

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«Кузбасский государственный технический университет
имени Т.Ф. Горбачева»**

Кафедра прикладных информационных технологий

Составитель

Г. Н. Речко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания к практическим занятиям

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
38.05.01 (080101.65) «Экономическая безопасность»

в качестве электронного издания
для использования в учебном процессе

Кемерово 2015

Рецензенты:

1. Буйная Елена Васильевна – кандидат экономических наук, доцент кафедры прикладных информационных технологий.
2. Лубкова Эльмира Миннулловна – кандидат экономических наук, доцент, зав. кафедрой финансы и кредит, председатель учебно-методической комиссии специальности 38.05.01 (080101) «Экономическая безопасность».

Речко Галина Николаевна. Моделирование экономических процессов: методические указания к практическим занятиям [электронный ресурс] для студентов специальности 38.05.01 (080101.65) «Экономическая безопасность», образовательная программа «Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности», очной формы обучения / сост.: Г. Н. Речко. – Кемерово: КузГТУ, 2015. – Систем. требования: Pentium IV; ОЗУ 8 Мб; Windows XP; мышь. – Загл. с экрана.

Электронное издание предназначено для выполнения заданий к циклу практических занятий. Содержит теоретические положения, задания для практических занятий, контрольные вопросы для текущего контроля.

© КузГТУ, 2015

© Речко Г. Н.,
составление, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	6
1.1. Теоретические положения.....	6
1.2. Вопросы для самоконтроля.....	10
1.3. Варианты заданий для практических занятий	10
2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ	14
2.1. Теоретические положения.....	14
2.2. Вопросы для самоконтроля.....	21
2.3. Варианты заданий для практических занятий	22
3. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА.....	27
3.1. Теоретические положения.....	27
3.2. Вопросы для самоконтроля.....	33
3.3. Варианты заданий для практических занятий	33
4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ (ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ)	36
4.1. Теоретические положения.....	36
4.2. Вопросы для самоконтроля.....	41
4.3. Контрольные задания.....	41
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	45

ПРЕДИСЛОВИЕ

Говоря о «применении математики в экономике», мы подразумеваем не просто выполнение различного рода экономических расчетов, а использование математики для нахождения наилучших экономических решений, изучения экономических закономерностей, получения новых теоретических выводов (синтез экономических и математических знаний раскрывает новые возможности экономического анализа). Главные преимущества математики как средства научного познания раскрываются при построении математических моделей, заменяющих в определенном отношении исследуемые объекты. *Математические модели экономики, отражающие с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений, представляют собой эффективный инструмент исследования экономических проблем* (обычно такие модели называют экономико-математическими).

Основными этапами экономико-математического моделирования считаются:

1) постановка экономической проблемы и её качественный анализ (главное – четко сформулировать сущность проблемы, принимаемые допущения и те вопросы, на которые требуется получить ответы);

2) построение математической модели – этап формализации экономической ситуации (выражение её в виде конкретных математических зависимостей и отношений – функций, уравнений, неравенств и т.п.), где сначала определяется тип модели, а затем уточняются детали модельной конструкции (переменные, параметры, форма связей);

3) математический анализ модели с целью выяснить общие свойства модели (чисто математические приемы);

4) подготовка исходной информации – реальные возможности получения информации (сроки, затраты) ограничивают выбор моделей, предназначенных для практического использования;

5) численное решение – разработка алгоритмов для решения задачи, программное обеспечение и непосредственное проведение расчетов (обычно многовариантных);

6) анализ численных результатов и их применение – по результатам этого этапа, помимо прочего, определяются и направления совершенствования модели, её информационного и математического обеспечения.

По мере расширения и уточнения экономических и математических знаний, развития компьютерных технологий *границы математической формализуемости экономических проблем неизбежно изме-*

няются, хотя всегда будут существовать ещё неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование недостаточно эффективно.

