МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко

МАТЕМАТИКА

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки 27.03.05 Инноватика в качестве электронного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензент Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна
Чередниченко Алла Валериевна
Математика [Электронный ресурс]: методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся направления подготовки 27.03.05 Инноватика очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко; КузГТУ;– Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Математика» и организовать самостоятельную работу.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по курсу «Математика» очной формы обучения.

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Математика», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Линейная алгебра

1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства

1.2. Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса

1.4. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица

1.5. Матричный метод решения СЛАУ.

Практическое занятие:

1. Вычислить определитель второго порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. С помощью разложения по элементам первого столбца вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Вычислите определитель четвертого порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Найти сумму и разность матриц $A + B$, $A - B$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

8. Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix};\qquad \begin{vmatrix}a & в\\ 0 & 0\end{vmatrix};\qquad \begin{vmatrix}x^2 & x\\ xy^2 & y^2\end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 4 & 6 & 7\end{vmatrix};\qquad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}.$$

10. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases}x+y=1\\ 3x+3y=-2\end{cases}.$$

11. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases}3x+2y=7,\\ x-y=4.\end{cases}$$

12. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases}2x+y+z=2,\\ 5x+y+3z=14,\\ 2x+y+2z=5.\end{cases}$$

13. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1+3x_2+2x_3=2,\\ 4x_1+5x_2+2x_3=1,\\ 5x_1+6x_2+4x_3=3.\end{cases}$$

14. Решить матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

16. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}.$$

17. Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Найти линейную комбинацию матриц:

$3A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$A-3E$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Транспонировать матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 10 & 4 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение матриц AB и BA (если они существуют):

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти A^3 для следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицы, обратные матрицам:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

7. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2};$$

$$\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$$

8. Решите неравенства:

$$\begin{vmatrix} 2x-4 & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} 4x+4 & 8 \\ 3x-7 & 2 \end{vmatrix} < 0; \quad \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$$

9. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ x+2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$$

12. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 6y + 5z = 1 \\ 5x + 3y - 2z = 0 \\ 7x + 4y - 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 3z = -2 \\ -4x - 3y - 5z = 1 \\ 5x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 7x + 9y + 5z = -3 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + z = 9 \\ 2x + 4y + 5z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 3x + 4y + 7z = 1 \end{cases}$$

13. Исследовать, будет ли система уравнений совместна, и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Раздел 2. Векторная алгебра

2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Длина (норма) вектора и отрезка, направляющие косинусы, нормированный вектор

2.2. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности векторов.

2.3. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл. Условие коллинеарности двух векторов.

2.4. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.

Практическое занятие:

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(1,\quad 3,\quad 0),\ A_2(3,\quad -1,\quad 4), A_3(-2,\quad 5,\quad 6), A_4(0,\quad 4,\quad -2)$$

$$A_1(3,\quad 1,\quad 4), A_2(-1,\quad 6,\quad 1), A_3(-1,\quad 1,\quad 6), A_4(0,\quad 4,\quad -1).$$

2. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$$\vec{a} = \{1,\quad 1,\quad 1\}; \vec{b} = \{1,\quad 1,\quad 2\}; \vec{c} = \{1,\quad 2,\quad 3\}; \vec{e} = \{6,\quad 9,\quad 14\}$$

$$\vec{a} = \{6,\quad 4,\quad 3\}; \vec{b} = \{3,\quad 3,\quad 2\}; \vec{c} = \{8,\quad 1,\quad 3\}; \vec{e} = \{-1,\quad 4,\quad 1\}$$

Самостоятельная работа:

1. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$$\vec{a} = \{4,\ -5,\ 2\}; \vec{b} = \{2,\quad -2,\quad 1\}; \vec{c} = \{2,\quad -1,\quad 0\}; \vec{e} = \{2,\quad -5,\quad 3\}$$

$$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\};\ \vec{b}=\{3,\ \ -3,\ \ 1\};\ \vec{c}=\{2,\ \ -1,\ \ 2\};\ \vec{e}=\{6,\ \ -8,\ \ 1\}$$

$$\vec{a}=\{4,\ \ 5,\ \ 2\};\ \vec{b}=\{3,\ \ 0,\ \ 1\};\ \vec{c}=\{1,\ \ 4,\ \ 2\};\ \vec{e}=\{5,\ \ 7,\ \ 8\}$$

$$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\};\ \vec{b}=\{1,\ 5,\ -4\};\ \vec{c}=\{4,\ \ 1,\ \ -3\};\ \vec{e}=\{6,\ \ -15,\ \ 7\}$$

$$\vec{a}=\{3,\ \ -5,\ \ 2\};\ \vec{b}=\{4,\ \ 5,\ \ 1\};\ \vec{c}=\{-3,\ 0,\ -4\};\ \vec{e}=\{-4,\ \ 5,\ \ 16\}$$

2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(-4,-2,\ 0),\ A_2(-1,\ \ -2,\ \ 4),\ A_3(3,\ \ 1,\ \ -2),\ A_4(3,\ \ -2,\ \ 1)$$

$$A_1(3,\ \ 2,\ \ -3),\ A_2(5,\ \ 1,\ \ -1),\ A_3(2,\ \ -1,\ \ 0),\ A_4(1,\ \ -2,\ \ 1)$$

$$A_1(1,\ \ 2,\ \ 1),\ A_2(3,\ \ -1,\ \ 7),\ A_3(0,\ \ -3,\ \ 5),\ A_4(7,\ \ 4,\ \ -2)$$

$$A_1(3,\ \ 3,\ \ 9),\ A_2(6,\ \ 9,\ \ 1),\ A_3(1,\ \ 7,\ \ 3),\ A_4(8,\ \ 5,\ \ 8).$$

3. Даны две силы $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, приложенные к точке A. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

$$\overrightarrow{F_1}=\{1,\ \ -1,\ \ 3\},\ \overrightarrow{F_2}=\{2,\ \ 0,\ \ -3\},\ A(4,\ \ 3,\ \ 6),\ B(0,\ \ 1,\ \ 2)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{4,\ 2,\ -1\},\ \overrightarrow{F_2}=\{3,\ \ 4,\ \ 5\},\ A(-1,\ \ 0,\ \ -2),\ B(1,\ \ -2,\ \ 2)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{3,\ -1,\ 2\},\ \overrightarrow{F_2}=\{5,\ \ -3,\ \ -2\},\ A(3,\ \ 1,\ \ 1),\ B(6,\ \ -7,\ \ 5)$$

4. Даны две силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, приложенные к точке A. Найти работу, которую совершает равнодействующая этих сил, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B.

$$\overrightarrow{F_1}=\{4,\ \ 4,\ \ -9\},\ \overrightarrow{F_2}=\{5,\ \ 3,\ \ -1\},\ A(4,\ 3,\ -1),\ B(-7,\ \ 3,\ \ 2)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{8,\ \ 8,\ \ -2\},\ \overrightarrow{F_2}=\{-3,\ \ -5,\ \ 1\},\ A(0,\ \ 2,\ \ 9),\ B(3,-1,8)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{13,\ \ -10,\ \ 5\},\ \overrightarrow{F_2}=\{4,\ 8,\ 11\},\ A(-1,\ \ 2,\ \ 4),\ B(3,\ \ 1,\ \ 1).$$

5. Тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти линейную скорость точки A этого тела.

$$\vec{\omega}=3\vec{k},\qquad A(5,\ \ 3,\ \ -1)$$

$$\vec{\omega}=4\vec{i},\qquad A(2,\ \ -4,\ \ 0)$$

$$\vec{\omega}=7\vec{j},\qquad A(3,\ \ -7,\ \ 2)$$

6. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Определить, будут ли они компланарны.

$$\vec{a} = \{1, \quad 1, \quad 1\}, \quad \vec{b} = \{1, \quad 1, \quad -1\}, \quad \vec{c} = \{1, \quad -1, \quad 1\}.$$

$$\vec{a} = \{3, \quad 5, \quad 0\}, \quad \vec{b} = \{1, \quad -1, \quad 2\}, \quad \vec{c} = \{5, \quad 3, \quad 4\}$$

$$\vec{a} = \{1, \quad -2, \quad 1\}, \quad \vec{b} = \{3, \quad 2, \quad 1\}, \quad \vec{c} = \{1, \quad 0, \quad -1\}$$

3. Аналитическая геометрия

3.1. Область профессионального применения аналитической геометрии.

3.2. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.

3.3. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.

3.4. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами.

3.5. Плоскость и прямая в пространстве. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Точка пересечения трех плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности.

Практическое занятие:

1. Дано: A(2;1;–1), B(3;3;1), C(4;5;3). Найти:

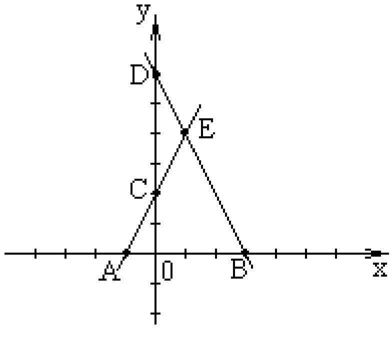
$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}$ $\qquad$ $\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ $\qquad$ $\cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$

2. Дано: A(3;–4;1), B(5;–1;7), C(7;2;13)

$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}$ $\qquad$ $\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ $\qquad$ $\cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$

3. Даны уравнения сторон треугольника; $4x - y - 12 = 0$ (AB); $3x - 7y + 41 = 0$ (BC) и $9x + 4y - 2 = 0$ (AC). Написать уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C на сторону AB.

