среднее измеряемое значение $\bar{x}$ отличалось от генерального среднего не более, чем на величину Δ. Найти минимальное число экспериментов, чтобы это требование выполнялось с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

X = 6, 7, 5, 8, 5, 6, Δ = 2.

4. Непрерывная случайная величина *X* задана **функцией** распределения *F*(*x*). Найти:

а) **плотность** вероятности *f*(*x*);

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;

в) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (a; b), то есть $P(a < X < b)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{36},\ 0 < x \le 6, \\ 1,\ x > 6. \end{cases}$$ **1)** $a = 2$, $b = 5$; **2)** $a = 4$, $b = 12$; **3)** $a = -1$, $b = 3$.

5. Построить графики функции и плотности распределения вероятностей для нормального, показательного, равномерного распределений, если известны параметры генеральной совокупности.

а) для нормального распределения: $M(x) = 2$, $\sigma = 1$;

б) для равномерного распределения: $a = 1$, $b = 5$;

в) для показательного распределения: $\lambda = 2$.

Найти вероятности попадания величины в заданный интервал: $0 < X < 3$.

6. Подбор закона распределения исследуемой величины (вычисление теоретических частот и проверка гипотезы о виде распределения).

6.1а) При заданном уровне значимости проверить гипотезу H_0: величина имеет ***нормальное*** распределение при H_1: не имеет нормальное распределение, $\alpha = 0{,}05$.

интервал	[–1; 1)	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 11]
частота	5	7	11	9	8

Если гипотеза H_0 принята, то найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал: $0 < X < 5$.

6.1б) При заданном уровне значимости проверить гипотезу H_0: величина имеет *равномерное* распределение при H_1: не имеет равномерного распределения, $\alpha = 0{,}05$.

интервал	[–2; 2)	[2; 6)	[6; 10)	10; 14]
частота	11	8	12	9

Если гипотеза H_0 принята, то найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал: $3 < X < 7$.

6.1в) При заданном уровне значимости проверить гипотезу H_0: величина имеет ***показательное*** распределение при H_1: не имеет показательного распределения, $\alpha = 0{,}05$.

интервал	[0; 2)	[2; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 20]
частота	39	27	20	8	6

Если гипотеза H_0 принята, то найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал: $3 < X < 7$.

6.2) По виду гистограммы из задачи № 2 сделать предположение о виде распределения и проверить его.

7. Доверительный интервал. Доверительная вероятность. Интервальное оценивание среднего значения.

Построить доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью 0,95, предполагая, что *X* имеет нормальное распределение.

интервал	[–1; 1)	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 11]
частота	5	7	11	9	8

8. Проверка гипотез о равенстве дисперсий и средних значений двух нормально распределенных генеральных совокупностей.

Проверить гипотезы о равенстве дисперсий и средних значений совокупностей *X* и *У* на уровне значимости α = 0,05 по следующим данным:

Интервал *X*	[–1; 1)	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 11]
частота	5	7	11	9	8

Интервал *У*	[–2; 1)	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 13]
частота	6	8	12	8	6

9. Проверка гипотезы о принадлежности «выброса» генеральной совокупности.

Произведено несколько измерений величины, среди которых одно x_0 выделяется в большую (меньшую) сторону. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить H_0: x_0 принадлежит остальным наблюдениям; H_1: x_0 не принадлежит остальным наблюдениям.

$X = 8, 6, 5, 7, 8, 8, 13$; $x_0 = 13$.

ТЕМА 2: Модель линейной парной регрессии. Вычисление оценок для коэффициентов линейной парной регрессии на основе метода наименьших квадратов. Интервальные оценки для коэффициентов линейной парной регрессии. Проверка значимости полученных оценок и построенного уравнения регрессии. Модель парной нелинейной регрессии и линеаризующие преобразования.

Коэффициент детерминации и проверка его значимости. Ошибка аппроксимации.

Задачи для решения

10. Заданы пары значений *X* и *Y*. Построить диаграмму рассеивания, найти уравнение линейной парной регрессии, коэффициент корреляции, проверить его значимость. Найти интервальные оценки для коэффициентов линейной парной регрессии, проверить их значимость. Построить линию регрессии на диаграмме рассеивания. Провести анализ остатков и сделать вывод об адекватности модели.

X	–1	0	1	2	4
Y	5	3	–1	0	–2

11. Заданы пары значений *X* и *Y*. Построить диаграмму рассеивания, найти уравнение парной нелинейной регрессии $y = ax^2 + bx + c$, проверить его значимость.

X	–1	1	3	4	5
Y	3	–8	0	11	25

12. Заданы пары значений *X* и *Y*. Найти уравнения парной линейной регрессии вида: $y = a\ln x + b$, $y = ax^b$, $y = ab^x$. Выбрать наилучшую модель, для нее вычислить среднюю ошибку аппроксимации. Вычислить прогнозное значение у для заданного $x = 4$.

X	1	2	3	7	10
Y	1	3,5	4	5	5,3

ТЕМА 3: Модель линейной множественной регрессии. Вычисление оценок для коэффициентов линейной множественной регрессии на основе метода наименьших квадратов. Интервальные оценки для коэффициентов линейной множественной регрессии. Проверка значимости полученных оценок и построенного уравнения регрессии. Коэффициент детерминации. Мультиколлинеарность модели множественной регрессии: причины, признаки и способы устранения. Методы отбора значимых объясняющих переменных множественной регрессии. Фиктивные переменные в линейной множественной регрессии. Частная корреляция. Проверка значимости и адекватность построенных регрессионных моделей.

Задачи для решения

13. Найти уравнение множественной регрессии $y = a + b_1x_1 + b_2x_2$ и индекс детерминации. Найти интервальные оценки для коэффициентов линейной множественной регрессии. Проверить значимость коэффициентов и уравнения регрессии.

$X1$	$X2$	Y
1	3	5
2	4	3
0	1	5
2	0	0
1	3	5
0	2	7

14. Исследовать факторы $X1$, $X2$, $X3$ на мультиколлениарность и исключить ее, найти наилучшее уравнение множественной регрессии, найти стандартизованные коэффициенты регрессии, выбрать наиболее значимый фактор.