В соответствии с современными научными представлениями системы разработки и принятия хозяйственных решений должны рационально сочетать формальные и неформальные методы, взаимоусиливающие и взаимодополняющие друг друга. *Формальные методы являются, прежде всего, средством научно обоснованной подготовки материала для действий человека в процессе управления.* Это способствует продуктивному использованию его опыта, интуиции при решении слабо формализуемых задач.

Существует обширная литература по экономико-математическому моделированию и математическому аппарату задач принятия решений, часть которой, сохраняя краткость и математическую культуру изложения, доступна не только математикам.

Ниже описаны, в основном, простейшие экономические ситуации, которые формализуются в виде задач *линейной оптимизации* и *теории статистических решений*, для решения которых не требуется использовать сложный математический аппарат, выходящий за пределы традиционных школьного и вузовского курсов.

1. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель практического занятия

На примере двумерных задач линейной оптимизации дать наглядное, графическое представление о сути решаемых линейных оптимизационных моделей экономических процессов.

Содержание занятия

1.1. Теоретические положения

Общая задача линейного программирования состоит в поиске значений показателей (неизвестных переменных), удовлетворяющих некоторым *линейным ограничениям* (ограниченные объемы сырья, рабочей силы и денежных средств, экологические требования и др.) и обеспечивающих наибольшее (наименьшее) значение заданной *линейной функции* (прибыли, издержек). Например, требование:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать} && L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ &\text{при условиях} && x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ & && x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

означает пожелание не только отыскать значения неких величин x_1 , x_2 и x_3 , удовлетворяющих вышеприведенным четырем условиям, но и среди них найти такие, что функция $L(x_1, x_2, x_3)$ принимает самое большое значение.

Количество неизвестных величин, фигурирующих в постановке задачи, называют ее *размерностью*. Набор их значений, удовлетворяющих условиям задачи, называют *планом* (примером может служить программа производства – набор значений показателей, удовлетворяющий ограничениям по сырьевым, социальным и прочим факторам).

Может обнаружиться, что задача неразрешима – не существует ни одного плана (ограничения противоречат друг другу). Может быть единственный план или много (множество) планов, среди которых надо найти наилучший (*оптимальный*), дающий максимум прибыли или минимум затрат.

Размерность реальных задач, как правило, велика (от десятков до нескольких сотен). Здесь мы намерены на примере двумерных задач дать наглядное, графическое представление о существовании решаемых линейных программ (полагая, что всякий человек способен рисовать на плоском листе бумаги и воспринимать конструкции окружающего нас трехмерного пространства).

Решение задачи графически осуществляется в два этапа:

1-й этап – поиск множества планов (допустимых решений).

Очевидно, что уравнение $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y = \gamma$ на плоскости (X, Y) изображает прямую линию и для ее построения достаточно взять пару подходящих точек. Неравенства же $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \leq \gamma$ или $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \geq \gamma$ определяют полуплоскости, ограниченные прямой $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y = \gamma$. Тогда система подобных ограничений определит множество допустимых решений в виде некоторого выпуклого многоугольника (ограниченного или неограниченного), отрезка прямой линии (ограниченного или неограниченного), точки.

Возможен исход, когда множество планов пусто (построив полуплоскости, соответствующие ограничениям задачи, может обнаружиться отсутствие общей области), т. е. система ограничений противоречива или несовместна. Следовательно, такая задача не имеет решения.

2-й этап – поиск оптимального плана (такого допустимого плана, который обеспечивает максимум (минимум) заданной целевой функции). Если вспомнить понятие *градиента* функции в точке как вектора, составленного из частных производных функции, вычисленных в этой точке, и учесть, что *градиент указывает направление наибольшего возрастания функции в окрестности точки*, то в случае линейной функции можно утверждать постоянство градиента в любой точке плоскости. Тогда очевидно, что экстремумы (максимум или минимум) линейной функции достигаются лишь в вершинах множества планов (или на какой-то грани множества, если градиент перпендикулярен этой грани), но не внутри множества. Более того, в двумерном случае при достаточно аккуратных построениях с соблюдением масштаба можно не перебирать все вершины (количество их конечно, но может быть сравнительно большим), а сразу видеть точку экстремума.

