Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и задания для контрольной работы
для направления 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
профиля «Промышленная теплоэнергетика»,
заочной формы обучения

Составитель Т. С. Жирнова

Утверждены на заседании кафедры
Протокол № 1 от 30.08.2016
Рекомендованы учебно-методической
комиссией направления 13.03.01
Протокол № 1 от 29.08.2016
Электронная версия находится
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2017

Контрольная работа составлена в соответствии с программой курса «Спецглавы математики» для студентов 2 курса (3 семестр) направления 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», профиля «Промышленная теплоэнергетика», заочной формы обучения.

Номера задач контрольной работы студент должен выбрать по таблице «Выбор номеров задач контрольной работы» следующим образом:

- найти строку, соответствующую первой букве фамилии;
- найти столбец, соответствующий последней цифре шифра;
- на пересечении найденных строки и столбца взять номера задач контрольной работы.

Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, возвращается непроверенной.

Выбор номеров задач контрольной работы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А, В, Д	1, 27, 45, 80, 91	2, 28, 46, 61, 92	3, 29, 47, 62, 93	4, 30, 48, 63, 94	5, 31, 49, 64, 95	6, 32, 50, 65, 96	7, 33, 51, 66, 97	8, 34, 52, 67, 98	9, 35, 53, 68, 99	10, 36, 54, 69, 100
Б, Е, З	11, 37, 55, 70, 81	12, 38, 56, 71, 82	13, 39, 57, 72, 83	14, 40, 58, 73, 84	15, 21, 59, 74, 85	16, 22, 60, 75, 86	17, 23, 41, 76, 87	18, 24, 42, 77, 88	19, 25, 43, 78, 89	20, 26, 44, 79, 90
Г, Ж, И, Л	1, 27, 45, 80, 91	2, 28, 46, 61, 92	3, 29, 47, 62, 93	4, 30, 48, 63, 94	5, 31, 49, 64, 95	6, 32, 50, 65, 96	7, 33, 51, 66, 97	8, 34, 52, 67, 98	9, 35, 53, 68, 99	10, 36, 54, 69, 100
К	11, 37, 55, 70, 81	12, 38, 56, 71, 82	13, 39, 57, 72, 83	14, 40, 58, 73, 84	15, 21, 59, 74, 85	16, 22, 60, 75, 86	17, 23, 41, 76, 87	18, 24, 42, 77, 88	19, 25, 43, 78, 89	20, 26, 44, 79, 90
М, Н, О	1, 27, 45, 80, 91	2, 28, 46, 61, 92	3, 29, 47, 62, 93	4, 30, 48, 63, 94	5, 31, 49, 64, 95	6, 32, 50, 65, 96	7, 33, 51, 66, 97	8, 34, 52, 67, 98	9, 35, 53, 68, 99	10, 36, 54, 69, 100
П, Х, Ц, Ш	11, 37, 55, 70, 81	12, 38, 56, 71, 82	13, 39, 57, 72, 83	14, 40, 58, 73, 84	15, 21, 59, 74, 85	16, 22, 60, 75, 86	17, 23, 41, 76, 87	18, 24, 42, 77, 88	19, 25, 43, 78, 89	20, 26, 44, 79, 90
С, У, Ё, Ы, Й	1, 27, 45, 80, 91	2, 28, 46, 61, 92	3, 29, 47, 62, 93	4, 30, 48, 63, 94	5, 31, 49, 64, 95	6, 32, 50, 65, 96	7, 33, 51, 66, 97	8, 34, 52, 67, 98	9, 35, 53, 68, 99	10, 36, 54, 69, 100
Р, Т, Ф	11, 37, 55, 70, 81	12, 38, 56, 71, 82	13, 39, 57, 72, 83	14, 40, 58, 73, 84	15, 21, 59, 74, 85	16, 22, 60, 75, 86	17, 23, 41, 76, 87	18, 24, 42, 77, 88	19, 25, 43, 78, 89	20, 26, 44, 79, 90
Ч, Щ, Э, Ю, Я	1, 27, 45, 80, 91	2, 28, 46, 61, 92	3, 29, 47, 62, 93	4, 30, 48, 63, 94	5, 31, 49, 64, 95	6, 32, 50, 65, 96	7, 33, 51, 66, 97	8, 34, 52, 67, 98	9, 35, 53, 68, 99	10, 36, 54, 69, 100

ПРОГРАММА КУРСА

Рабочая программа дисциплины «Спецглавы математики» для студентов 2 курса (3 семестр) составлена в соответствии с учебным планом.