$X1$	$X2$	$X3$	Y
0	1	3	6
–1	2	4	6
–3	0	1	0
4	2	5	20
5	3	6	25
1	3	7	22

ТЕМА 4. Мультиколлинеарность модели множественной регрессии: причины, признаки и способы устранения. Методы отбора значимых объясняющих переменных множественной регрессии. Фиктивные переменные в линейной множественной регрессии. Частная корреляция. Проверка значимости и адекватность построенных регрессионных моделей.

Задачи для решения

15. Исследовать факторы $X1$, $X2$, $X3$ на мультиколлениарность и исключить ее, найти наилучшее уравнение множественной регрессии, найти стандартизованные коэффициенты регрессии, выбрать наиболее значимый фактор.

$X1$	$X2$	$X3$	Y
0	1	3	6
–1	2	4	6
–3	0	1	0

*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
4	2	5	20
5	3	6	25
1	3	7	22

ТЕМА 5. Временные ряды и их числовые характеристики. Временные ряды и их числовые характеристики. Стационарные временные ряды. Выделение трендовой составляющей временного ряда. Выделение периодических составляющих временного ряда. Построение авторегрессионных моделей временного ряда. Построение моделей для случайной составляющей временного ряда.

Задачи для решения

16. Построить график временного ряда, сгладить ряд методом скользящих средних, построить график сглаженного ряда, проверить гипотезу о наличии линейного тренда, найти уравнение тренда, сделать прогноз на 4 шага вперед.

Дата	Курс доллара	Дата	Курс доллара
01.09.09	31,84	15.09.09	30,86
02.09.09	31,77	16.09.09	30,99
03.09.09	31,97	17.09.09	30,61
04.09.09	31,77	18.09.09	30,39
05.09.09	31,61	19.09.09	30,37
08.09.09	31,43	22.09.09	30,37
09.09.09	31,38	23.09.09	30,24
10.09.09	31,15	24.09.09	30,00
11.09.09	30,89	25.09.09	30,07
12.09.09	30,72	26.09.09	30,14

17. Построить график временного ряда, провести моделирование сезонных колебаний для аддитивной и мультипликативной моделей.

год	квартал	t	Ut
1	1	1	6
	2	2	4,4
	3	3	5
	4	4	9
2	1	5	7,2
	2	6	4,8
	3	7	6
	4	8	10

год	квартал	t	Ut
3	1	9	8
	2	10	5,6
	3	11	6,4
	4	12	11

18. Проводится исследование влияния некоторого компонента (фактора) на качество продукта (объекта). В ходе испытаний количество компонента имеет m различных значений (уровней): Ф1, Ф2, …, Фm. Для каждого уровня проводится n измерений. Данные исследования занесены в таблицу.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании n измерений для m уровней фактора.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Для заданной выборки найти среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант	Задание
1	X – число покупателей в день: X = 230, 320, 250, 540, 820, 350, 740 чел.
2	X – число работников в фирме: X = 28, 45, 25, 38, 29, 15, 18 чел.
3	X – зарплата работников в фирме: X = 12, 15, 22, 18, 14, 28, 35, 48 тыс. руб.
4	X – расход эл/энергии: X = 300, 285, 220, 340 КВт
5	X – производительность: X = 200, 185, 220, 280, 250, 230 тыс. т
6	X – производительность: X = 10, 18, 22, 12, 15, 12 деталей в день
7	X – затраты в день: X = 350, 385, 520, 1000, 480, 650 руб.
8	X – число пассажиров: X = 120,140, 90, 70, 100, 50 чел.
9	X – доход: X= 25, 35, 40, 38, 48, 30 тыс. руб.
10	X – число детей в семье: X = 2, 3, 4, 1, 2, 1, 1

2. Для заданной выборки (50 значений) построить полигон и гистограмму относительных частот, предварительно сгруппировав ее. Найти точечные числовые характеристики.

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
N	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*
1	**9**	**21**	**45**	**25**	**56**	**42**	**63**	**2,5**	**36**	**48**
2	**97**	**32**	**46**	**32**	**76**	**67**	**84**	**3,6**	**44**	**66**
3	**63**	**8**	**41**	**14**	**40**	**21**	**60**	**4,6**	**24**	**40**
4	**82**	**28**	**38**	**19**	**60**	**34**	**70**	**2,8**	**35**	**52**
5	**85**	**32**	**47**	**40**	**74**	**50**	**88**	**2,6**	**48**	**72**
6	**45**	**5**	**36**	**2**	**11**	**22**	**36**	**3,7**	**12**	**18**
7	**92**	**35**	**48**	**30**	**56**	**47**	**72**	**5,9**	**39**	**58**
8	**100**	**27**	**51**	**27**	**68**	**45**	**75**	**2,2**	**34**	**47**
9	**97**	**29**	**47**	**29**	**72**	**53**	**78**	**1,8**	**40**	**62**
10	**99**	**37**	**57**	**28**	**104**	**61**	**88**	**2,7**	**48**	**75**
11	**125**	**40**	**56**	**46**	**110**	**64**	**90**	**2,2**	**52**	**78**
12	**68**	**12**	**39**	**8**	**15**	**25**	**97**	**1,5**	**15**	**19**
13	**117**	**24**	**50**	**30**	**84**	**59**	**93**	**3**	**47**	**64**
14	**74,7**	**11**	**46**	**12**	**45**	**38**	**60**	**3,6**	**24**	**40**
15	**105**	**24**	**51**	**38**	**68**	**50**	**78**	**5,3**	**38**	**50**
16	**110**	**45**	**48**	**42**	**72**	**48**	**80**	**4,7**	**40**	**60**
17	**108**	**39**	**52**	**36**	**86**	**54**	**92**	**2,9**	**49**	**68**
18	**135**	**52**	**64**	**54**	**120**	**75**	**125**	**4,5**	**68**	**100**
19	**86**	**13**	**48**	**22**	**56**	**43**	**69**	**2,9**	**28**	**52**
20	**105**	**43**	**53**	**39**	**108**	**59**	**93**	**3,3**	**51**	**73**
21	**112**	**27**	**49**	**28**	**64**	**50**	**74**	**2,4**	**35**	**57**
22	**107**	**31**	**58**	**24**	**68**	**48**	**70**	**2,2**	**38**	**60**
23	**118**	**36**	**50**	**43**	**105**	**60**	**95**	**5,7**	**49**	**72**
24	**93**	**37**	**53**	**50**	**108**	**69**	**110**	**5**	**60**	**88**
25	**72**	**39**	**44**	**26**	**59**	**41**	**72**	**2,5**	**32**	**48**
26	**104**	**33**	**49**	**36**	**83**	**59**	**83**	**3,7**	**46**	**62**
27	**130**	**49**	**60**	**52**	**106**	**76**	**115**	**3,7**	**67**	**90**
28	**112**	**38**	**42**	**31**	**52**	**48**	**86**	**1,5**	**36**	**56**
29	**53**	**18**	**41**	**15**	**35**	**34**	**60**	**2,6**	**28**	**40**
30	**103**	**25**	**52**	**34**	**70**	**48**	**80**	**3,8**	**41**	**58**
31	**102**	**23**	**62**	**30**	**75**	**59**	**90**	**6**	**46**	**70**
32	**106**	**38**	**55**	**28**	**68**	**60**	**78**	**2,8**	**40**	**60**
33	**124**	**58**	**61**	**43**	**80**	**66**	**108**	**1,6**	**58**	**87**
34	**78**	**15**	**38**	**12**	**40**	**32**	**52**	**0,5**	**22**	**35**
35	**77**	**23**	**43**	**23**	**67**	**48**	**76**	**1,9**	**39**	**56**