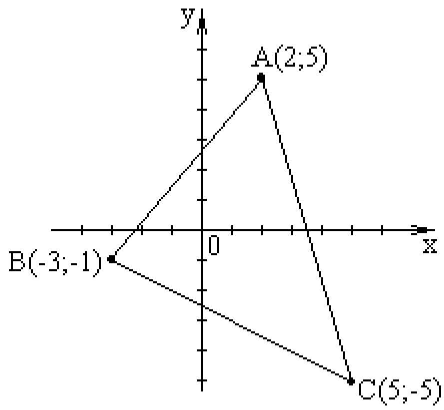
4. По данным, указанным на чертеже, определить острый угол между прямыми AC и BD.



5. Установить, лежит ли точка (1/3; 2) на прямой
$18x - 5y + 4 = 0$?

6. Прямая проходит через точку А(1;5;6) и точку пересечения прямых $2x - 7 + 4 = 0$ и $x + y - 6{,}5 = 0$. Составить её уравнения.

7. По данным, указанным на чертеже, определить угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенных из вершины А.



8. Точка M(x;–3) принадлежит прямой $3x + y + 27 = 0$. Определить абсциссу точки М.

9. Даны точки 0(0;0), P(–C;0); F_2(–C;0), M(0, y_0). Составить: Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках $F_1; F_2$; М. Уравнение эллипса с фокусами в точках F_1, F_2 и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1,\ F_2$ и мнимой осью $|OM|$. Если

C = 7	$y_0 = -6$
C = 6	$y_0 = 5$
C = 5	$y_0 = 4$
C = 4	$y_0 = -3$
C = 3	$y_0 = 2$.

10. Даны точки $A(3;1;5)$, $B(7;-3;-2)$, $C(-1;5;3)$. Найти: косинус угла между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; площадь треугольника ABC; уравнение прямой AB.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;9;-4)$ перпендикулярно прямой (β): $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{-3}$.

12. Найти направляющий вектор прямой:

$$\begin{cases} -x+4y+z=5 \\ 3x-2y+7z=12 \end{cases}$$

13. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A в треугольнике ABC, если $A(-4;3)$, $B(2;2)$, $C(-1;5)$.

14. Написать уравнение линии центров двух окружностей $x^2+y^2-6x=0$ и $x^2+y^2+6x-4y=12$.

15. Дан треугольник с вершинами A(–2;5), B(4;–3), C(6;0). Составить: уравнение прямой AB; уравнение медианы из вершины A; уравнение средней линии, параллельной стороне AB; уравнение высоты из точки C; найти внутренний угол при вершине B.

16. Точка $A(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой линии $x-2y-7=0$. Вычислить площадь квадрата.

17. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3,1)$, $B(7,5)$, $C(5,-3)$.

18. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой линией $y=2x+5$.

19. Точка $A(5,-4)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x-7y-8=0$. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

20. Установите, какие линии определяются уравнениями и схематично их постройте:

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$$

$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$$

$$x=-\frac{1}{4}y^2+y$$

$$y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$$

21. Найдите координаты фокуса параболы по координатам ее вершины $A(6,-3)$ и уравнению ее директрисы $3x-5y+1=0$.

22. На гиперболе $x^2/2-y^2=1$ найти точку, ближайшую к точке $(3;0)$.

23. Найдите угол между прямыми:

$$\frac{X}{1}=\frac{У-1}{-2}=\frac{Z}{3};\quad \begin{cases} 3X+У-5Z+1=0 \\ 2X+3У-8Z+3=0 \end{cases}$$

24. Найдите угол между прямой $\begin{cases} 3X-У-Z+5=0 \\ X-У-Z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью 4X–8У+Z–3=0;

25. Найдите точку пересечения прямой $\frac{X-7}{5}=\frac{У-4}{1}=\frac{Z-5}{4}$ и плоскости 3X–У+2Z–5=0

26. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку М (3; 4; 1) перпендикулярно прямой $X = 5 - t$; $У = 4t$; $Z = -2 + t$;

27. Покажите, что прямые $\frac{X-1}{2}=\frac{У+2}{-3}=\frac{Z-5}{4}$ и $X = 7 + 3t$; $У = 2 + 2t$; $Z = 1 - 2t$ лежат в одной плоскости и найдите её уравнение.

28. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямые и найдите расстояние между ними:

$$\begin{cases} X=2+3t \\ У=-1+4t \\ Z=2t \end{cases};\qquad \begin{cases} X=7+3t \\ У=1+4t \\ Z=3+2t \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Дано: A(–2;3; –4), B(5;7;0), C(2;6; –4). Найти:

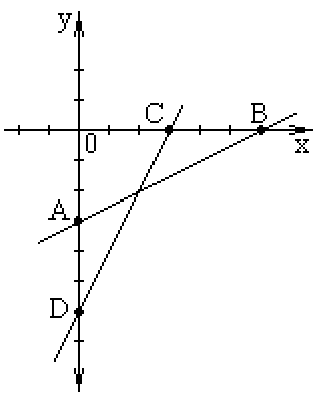
$$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}\qquad \overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}\qquad \cos(\overline{AC}\,{}^\wedge\,\overline{BC})$$

2. Дано: A(3;2; –5), B(11;8; –5), C(4;4; –3). Найти:

$$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}\qquad \overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}\qquad \cos(\overline{AC}\,{}^\wedge\,\overline{BC})$$

3. Даны вершины треугольника A(–3;2), B(–3;–4), C(9;–4). Определить длину высоты, проведенной из вершины A.

4. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD.

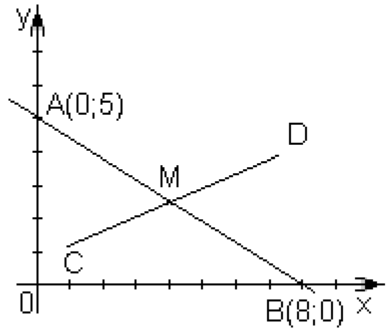


5. Написать уравнения семейства (множества) прямых, угловой коэффициент которых равен (–2/7).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку (–2;5) и отсекающей на оси OY, отрезок, равный 3.

7. Прямые AB и CD пересекаются в точке M(4;2,5) под углом 45°. По данным, указанным на чертеже, написать уравнение прямой CD.

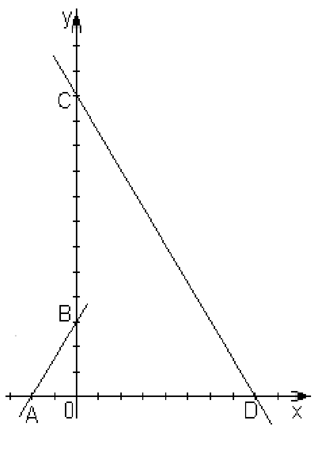
.



8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y = 2 = 0$ и $3x – y + 12 = 0$, перпендикулярно к прямой $5x + 2y + 8 = 0$.

9. Найти площадь треугольника, ограниченного координатными осями к прямой $3x + 10y – 30 = 0$.

10. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD.



11. Доказать, что треугольник с вершинами A(–8;–3), B(6;–1), C(–2;5) равнобедренный.

12. Даны точки 0(0;0), P(–C;0); F_2(–C;0), M(0; y_0). Составить: Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами

точках $F_1;F_2$; М. Уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1,\ F_2$ и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1,\ F_2$ и мнимой осью $|OM|$. Если

С = 6	$y_0 = 4$
С = 4	$y_0 = –2$
С = 6	$y_0 = 2$
С = 3	$y_0 = –1$.

13. Составить уравнение диаметра окружности $(x+2)^2+(y-3)^2=30$, перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

14. Даны вершины пирамиды А1А2А3А4. А1(1;2;1), А2(3,–1; 7), А3 (0,–3,5), А4(7,4,–2). Составить: уравнение плоскости А1А2А3; уравнение плоскости, которая проходит через точку А4 параллельно плоскости А1А2А3; найти угол между прямыми А1А4 и А2А3; найти угол между прямой А1А4 и плоскостью А1А2А3; высоту пирамиды, опущенной из вершины А4 на плоскость А1А2А3.

15. Даны точки M(2,–3), N(3,5), K(–1,3). Составить: уравнение прямой MN; уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно прямой MN; найти расстояние от точки K до прямой MN.

16. Составить уравнение эллипса, если $2a = 30$, έ =3/5.

17. Даны вершины пирамиды А1А2А3А4. А1(1;3;0), А2(3;–1;4), А3(–2;5;6), А4(0;4;–2). Составить: уравнение плоскости А1А2А3; уравнение плоскости, которая проходит через точку А4 параллельно плоскости А1А2А3; найти угол между прямыми А1А4 и А2А3; найти угол между прямой А1А4 и плоскостью А1А2А3; высоту пирамиды, опущенной из вершины А4 на плоскость А1А2А3.