1. Обработка экспериментальных данных

1.1. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона
1.2. Линейная корреляция, метод наименьших квадратов
1.3. Подбор эмпирических формул, метод выравнивания

2. Численное решение алгебраических уравнений

2.1. Предмет численных методов
2.2. Теория погрешностей. Сходимость и устойчивость численных методов
2.3. Основные численные методы решения алгебраических уравнений: метод хорд, метод касательных, метод проб и метод итераций
2.4. Численные методы решения систем алгебраических уравнений: метод исключения Гаусса

3. Численное дифференцирование и интегрирование

3.1. Основы численного дифференцирования
3.2. Численное интегрирование: метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона

4. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов
4.2. Метод последовательных приближений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений
4.3. Метод Эйлера и Рунге-Кутта
4.4. Решение краевой задачи для уравнения второго порядка методом конечных разностей и методом прогонки

5. Численные методы решения уравнений с частными производными

5.1. Классификация задач математической физики: уравнение Лапласа, Пуассона, уравнение теплопроводности и уравнение колебания струны, начальные и краевые условия
5.2. Уравнение Лапласа в конечных разностях, метод сеток для уравнения колебания струны
5.3. Явный и неявный (метод прогонки) конечно-разностный метод решения уравнения теплопроводности

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

При решении **задач 1–20** нужно использовать метод выравнивания и метод наименьших квадратов для определения параметров эмпирической формулы линейной зависимости [1, гл. 2; 3, гл. 18].

Пример 1. Найти выборочное уравнение линии регрессии Y на X по данным $n = 5$ наблюдений**.**

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Решение. Выборочное уравнение линии регрессии Y на X будем искать в виде

$$Y = kx + b. \qquad (1)$$

Подберём параметры k и b так, чтобы данные точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$, $(x_5; y_5)$, построенные по наблюдениям, на плоскости лежали как можно ближе к прямой (1). Уточним смысл этого требования. Будем требовать, чтобы сумма квадратов отклонений $(Y_i - y_i)$ была минимальной (применяем метод наименьших квадратов), здесь Y_i – вычисленная по уравнению (1) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i – наблюдаемая ордината, соответствующая x_i.

При этом получается:

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n\sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}. \qquad (2)$$

Составим расчётную таблицу для нашего примера.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 15$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 8{,}15$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 57{,}5$	$\sum_{i=1}^{5} x_i\, y_i = 26{,}975$

Найдём искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (2):

$$k = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 5{,}75 - 15^2} = 0{,}202;$$

$$b = \frac{5 \cdot 8{,}1557 - 15 \cdot 26{,}975}{5 \cdot 5{,}75 - 15^2} = 1{,}024.$$

Напишем искомое уравнение линии регрессии:

$$Y = 0{,}202x + 1{,}024.$$

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i, найдём отклонения $Y_i - y_i$. Результаты вычислений сведём в таблицу:

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	–0,024
1,50	1,327	1,40	–0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,183
5,00	2,034	2,25	–0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

Если экспериментальные точки (x_i; y_i) не располагаются на прямой линии, то, во многих случаях, вводя новые переменные X и Y, можно добиться того, чтобы преобразованные точки (X_i; Y_i) лежали на некоторой прямой плоскости OXY (метод выравнивания). Рассмотрим некоторые функции, которые можно с помощью несложных преобразований свести к линейной зависимости.

1) Степенная зависимость $y = cx^a$,
где a и c – постоянные, причём $x > 0$ и $y > 0$.

Логарифмируя данную формулу, имеем $\ln y = a \ln x + \ln c$.

Отсюда, полагая $X = \ln x$; $Y = \ln y$; $k = a$; $b = \ln c$, получаем формулу линейной зависимости(1): $Y = kX + b$.

2) Показательная зависимость $y = ce^{ax}$, где $c > 0$.

Логарифмируя, имеем $\ln y = ax + \ln c$.

Полагая $X = x$; $Y = \ln y$; $k = a$; $b = \ln c$, получаем линейную зависимость(1): $Y = kX + b$.

3) Рассмотрим зависимость вида $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

Отсюда $\dfrac{1}{y} = ax + b$, то есть имеем линейную зависимость. Введя новые переменные $X = x$; $Y = \dfrac{1}{y}$; $k = a$; $b = b$, получаем зависимость (1): $Y = kX + b$.

4) Возьмём зависимость $y = ab^x$.

Логарифмируя её, мы также приводим к виду (1).

$\ln y = x\ln b + \ln a$; при этом $X = x$; $Y = \ln y$; $k = \ln b$; $b = \ln a$.

5) Зависимость $y = a + \dfrac{b}{x}$. Введя новые переменные $X = x$; $Y = yx$; $k = a$; $b = b$, получаем зависимость (1): $Y = kX + b$.

6) Для зависимости вида $y = \dfrac{x}{ax+b}$ вводим переменные $X = x$; $Y = \dfrac{x}{y}$; $k = a$; $b = b$, при этом опять получаем зависимость (1).

7) Зависимость $y = a\ln x + b$ легко превращается в линейную зависимость (1), если положить $X = \ln x$; $Y = y$; $k = a$; $b = b$.

Для новых координат X и Y, используя формулы (2), находим значения коэффициентов k и b, а затем значения коэффициентов из исходной зависимости.