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
36	**91**	**16**	**47**	**22**	**52**	**36**	**68**	**2,2**	**28**	**45**
37	**88**	**31**	**46**	**33**	**60**	**42**	**70**	**0,5**	**34**	**50**
38	**116**	**24**	**57**	**44**	**73**	**52**	**85**	**4,3**	**42**	**62**
39	**99**	**32**	**58**	**26**	**75**	**60**	**90**	**2,5**	**48**	**65**
40	**108**	**25**	**54**	**38**	**80**	**58**	**92**	**5,8**	**46**	**72**
41	**148**	**60**	**64**	**60**	**130**	**80**	**120**	**3,4**	**62**	**100**
42	**93**	**38**	**54**	**38**	**84**	**57**	**96**	**3,9**	**51**	**74**
43	**132**	**28**	**47**	**35**	**80**	**51**	**90**	**2,7**	**50**	**68**
44	**128**	**44**	**57**	**49**	**95**	**68**	**100**	**1,8**	**57**	**80**
45	**137**	**39**	**59**	**45**	**100**	**72**	**108**	**1,4**	**62**	**85**
46	**114**	**19**	**58**	**38**	**74**	**55**	**84**	**4,8**	**42**	**64**
47	**79**	**30**	**55**	**26**	**48**	**58**	**92**	**3,7**	**48**	**72**
48	**84**	**46**	**49**	**26**	**50**	**38**	**65**	**4**	**30**	**52**
49	**95**	**22**	**44**	**18**	**52**	**40**	**60**	**3,6**	**27**	**47**
50	**91**	**47**	**53**	**34**	**81**	**55**	**95**	**3,8**	**45**	**71**

3. Произведено несколько измерений некоторой величины. Требуется, чтобы среднее измеряемое значение $\bar{x}$ отличалось от генерального среднего не более, чем на величину Δ. Найти минимальное число экспериментов, чтобы это требование выполнялось с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Вариант	Задание
1	X = 10, 11, 13, 9, 10, 14, Δ = 2
2	X = 21, 23, 25, 18, 20, 22, 17, Δ = 3
3	X = 32, 30, 35, 33, 36, 32, Δ = 4
4	X = 41, 45, 43, 46, 49, 44, 48, Δ = 3
5	X = 52, 57, 54, 51, 58, Δ = 4
6	X = 61, 62, 66, 68, 69, Δ = 5
7	X = 70, 77, 75, 74, 78, Δ = 3
8	X = 82, 80, 85, 86, Δ = 4
9	X = 93, 95, 94, 96, 95, Δ = 2
10	X = 100, 105, 110, 106, 113, 104, 105, Δ = 6

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

а) **плотность** вероятности $f(x)$;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;

в) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (a; b), то есть $P(a < X < b)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Вариант	Задание
1	$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ x^2, \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$ $a = 0{,}5;\quad b = 2.$
2	$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, \ 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$ $a = 1;\quad b = 5.$
3	$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{100}, \ 0 < x \le 10, \\ 1, x > 10. \end{cases}$ $a = 5;\quad b = 11.$

Вариант	Задание
4	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{4},\ 2<x\le 6,\\ 1, x>6.\end{cases}$ $a=4;\quad b=7.$
5	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81},\ 0<x\le 9,\\ 1,\ x>9.\end{cases}$ $a=3;\quad b=10.$
6	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1,\\ \dfrac{3x+3}{4},\ -1<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1,\ x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ $a=0;\quad b=1.$
7	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49},\ 0<x\le 7,\\ 1,\ x>7.\end{cases}$ $a=1;\quad b=8.$
8	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2},\ -2<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$ $a=0;\quad b=3.$
9	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{64},\ 0<x\le 8,\\ 1, x>8.\end{cases}$ $a=4;\quad b=9.$
10	$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \sin x,\ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $a=\dfrac{\pi}{4};\quad b=\pi.$

5. Построить графики функции и плотности распределения вероятностей для нормального, показательного, равномерного распределений, если известны параметры генеральной совокупности.

а) для нормального распределения;

б) для равномерного распределения;

в) для показательного распределения.

Найти вероятности попадания величины в заданный интервал.