18. Даны точки M(2;–5), N(–2;3), K(4;5). Составить: уравнение прямой MN; уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно прямой MN; найти расстояние от точки K до прямой MN.

19. На гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ взята точка с абсциссой –8 и положительной ординатой. Найти фокальные радиусы до этой точки.

Раздел 4. Введение в математический анализ функции одной переменной

4.1. Общие представления о функции одной переменной. Понятие функции одной переменной и способы ее задания. Область определения. Сложная и обратная функции. Характеристики поведения функции. Основные элементарные функции и их графики.

4.2. Теория пределов. Предел функции на бесконечности. Предел функции в конечной точке. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых функций и их связь с бесконечно большими. Основные свойства пределов. Нахождение пределов. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции.

4.3. Непрерывность функции. Определение функции, непрерывной в точке. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Практическое занятие:

1. Решить:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2+x-2} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right), \quad \lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2},$$

2. Решить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} \quad \lim_{x\to 0} x\cdot ctgx \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2arcsinx}{3x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{3x}{5}\right)}{x^2},$$

3. Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{5x}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{3x^2-2}\right)^{5x}\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{3n^2-2n}\right)^{5n}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+11}{3x^2-2x}\right)^{5x}\qquad \lim_{x\to\infty}\{x\cdot[\ln(x+3)-\ln x]\}$$

4. Решить:

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{1-cos8x}{2x^2}\qquad \lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{ln(1+5x)}{sin3x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctg(5/2\cdot x)}{6x}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{arcsin^2 2x}{5x^2}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}-1}{sin10x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+7x)}{sin7x}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 3}\frac{sin(x-3)}{x^3-27}\qquad \lim_{x\to -5}\frac{tg(x+5)}{x^2-25}\qquad \lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{sin^2(3x)}{ln^2(1+2x)}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{sin3x-sinx}{5x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{cos3x-cos^3 3x}{x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-cosx}$$

5. Исследовать на непрерывность функции. Сделать рисунок.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi/2\\ 1-x, & x\ge \pi/2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ (x-1)^2, & 0\le x<2\\ 4-x, & x\ge 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2^x, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1<x\le 1\\ Lnx, & x>1\end{cases}$$

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1$$ в точках $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

$$f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$$ в точках $x_1 = 4$, $x_2 = 3$

6. Решить:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7x+3}{x^4+2x-4}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$$

Самостоятельная работа:

1. Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^3-1}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+21}{2-4x-2x^2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$$

2. Решить:

$$\lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^3-2x+5}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}\quad \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}\quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{12-x-x^2}{x^3-27} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$$

3. Доказать непрерывность функции $f(x)$ во всей ее области определения по определению.

$$f(x) = x2 - x + 2 \quad f(x) = x^3 - 2x \quad f(x) = \cos x$$

4. Найти точки разрыва функции $f(x)$, исследовать их характер. Построить схематично график функции:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2^x, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1\le x\le 1\\ Lnx, & x>1\end{cases}$$

5. Исследовать поведение функции в указанных точках, схематично построить график.

$$f(x)=4^{\frac{1}{1-x}}+2, \quad x_1 = 1, \; x_2 = 2$$

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}-1, \quad x_1 = 2, \; x_2 = 3$$

$$f(x)=7^{\frac{1}{x+4}}-1, \quad x_1 = -5, \; x_2 = -4$$

$$f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1 = 3, \; x_2 = 4$$

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

5.1. Производная. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Таблица производных. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Уравнение касательной и нормали к графику. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

5.2. Производные высших порядков.

5.3. Правило Лопиталя.

5.4. Полное исследование функции. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика.

Практическое занятие:

1. Найти производные функций по определению:

$$f(x)=x^2-7 \quad f(x)=2-4x+x^2 \quad f(x)=\sin 2x$$

2. Найти производные функций:

$$y=\sqrt[3]{x^2}, \quad y=2\log_3 x+7x, \quad y=2x^4+\frac{3}{x}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \quad y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{8}{x^3}$$

$$y=x^3\cdot\log_5 x \quad y=\sqrt[5]{x^4}\cdot\ln x \quad y=\sin x+2\cos x, \quad y=(\sin x+2x)\cdot\sqrt[3]{x},$$

$$y=\sqrt{x}\cdot\cos x+\frac{3}{x^2} \quad y=x\cdot tgx, \quad y=\frac{2x}{ctgx}, \quad y=3\sin x-\frac{x^2}{tgx}.$$

$$y=2\arcsin x, \quad y=-3\cdot arcctgx \quad y=-3\arccos x+4\sqrt{x}, \quad y=\frac{2-9x^3}{1-\cos x}$$

$$f(x)=\frac{2ctgx}{1-2\sqrt{x}} \quad y=x\cdot arctgx-5\arccos x+\frac{\arccos x}{x^2}$$

3. Производная сложной функции.

$$y=\left(1+3x^2\right)^3 \quad y=(3x+1)^4 \quad y=\sin 2x \quad y=\sin x^2 \quad y=\sin^2 x$$

$$y=\sin e^x \quad y=\sin(3x+5) \quad y=(4x+5)^5 \quad y=\sqrt{x^2+2} \quad y=\sqrt{\cos x}$$

$$y=tg(\ln x) \quad y=\cos(tg3x) \quad y=\sin(\ln x) \quad y=\ln x^3 \quad y=tg\left(6^x\right)$$

$$y = 3^{5x} \quad y = \ln(2x-8) \quad y = \arcsin 6x \quad y = (\arcsin 8x)^2$$

$$y = \ln^4(2x-6) \quad y = 10^{\cos 5x} \quad y = 3^{\arcsin 4x} \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$y = x^3 \cdot \sin(\cos x) \quad y = \log_6 \sin 4x \quad y = \left(1 + tg^2 3x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y = 3^{x^2} \cdot \sqrt{x^3} - 5x \quad y = \cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad y = \frac{\sin^2 x}{ctg\, x + 1} + \frac{\cos^2 x}{tg\, x + 1}$$

4. Найти производные функций, используя правило логарифмического дифференцирования:

$$y = x^{\sin x} \quad y = x^{x^2} \quad y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 \cdot (x+4)^4} \quad y = \left(x^2+1\right)^{2x} \quad y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$y = \sqrt[x]{(2x \sin x + 1)^2} \quad y = \sqrt{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}} \quad y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x+7} \cdot (x-3)^4}{(x+2)^5} \quad y = \frac{(x-3)^5 \cdot (x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

5. Продифференцировать функции, заданные параметрически:

$$\begin{cases} x = k \sin t + \sin kt \\ y = k \cos t + \cos kt \end{cases} \quad \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+t^4}{\left(1+t^2\right)^2} \\ y = \dfrac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$$

6. Продифференцировать функции, заданные неявно:

$$x^3 + y^3 = \sin(x - 2y) \quad x \sin y + y \sin x = 0 \quad x^4 - y^4 = x^2 y^2$$

$$y^2 - x = \cos y \quad 3x + \sin y = 5y$$

7. Найти предел функции, используя правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} \quad \lim_{x\to 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos \pi x} - 1} \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2} - e}{\sin(x^2-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x} - 1} \quad \lim_{x\to 2\pi} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 2x} \quad \lim_{x\to 1} (1-x)^{\cos \pi x / 2}$$

$$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x} \quad \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{tgx} \quad \lim_{x\to 3}\sin\pi x\cdot\ln(2-\frac{x}{3}) \quad \lim_{x\to 0}(\frac{tgx}{x})^{1/x^2}$$

8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y=x^3-4x^2+3x \quad y=\frac{x^2}{x-2} \quad y=\ln\left(1-x^2\right) \quad y=x^2\cdot e^{-x} \quad y=x-\ln x$$

$$y=\frac{x^3}{3-x^2}$$

9. Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции:

$$f(x)=x^2-3x+1 \quad f(x)=e^{x^2} \quad f(x)=x^5-10x^2+7x-9$$

Самостоятельная работа:

1. Раскрыть неопределенности

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)1},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{2x-x^2}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right),$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+1}{3-\sqrt{4+x}} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-1}{3-5x-x^3}$$

2. Раскрыть неопределенности, используя эквивалентные бесконечно малые функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg\,4x}{\exp(2x)-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{\sin 2x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^2)}{x\sin 5x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg(x^3)}{x\sin 2x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 5x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x^{2)}}{\exp(x^2)-1} \quad \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{\arcsin 2x}$$