Пример 1. Решим задачу максимизации $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 56 \quad (2)$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 4 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Решение. Находим множество допустимых решений (планов) задачи, т. е. множество точек (x_1, x_2) , удовлетворяющих заданной системе ограничений (1)–(5), для чего строим полуплоскости, соответствующие ограничениям задачи, и определяем их общую область.

Берем первое из условий, строим прямую линию $-x_1 + 2x_2 = 6$. Для этого находим любые две ее точки, например, точки пересечения с координатными осями: $x_1 = 0$ $x_2 = 3$ и $x_2 = 0$ $x_1 = -6$, т.е. точки $(0, 3)$ и $(-6, 0)$. Чтобы выделить соответствующую полуплоскость относительно построенной прямой, подставляем координаты какой-либо другой точки (например, начало координат) в левую часть неравенства (1). Так, при подстановке значений $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ видим, что проверяемое условие выполняется ($0 < 6$). Следовательно, область допустимых решений рассматриваемого неравенства $-x_1 + 2x_2 \leq 6$ – та полуплоскость, которая включает начало координат. Отображение второго ограничения абсолютно идентично.

Относительно полуплоскости третьего ограничения: она располагается от граничной прямой по другую сторону, нежели начало координат.

Четвертое и пятое ограничения ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) соответствуют полуплоскостям, лежащим справа от оси ординат и над осью абсцисс (первому квадранту плоскости).

В итоге получаем общую область для всех пяти полуплоскостей (множество планов) – выпуклый пятиугольник (рис. 1).

Теперь следует найти оптимальный план среди множества допустимых. Воспользуемся градиентом функции $L(x) = 2x_1 + 3x_2$. Здесь $\text{grad } L(x) = (2, 3)$. Строим этот вектор на рисунке в отсчете от начала координат (или от любой точки плоскости, или от любой точки множества планов). Если точка экстремума не очевидна, возьмите «нить», перпендикулярную градиенту, и перемещайте над множеством планов в направлении градиента функции.

Нетрудно видеть, что точка последнего касания «нити» с множеством планов будет искомой точкой максимума функции $L(x)$ (точка первого касания – точкой минимума). В нашем примере точка максимума функции $L(x)$ – это точка C. Остается найти её координаты.

Поскольку она получается пересечением первой и второй прямых, то достаточно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$-x_1 + 2x_2 =$$

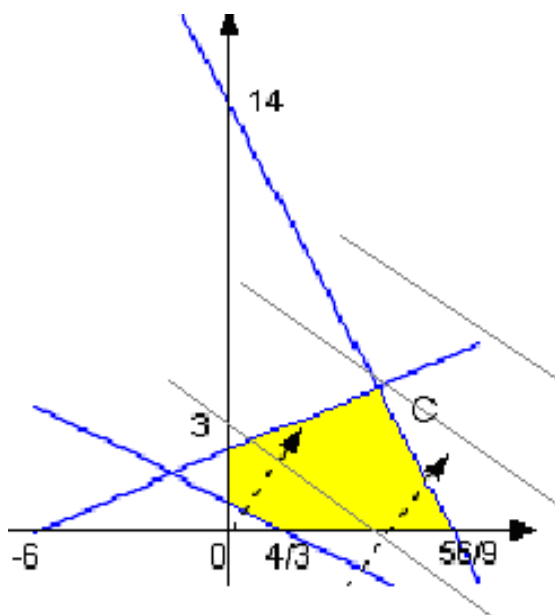


Рис. 1

$$9x_1 + 4x_2 = 56.$$

Человек, знакомый с определителями и правилом Крамера, решает ее в виде:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 56 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 \cdot 4 - 2 \cdot 56}{-1 \cdot 4 - 2 \cdot 9} = \frac{-88}{-22} = 4; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 56 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-1 \cdot 56 - 6 \cdot 9}{-1 \cdot 4 - 2 \cdot 9} = \frac{-110}{-22} = 5$$

Если читатель не считается с затратами труда, он может решать методом подстановок или любым другим приемом.