Вариант	а)	б)	в)	интервал
1	$M(x) = 2{,}5,\ \sigma = 0{,}8$	$a = 2,\ b = 8$	$\lambda = 2$	$0 < X < 3$
2	$M(x) = 1{,}5,\ \sigma = 2$	$a = 0,\ b = 3$	$\lambda = 1$	$1 < X < 4$
3	$M(x) = 3,\ \sigma = 1$	$a = 2,\ b = 6$	$\lambda = 0{,}5$	$0 < X < 4$
4	$M(x) = 2,\ \sigma = 0{,}5$	$a = -1,\ b = 6$	$\lambda = 2{,}2$	$-1 < X < 3$
5	$M(x) = 0{,}8,\ \sigma = 1{,}2$	$a = 1,\ b = 7$	$\lambda = 1{,}2$	$0 < X < 5$
6	$M(x) = 0,\ \sigma = 1{,}5$	$a = -1,\ b = 5$	$\lambda = 3$	$-2 < X < 1$
7	$M(x) = 2,\ \sigma = 1{,}4$	$a = 0,\ b = 8$	$\lambda = 1{,}5$	$0 < X < 3{,}5$
8	$M(x) = 1{,}8,\ \sigma = 1{,}6$	$a = -2,\ b = 2$	$\lambda = 1{,}25$	$1 < X < 3$
9	$M(x) = 2{,}5,\ \sigma = 1$	$a = 1,\ b = 3$	$\lambda = 1{,}8$	$0 < X < 2$
10	$M(x) = 0{,}8,\ \sigma = 0{,}3$	$a = -1,\ b = 4$	$\lambda = 0{,}8$	$-1 < X < 3$

6. Подбор закона распределения исследуемой величины (вычисление теоретических частот и проверка гипотезы о виде распределения).

6.1) При заданном уровне значимости проверить гипотезу H_0: величина имеет указанное распределение: распределение при H_1: не имеет указанного распределения, α=0,05. Если гипотеза H_0 принята, то найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[a; b]$.

а) нормальное

Вариант	Задание						
1	$[x_к;\ x_{к+!})$	[0; 4)	[4;8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24]
	m_k	7	12	19	24	14	6
2	$[x_к;\ x_{к+!})$	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15]	[15; 18]
	m_k	6	11	17	14	9	3
3	$[x_к;\ x_{к+!})$	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 13)	[13; 16]	
	m_k	5	11	18	12	6	

Вариант	Задание						
4	$[x_к; x_{к+!})$	[–2; 2)	[2; 6)	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18]	
	m_k	7	12	20	13	8	
5	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]	
	m_k	6	10	18	12	6	
6	$[x_к; x_{к+!})$	[–1; 3)	[3; 7)	[7; 11)	[11; 15)	[15; 19)	[19; 25]
	m_k	5	9	19	15	8	5
7	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6]
	m_k	6	10	18	14	8	7
8	$[x_к; x_{к+!})$	[–2; 0)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8]	
	m_k	7	11	18	13	6	
9	$[x_к; x_{к+!})$	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 13)	[13; 16)	[16; 19]
	m_k	7	12	19	14	9	5
10	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30]	
	m_k	5	10	16	9	8	

б) равномерное

Вариант	Задание						
1	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24]
	m_k	10	12	16	14	8	11
2	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
	m_k	7	9	10	6	8	11
3	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]	
	m_k	6	9	8	10	11	
4	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5]	
	m_k	17	12	19	14	18	
5	$[x_к; x_{к+!})$	[–2; 4)	[4; 10)	[10; 16)	[16; 22)	[22; 28]	
	m_k	13	12	16	14	8	
6	$[x_к; x_{к+!})$	[–4; 0)	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20]
	m_k	8	12	15	11	8	11
7	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15]	
	m_k	15	12	19	14	18	
8	$[x_к; x_{к+!})$	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 13)	[13; 16)	[16; 19]
	m_k	7	12	9	11	8	10
9	$[x_к; x_{к+!})$	–1; 2)	[2; 5)	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17]
	m_k	9	13	15	14	10	9
10	$[x_к; x_{к+!})$	[–3; 1)	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17]	
	m_k	8	14	9	14	8	

в) показательное

Вариант	Задание						
1	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 34]
	m_k	17	11	8	7	6	5
2	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 20]
	m_k	19	12	15	10	8	6
3	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15]	
	m_k	21	17	13	7	5	
4	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20]	
	m_k	19	12	10	7	6	
5	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]	
	m_k	20	15	10	17	5	
6	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24]
	m_k	22	14	10	8	6	5
7	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5]	
	m_k	16	12	10	7	5	
8	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
	m_k	23	17	11	10	8	5
9	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15]	
	m_k	19	15	10	7	5	
10	$[x_к; x_{к+!})$	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24]
	m_k	27	22	19	14	8	6

6.2) По виду гистограммы из задачи № 2 сделать предположение о виде распределения и проверить его.

7. Построить доверительный интервал для оценки математического ожидания с надежностью 0,95, предполагая, что X имеет нормальное распределение (использовать данные задачи 6.1, а).

8. Для заданных выборок X и Y найти выборочные средние и дисперсии.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезы:

а) о равенстве дисперсий H_0: $D(x) = D(y)$ при H_1: $D(x) \neq D(y)$;

б) математических ожиданий H_0: $M(x) = M(y)$ при H_1: $M(x) \neq M(y)$.