3. Раскрыть неопределенности

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{1/x^3}$$

4. Найти производную функции:

$$y=2x^4+\frac{3}{x}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\qquad f(x)=3^x\cdot tg(x/2)\qquad \varphi(x)=\frac{2\cos x-\sin x}{2-tgx}$$

$$y=\sqrt{\left(2-5x^2\right)^3}\qquad y=\sin^2\left(\frac{2x+1}{3}\right)\qquad y=0{,}2x^5+\frac{4}{x^2}-6\sqrt{x^3}$$

$$f(x)=e^{2x}\cdot\sin x\qquad \varphi(x)=\frac{7-x^2}{\sqrt{x+3}}\qquad y=\ln^3\left(1-2x^2\right)\qquad y=\ln\left(\sin x+tg2x\right)$$

$$y=\frac{2}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{7}{x^3}\qquad f(x)=2^x\cdot\cos 3x\qquad \varphi(x)=\frac{\sin 2x}{x^2-9}\qquad y=0{,}5e^{\sin 2x}$$

$$y=arctg\left(e^{x/2}\right)\qquad tg\,y=3x+5y\qquad y^2+x^2=\sin y$$

$$y=\left(7-3x^2\right)\cos(2/x)\qquad y=\arcsin\left(e^{x^2}\right)\qquad y=e^{-arcctgx}\qquad y=sin^3 2x$$

$$y=\frac{(x+2)^7\cdot(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}\qquad y=\frac{(x-1)^4\cdot(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{\ln t}{t}\\ y=t\cdot\ln t\end{cases}$$

5. Вычислить производные, используя линейность операции дифференцирования и правила дифференцирования произведения и частного:

$$y=z^2\,\mathrm{arctg}(z)\qquad y=(t+1)\,\mathrm{tg}(t)\qquad y=4\sin(x)\cos(x)\qquad y=\exp(t)\sin^2(t)$$

$$y=x^2\exp(x)\ln(x)\qquad y=\frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)-\cos(t)}\qquad y=\frac{z^2-5z+6}{z^2+z+7}\qquad y=\frac{\sqrt{t}}{2+\sqrt[3]{t}}\qquad y=\frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$$

$$y=(x^2-7x+8)\exp(-x)$$

6. Вычислить производные, используя правило дифференцирования сложной функции (выписывать цепочку промежуточных переменных):

$$y(t)=\sqrt[3]{(3t-8)^5}\qquad y=(1-x)^{100}\qquad y=\sqrt[3]{(1-z^3)(z^3+1)}\qquad x(t)=A\cos(\Omega t+\varphi)$$

$$y=\exp(-t)\ln(2t+1)\qquad y(z)=\exp(-z^2/2)\qquad y=\mathrm{ctg}(x^2)-\mathrm{tg}^2(2x)\qquad y=2^x\log_4(x)$$

$$y=\mathrm{arctg}(\exp(-t))\qquad y=\ln(\sin(z))\qquad y=\ln(\ln(\ln(x)))\qquad y=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\qquad y=\frac{\mathrm{tg}^2(x)}{\mathrm{tg}(x^2)}$$

$$y=\left(\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{12}\qquad y=\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}\qquad y=\ln(z+\sqrt{1+z^2})\qquad y=\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$$

$$y=t\{\sin(\ln(t))+\cos(\ln(t))\}\qquad y=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}\qquad y=\ln(arctg5x)$$

7. Найти производную по определению: $f(x)=2-4x+x^2$

8. Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{sin2x-\sin x}.$$

9. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

$$f(x)=x^5-10x^2+7x-9 \quad f(x)=(x-2)^2(x+2) \quad f(x)=x+e^{-x}$$

10. По формулам функций схематически построить их графики. В точках разрыва вычислить односторонние пределы и указать характер точек разрыва:

$$y=1/|x^2-4x+3|;\quad y=\exp(-1/x^2);\quad z=1/\ln(t);$$

$$y=\mathrm{arctg}(1/t);\quad y=\mathrm{arctg}(1/t^2),\quad y=\frac{th\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{x+5},\quad y=\frac{2^{-\frac{1}{x^2}}}{x-3},$$

$$y=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x-5},\quad y=arcc\,\mathrm{tg}(1/t),\quad y=arcc\,\mathrm{tg}(1/t^2)$$

6. Функции нескольких переменных

6.1. Понятие функции двух переменных, область определения.

6.2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Практическое занятие:

1. Запишите производные первого и второго порядка для указанной функции в указанной точке. Запишите выражение для первого дифференциала. Запишите выражение для второго дифференциала.

$$f(x,y)=\ln(X^2+У);\quad M_0(0;1);\qquad f(x,y)=\exp(X^2У);\quad M_0(0;1);$$

2. Исследуйте функцию на локальный экстремум:

$$f=X^3-2У^3-3X+6У;$$

$$f=8-6X+4У-2Z-X^2-У^2-Z^2$$

$$f=3X^3+У^2+Z^2+6XУ-2Z+1;$$

3. Найти частные производные функций:

$$z=xy^2-\frac{x}{y}\quad z=\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\quad z=\frac{x}{y^3}+\frac{y}{x^3}-\frac{1}{6x^2y}\quad z=\cos\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{y}{x}$$

$$z=y^5\sin^2(x+y)\quad z=\left(x^3+y^4\right)\cdot\cos(2xy)\quad z=\ln\left(x^3+y^2\right)$$

$$z=6x^2+x^6y-y^4+5x^3y^5-x+5\quad u=x^3+yz^2+3yx-x+z$$

$$z=e^{x^2+y^3}\quad z=\sqrt{4x^3+6y^5}\quad z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$

$$z=x^4\cos y-y^5\sin x\quad z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$$

4. Найти $u'_x+u'_y+u'_z$ при $x=y=z=1$, если $u=\ln\left(1+x+y^2+z^3\right)$.

5. Найти $\dfrac{z'_x+z'_y}{z'_xz'_y}$ при $x=1$ и $y=2$, если $z=x^3y-xy^3$

6. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^3 - x^2 y - y^3; \quad z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3; \quad z = \sin x \cdot \sin y;$$
$$z = xy + \sin(x + y); \quad z = \ln(tg(x + y)); \quad z = x^2 \ln(x + y);$$
$$z = x \cdot \sin xy + y \cdot \cos xy;$$
$$z = \sin(x + \cos y); \quad z = (x^2 + y^2)^3; \quad z = \ln\sqrt{x^2 + y}; \quad z = x \cdot \ln(xy)$$

7. Дано $u = e^{xyz}$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

8. Дано $v = \sin xyzu$. Найти $\dfrac{\partial^4 v}{\partial x \partial y \partial z \partial u}$.

9. Найти частные производные первого порядка:

$$z = 2x^3 y^5 - 6xy^5 + 5xy - 3 \quad z = \ln(\sqrt{xy} + y^2 - e^{x^2})$$
$$z = \arcsin(xy) - 3xy^2 \qquad z = \cos\frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

10. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \sin\sqrt{x^3 y} \qquad z = \cos(xy^2) \qquad z = e^{\sqrt{4x^2 - 7}}$$

11. Найти $\dfrac{z'_x + z'_y}{z'_x z'_y}$ при $x = 1$ и $y = 2$, если $z = x^3 y - xy^3$

12. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \qquad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$
$$z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y \qquad z = xy(12 - x - y)$$
$$z = (x - 1)^2 + 2y^2 \qquad z = xy - 3x^2 - 2y^2$$

13. Найти область определения функции:

$$z = \ln(y - x^2 + 2x). \quad z = \arcsin(x - 3y).$$

14. Найти область определения функций:

$a)\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $b)\ z = \ln(x + y)$; $c)\ z = x + \arccos(y)$;

$d) z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; $e)\ z = \sqrt{x \cdot \cos y}$; $f)\ u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

15. Построить линии уровня функций:

$a)\ z = \ln(x^2 + y)$; $b)\ z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

16. Найти точки разрыва функции:

$a)\ z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $b)\ z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$; $c)\ z = \frac{1}{(x - y)^2}$.

17. Найти частные производные I порядка:

$a)\ z = x^3 \cdot y + x \cdot y^2 + 3xy + 7x - y$; $b)\ z = \frac{y}{x}$; $c)\ z = \frac{(x^2 - y)}{(x + y^2)}$;

$d)\ z = arctg\,\frac{y}{x}$; $e)\ z = x^y$; $g)\ z = e^{\sin(y \cdot x^2)}$; $f)\ z = \ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

18. Показать, что функция $z = z(x,y)$ или $u = u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению:

$a)\ z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$;

$b)\ z = xy + x \cdot e^{\frac{y}{x}}$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$;

$c)\ u = x + \frac{x-y}{y-z}$, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$;

$d)\ u = (x-y)(y-z)(z-x)$, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

19. Найти частные производные II порядка:

$a)\ z = xy^2 + \ln(x^3 + y) - 3x + y$.

$b)\ u = xy + y^2 z - z^3 xy$.

20. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}$ для функции $z = \sin(xy)$.

21. Показать, что функция $u = arctg\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

22. Проверить, что функция $u = \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

23. Найти полные дифференциалы функций:

$a)\ z = 2^{x^2 + y^2}$

$b)\ z = x^2 + \ln(x + y^3)$

$c)\ z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ в точке $P(2,1)$.

24. Вычислить: $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$.

25. Найти производную функции $z = x^3 + 2x^2y^3 + xy^2 + 1$ в направлении вектора $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$ в точке M, если $M(1,2), N(4,6)$.

26. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $P(1,2,-1)$ в направлении вектора, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

27.Найти $\overrightarrow{grad(z)}$ в точке P(5;3), если $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

28.Найти угол между градиентами функции $z = \ln\frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ и $B(1,1)$.