Пример 2. Задана таблица замеров величины у в зависимости от различных значений x:

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,6	1,2	2,45	4,9	9,9	20,0

Определить коэффициенты рекомендуемой эмпирической формулы – $\tilde{y} = ce^{ax}$, используя метод выравнивания и метод наименьших квадратов. Вычислить по найденной эмпирической формуле значения функции $\tilde{y}_i$ при данных значениях x_i и сравнить их с исходными замерами y_i.

Решение. Логарифмируя рекомендуемую формулу, имеем $\ln\tilde{y} = ax + \ln c$. Полагая $X = x$; $Y = \ln\tilde{y}$; $k = a$; $b = \ln c$, получаем линейную зависимость (1): $Y = kX + b$.

Для нахождения параметров k и b применяем формулы (2), для чего составляем расчётную таблицу.

X_i	$Y_i = \ln y_i$	X_i^2	X_iY_i
1,0	–0,5108	1,0	–0,5108
2,0	0,1823	4,0	0,3646
3,0	0,8961	9,0	2,6887
4,0	1,5892	16,0	6,3568
5,0	2,2925	25,0	11,4625
6,0	2,9957	36,0	17,9742
$\sum_{i=1}^{6} X_i = 21$	$\sum_{i=1}^{6} Y_i = 7{,}445$	$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 = 91$	$\sum_{i=1}^{6} X_iY_i = 38{,}336$

$$k = \frac{6 \cdot 38{,}336 - 21 \cdot 7{,}445}{6 \cdot 91 - 21^2} = 0{,}70;$$

$$b = \frac{91 \cdot 7{,}445 - 21 \cdot 38{,}336}{6 \cdot 91 - 21^2} = -1{,}215.$$

Отсюда $k = a = 0{,}7$; $b = \ln c = -1{,}215$; $c = e^{-1{,}215} = 0{,}3$.

Таким образом, искомая функция имеет вид $\tilde{y} = 0{,}3e^{0{,}7x}$.

Сравним значения этой функции с исходными замерами y_i в точках x_i.

x_i	$\tilde{y}_i$	y_i	$\tilde{y}_i - y_i$
1,0	0,604	0,6	0,004
2,0	1,2165	1,2	0,0165
3,0	2,4498	2,45	–0,0002
4,0	4,9335	4,9	0,0335
5,0	9,9345	9,9	0,0345
6,0	20,0058	20,0	0,0058

Для решения **задач 21–40** необходимо знать методы решения нелинейных и трансцендентных обыкновенных уравнений [2, гл. 5; 4; 6, гл. 9].

Задача приближённого вычисления корней уравнения $f(x) = 0$ распадается на две задачи:

1) задачу отделения корней, то есть отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключён один и только один корень уравнения;

2) вычисление корня с заданной точностью, используя один из рекомендуемых методов.

Пример 3. Отделить корни уравнения

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$$

аналитически и уточнить один из них методом проб с точностью 0,01.

Решение. Полагая $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$, имеем

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x - 3).$$

Отсюда корни производной: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3/4$. Составим таблицу знаков функции $f(x)$ (sign $f(x)$):

x	$-\infty$	-1	3/4	1	$+\infty$
sign $f(x)$	+	–	–	–	+

Из таблицы видно, что исходное уравнение имеет два действительных корня $x_1 \in [-\infty, -1]$; $x_2 \in [1, +\infty]$. Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

x	-2	–1	1	2
sign $f(x)$	+	–	–	+

Следовательно, $x_1 \in [-2, -1]$; $x_2 \in [1, 2]$.

Уточним один из корней, например, $x_1 \in [-2, -1]$, методом проб до сотых долей. В методе проб интервал изоляции корня уменьшается путём деления его, например, пополам, определяя, на границах, какой из частей первоначального интервала функция $f(x)$ меняет знак. Затем полученный интервал снова делят на две части и т.д. Такой процесс проводится до тех пор, пока не перестанут изменяться десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности). Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу.

n	a_n	b_n	$x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$
0	–2	–1	–1,5	–3,5625
1	–2	–1,5	–1,75	0,3633
2	–1,75	–1,5	–1,63	–1,8140
3	–1,75	–1,63	–1,69	–0,7981
4	–1,75	–1,69	–1,72	–0,2363
5	–1,75	–1,72	–1,73	–0,0406
6	–1,75	–1,73	–1,74	0,1592
7	–1,74	–1,73		

Ответ: $x = -1{,}73$.

Пример 4. Отделить корни уравнения $\mathrm{tg}(0{,}55x + 0{,}1) = x^2$ и уточнить один из них методом хорд с точностью 0,001.