Вариант	Задание	
8.1.	$X = 4, 5, 7, 4, 5$	$\begin{array}{cccccc} Y_i & 1 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ m_i & 4 & 5 & 10 & 9 & 2 \end{array}$
8.2.	$\begin{array}{ccccc} X_i & 0 & 5 & 6 & 10 \\ m_i & 4 & 13 & 12 & 5 \end{array}$	$Y = 6, 4, 5, 8, 5, 8$
8.3.	$X = 1, 2, 4, 2, 5$	$\begin{array}{cccccc} Y_i\,\mathrm{i} & -2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ m_i & 4 & 5 & 10 & 20 & 10 \end{array}$
8.4.	$\begin{array}{cccccc} X_i & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ m_i & 6 & 9 & 14 & 13 & 8 \end{array}$	$Y = 3, 4, 6, 4, 7$
8.5.	$X = 5, 4, 5, 4, 7, 5$	$\begin{array}{cccccc} Y_i\,\mathrm{i} & 1 & 2 & 5 & 6 & 10 \\ m_i & 8 & 14 & 20 & 10 & 8 \end{array}$
8.6.	$\begin{array}{cccccc} X_i & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ m_i & 6 & 8 & 17 & 13 & 6 \end{array}$	$Y = 4, 6, 5, 8, 12$
8.7.	$X = -5, -3, 1, 3, 5, 2$	$\begin{array}{cccccc} Y_i\,\mathrm{i} & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ m_i & 4 & 5 & 14 & 16 & 11 \end{array}$
8.8.	$\begin{array}{ccccccc} X_i & -5 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ m_i & 4 & 10 & 15 & 10 & 5 & 6 \end{array}$	$Y = -3, 0, 2, 4, 3, 1, -1$
8.9.	$X= 2, 0, 7, 8, 3$	$\begin{array}{ccccccc} Y_i & 0 & 1 & 4 & 6 & 7 & 10 \\ m_i & 5 & 11 & 15 & 9 & 5 & 5 \end{array}$
8.10.	$\begin{array}{cccccc} X_i & 0 & 4 & 8 & 12 & 14 \\ m_i & 5 & 12 & 17 & 9 & 7 \end{array}$	$Y = 5, 13, 7, 2, 8, 10$

9. Произведено несколько измерений величины, среди которых одно x_0 выделяется в большую (меньшую) сторону. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить H_0: x_0 принадлежит остальным наблюдениям; H_1: x_0 не принадлежит остальным наблюдениям.

Вариант	Задание
1	$X = 5, 6, 8, 5, 7, 11$; $x_0 = 11$
2	$X = 6, 4, 4, 8, 8, 12$; $x_0 = 12$
3	$X = 9, 8, 10 ,6, 8, 10$; $x_0 = 6$
4	$X = 12, 8, 10, 8, 15, 12$; $x_0 = 15$
5	$X = 8, 10, 12, 16, 10, 12, 8$; $x_0 = 16$
6	$X = 8, 6, 5, 7, 8, 8, 15$; $x_0 = 15$
7	X= 8, 10, 12, 4, 10, 12, 8 ; x_0=4

Вариант	Задание
8	$X = 12, 14, 10, 14, 6, 10$; $x_0 = 6$
9	$X = 12, 14, 10, 10, 5, 12, 14$; $x_0 = 5$
10	$X = 14, 16, 10, 20, 14, 11$; $x_0 = 20$

10. Заданы пары значений X и Y. Построить диаграмму рассеивания, найти уравнение линейной парной регрессии, коэффициент корреляции, проверить его значимость. Найти интервальные оценки для коэффициентов линейной парной регрессии, проверить их значимость. Построить линию регрессии на диаграмме рассеивания.

Вариант	Задание							
1	X	1	2	4	5	7		
	Y	0	2	2	6	8		
2	X	–2	–1	1	2	3	4	
	Y	7	5	3	2	0	–1	
3	X	–2	0	1	2			
	Y	2	4	6	5			
4	X	0	1	2	3	4	5	6
	Y	6	5	3	–1	0	0	–2
5	X	1	2	3	6	8		
	Y	5	3	1	0	–2		
6	X	–3	–2	–1	2			
	Y	2	1	6	4			
7	X	0	2	3	4	5	8	
	Y	7	5	2	–1	0	–3	
8	X	0	1	3	5	6		
	Y	0	1	2	6	8		
9	X	–1	2	3	4	6		
	Y	6	3	0	0	–3		
10	X	–1	0	1	3	5	6	8
	Y	–2	1	0	2	6	8	12

11. Заданы пары значений X и Y. Построить диаграмму рассеивания, найти уравнение парной нелинейной регрессии $y = ax^2 + bx + c$, проверить его значимость.

Вариант	Задание							
1	X	–5	–4	–1	0	5	10	
	Y	–100	–50	0	20	10	–85	
2	X	–12	–5	–1	0	1	3	5
	Y	9	–50	–25	–15	0	20	60
3	X	–10	–3	3	4	5		
	Y	–100	30	–10	–40	–80		
4	X	–2	–1	0	3	5	10	
	Y	–25	0	15	40	25	–65	
5	X	–3	–2	–1	0	2	4	
	Y	–50	–20	0	10	20	–20	
6	X	–3	–2	–1	0	1	3	5
	Y	80	55	30	15	0	30	100
7	X	–9	–5	0	2	4		
	Y	65	–5	5	40	100		
8	X	–4	–2	0	4	5	8	
	Y	–100	–25	15	20	10	–80	
9	X	–3	–2	–1	0	1	4	6
	Y	70	20	–10	–30	–40	–30	30
10	X	–9	–5	–2	2	3		
	Y	40	–35	–40	10	30		

12. Заданы пары значений X и Y. Найти уравнения парной линейной регрессии вида: $y = a\ln x + b$, $y = ax^{b}$, $y = ab^{x}$. Выбрать наилучшую модель, для нее вычислить среднюю ошибку аппроксимации. Вычислить прогнозное значение у для заданного X.

Вариант	Задание							
1	X	1	1	2	3	4	8	
	Y	10	7	2	3	1	1	$X = 5$
2	X	0,1	1	0,5	0,6	1,5		$X = 1,2$
	Y	0,3	2	0,5	0,5	7		
3	X	0,5	1	2	5	10		
	Y	8	2,5	2	1	0,5		$X = 7$
4	X	1	2	2,5	5	6	10	
	Y	1	3	5	6	7	8	$X = 4$
5	X	1	2	3	4	8	10	
	Y	3	4	8	12	20	100	$X = 9$
6	X	0,3	0,5	1	3	5		

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>Y</td><td>10</td><td>15</td><td>21</td><td>22</td><td>25</td></tr></table>$X = 2$</td></tr>
<tr><td>7</td><td><table><tr><td>X</td><td>0,1</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>14</td></tr><tr><td>Y</td><td>2</td><td>2,5</td><td>8</td><td>10</td><td>20</td></tr></table>$X = 6$</td></tr>
<tr><td>8</td><td><table><tr><td>X</td><td>0,5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Y</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>20</td></tr></table>$X = 1{,}5$</td></tr>
<tr><td>9</td><td><table><tr><td>X</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>9,5</td></tr><tr><td>Y</td><td>5</td><td>5</td><td>4,5</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>$X = 5$</td></tr>
<tr><td>10</td><td><table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>16</td></tr><tr><td>Y</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr></table>$X = 10$</td></tr>
</table>

13. Найти уравнение множественной регрессии $y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$ и индекс детерминации. Найти интервальные оценки для коэффициентов линейной множественной регрессии. Проверить значимость коэффициентов и уравнения регрессии.