29. Найти эстремумы функций:

$a)\ z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

$b)\ z = x^3 + y^3 - 3xy$;

$c)\ z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

30. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в ограниченной, замкнутой области:

$a)\ z = xy(2 - x - y)$ в области $x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

$b)\ z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

31. Найти поток вектора $\bar{a} = (5x + z)\bar{i} + (x - 3y)\bar{j} + (4y - 2z)\bar{k}$ через часть плоскости $x + y - z = 2$, лежащую в первом октанте, орт нормали составляет с осью 0Z острый угол γ.

32. Вычислить дивергенцию векторного поля $\bar{b} = 10u\bar{a}$, где $\bar{a} = \{2;-3;4\}$, $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

33. Найти векторные линии векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j}$

34. Найти векторные линии векторного поля $\bar{a} = 3x^2y\bar{i} + 3xy^2\bar{j}$.

35. Найти векторную линию поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^3\bar{j} + z^2\bar{k}$, проходящую через точку $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$.

36. Найти векторные линии поля градиента функции $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$.

37. Найти векторные линии поля градиента функции $U = x^2 - 2y + z^2$

Самостоятельная работа:

1. Найти частные производные первого порядка:

$$z = 2x^3y - 4xy^5 \quad z = 5xy^4 + 2x^2y^7 \quad z = \arcsin\sqrt{xy}$$

$$z = \ln(y^2 - e^x) \quad z = 5xy^2 - 3x^3y^4 + 2 \quad z = arctg(x^2 + y^2)$$

$$z = xy^4 - 3x^2y - 5 \quad z = \ln(3x^2 - y^4) \quad z = 2x^2y^2 + x^3 - y^2 - 3$$

$$z = \sin\sqrt{xy^3} \quad z = 7x - x^3y^2 + 9 - y^4 \quad z = tg(x^3 + y^2)$$

2. Найти частные производные второго порядка:

$$z = e^{x^2 - y^2} \quad z = ctg(x + y) \quad z = \ln(3x^2 - 2y^2) \quad z = \cos(xy^2)$$

$$z=\ln(3xy-4) \quad z=e^{\sqrt{x+y}}$$

3. Исследовать на экстремумы функцию.

$$z=x^3+8y^3-6xy+5 \quad z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$$
$$z=1+6x-x^2-y^2-xy \quad z=2x^3+2y^3-6xy+5$$
$$z=x^2+xy+y^2+x-y+1 \quad z=x^2+xy+y^2-6x-9y$$

4. Найти область определения функции $z=z(x,y)$.

$$z=\frac{3xy}{2x-5y} \quad z=\frac{1}{36-4x^2-y^2} \quad z=\ln(xy). \quad z=\ln(4-x^2-y^2) \quad z=\frac{2}{6-x^2-y^2}.$$
$$z=\arccos(x+y). \quad z=\frac{3x+y}{2-x+y} \quad z=\sqrt{9-3x^2-y^2} \quad z=\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2} \quad z=\arcsin\frac{x}{y}.$$

5. Найти частные производные первого порядка.

$$z=\ln(y^2-e^{-x}) \quad z=arctg\frac{x}{y^2} \quad z=2^{3x^2-xy} \quad z=arcsin\sqrt{xy} \quad z=sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}.$$
$$z=tg(x^3+y^2) \quad z=ctg\sqrt{xy^3} \quad z=e^{-x^2+y^2} \quad z=\ln(3x^2-y^4) \quad z=arccos\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. Найти частные производные первого порядка для функции $U=U(x,y,z)$ в точке $M_o(x_o,y_o,z_o)$.

$$U=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ M_o(0,-1,1) \quad U=z\cdot\ln(x^3+y^2), M_o\ (1,2,3)$$
$$U=zx\cdot\sin(2x+y), M_o\left(\frac{\pi}{4},0,2\right) \quad U=\ln(x^3+2y^3-z^3)\ , M_o(2,1,0).$$
$$U=\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}, M_o(1,0,1) \quad U=\ln(\cos(x^2y^2+z))\ ,\ M_o\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)$$
$$U=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}\ , M_o(3,4,2) \quad U=arctg(xy^2+z), M_o(2,1,0).$$
$$U=\arcsin\left(\frac{x^2}{y}-z\right), M_o(2,5,0) \quad U=\sqrt{z}\ \sin(2x-y)\ ,\ M_o\ (0,0,4).$$

7. Найти полный дифференциал функции $z=z(x,y)$

$$z=2x^3y-4xy^5-\frac{6x}{y^2}-5x. \quad z=xy\cdot\sin(xy) \quad z=\frac{3x+y}{xy-5}$$
$$z=5xy^4+2x^2y^7-3x+y \quad z=3y^2x^3-5x-4y^2+1 \quad z=\cos(x^2-y^2)+x^3$$
$$z=\ln(3x^2-2y^2) \quad z=5xy^2-3x^3y^4+x-3y \quad z=e^{x^2+xy} \quad z=arctg(2x-y).$$

8. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функции $z=z(x,y)$.

$$z=e^{x^2-y^2} \quad z=2^{(7x^2y+5)} \quad z=arcctg(xy-3) \quad z=\cos(xy^2)$$
$$z=arctg(x+y). \quad z=\arcsin(x-y). \quad z=\sin(x^2-y) \quad z=\arccos(2x-y).$$
$$z=arcctg(x-2y). \quad z=\ \ln(3x^2-y^2).$$

9. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению функция $u=u(x,y)$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=\frac{y}{x} \quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3).$$
$$u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=\ln(x^2+(y+1)^2)$$
$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}\ , u=x^y \quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u\ , u=\frac{xy}{x+y}.$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, $u = arctg\frac{x+y}{1-xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

$u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ $\qquad$ $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, u = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u, u = (x^2 + y^2)tg\frac{x}{y}$

10. Исследовать функцию $z = z(x,y)$ на экстремум.

$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$ $\quad$ $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$ $\quad$ $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$. $\quad$ $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$

$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$ $\quad$ $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$ $\quad$ $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = z(x,y)$ в области D.

$z = 3x + y - xy$, $\qquad D: y = x, y = 4, x = 0.$

$z = xy - x - 2y,$ $\qquad D: x = 3, y = x, y = 0.$

$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\qquad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

$z = 5x^2 - 3xy + y^2,$ $\qquad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$ $\qquad D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$

12. Найти угол между градиентами скалярных полей $U = U(x,y,z)$ и $V = V(x,y,z)$ в точке M.

$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $U = \frac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

$V = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, $U = x^2yz^3, M(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}).$

$V = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $U = \frac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

$V = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $U = \frac{z}{x^3y^2}$, $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $U = \frac{x^2}{yz^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

$V = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,$ $U = \frac{z^2}{xy^2},$ $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

13. Найти производную скалярного поля $U = U(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{S}$.

$U = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz,$ $\vec{S} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $M(1,1,1).$

$U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},$ $\vec{S} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $M(2,4,4).$

$U = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz,$ $\vec{S} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, $M(1,1,1).$

$U = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $\vec{S} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}, M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$

$U = xz^2 - \sqrt{x^3y}, \vec{S} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k},$ $M(2,2,4).$

$U = x\sqrt{y} - yz^2,$ $\vec{S} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, M(2,1,-1).$

$U = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$, $\vec{S} = 14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}, M(1,1,1).$

$$U = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + xz, \vec{S} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},\ M(2,2,-1).$$

Раздел 7. Интегральное исчисление

7.1. Неопределённый интеграл. Таблица и свойства неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: Функции, замена переменной, по частям, дробно-рациональных функций.

7.2. Определённый интеграл. Определение, геометрический смысл и свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла. Приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур, объёма тела вращения.

7.3. Несобственные интегралы

7.4. Приближенное интегрирование: Метод прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Практическое занятие:

1. Найти неопределенные интегралы

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 5}{x^3}dx \quad \int \frac{\sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt[3]{x}}dx \quad \int\left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2+9}\right)dx \quad \int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2\right)dx$$

$$\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[8]{x^2} - 5}{\sqrt{x}}dx \quad \int \sqrt{x}\left(x^2 - 1\right)dx \quad \int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}}dx$$

$$\int\left(4\sin x + 8x^3 - \frac{11}{\cos^2 x}\right)dx \quad \int\left(7^x - \frac{8}{x} + 4\cos x\right)dx \quad \int \frac{5 + \sin^3 x}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} \quad \int \cos 2x\,dx \quad \int (9x + 12)^{17}dx$$

$$\int \frac{dx}{8x - 1} \quad \int 4^{3-5x}dx \quad \int \sqrt{3x + 4}dx \quad \int \sqrt[3]{(2 + x)^2}\,dx \quad \int \sqrt[3]{(2 - x)^5}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{2x + 9} \quad \int \sin\left(\frac{\tilde{o}}{3} - 4\right)dx \quad \int \cos(5 - 3x)dx \quad \int e^{x+3}d\,x \quad \int 4^{3x}dx$$

$$\int 3^{2-9x}d\,x \quad \int \frac{dx}{x^2 + 16} \quad \int \frac{2dx}{9x^2 + 7} \quad \int \frac{dx}{(2x - 8)^5} \quad \int \frac{6dx}{\left(9 - \frac{x}{3}\right)^7} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 + 3}} \quad \int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2 - 3}} \quad \int \frac{dx}{\sin^2(1 + 2x)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^4}} \quad \int \frac{x - 2}{x + 3}dx$$