Решение. Для отделения корней построим графики функций y_1 = tg(0,55x + 0,1); $y_2 = x^2$. Составим таблицу значений этих функций.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_1	0,1	0,21	0,33	0,46	0,60	0,76
y_2	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,0

Таким образом, положительный корень уравнения заключён в промежутке [0,6; 0,8]. Чтобы уточнить корень методом хорд, можно руководствоваться следующим правилом:

а) если $f''(x)\cdot f(b)>0$ на [a, b], то за приближённое значение искомого корня принимается значение

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)},$$

при этом $x_0=a$;

б) если $f''(x)\cdot f(a)>0$ на [a, b], то

$$x_{n+1}=a-\frac{(x_n-a)f(a)}{f(x_n)-f(a)},$$

при этом $x_0=b$.

Вычисление приближённых значений корней следует вести до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения уравнения.

Определим знаки функции $f(x)=\mathrm{tg}(0{,}55x+0{,}1)-x^2$ на концах промежутка [0,6; 0,8] и знак её второй производной в этом промежутке:

$$f(0{,}6) = \mathrm{tg}0{,}43 – 0{,}36 = 0{,}4586 – 0{,}36 = 0{,}0986;$$
$$f(0{,}8) = \mathrm{tg}0{,}54 – 0{,}64 = 0{,}5994 – 0{,}64 = –0{,}0406;$$

$$f'(x)=\frac{0{,}55}{\cos^2(0{,}55x+0{,}1)}-2x;\quad f''(x)=\frac{0{,}605\sin(0{,}55x+0{,}1)}{\cos^3(0{,}55x+0{,}1)}-2<0$$

при $x\in[0{,}6;\,0{,}8]$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

где b = 0,8; x_0 = 0,6.

Вычисления удобно располагать в таблице.

n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
0	0,6	0,0986	–0,142
1	0,742	0,0064	–0,008
2	0,750	0,0002	–0,0002
3	0,7502	0	

Ответ: x = 0,750.

Пример 5. Отделить корни уравнения

$$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0$$

и уточнить один из них методом касательных с точностью 0,001.

Решение. Отделим корни аналитически.

$$f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x + 0{,}5,$$

так как

$$D = 0{,}16 - 6 < 0,$$

то $f'(x)$ действительных корней не имеет. $f''(x) = 6x - 0{,}4.$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$.

x	$-\infty$	–1	0	$+\infty$
sign $f(x)$	–	–	+	+

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий в промежутке [–1, 0]. Уточним этот корень методом касательных.

Если действительный корень уравнения $f(x)$ = 0 изолирован на отрезке $[a, b]$. Возьмём на этом отрезке такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т.е. $f''(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$ (в частности, за x_0 может быть принят тот из концов отрезка $[a, b]$, в котором соблюдено это условие). За приближённое значение корня возьмём $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Второе приближение будем искать аналогично: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, и т.д. Полученная таким образом последовательность имеет своим пределом искомый корень.

Так как $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$ и $f''(x) < 0$ в промежутке $[-1, 0]$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = -1$. Для вычислений применяем формулу $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Вычисления располагаем в таблице.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	–1	−0,2	3,9	−0,051
1	−0,949	−0,0093	3,5814	−0,0026
2	−0,9464	−0,0004	3,5657	−0,00001

Ответ*:* $x = -0{,}946$.

Пример 6. Отделить корни уравнения $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$ и уточнить один из них методом итераций с точностью 0,001.

Решение. Отделим корни аналитически. Находим $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3$; $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7$; $D = 16 - 48 < 0$.

Составим таблицу.

x	$-\infty$	–1	0	$+\infty$
sign $f(x)$	–	–	+	+

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий в промежутке $[-1, 0]$. Уточним этот корень методом итераций. При использовании метода итераций уравнение $f(x) = 0$ следует при-вести к виду $x = \varphi(x)$, например, по формуле $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{k}$, причём k следует выбрать так, чтобы $|k| > Q/2$, где $Q = \max_{[a,b]} \lfloor f'(x) \rfloor$, и, чтобы знак k совпадал бы со знаком $f'(x)$ на $[a, b]$. Итерационный процесс сходится при условии $|\varphi'(x)| < 1$ на $[a, b]$.

Уточнение корня производится по формуле

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2...$, x_0 – значение, взятое из промежутка $[a, b]$.

Приведём заданное уравнение к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$ в промежутке [–1, 0]. Так как

$$Q = \max_{[-1,0]} \lfloor f'(x) \rfloor = f'(-1) = 3 + 4 + 7 = 14,$$

то можно взять k = 10. Тогда

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{k} = x - 0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 - 0{,}7x - 0{,}3 = -0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}3.$$

Положим x_0 = 0, тогда

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2...$

Вычисления располагаем в таблице:

n	x_n	$\varphi(x_n)$
0	0	–0,3
1	–0,3	–0,3693
2	–0,3693	–0,3785
3	–0,3785	–0,3795
4	–0,3795	–0,3796
5	–0,3796	

Ответ: $x = -0{,}380$.

Для решения **задач № 41–60** следует познакомиться с численными методами нахождения определённых интегралов [6, гл. 9, п. 3].