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table><tr><th>X1</th><th>X2</th><th>Y</th></tr><tr><td>1</td><td>–2</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>12</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>8</td></tr></table></td><td>2</td><td><table><tr><th>X1</th><th>X2</th><th>Y</th></tr><tr><td>–3</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>–2</td><td>–1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>12</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>18</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3</td><td><table><tr><th>X1</th><th>X2</th><th>Y</th></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr></table></td><td>4</td><td><table><tr><th>X1</th><th>X2</th><th>Y</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>8</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>5</td><td><table><tr><th>X1</th><th>X2</th><th>Y</th></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>–1</td><td>8</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>15</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>10</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr></table></td><td>6</td><td><table><tr><th>X1</th><th>X2</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>10</td></tr><tr><td>–1</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

Вариант	Задание			Вариант	Задание		
					2	1	7
7	*X*1	*X*2	*Y*	8	*X*1	*X*2	*Y*
	1	–3	10		3	1	0
	2	0	3		2	0	0
	2	2	4		1	1	4
	0	3	0		0	0	6
	1	0	6		1	3	8
	1	2	3		1	2	5
	2	1	7				
9	*X*1	*X*2	*Y*	10	*X*1	*X*2	*Y*
	0	1	3		–5	1	0
	2	1	7		–3	0	4
	0	3	5		0	–1	9
	1	0	4		1	2	16
	1	3	8		2	1	15
	0	2	4				

14. Исследовать факторы *X*1, *X*2, *X*3 на мультиколлениарность и исключить ее, найти наилучшее уравнение множественной регрессии, найти стандартизованные коэффициенты регрессии, выбрать наиболее значимый фактор.

Вариант	Задание			
1	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	0	1	3	10
	–1	2	4	15
	–3	0	1	0
	4	2	5	25
	5	3	6	35
	1	3	7	30
	6	1	3	15
2	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	2	0	3	10
	1	2	2	5
	0	1	1	0
	4	2	8	35
	5	3	9	40
	1	3	3	5

Вариант	Задание			
3	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	0	1	1	5
	1	2	3	15
	2	0	3	10
	4	2	8	30
	5	3	10	45
	1	3	2	10
	6	1	10	45
	3	5	6	30
4	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	0	2	5	15
	4	1	3	0
	3	0	1	–10
	4	2	8	20
	5	3	10	25
	1	3	8	30
	6	1	4	0
5	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	3	2	3	20
	2	1	2	5
	1	1	1	0
	0	2	4	10
	5	3	7	50
	1	3	5	15
6	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	0	0	1	0
	1	2	3	15
	2	0	3	10
	4	2	8	30
	5	3	10	45
	1	3	2	10
	4	1	10	45
	3	5	6	30
7	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	5	1	9	15
	6	5	10	30
	3	2	5	25
	4	0	7	20

Вариант	Задание			
	8	3	15	10
	10	1	20	0
	6	4	13	15
8	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	4	8	1	5
	3	5	2	15
	2	3	1	10
	5	8	4	20
	5	10	2	4
	1	1	5	40
9	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	5	9	4	38
	1	5	2	20
	6	2	1	20
	4	0	1	10
	1	3	2	10
	5	6	4	40
	6	4	1	20
10	*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
	2	1	6	0
	5	2	3	15
	2	0	3	10
	4	2	5	5
	5	3	5	5
	1	0	2	10
	4	2	1	25
	3	1	6	1

15. Проводится исследование влияния некоторого компонента (фактора) на качество продукта (объекта). В ходе испытаний количество компонента имеет m различных значений (уровней): Ф1, Ф2, …, Фm. Для каждого уровня проводится n измерений. Данные исследования занесены в таблицу.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании n измерений для m уровней фактора.

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="3">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>16</td><td>20</td><td>30</td></tr>
<tr><td>2</td><td>18</td><td>20</td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td>20</td><td>25</td><td>26</td></tr>
<tr><td>4</td><td>14</td><td>40</td><td>30</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>16</td><td>40</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="4">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td><td>Ф4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="4">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td><td>Ф4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>100</td><td>70</td><td>60</td><td>40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>120</td><td>90</td><td>50</td><td>40</td></tr>
<tr><td>3</td><td>110</td><td>60</td><td>50</td><td>30</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="3">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>20</td><td>40</td><td>50</td></tr>
<tr><td>2</td><td>25</td><td>45</td><td>60</td></tr>
<tr><td>3</td><td>18</td><td>35</td><td>55</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>5</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="3">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>30</td><td>25</td><td>15</td></tr>
<tr><td>2</td><td>35</td><td>20</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>50</td><td>20</td><td>14</td></tr>
<tr><td>4</td><td>40</td><td>30</td><td>16</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>6</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="4">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td><td>Ф4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>40</td><td>45</td><td>50</td><td>45</td></tr>
<tr><td>2</td><td>42</td><td>40</td><td>45</td><td>40</td></tr>
<tr><td>3</td><td>35</td><td>30</td><td>35</td><td>40</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>7</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="3">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>14</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>8</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="4">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td><td>Ф4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>80</td><td>60</td><td>40</td><td>20</td></tr>
<tr><td>2</td><td>75</td><td>55</td><td>35</td><td>15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>70</td><td>58</td><td>38</td><td>17</td></tr>
<tr><td>4</td><td>76</td><td>62</td><td>41</td><td>23</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>9</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="3">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>54</td><td>40</td><td>35</td></tr>
<tr><td>2</td><td>50</td><td>45</td><td>30</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td><td>46</td><td>42</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>10</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="5">Уровни фактора</td></tr>
<tr><td>Номер измерения</td><td>Ф1</td><td>Ф2</td><td>Ф3</td><td>Ф4</td><td>Ф5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>52</td><td>40</td><td>38</td><td>36</td><td>35</td></tr>
<tr><td>2</td><td>48</td><td>45</td><td>30</td><td>32</td><td>28</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td><td>46</td><td>42</td><td>35</td><td>30</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

ВОПРОСЫ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Понятие генеральной совокупности и выборки. Требования к выборке. Способы задания статистических данных. Графическое представление выборки: полигон и гистограмма.