$$\int \frac{x^2dx}{x^2 - 9} \quad \int \frac{x^2}{x^2 + 1}dx \quad \int \sin^2 x\,dx \quad \int \cos^2 x\,dx \quad \int \frac{\ln(3x + 5)}{(3x + 5)}dx$$

$$\int\frac{\sqrt[5]{\ln^3(2x-5)}}{(2x-5)}dx \qquad \int\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(x+\frac{3}{x^2}\right)dx \qquad \int\left(\frac{4}{x^2}+\sqrt{3x}\right)x^3dx$$

$$\int cos\left(\sqrt{x}+2\right)d\left(\sqrt{x}+2\right) \qquad \int\frac{d\,x}{\sqrt{25-9x^2}} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{7+4x^2}}$$

$$\int\frac{d\,x}{\sqrt{7-5x^2}} \qquad \int 7^{\,2x\;-3}d\,x$$

2. Найти интегралы:

$$\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2} \qquad \int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx \qquad \int\frac{dx}{x^4-x^2} \qquad \int\frac{dx}{x(x^2+1)} \qquad \int\frac{x\,dx}{x^3-1}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+8} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}} \qquad \int\frac{(3x-2)dx}{x^2+5x-1} \qquad \int\frac{(21x^2+26)\,dx}{(x^2-5x+4)(x+3)}$$

$$\int\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx \qquad \int\frac{x+1}{4x-x^2+3}dx \qquad \int\frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2\left(x-1\right)}$$

$$\int\frac{(5x+3)dx}{(x+2)(x+1)(x-3)} \qquad \int\frac{\left(1-2x^2\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4\right)} \qquad \int\frac{dx}{2x^2+6x+3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} \qquad \int\frac{(x+2)\,dx}{3x^2-x+5} \qquad \frac{(3x^2+24)dx}{(x^2+x-2)(x+1)}$$

3. Найти интегралы:

$$\int x\cdot\sin\tilde{o}dx \qquad \int(x^2+4)Lnxdx \qquad \int xe^{-2x}dx \qquad \int x\sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int(2x+3)\cdot\cos x dx \qquad \int x^3\cdot\cos x^2dx \qquad \int e^{3x}\cdot 5xdx \qquad \int\arcsin xdx$$

$$\int x^2\ln xdx \qquad \int x\cdot\operatorname{arctg}2xdx \qquad \int\left(x^2-4x+1\right)\cdot e^x dx$$

4. Найти интегралы:

$$\int(x+5)^8xdx \qquad \int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \qquad \int\frac{x^3dx}{(x-1)^2} \qquad \int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

5. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx \qquad \int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \int x\cdot(2x-9)^6dx \qquad \int\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \int\frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)} \qquad \int\sqrt{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{\arccos x\cdot\left(1-x^2\right)}}$$

$$\int\cos(3x)\cdot\sin(2x)dx \quad \int\sin(4x)\cdot\sin(5x)dx \quad \int\cos(4x)\cdot\cos x dx$$

$$\int\sin^3 x\cdot\cos x dx \quad \int\cos^4 x\cdot\sin^3 x dx \quad \int\cos^3 x\cdot\sin^5 x dx$$

$$\int\cos^4 x\cdot\sin^2 x dx \quad \int\mathrm{tg}^4 x\cdot\sec^2 x dx \quad \int\mathrm{ctg}^4 x dx \quad \int\frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$\int\frac{dx}{3+\sin x} \quad \int\frac{dx}{3+5\cos x}$$

6. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx \quad \int_2^5\frac{dx}{2x-3} \quad \int_1^e\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx \quad \int_1^5\frac{x}{1+x^2}dx \quad \int_0^{\pi}\left(\cos^3 x-\frac{3}{4}\cos x\right)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cdot(3-\cos 2x)dx \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos 6x} \quad \int_2^3\frac{x^2+1}{x^3-x}dx \quad \int_1^3\frac{dx}{x^2+6x+10}$$

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln^3 x}{3x}dx \quad \int_0^1\frac{4\,arctg\,x-x}{1+x^2}dx \quad \int_1^e\frac{\sin\ln x}{x}dx \quad \int_{0,5}^1 x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$$

$$\int_{-0,4}^0(2+5x)^4\,dx \quad \int_{-1}^0 x\,e^{-x}dx \quad \int_{-1}^0 x\ln(x+2)dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos^2 x\,dx$$

$$\int_0^1(2x+3)\,3^x\,dx \quad \int_0^{0,2}x\,e^{5x}\,dx \quad \int_1^{e^2}\ln x\,dx \quad \int_0^1\frac{x^2}{(x+1)^3}dx$$

7. Найти значения несобственных интегралов или установить их расходимость:

$$\int_0^{+\infty}e^{-4x}dx \quad \int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2}dx \quad \int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} \quad \int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12} \quad \int_0^{+\infty}2x\sin x\,dx \quad \int_{-\infty}^0\cos 3x\,dx \quad \int_{-\infty}^0 x\cos x\,dx$$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y^2=x \quad y=0$$

$$x=1, \quad x=4$$

$$y=-x^2+4$$

$$y=0$$

$$y=\cos x \quad y=0$$

$$x=0, \qquad x=\pi/2$$

9. Построить область интегрирования по границам двукратного интеграла:

$$\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$$

10. Изменить порядок интегрирования, предварительно изобразив на чертеже область интегрирования

а) $\int_0^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y)dx$ б) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$ в) $\int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

11. Вычислить $\iint\limits_\sigma \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$ по области, ограниченной прямыми *X*=2, *У*=X и гиперболой *XУ*=1 (двумя способами)

12. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} (2x+y)dxdy,$ где (σ) – треугольник с вершинами в точках: A(–1;2), B(3;4), C(6;2)

13. Найти массу квадратной пластины в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояния до диагоналей квадрата.

14. Построить области по известным пределам данного двукратного интеграла

а) $\int_{-2}^1 dx \int_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$ б) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$

15. Вычислить : а) $\int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\ dy$

б) $\int_0^2 dx \int_9^3 \left(x^2+xy^2\right)dy$ в) $\int_0^2 dy \int_0^{y^2} (x+2y)dx$

г) $\iint\limits_{(\sigma)} (x+y)dx\,dy$, где (σ) ограничена линиями

$$y=\frac{3}{2}x\ (x \succ 0), \quad y=4-(x-1)^2, \quad x=0$$

Самостоятельная работа:

1. Найти интегралы:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)}dx \quad \int e^x\cos(e^x)dx \quad \int \frac{x^2}{(1+x^3)^4}dx \quad \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$$

$$\int \frac{1}{x\ln^4(x)}dx \quad \int \frac{(x^3+3x^2-1/4)}{(x^4+4x^3-x+3)^5}dx \quad \int x^3\sqrt{x^4+2}dx \quad \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}} \quad \int \frac{\cos^4(x)}{\sin^2(x)}dx \quad \int\left(\frac{7x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^3}+5x\right)dx \quad \int\left(4x^5-\frac{2}{\sin^2 x}+\cos x\right)dx$$

$$\int\left(\frac{6}{1+x^2}-5^x+2\right)dx \quad \int \frac{dx}{\cos^2(2-5x)} \quad \int(12-5x)^6dx \quad \int \frac{dx}{2x-7}$$

$$\int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{1-3x^4}} \quad \int\left(ax^3-b\right)^5\cdot x^2dx \quad \int 3^{2+3\cos x}\cdot\sin xdx \quad \int \frac{\sqrt[3]{\ln(8-x)}}{8-x}dx$$

$$\int \frac{dx}{b^2-8x^2} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-3\operatorname{tg}x)^2}\cdot\cos^2 x} \quad \int\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-3x}dx$$

$$\int(9+2x)\sin 7xdx \quad \int(8+5x)\ln xdx \quad \int\ln(6+x)dx$$

$$\int \operatorname{arcctg}\frac{5x}{2}dx \quad \int x\cdot\arccos 2xdx \quad \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx \quad \int \frac{x+1}{4x-x^2+3}dx$$

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx \quad \int \frac{3x-4}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx \quad \int \frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2(x-1)}$$

$$\int \frac{(5x+3)dx}{(x+2)(x+1)(x-3)} \quad \int \frac{\left(1-2x^2\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4\right)} \quad \int\cos\frac{4x}{3}\cdot\sin\frac{5x}{3}dx$$

$$\int\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^3 x\right)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} \quad \int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x} \quad \int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}} \quad \int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}$$

$$\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+3} \quad \int_3^5 \frac{dx}{x^2+4x-1} \quad \int \frac{3x+2}{(x-2)^3}d\,x$$

$$\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} \quad \int \frac{\ln x}{x^5}dx \quad \int_0^{\pi/2}(x-1)\cos x\,dx \quad \int \frac{dx}{x^3+x} \quad \int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$$

$$\int\sin 5x\cos 3x\,dx \quad \int\sin^2 3x\,dx \quad \int_{-1}^{4}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+5}} \quad \int_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx \quad \int x\sin 3x\,dx$$

$$\int x\ln 2x\,dx \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} \quad \int_6^7 \frac{dx}{x^2-7x+10} \quad \int \frac{7x\,dx}{1+\sqrt{x}} \quad \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx \quad \int_0^{0-1} \ln(x+1)dx \quad \int \frac{4+x^2}{x^3+3x}dx \quad \int \frac{dx}{x^4-x^2} \quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx \quad \int \sin^2 \frac{5}{2}x\,dx$$

$$\int_1^{-3} \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}} \quad \int_0^1 x(x-5)^5\,dx \quad \int arc\cos 3x\,dx \quad \int \frac{\ln 3x}{4x^7}\,dx$$