Пример 7. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln x}$, используя приближенную формулу параболических трапеций (Симпсона).

Решение. Для приближенного вычисления определенных интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx$:

1) делят интервал интегрирования $[a, b]$ точками x_1, x_2... x_{n-1} на n равных частей, $h = (b - a)/n$ – шаг разбиения, $x_0 = a$; $x_n = b$;

2) вычисляют значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления: $y_0 = f(x_0) = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n) = f(b)$;

3) вычисленные значения подставляют в приближенную формулу параболических трапеций (Симпсона):

$$\int\limits_a^b ydx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})\right],$$

$n = 2k$ – четное число.

Для нашего примера разобьем интервал $[2, 3]$ на 10 частей: h = (3 – 2)/10 = 0,1 и подсчитаем значения подынтегральной функции в точках разбиения:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y_i	1,44	1,35	1,27	1,2	1,14	1,09	1,05	1,01	0,97	0,94	0,91

Подставим найденные значения в формулу Симпсона:

$$\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln x} = \frac{0,1}{3} \cdot [1,44 + 0,91 + 4 \cdot (1,35 + 1,2 + 1,09 + 1,01 + 0,94) +$$

$$+ 2 \cdot (1,27 + 1,14 + 1,05 + 0,97)] = 0,33 \cdot (2,35 + 22,36 + 8,86) = 1,0071.$$

Ответ: $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln x} = 1,0071.$

Для решения **задач № 61–80** необходимо изучить методы численного интегрирования задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка [1, гл. 3; 6, гл. 9].

Пример 8. Методом Рунге–Кутта вычислить на отрезке $[a; b]$ = [0; 0,5] численное решение дифференциального уравнения $y' = x + y$ с начальным условием $y(0) = 1$, приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение. С шагом $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{0{,}5-0}{5} = 0{,}1$ построим систему равноотстоящих точек $x_k = x_0 + kh$, при этом $x_0 = a$, $xn = b$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Значения искомой функции $y = y(x)$ в точках x_k на отрезке [0; 0,5] последовательно находим по формулам

$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$,

где $\Delta y_k = \dfrac{1}{6}(q_1^{(k)} + 2q_2^{(k)} + 2q_3^{(k)} + q_4^{(k)})$;

$$q_1^{(k)} = hf(x_k, y_k);\ q_2^{(k)} = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_1^{(k)}}{2});$$

$$q_3^{(k)} = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_2^{(k)}}{2});\ q_4^{(k)} = hf(x_{k+1}, y_k + q_3^{(k)});$$

$$x_0 = a,\ x_n = b,\ x_{k+1} = x_k + h,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Для нашего примера $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, из начальных условий $y_0 = 1$,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (q_1^{(0)} + 2q_2^{(0)} + 2q_3^{(0)} + q_4^{(0)});$$

$$f(x_k, y_k) = x_k + y_k;\ q_1^{(0)} = 0{,}1 \cdot (0+1) = 0{,}1;$$

$$q_2^{(0)} = 0{,}1 \cdot \left[0{,}05 + (1 + \frac{0{,}1}{2})\right] = 0{,}11;$$

$$q_3^{(0)} = 0{,}1 \cdot \left[0{,}05 + (1 + \frac{0{,}11}{2})\right] = 0{,}1105;$$

$$q_4^{(0)} = 0{,}1 \cdot [0{,}1 + (1 + 0{,}1105)] = 0{,}12105;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (0{,}1 + 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}1105 + 0{,}12105) = 0{,}1103$$

и, следовательно, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103.$

Аналогично вычисляются значения функции $y = y(x)$ в других точках области. Результаты вычислений удобно сводить в таблицу (смотри таблицу ниже). Для данной задачи известно точное решение: $y = 2e^x - x - 1,$ при этом $y(0{,}5) = 1{,}79744$.

k	x	y	$q = hf(x_k, y_k) =$ $= 0{,}1(x + y)$	Δy_k
0	0	1	0,1	0,1
	0,05	1,05	0,11	0,22
	0,05	1,055	0,1105	0,221
	0,1	1,1105	0,12105	0,12105
				1/6·0,66205 = 0,1103
1	0,1	1,1103	0,1210	0,1210
	0,15	1,1709	0,1321	0,2642
	0,15	1,1763	0,1326	0,2652
	0,2	1,2429	0,1443	0,1443
				1/6·0,7947 = 0,1324
2	0,2	1,2427	0,1443	0,1443
	0,25	1,3149	0,1565	0,3130
	0,25	1,3209	0,1571	0,3142
	0,3	1,3998	0,1700	0,1700
				1/6·0,9415 = 0,1569
3	0,3	1,3936	0,1700	0,1700
	0,35	1,4846	0,1835	0,3670
	0,35	1,4904	0,1840	0,3680
	0,4	1,5836	0,1984	0,1984
				1/6·1,1034 = 0,1840
4	0,4	1,5836	0,1984	0,1984
	0,45	1,6828	0,2133	0,4266
	0,45	1,6902	0,2140	0,4280
	0,5	1,7976	0,2298	0,2298
				1/6·1,2828 = 0,2138
5	0,5	1,7974		

Для решения **задач 81–100** необходимо знать численные методы решения уравнений с частными производными [1, гл. 5; 2, гл. 10; 5].