Итог труда: максимум целевой функции достигается в точке (4, 5) и равен $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$.

Пример 2. Найдем экстремальные значения функции

$$L(x) = 3x_1 - x_2$$

при ограничениях $2x_1 - 3x_2 \geq -6$ (1)

$$x_1 - 2x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 5 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$

Решение. Присутствующие здесь ограничения в принципе ничем не отличаются от ограничений предыдущего примера, но в итоге построения получается множество планов в виде выпуклого неограниченного многоугольника

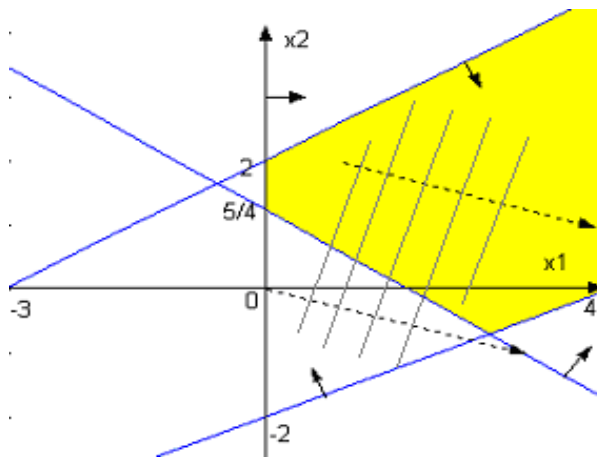


Рис. 2

многоугольника (рис. 2). Если построить градиент $\text{grad } L(x) = (3, -1)$ и перпендикулярные ему «нити» (линии уровня), то легко видеть, что по максимуму $L(x)$ не ограничена ($L(x) \rightarrow +\infty$), а минимум достигается в точке (0, 2) и равен $L(0, 2) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$.

Пример 3. Найдем экстремумы функции $L(x) = x_1 -$

x_2

при ограничениях $-x_1 + 2x_2 \leq 5$ (1)

$$x_1 + x_2 = 0 \quad (2)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Решение. Находим множество допустимых решений задачи (рис. 3). Поскольку второе ограничение представляет собой уравнение

прямой (эта прямая явно проходит через начало координат и для ее построения достаточно отыскать лишь одну точку вне координатных осей), то в результате получаем множество планов в виде отрезка AB .

Если учесть $\text{grad } L(x) = (1, -1)$, легко видеть, что и максимум $L(x)$ достигается в точке A (начале координат) и равен нулю, а минимум – в точке B на пересечении прямых $-x_1 + 2x_2 = 5$ и $x_1 + x_2 = 0$, с координатами $(-5/3, 5/3)$, и $L_{\min}(X) = -10/3$.

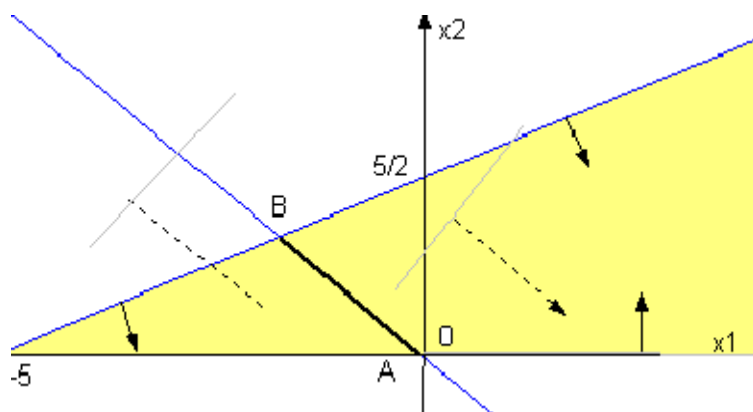


Рис. 3

В заключение заметим, что обнаруженные здесь свойства линейных программ переносятся и на общий случай более чем двух измерений, где прямые превращаются в плоскости, а полуплоскости – в полупространства, многоугольник – в многогранник, но использовать графические приемы решения здесь будет почти всегда нереально.