2. Числовые характеристики выборки. Свойства точечной оценки: несмещенность, эффективность, состоятельность. Несмещенная дисперсия. Мода, медиана.

3. Нахождение минимального объема выборки.

4. Основные виды распределения непрерывной и дискретной случайной величины: равномерное, нормальное, показательное, биномиальное. Функция, плотность, ряд распределения.

5. Вычисление теоретических частот равномерного, нормального, показательного распределения.

6. Проверка статистических гипотез. Постановка задачи. Критическая область. Уровень значимости. Ошибки первого и второго рода.

7. Проверка гипотезы о виде распределения исследуемой величины.

8. Доверительный интервал. Доверительная вероятность. Интервальное оценивание среднего значения нормальной совокупности.

9. Проверка гипотез о равенстве дисперсий и средних значений двух нормальных генеральных совокупностей.

10. Проверка гипотезы о принадлежности наблюдения к остальным наблюдениям.

11. Сущность метода наименьших квадратов. Модель линейной парной регрессии: вычисление коэффициентов регрессии, проверка значимости коэффициентов и уравнения регрессии.

12. Анализ остатков – проверка адекватности модели парной линейной регрессии. Ошибка аппроксимации.

13. Парная нелинейная регрессия $y = ax^2 + bx + c$, проверка значимости уравнения.

14. Модели парной линейной регрессии вида: $y = a\ln x + b$, $y = ax^b$, $y = ab^x$, проверка значимости уравнений, выбор наилучшего уравнения.

15. Построение модели множественной регрессии $y = a + b_1x_1 + b_2x_2$ и проверка значимости уравнения. Интервальные оценки для коэффициентов линейной множественной регрессии, проверка их значимости.

16. Мультиколлениарность факторов, ее последствия и устранение. Частная корреляция.

17. Стандартизованные коэффициенты множественной регрессии.

18. Фиктивные переменные в уравнении множественной регрессии.

19. Дисперсионный анализ, сущность и задачи. Общая, факторная и остаточная дисперсии.

20. Решение прикладных задач математики.

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пучков, Н. П. Математическая статистика. Применение в профессиональной деятельности: учеб. пособие. – Тамбов: изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 81 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=277931

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. – Москва: Юрайт, 2013. – 479 с.

3. Статистический анализ данных в MC Excel: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Статистика» и другим экономическим специальностям / А. Ю. Козлов, В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов. – Москва: ИНФРА-М, 2014. – 320 с.

4. Туганбаев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. – Санкт Петербург.: Лань, 2011. – 320 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=652

5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для бакалавров: [для студентов вузов] / В. Е. Гмурман. – Москва: Юрайт, 2013. – 404 с.

6. Эконометрика: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 061700 «Статистика» / под ред. И. И. Елисеевой. – Москва: Финансы и статистика, 2008. – 576 с.

7. Методы эконометрики и многомерного статистического анализа: учебник для студентов вузов, обучающихся по экон. специальностям и направлениям / Н. П. Тихомиров, Т. М. Тихомирова, О. С. Ушмаев. – Москва: Экономика, 2011. – 647 с.

8. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере: учеб. пособие по направлениям «Математика», «Математика. Прикладная математика» / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров. – Москва: Форум, 2012. – 368 с.

9. Горелик, А. Л. Методы распознавания: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Автоматизир. системы обработки информации и управления» / А. Л. Горелик, В. А. Скрипкин. – Москва: Высшая школа, 2004. – 261 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\boldsymbol{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

X	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0758	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	057	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,28	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956

X	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4916	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499969
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Примечание к таблице:

1) Функция ***Ф(x)*** нечётная, то есть ***Ф(– x) = – Ф(x)***;

2) ***Ф(x)*** = 0,5 при $x > 5$.

Приложение 2

Критические точки распределения Стьюдента при $\alpha = 0{,}05$
(двухсторонняя критическая область)

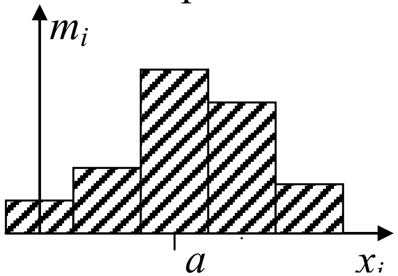
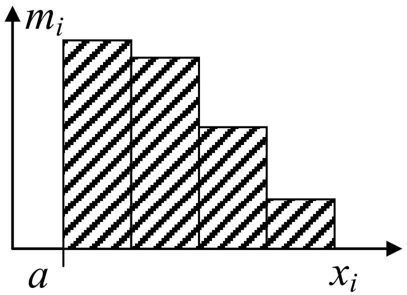
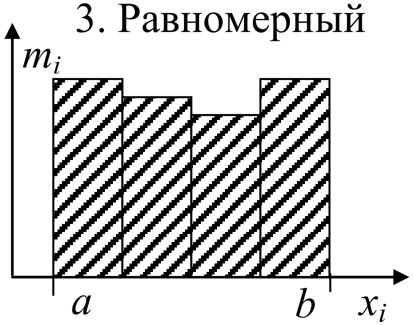
Число степеней свободы k	$T_{крит}$	Число степеней свободы k	$T_{крит}$
1	12,7062	17	2,1098
2	4,3027	18	2,1009
3	3,1824	19	2,0930
4	2,7764	20	2,0860
5	2,5706	22	2,0739
6	2,4469	24	2,0639
7	2,3646	25	2,0595
8	2,3060	30	2,0423
9	2,2622	40	2,0211
10	2,2281	50	2,0086
11	2,2010	60	2,0003
12	2,1788	70	1,9944
13	2,1604	80	1,9901
14	2,1448	90	1,9867
15	2,1314	100	1,9840
16	2,1199	∞	1,9600