Пример 9. Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных и краевых условиях:

$u(x,0) = f(x)$; $u(0,t) = \varphi(t)$; $u(0,6;t) = \Psi(t)$; $0 \le x \le 0,6$;
$0 \le t \le 0,01$.

Уравнение теплопроводности будем решать с помощью явной схемы, при этом возьмём $\sigma = \frac{1}{6}$. Рассмотрим вариант:

$u(x,0) = 3\,(1 - x) + 0,12$; $u(0,t) = 2(t + 0,06)$; $u(0,6;t) = 0,84$.

Решение. Используя метод сеток, по оси *OX* выбирают шаг *h*, а по оси *OY* – шаг *k*, а затем строят сетку со значениями

$x_i = ih$, $t_j = jk$ (i = 0, 1, 2, …, n; j = 0, 1, 2, … m).

Для определения решения в начальный момент времени и на границах области вычисляют $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$ – из начального условия, а $u_{0,j} = \varphi(t_j)$ и $u_{n,j} = \Psi(t_j)$ – из граничных условий.

Для определения значений искомой функции во внутренних точках исходное уравнение заменяется конечно-разностным. Применяются несколько типов конечно-разностных схем. Мы будем применять явную схему.

Для обеспечения устойчивости конечно-разностных схем в этом случае необходимо, чтобы шаги *h* и *k* были неодинаковы, причём шаг *k* должен иметь порядок O(h^2), примем $k = \sigma h^2$. При $\sigma = \frac{1}{2}$ получаем схему $u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$, а при $\sigma = \frac{1}{6}$ – $u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j})$.

Вычисления производятся от значений функции $u(x_i, t_j)$ к значениям $u(x_i, t_{j+1})$, причём $t_{j+1} = t_j + k$, где h = 0,1 – шаг по оси OX, $k = \dfrac{h^2}{6} = \dfrac{0{,}01}{6} \cong 0{,}0017$ – шаг по времени. Вычисления производятся по формуле

$$u_{i,\,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,\,j} + 4u_{i,\,j} + u_{i+1,\,j})$$

(i = 0, 1, 2, 4, 5, 6; j = 0, 1, 2, 4, 5, 6).

Все расчёты приведены в таблице:

	i	0	1	2	3	4	5	6
j	x_i / t_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0	0,12	0,39	0,60	0,75	0,84	0,87	0,84
1	0,0017	0,1233	0,3800	0,5900	0,7400	0,8300	0,8600	0,84
2	0,0033	0,1267	0,6372	0,5800	0,7300	0,8200	0,8517	0,84
3	0,0050	0,1300	0,3659	0,5704	0,7200	0,8103	0,8445	0,84
4	0,0067	0,1333	0,3607	0,5612	0,7101	0,8010	0,8380	0,84
5	0,0083	0,1367	0,3562	0,5526	0,7004	0,7920	0,8322	0,84
6	0,01	0,1400	0,3524	0,5445	0,6910	0,7834	0,8268	0,84

Задания для контрольной работы

№ 1–20. В каждом варианте задана таблица замеров величины у при различных значениях x и рекомендуемый вид эмпирической зависимости $y = f(x)$. Определить коэффициенты, входящие в данную формулу, используя метод выравнивания и метод наименьших квадратов. Вычислить по найденной эмпирической формуле значения функции y_i при данных значениях x_i и сравнить их с исходными замерами y_i (см. пример 2).

№ 1	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	3,1	12,45	27,92	49,54	77,45	111,6
	зависимость $y = c\,x^a$						

№ 2	x_i	10	20	30	40	50	60
	y_i	18,02	25,5	31,2	36,05	40,3	44,15
	зависимость $y = c\,x^a$						

№3	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	2,3	18,35	62,15	147,25	287,45	496,5
	зависимость $y = c\,x^a$						

№ 4	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	6,24	22,8	84,0	308,1	1130,7	4149,02
	зависимость $y = c\,e^{ax}$						

№ 5	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	3,93	9,68	23,8	58,5	144,0	354,25
	зависимость $y = c\,e^{ax}$						

№ 6	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	19,1	11,35	8,76	7,47	6,68	6,18
	зависимость $y = a + \frac{b}{x}$						

№ 7	x_i	10	20	30	40	50	60
	y_i	17,9	11,65	9,56	8,5	7,95	7,48
	зависимость $y = a + \frac{b}{x}$						

№ 8	x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
	y_i	0,474	0,431	0,395	0,365	0,339	0,3165
	зависимость $y = \frac{1}{ax+b}$						