1.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что вы понимаете под задачей линейной оптимизации?
2. Допустимый план, опорный план, оптимальный план: в чем разница между понятиями?
3. Что означает выражение «найти оптимальное решение задачи»?
4. Как вы понимаете заявление о желании найти «наиболее оптимальный план»?
5. Зачем нужен градиент функции при решении задачи линейной оптимизации?
6. Алгоритм графического решения задачи линейной оптимизации.

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

1.3. Варианты заданий для практических занятий

(номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Решить задачу линейной оптимизации, рассматривая её как задачу максимизации (минимизации) функции $L(x)$ на заданном множестве планов. Объяснить полученные результаты.

1. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$5x_1 - 2x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

3. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$8x_1 - 5x_2 \leq 16$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 9$$

$$x_1 \geq 1$$

5. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \leq 14$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 27$$

$$x_2 \leq 7$$

7. $L(x) = 2x_1 + x_2$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 21$$

$$x_1 = 3$$

9. $L(x) = x_1 + x_2$

при условиях

$$7x_1 + 5x_2 \leq 28$$

$$-5x_1 + 4x_2 \leq 7$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$

$$x_1 + 3x_2 = 9$$

2. $L(x) = 2x_1 + x_2$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 \leq 15$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 8$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 26$$

$$x_2 = 0$$

4. $L(x) = x_1 + x_2$

при условиях

$$7x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$-5x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 = 3$$

6. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$5x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \geq 4$$

$$x_1 = 4/3$$

8. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$8x_1 - 5x_2 \leq 11$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 7$$

10. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \leq 11$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

11. $L(x) = 2x_1 + x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

13. $L(x) = x_1 + x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 8x_1 - 5x_2 &\leq 16 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 &\geq 9 \\ x_1 &\geq 1 \end{aligned}$$

15. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 14 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 27 \\ x_1 &\leq 4 \end{aligned}$$

17. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ 3x_1 - 5x_2 &\leq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 21 \\ x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

19. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leq 27 \\ -5x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ x_1 &\leq 5/2 \\ x_2 &\geq 3/2 \end{aligned}$$

21. $L(x) = -2x_1 - x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 &\leq 56 \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

12. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &\leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\ x_1 &\geq 2 \end{aligned}$$

14. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leq 40 \\ -5x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

16. $L(x) = 2x_1 + x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\geq 4/3 \end{aligned}$$

18. $L(x) = x_1 + x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 8x_1 - 5x_2 &\leq 11 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + 7x_2 &\geq 7 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

20. $L(x) = 2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 14 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 19 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

22. $L(x) = 2x_1 - 3x_2$

при условиях

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ 5x_1 - 2x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

23. $L(x) = -2x_1 + 3x_2$

при условиях

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 28$$

25. $L(x) = 3x_1 - 2x_2$

при условиях

$$2x_1 + 5x_2 \leq 3$$

$$-3x_1 + 8x_2 \leq -5$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

27. $L(x) = 2x_1 + x_2$

при условиях

$$x_1 - 5x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$-x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

29. $L(x) = -2x_1 + x_2$

при условиях

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

31. $L(x) = -4x_1 + x_2$

при условиях

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

33. $L(x) = x_1$

при условиях

$$-x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 \geq 0$$

24. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 \geq -1$$

$$-5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$

$$x_2 \geq 0$$

26. $L(x) = -8x_1 + 9x_2$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

28. $L(x) = 2x_1 + x_2$

при условиях

$$x_1 - x_2 \geq -7$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

30. $L(x) = -x_1 + x_2$

при условиях

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

32. $L(x) = x_1 + 2x_2$

при условиях

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

34. $L(x) = x_1 + x_2$

при условиях

$$-3x_1 + 2x_2 \leq -1$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_2 \geq 0$$

2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Цель практического занятия

Овладеть навыками практического решения задач линейной оптимизации симплексным методом.