Приложение 3

Значения критерия $\chi^2_{\alpha,k}$

Число степеней свободы k	Вероятность α		
	0,10	**0,05**	**0,01**
1	2,71	3,84	6,64
2	4,60	5,99	9,21
3	6,25	7,82	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1

Законы распределения случайных величин

Закон, вид гистограммы	Особенности характеристик	Теоретический закон распределения	Параметры закона	Теоретические частоты
1. Нормальный 	$\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2}\approx\bar{x}$ $\frac{x_{\max}-x_{\min}}{6}\approx S_x$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\begin{cases}a=\bar{x}\\ \sigma=S_x\end{cases}$ $a,\sigma-?$	$p_i^T=P(\alpha\le X\le\beta)$ $=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ $m_i^T=p_i^T\cdot n$
2. Показательный 	$\bar{x}-x_{\min}\approx S_x$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-a)}, x\ge a\\ 0, x<a\end{cases}$	$\begin{cases}a+\frac{1}{\lambda}=\bar{x}\\ \frac{1}{\lambda}=S_x\end{cases}$ $a,\lambda-?$	$m_i^T=nh\lambda e^{-\lambda(x_i-a)}$
3. Равномерный 	$\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2}\approx\bar{x}$ $\frac{x_{\max}-x_{\min}}{2}\approx S_x$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\notin[a,b]\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{a+b}{2}=\bar{x}\\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}}=S_x\end{cases}$ $a,\ b-?$	$m_i^T=\frac{nh}{b-a}$

Приложение 5

Критерии проверки статистических гипотез

Задача	Гипотеза	Наблюдаемое значение статистики, число степеней свободы	Критическая область при $\alpha = 0{,}05$ (H_0 отвергается)
1	2	3	4
1. Сравнение предполагаемого распределения генеральной совокупности с теоретическим	H_0: случайная величина распределена по предполагаемому закону H_1: случайная величина не подчиняется предполагаемому закону	**Критерий Пирсона** $\chi^2_{набл} = \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{(m_i^{н} - m_i^{T})^2}{m_i^{T}}$, $k = r - \delta - 1$, r – число интервалов вариационного ряда, δ – число параметров распределения	$\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, $\chi^2_{кр.}(n, \alpha)$ – по таблице "Критические точки распределения χ^2 [2, прил. 5]
2. Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей	H_0: $D(x) = D(y)$ H_1: $D(x) \neq D(y)$	**Критерий Фишера-Снедекера** $F_{набл} = \begin{cases} S_x^2 / S_y^2 \ при\ S_x^2 > S_y^2 \\ S_y^2 / S_x^2 \ при\ S_y^2 > S_x^2 \end{cases}$, $k_x = n_x - 1$, $k_y = n_y - 1$	$F_{набл} > F_{кр}$, $F_{кр} = F(k_1; k_2)$ «Квантили распределения Фишера» [4, прил. 7]
3. Сравнение средних значений двух нормальных генеральных совокупностей	$D(x)$ и $D(y)$ – известны, H_0: $M(x) = M(y)$ H_1: $M(x) \neq M(y)$	Критерий $z_{набл} = \frac{\lvert \bar{x} - \bar{y} \rvert}{\sqrt{\frac{D(x)}{n_x} + \frac{D(y)}{n_y}}}$	$z_{набл} > z_{кр}$, значение $z_{кр}$ – по прил. 1 из условия $\Phi(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2$

1	2	3	4
4. Сравнение средних значений двух нормальных генеральных совокупностей	$D(x)$ и $D(y)$ – неизвестны, но предполагается, что они равны, H_0: $M(x)=M(y)$ H_1: $M(x)\neq M(y)$	t-критерий Стьюдента $T_{набл}=\dfrac{\lvert\bar{x}-\bar{y}\rvert}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}}}$, $S_p^2=\dfrac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}$, $k=n_x+n_y-2$	$T_{набл}>T_{кр}$ $T_{кр}(\alpha,k)$ по табл. «Критические точки распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)» [2, прил. 6]
5. Сравнение средних значений двух нормальных генеральных совокупностей	$D(x)$ и $D(y)$ – неизвестны, причем гипотеза об их равенстве отклоняется, H_0: $M(x)=M(y)$ H_1: $M(x)\neq M(y)$	t-критерий Стьюдента $T_{набл}=\dfrac{\lvert\bar{x}-\bar{y}\rvert}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_x}+\dfrac{S_y^2}{n_y}}}$, $k=\dfrac{\left(S_x^2/n_x+S_y^2/n_y\right)^2}{\dfrac{\left(S_x^2/n_x\right)^2}{n_x-1}+\dfrac{\left(S_y^2/n_y\right)^2}{n_y-1}}$, округляется до целого числа	$T_{набл}>T_{кр}$ $T_{кр}(\alpha,k)$ по табл. «Критические точки распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)» [2, прил. 6].

1	2	3	4
6. Исследование грубых ошибок результатов наблюдений	H_0: результат x_0 принадлежит к остальным наблюдениям H_1: x_0 не принадлежит к остальным наблюдениям	**Критерий Стьюдента** $t_{набл} = \frac{\lvert x_0 - \bar{x} \rvert}{S_x}$, $k = n_x - 1$	$t_{набл} > t_{кр}$ $t_{кр}(\alpha, k)$ из табл. «Критические точки распределения Стьюдента» (односторонняя критическая область) [2, прил.6]

Приложение 6

Критические точки распределения F Фишера-Снедекора при $\alpha = 0{,}05$

Число степеней свободы k_2	Число степеней свободы k_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161	200	216	225	230	234	237	239	271	242	243	244	246	248	249	250	251	252	253
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35