№ 9	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	0,312	0,498	0,625	0,714	0,781	0,833
	зависимость $y = \frac{x}{ax+b}$						

№10	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	3,2	4,5	5,28	5,83	6,25	6,60
	зависимость $y = a\ln x + b$						

№11	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	37,0	23,48	18,9	16,74	15,38	14,5
	Зависимость $y = a + \frac{b}{x}$						

№ 12	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	0,256	0,218	0,182	0,158	0,141	0,127
	зависимость $y = \frac{1}{ax+b}$						

№ 13	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	0,345	0,488	0,566	0,615	0,649	0,674
	зависимость $y = \frac{x}{ax+b}$						

№14	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	5,2	8,45	10,36	11,71	12,76	13,62
	зависимость $y = a\ln x + b$						

№ 15	x_i	0	1	2	3	4	5
	y_i	3,3	0,5	0,3	0,21	0,16	0,13
	зависимость $y = \frac{1}{ax+b}$						

№16	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	9,0	7,15	6,53	6,225	6,04	5,917
	зависимость $y = a + \frac{b}{x}$						

№ 17	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	0,263	0,317	0,341	0,354	0,362	0,368
	зависимость $y = \frac{x}{ax+b}$						

№18	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	5,0	3,55	3,07	2,825	2,68	2,58
	зависимость $y = a + \dfrac{b}{x}$						

№ 19	x_i	0	1	2	3	4	5
	y_i	0,52	1,56	4,68	14,0	42,1	126,36
	зависимость $y = ab^x$						

№ 20	x_i	0	1	2	3	4	5
	y_i	3,5	7,1	14,0	27,9	56,1	112,2
	зависимость $y = ab^x$						

№ 21–40. Отделить корни данного уравнения и уточнить один из них указанным методом с заданной точностью (см. примеры 3–6).

Номер варианта	Уравнение	Рекомендуемый метод	Точность
1	$x^4 + 3x – 20 = 0$	касательных	0,01
2	$x^3 – 2x – 5 = 0$	хорд	0,01
3	$x^4 – 3x + 1 = 0$	касательных	0,01
4	$x^3 + 3x + 5 = 0$	хорд	0,01
5	$x^4 + 5x – 7 = 0$	проб	0,01
6	$x^3 – 12x – 5 = 0$	итераций	0,01
7	$x^3 – 2x^2 – 4x – 7 = 0$	итераций	0,01
8	$x + e^x = 0$	проб	0,01
9	$x^5 – x – 2 = 0$	проб	0,01
10	$x^3 – 10x + 5 = 0$	хорд	0,01
11	$x^4 – 8x + 1 = 0$	касательных	0,01
12	$2x – \cos x = 0$	итераций	0,01
13	$3x^5 + 6x – 16 = 0$	хорд	0,01
14	$2x^3 + 2x – 7 = 0$	касательных	0,01
15	$x + \ln x = 3$	итераций	0,01

Номер варианта	Уравнение	Рекомендуемый метод	Точность
16	$x^3 + 2x^2 + 2 = 0$	итераций	0,001
17	$x^2 + 4\sin x = 0$	итераций	0,001
18	$2x + \cos x = 0,5$	итераций	0,001
19	$x^3 - 6x - 8 = 0$	хорд	0,001
20	$x - \sin x = 0,25$	хорд	0,001

№ 4–60. Вычислить определённый интеграл, используя приближенную формулу параболических трапеций (Симпсона), взять $h = 0{,}1$ (см. пример 7).

№ 41 $\int\limits_0^{0,6} \frac{dx}{1+x^4}$;	№ 42 $\int\limits_0^{0,6} \frac{e^x dx}{2+x}$;	№ 43 $\int\limits_0^{0,8} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;
№ 44 $\int\limits_0^{1} \frac{e^{-x^2}-1}{x} dx$;	№ 45 $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{8+x^2}\, dx$;	№ 46 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\cos x}{1+x} dx$;
№ 47 $\int\limits_0^{0,6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}}$;	№ 48 $\int\limits_0^{0,6} e^{\sin x} dx$	№ 49 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} dx$;
№ 50 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\sin^2 x}{x} dx$;	№ 51 $\int\limits_0^{0,6} x\sqrt{1+x^3}\, dx$;	№ 52 $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$;
№ 53 $\int\limits_1^{1,6} \frac{e^x}{x} dx$;	№ 54 $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{5+x^2}\, dx$;	№ 55 $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{1+5x^2}\, dx$;
№ 56 $\int\limits_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$;	№ 57 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$;	№ 58 $\int\limits_0^{0,6} \frac{e^{x^2}}{1+x} dx$;
№ 59 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$;	№ 60 $\int\limits_0^{0,6} \frac{e^{2x}-1}{x} dx$.	