2. Найти интегралы

$$\int \frac{1}{(x+1)(2x+3)}dx \qquad \int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx \qquad \int \frac{x^5}{x+1}dx$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}dx \qquad \int \frac{x-4}{\sqrt{4x-3-x^2}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx \qquad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx,$$

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}},$$

3. Найти интегралы:

$$\int x\exp(5x)dx \quad \int x\cos(2x)dx \quad \int x^2\ln(x)dx \quad \int x^2\exp(x)dx$$

$$\int xctg^2 x dx \quad \int \arcsin^2 x dx \quad \int \arcsin(4x)dx \quad \int \mathrm{arctg}(3x)dx$$

$$\int \ln^2 x dx \quad \int \ln(1+x^2)dx$$

4. Вычислить интегралы:

$$\int \sin^3(x)\cdot\cos^4(x)\cdot dx \quad \int \cos^4(x)\cdot dx \quad \int \mathrm{tg}^5(x)\cdot dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx \quad \int \mathrm{ctg}^4(x)\cdot dx \quad \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx \quad \int \sqrt{x^2-4x+3}\cdot dx \quad \int x\sqrt{2x-x^2}dx \quad \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

5. Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^x \exp(-t^2)dt \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$$

6. Вычислить определенные интегралы

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} (tgx)^4 dx, \quad \int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2+9)^2}dx, \quad \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2}$$

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 4 - x^2, \quad x^2 + 2x + y = 0, \quad x^2 - 2x + y = 0$$

$$y = \sqrt{x-4}; \; y = 4 - x; \; x = 8$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

$$x + y - 5 = 0 \qquad y = 0$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y = 0 \qquad x = -1$$

$$y = 1/x \qquad y = 0$$

$$x = 1, \qquad x = 3$$

8. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг заданной оси:

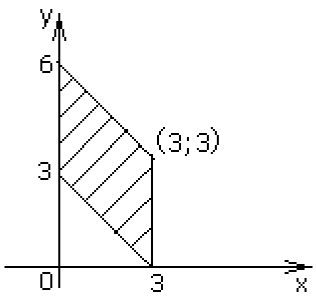
$$y = a - \frac{x^2}{a}, \quad x + y = a, \quad a > 0 \quad \text{вокруг оси} \quad 0y$$

$$y = 4 - x^2, \quad y = 0 \quad \text{вокруг оси} \quad x = 3$$

9. Найдите длину дуги кривой:

$$y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad x \in [1/4; 1]$$

10. Расставить границы интегрирования в том и другом порядке по заштрихованной области. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} (2x - y)\, dx\, dy$.



11. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} \rho^4 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi$, где (σ) – круговой сектор, ограниченный лучами $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и окружностью $\rho = 2$.

Раздел 8. Комплексный анализ

8.1. Комплексные числа. Формы записи и перевод из одной формы в другую. Действия с комплексными числами. Решение уравнений.

8.2. Определение функции комплексного переменного.

8.3. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность и особые точки.

Практическое занятие:

1. Найти значение функции $f(z) = z^4 + \frac{2+i}{z} - (-3+2i)$ при $z = 1-2i$.

2. Решить уравнение $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$.

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z = 2$; $z = -2$; $z = i$; $z = -i$; $z = 1+i$; $z = -1+i$; $z = -1-\sqrt{3}i$.

4. Выполнить действия $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}$.

5. Найти все корни $\sqrt[4]{-4}$.

6. Вычислить $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$.

7. Провести вычисления в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{5+i} + (i-1)(2-3i); \quad \left(\frac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2 \quad \frac{4-i}{5+i} + (i-1)(2+3i);$$

$$\frac{2+i}{5+i} + (i-3)(2-3i); \quad \frac{3-i}{5-i} + (i-5)(2-3i); \quad \frac{7-i}{5+i} + (4i-1)(2-2i);$$

$$\frac{2-i}{3+i} + (3i-1)(2-3i); \quad \left(\frac{i^6+2}{i^{21}-1}\right)^2 \quad \left(\frac{i^4+2}{i^{18}-1}\right)^2 \quad \left(\frac{i^{12}+2}{i^{15}-1}\right)^2$$

8. Для комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Построить вектор комплексного числа на плоскости. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

$$z = 4 \quad z = -4 \quad z = 2i \quad z = -3i \quad z = 1+i$$

$$z = -1+\sqrt{3}i \quad z = -2-2i \quad z = 4-4i$$

9. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа. Дайте геометрическую интерпретацию операции извлечения корня:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};\quad \sqrt[4]{-4};\quad \sqrt[3]{8};\quad \sqrt[6]{1};\quad \sqrt[4]{1+i};\quad \left(\frac{+1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24};\quad \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};\quad \left(\frac{+1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};\quad \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}.$$

10. Выражение $(2+i)(3+2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

11. Дано $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 2+i$. Тогда z_1, z_2; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

12. Число $z = x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ – чисто мнимое при x, равном:

13. Число $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

14. Выражение $(3i-1)(2i+5) - 4i$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

15. Дано $z_1 = 1+3i$, $z_2 = -2+2i$. Тогда z_1, z_2; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

16. Определить, при каком действительном значении x числа $z_1 = (2-xi)+(3+4i)$ и $z_2 = 5+3xi$ будут сопряженными.

17. Число $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

18. Выражение $(2+3i)(3-2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

19. Дано $z_1 = 2+i$, $z_2 = 1-i$. Тогда z_1, z_2; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

20. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто действительное при x, равном:

21. Число $z = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

22. Выражение $(2+3i)^2 - 2$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

23. Дано $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$. Тогда z_1, z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

24. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто мнимое при x, равном:

25. Число $z = 6e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

26. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $w = e^{z^2}$

27. Восстановить функцию комплексной переменной: $\mathrm{Re}f(z) = x^3 - 3xy^2$, $f(2) = 1$.

28. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $w = \sin z$

29. Восстановить функцию комплексной переменной: $\mathrm{Re}f(z) = 2\sin x \cdot \mathrm{ch} y - x$, $f(0) = 1$.

30. Найти особые точки функций:

1) $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$ 2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$

31. Найти вычеты функций в их особых точках.

1) $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z-2)(z+1)^2}$ 2) $f(z) = ctg\, z$, $z=\pi$.

32. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=2} \frac{z^4}{(z+4)^3}dz$, 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2-6z}dz$, 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$

Самостоятельная работа:

1. Определить x так, чтобы комплексные числа были равны, $z_1 = x^2 - 7x + 9xi$ и $z_2 = x^2 i + 20i - 12$.

2. При каких значениях x и y комплексное число $3y - x - 6 + 2yi - 3xi + 10i$ будет равно 0?

3. При каких действительных значениях x комплексное число $x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ будет чисто мнимым?

4. Найти модуль и аргумент комплексных чисел $-1+\sqrt{3}i$, $-7+i$; $-3-2i$, числа сопряженные данным и изобразить их геометрически.

5. Представить в тригонометрической и показательной форме числа: $2+4i$, $12i$, $-4-3i$.

6. Представить в алгебраической и показательной форме числа: $2\left(cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $-\sqrt{3}\left(cos\dfrac{\pi}{4}-i\cdot sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

7. Представить в тригонометрической и алгебраической форме числа: $3\cdot e^{\frac{i\cdot\pi}{6}}$ $4\cdot e^{\frac{-i\cdot 2\pi}{3}}$ $5\cdot e^{\frac{i\cdot 4\pi}{3}}$

8. Выполнить сложение комплексных чисел $z=z_1+z_2+z_3$, где $z_1=3-2i$, $z_2=-3+4i$, $z_3=2-i$.

9. Вычислить: а) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; б) $\dfrac{1+i}{1-i}$; в) $\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-3i}{3+i}$; г) $(2-3i)^2$; д) $(-3+2i)\cdot 2+(7-5i)\cdot 3$; $\dfrac{1}{(1+i)^2}+\dfrac{1}{(1-i)^2}$; $i4+2i8-4i42+6i123-4i27$

10. Найти комплексное число z из уравнения $(2+5i)\cdot z=2-5i$.

11. Найти два действительных числа, удовлетворяющих равенству: а) $\dfrac{2i}{x}+iy-2=3i-\dfrac{3}{x}+y$; б) $3x+xi-5i-y=yi-7$; в) $(2+3i)(x-i)+(y+5i)=1-3i$.

12. Найти x, если $(1+2xi)^3+11$ есть чисто мнимое число.

13. Найти x, если $(x-2i)^3-2xi$ есть действительное число.