Содержание занятия

2.1. Теоретические положения

Для иллюстрации обратимся к примеру:

Экономическая постановка задачи. На Вашем предприятии образовалось 150 м^3 свободных остатков пиломатериалов и 1600 м^2 листового стекла. Эти материальные ресурсы можно использовать для производства «непрофильных» товаров, к примеру, сервантов, книжных полок и зеркал (маркетологи «дают добро» на возможность сбыта этих товаров по следующим ценам: сервант – 91, книжная полка – 14.5, зеркало – 11 денежных единиц).

Нормы расхода материалов на единицу каждого вида продукции:

Ресурсы Продукция	Пиломатериалы, куб. м	Стекло, кв. м
Сервант	0.25	2.0
Книжная полка	0.05	0.5
Зеркало	0.025	0.4

Себестоимость производства одного серванта составляет 80 денежных единиц, книжной полки – 12, зеркала – 8.9 д.е.

Сформируйте план производства указанных товаров, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Рассмотренная задача «Что производить из имеющихся ресурсов?» может быть обобщена задачей получения максимальной прибыли от производства n видов продукции, в котором используются m видов ресурсов.

Формальная постановка и математическая запись такой задачи выступает в следующей форме.

Дано:

m – количество видов используемых ресурсов ($i = 1, 2, \dots, m$);

n – количество видов производимой продукции ($j = 1, 2, \dots, n$);

B_i – наличный объем i -го вида ресурса ($i = 1, 2, \dots, m$);

A_{ij} – норма расхода i -ого вида ресурса на производство единицы продукции j го вида ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$);

C_j – прибыль от реализации единицы продукции j -го вида ($j = 1, 2, \dots, n$).

Искомые переменные:

X_j – объем производства продукции j -го вида ($j = 1, 2, \dots, n$).

Требуется найти такие значения переменных (объемов производства) X_1, X_2, \dots, X_n , при которых достигается:

- целевая «установка» (получение максимальной прибыли)

$$L(X) = \sum_{j=1}^n C_j X_j \quad (2.1)$$

- ограничения задачи (не превзойти имеющихся объёмов ресурсов):
- $$\sum_{j=1}^n A_{ij} X_j \leq B_i \quad (i = 1 \dots m) \quad (2.2)$$

- условия неотрицательности искомых переменных (объёмы производства не могут быть отрицательными числами):

$$X_j \geq 0 \quad (j = 1 \dots n) \quad (2.3)$$

Напомним **основные понятия линейных программ**.

Любой вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2.2)-(2.3) задачи линейного программирования, называют *допустимым решением (планом)*, а совокупность таких векторов – *множеством допустимых решений (планов)*.

- Если учесть, что каждое из ограничений (2.2)-(2.3) имеет своим геометрическим образом полупространство, ограниченное гиперплоскостью (плоскостью n -мерного пространства), то по аналогии с приведенным ранее графическим рассмотрением двухмерной линейной программы напрашивается вывод о том, что *множество планов является выпуклым многогранником и оптимум (максимум, минимум) достигается только в его вершинах*.

- Множество планов нашей n -мерной задачи ограничено $m+n$ гиперплоскостями. Поскольку всякая вершина получается пересечением хотя бы n плоскостей, количество вершин не превышает числа сочетаний из $m+n$ по n и для поиска их координат достаточно перебрать все возможные системы уравнений, формируемые на основе (2.2)-(2.3).

Обычно вместо понятия вершины многогранника планов используют понятие опорного плана. *План называют опорным, если он обращает в равенство хотя бы n независимых ограничений (2.2)-(2.3) (в вершине пересекаются хотя бы n граничных гиперплоскостей)*. Можно доказать, что *число ненулевых составляющих опорного плана*

не превышает числа m ограничений (2.2). Опорный план, содержащий ровно m положительных компонент, называется невырожденным (в противном – вырожденным).

Очевидно, что оптимальный план – план $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, обеспечивающий наибольшее (наименьшее) значение целевой функции – всегда является опорным (но не любой опорный план является оптимальным).

$$\text{Перепишем (2.2) в компактном виде: } \sum_{j=1}^n A_j X_j \leq B, \quad (2.4)$$

где A_j – вектор коэффициентов при X_j и B – вектор правой части.