№ 61–80. Методом Рунге-Кутта вычислить на отрезке $[a; b]$ решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $y(a) = y_0$, приняв шаг $h = \dfrac{b-a}{5}$ (см. пример 8).

Номер варианта	Уравнение	$[a; b]$	y_0
1	$y' = \dfrac{y-x}{y+x}$	[0; 0,5]	1
2	$y' = y - \dfrac{2x}{y}$	[0; 1]	1
3	$y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$	[0; 1]	1
4	$y' = 2y + 3e^x$	[0,3; 0,6]	1,415
5	$y' = x + y^2$	[0; 0,3]	0
6	$y' = y^2 - x^2$	[1; 2]	1
7	$y' = x^2 + y^2$	[0; 1]	0,27
8	$y' = xy(y^2 - 1)$	[0; 1]	0,5
9	$y' = x^2 + y^2 - xy$	[0; 1]	0,1
10	$y' = \dfrac{2y-x}{y}$	[1; 2]	2
11	$y' = \dfrac{1}{y^2 - x}$	[1; 2]	0
12	$y' = x^3 - y$	[1; 2]	- 1
13	$y' = xy - e^x$	[0; 0,1]	0
14	$y' = 2xy + x^2$	[0; 0,5]	0
15	$y' = x + \sin\dfrac{y}{3}$	[0; 2]	1
16	$y' = 2x + \cos y$	[0; 0,1]	0
17	$y' = y^3 + x^2$	[0; 1]	1

Номер варианта	Уравнение	$[a; b]$	y_0
18	$y' = xy - y^2$	[0; 1]	0,5
19	$y' = xy^3 - y$	[0; 1]	1
20	$y' = y^2 e^x - 2y$	[0; 1]	1

81–100. Используя метод сеток (явную схему), составить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных и краевых условиях: $u(x,0) = f(x)$; $u(0,t) = \varphi(t)$; $u(0{,}6;t) = \Psi(t)$; $0 \le x \le 0{,}6$; $0 \le t \le 0{,}01$ (см. пример 9).

Номер варианта	$u(x,0) = f(x)$	$u(0,t) = \varphi(t)$	$u(0{,}6;t) = \Psi(t)$
1	$\cos 2x$	$1 - 6t$	0,3624
2	$x(x + 1)$	0	$2t + 0{,}96$
3	$\sin 2x$	$2t$	0,932
4	$3x(2 - x)$	0	$t + 2{,}52$
5	$\sin(0{,}55x+0{,}03)$	$t + 0{,}03$	0,354
6	$2x(1 - x)+ 0{,}2$	0,2	$t + 1$
7	$\sin x + 0{,}08$	$0{,}08 + 2t$	0,6446
8	$\cos(2x + 0{,}19)$	0,932	0,1798
9	$2x(x + 0{,}2) + 0{,}4$	$2t + 0{,}4$	1,36
10	$\sin(x + 0{,}45)$	$0{,}435 - 2t$	0,8674
11	$x(x +0{,}4) + 0{,}3$	0,3	$6t + 0{,}9$
12	$x(x +0{,}8)$	$6t$	0,84
13	$x(2x +0{,}3)$	0	$6t + 0{,}9$
14	$\sin(x +0{,}48)$	0,4618	$3t + 0{,}882$
15	$\sin(x + 0{,}02)$	$3t + 0{,}02$	0,581
16	$\cos(x + 0{,}48)$	$6t + 0{,}887$	0,4713
17	$1{,}5 - x(1 - x)$	$3(0{,}5 - t)$	1,26
18	$x(0{,}8 - x) + 0{,}6$	0,6	$3(t + 0{,}24)$
19	$2x(1 - x) + 0{,}9$	$3(0{,}3 - 2t)$	1,38
20	$x(1 - x) + 0{,}2$	0,2	$2(t + 0{,}22)$

Список рекомендуемой литературы

1. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 400 с. Режим доступа. – http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=537

2. Воробьева, Г. Н. Практикум по вычислительной математике: учеб. пособие / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. – Москва: Высшая школа, 1990. – 207 с.

3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. – Москва: Высшее образование, 2008. – 479 с.

4. Жирнова, Т. С. Численное решение алгебраических уравнений: методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Спецглавы математики» для студентов очной формы обучения / Т. С. Жирнова, Г. А. Липина, ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», каф. математики, 2015. – 15 с.

http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=8577

5. Жирнова, Т. С. Численные методы решения уравнений с частными производными: методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Спецглавы математики» для студентов 2 курса (3 семестр) направления 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» всех форм обучения / Т. С. Жирнова, Г. А. Липина; ФГБОУ ВПО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», каф. математики, 2015. – 23 с.

http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=3984

6. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. А. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.

Составитель
Жирнова Татьяна Сергеевна

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и задания для контрольной работы
для направления 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
профиля «Промышленная теплоэнергетика»,
заочной формы обучения

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 27.02.2016. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л. 1,4
Тираж 24 экз. Заказ
КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а