14. Найти такие действительные x, y, при которых выполняется равенство: $x+2xi+3+(y-2i)^2=\dfrac{18-14i}{3+i}$.

15. Найти a и b, если: а) $\sqrt{a+bi}=5+3i$; б) $\sqrt{a+bi^{17}}=1+2i$

16. Провести вычисления в алгебраической форме: $\dfrac{2-i}{5+i}+(i-1)(2-3i)$; $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2$

17. Для указанных комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Постройте вектор комплексного числа на плоскости. Запишите число в тригонометрической и показательной формах: $z=4$ $z=-4$ $z=2i$ $z=-3i$ $z=1+i$ $z=-1+\sqrt{3}i$ $z=-2-2i$ $z=4-4i$.

18. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа: $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}$

19. Найти корни уравнений: $z^2+6z+13=0$, $z^2-8z+20=0$, $z^3+27=0$.

20. Выражение $(3+2i)^2+5\imath$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

21. Дано $z_1=3+i$, $z_2=2-i$. Тогда z_1, z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

23. Число $z=4x\ i+(3i+2)^2+x^2$ – чисто действительное при x, равном:

22. Число $z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

23. Выражение $(3-2i)^2-4$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

24. Дано $z_1=2-i$, $z_2=1+i$. Тогда z_1, z_2; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

25. Число $z=4x\ i+(3i+2)^2+x^2$ – чисто мнимое при x, равном:

26. Число $z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

Раздел 9. Дифференциальные уравнения

9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения, задача коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения, уравнения Бернулли.

9.2. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения, задача коши. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

9.3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Практическое занятие:

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (y - x^2y)\mathrm{d}y = 0 \quad xy\cdot y' = 1 - x^2 \quad y' = 10x + y$$

$$y\cdot y' = \frac{1-2x}{y} \quad xy' + y = y^2 \quad y'\mathrm{tg}\, x - y = 2$$

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

$$y'\cdot\sin 2x = y\cdot\ln y, \quad y(\pi/4) = e$$

$$\sin y\cdot\cos x\, \mathrm{d}y = \cos y\cdot\sin x\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = \pi/4;$$

$$y - xy' = 2(1 + x^2y'), \quad y(1) = 1;$$

$$(1 + x^2)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$y' = \frac{y+1}{x} \quad y' = \frac{1+y^2}{xy} \quad (x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x} \quad xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x} \quad xyy' = y^2 + 2x^2$$

$$\frac{xy' - y}{x} = tg\frac{y}{x} \quad y' = -\frac{x+y}{x} \quad xy' = y + x\cdot cos^2\frac{y}{x}$$

4. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

$$xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y, \quad y(1)=1$$

$$xy' - y = xtg\,\frac{y}{x},\ y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x},\ y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' + 2xy - x = 0,\ y(0) = 2{,}5$$

$$xy' + y = x^2 + 1,\ y(3) = 2$$

5. Построить интегральную кривую уравнения $(x–2)dy–(y + 3)dx = 0$, проходящую через точку М (3;–1)

6. Решить уравнения:

$$\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2 \qquad \left(1-x^2\right)y' - xy = 1$$

$$y' - \frac{1+2x}{x^2}\,y = 1 \qquad y' - y = xe^x$$

7. Решить дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$У - x\cdot y' = y\cdot\ln\frac{x}{y} \qquad y' - 2y = e^{2x} \qquad y(1+x^2)y' = 1 + y^2$$

$$xy^2dy = (x^3 + y^3)dx \qquad xy' + 3y = 7x^4 + 2x^3$$

$$(3x^2y^2 - 1)dx + (2x^3y + 4)dy = 0 \qquad (xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$$

8. Найти решения дифференциальных уравнений:

$$y'' = \sin x$$

$$(1 = x^2)y'' – 2xy' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$

$$1 = (y')2 = 2yy'$$

9. Найти решения дифференциальных уравнений:

$y'' = e^x$, $y'' = 3x^2 – 4x = 1,\ y(0) = 1,\ y'(1) = 1$, $y'' = x^2 – \cos x$,

$y''' = 2x^2 = 3$, $(1 = x)y'' – y' = 0$, $y'' = y' = x$,

$y'' = 3y' = y$ $xy'' = y'$ $y(1) = 1$ $y'(0) = 2$ $y'' = y'/x = x$.

10. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' = y' – 2y = 0$; б) $y'' – 2y' = y = 0$; в) $y'' = 6y' = 13y = 0$;

г) $y'' = 24y' – 144y = 0$; д) $y'' = 15y' = 0$; е) $y'' = 3y = 0$.

11. Найти частные решения уравнений:

$$y'' – 4y' = 3y = 0,\quad y(0) = 6,\ y'(0) = 10$$

$$y'' = 4y' = 29y = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15$$

$$4y'' = 4y' = y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$$

12. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни его характеристического уравнения, и написать его общее решение:

а) $к_1 = 2$, $к_2 = -1$

б) $к_1 = 1$, $к_2 = 3$

в) $к_1 = 2j$, $к_2 = -2j$

г) $к_1 = 1 + 3j$, $к_2 = 1-3j$

д) $к_1 = 2$, $к_2 = 2$

13. Решить уравнения:

$y'' + 4y' + 3y = 9e - 3x$ $\qquad$ $y'' - y = 2x$

$y'' - 4y' + 4y = x^2$ $\qquad$ $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

$y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2,$ $\quad$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 0.$

$y'' - 3y' = 2e^{3x}$ $\qquad$ $y'' - 3y' = 2x + 5.$

$y'' + 8y' + 16y = x^2 - 2$ $\qquad$ $y'' + 8y' + 16y = 3e - 4x$

$$y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$$

$y'' + y = -8\cos 3x$ $\qquad$ $y'' + 100y = \sin 2x,$

$y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}\cos(x/2),$ $\qquad$ $y'' + y + \sin 2x = 0,$ $y(\pi) = y'(\pi) = 1.$

$y'' + 3y' = 9\cos 3x - 4\sin 3x,$ $\qquad$ $y'' + 6y' + 9y = e - x\sin x.$

$y''-7y'+6y = \sin x,$ $\qquad$ $5y''-6y'+5y=e0{,}6x\sin\frac{4}{5}x.$

14. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $\dfrac{dy}{x^2+x+1} - \dfrac{dx}{y(x-1)} = 0, \quad y(0) = 2$

б) $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 1/2, \quad y'(\pi/2) = 7$

15. Найти общие решения уравнений:

а) $y' + (1 + \dfrac{1}{x^2})y = e^{1/x}$

б) $(3x^2 + xy - y^2)dx + x^2dy = 0$

в) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$

16. Записать в общем виде частные решения уравнений:

$$2y'' - 3y' - 14y = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \\ xe^{-2x} \\ 3\cos 2x \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям

$a)\ y'\, tgx - y = 1, \quad y(\pi/2) = 1$

$б)\ y'' - 2y' + 2y = 0, \ \ y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$

2. Найти общие решения уравнений:

$a)\ y' + 2y = e^{-x}$ $\qquad$ $б)\ xy' = y\ln\frac{y}{x}$ $\qquad$ $в)\ y'' - 5y' = -9e^{5x}$

3. Записать в общем виде частные решения уравнений:

$$y'' + 4y = \begin{cases} e^{3x} \\ x - 5 \\ 8\sin 2x \\ e^{2x}\cos x \\ 3x^2 + 5 + e^{-x} \end{cases}$$

4. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $y' = y, \quad y(0) = 1$

б) $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

5. Найти общие решения уравнений :

а) $y' + 2xy = e^{=x^2}$ $\quad$ б) $2xy\, y' = 3y^2 + 4x^2$ $\quad$ в) $y'' - 2y' = e^{2x}$

6. Записать в общем виде частные решения уравнений.

$$4y'' + 4y' + y = \begin{cases} 3x^2 - 8x + 2 \\ e^{-x/2} \\ 2\cos x \\ e^{3x}\sin(x/2) \\ 3x - 2e^{x} \end{cases}$$

7. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $(y-4)dx - (x+1)dy = 0, \quad y(1) = 10$

б) $y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 10$

8.Найти общие решения уравнений:

$$2xy' - y = 3x^2 \qquad y - xy' = \frac{x}{\cos(y/x)} \qquad y'' + 2y' + 2y = x + 1$$

9. Записать в общем виде частные решения уравнений.

$$y'' + 16y = \begin{cases} 1 - 6x \\ 8e^{3x} \\ \sin 2x - 3\cos 2x \\ x^2 + 1 - e^x \\ 3\cos 4x \end{cases}$$

10. Найти общие решения уравнений:

$a)\ y' + 2y = e^{-x}$ $\qquad$ $б)\ xy' = y\ln\frac{y}{x}$ $\qquad$ $в)\ y'' - 5y' = 0$

11. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

$a)\ y'\,tgx - y = 1, y(\pi/2) = 1$ $б)\ y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 1; y'(0) = 3$

12. Решить уравнение:

$$y'' + 4y' + 29y = x^2 - x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0$$

13. Найти общие решения уравнений:

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \qquad 2xyy' = 3y^2 + 4x^2 \qquad y'' - 2y' = 0$$

14. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $y' = y, \quad y(0) = 1$

б) $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

15. Решить уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.