Система m векторов A_j при положительных компонентах опорного плана называется базисом этого плана (эта система линейно независима и знание базиса автоматически определяет соответствующий опорный план).

Числовая модель рассматриваемой ситуации. Пусть:

X_1 – искомый объем производства сервантов;

X_2 – искомый объем производства книжных полок;

X_3 – искомый объем производства зеркал;

X_4 – остаток пиломатериалов;

X_5 – остаток стекла;

$L(X)$ – искомая прибыль.

В соответствии с исходными данными модель имеет вид:

$$\max L(X) = 11 X_1 + 2.5 X_2 + 2.1 X_3$$

при условиях

$$0.25 X_1 + 0.05 X_2 + 0.025 X_3 + X_4 = 150$$

$$2 X_1 + 0.5 X_2 + 0.4 X_3 + X_5 = 1600$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Для решения полученной линейной программы достаточно отыскать опорные планы (перебрать и решить все возможные системы 5 уравнений, выяснить допустимость этих решений, оценить значения $L(X)$) и выбрать среди них оптимальный. Но даже для этой крошечной задачи число таких систем достаточно велико ($7 \times 6 / 2 = 21$).

Существует более быстрый **симплексный метод** – метод упорядоченного перебора опорных планов (упорядоченность обеспечивается монотонным изменением значения целевой функции при переходе к очередному опорному плану). При использовании этого метода число перебираемых опорных планов не превышает m (в худшем случае до $2m$).

Прежде чем прибегнуть к симплексному методу, **ограничения**

исходной задачи **приводят к канонической форме:**

$$\sum_{j=1}^n A_j X_j = B \geq 0, \quad X_j \geq 0 \quad (j = 1 \dots n) \quad (2.5)$$

Для этого:

- если на переменную X_k отсутствуют условия неотрицательности, то ее заменяют разностью двух неотрицательных переменных $X_k = X'_k - X''_k$, $X'_k \geq 0$, $X''_k \geq 0$; (2.6)

- если на переменную X_k стоит условие неположительности, производится замена $X_k = -X'_k$, $X'_k \geq 0$; (2.7)

- если некоторое из основных ограничений (2.2) допускает неравенство, вводят неотрицательную т.н. ослабляющую переменную, уравнивающую разность между левой и правой частями ограничения;

- если некоторое из основных ограничений (2.2) имеет отрицательную правую часть, ограничение умножают на -1.

Более сложный этап подготовки связан с **выбором начального опорного плана (начального базиса)**. Здесь в системе коэффициентов при переменных (матрице A) ищем единичную подматрицу из m векторов; эти линейно независимые векторы образуют базис опорного плана, а правые части ограничений определяют значения ненулевых (базисных) компонент этого плана.

В нашей задаче обнаруживается очевидный базис (A_4 , A_5) и опорный план $X^0 = (0, 0, 0, 150, 1600)$.

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline 0.25 & 0.25 & 0.05 & 0.025 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0.5 & 0.4 & 0 & 1 \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|} \hline 150 \\ \hline 1600 \\ \hline \end{array}$$

Обратим внимание на целевую функцию $L(X) = 11X_1 + 2.5X_2 + 2.1X_3$. Очевидно, что $L(X^0) = 0$, но если бы мы смогли найти опорный план с ненулевым значением X_1 , X_2 или X_3 , то ее значение стало бы бóльшим.

Попытаемся найти опорный план с ненулевым значением X_1 , для чего выразим X_1 из какого-то уравнения и исключим его из остальных, но так чтобы в правой части системы значения остались неотрицательными.

Находим минимум из отношений компонент правой части к положительным коэффициентам при X_1 . Здесь $\min(150/0.25, 1600/2) = 600$ соответствует первому уравнению. Соответственно выражаем X_1 из первого уравнения и исключаем из второго, получая:

$$X_1 + 0.2 X_2 + 0.1 X_3 + 4X_4 = 600$$

$$0.1 X_2 + 0.2 X_3 - 8X_4 + X_5 = 400 ,$$

откуда очевиден базис (A_1, A_5) и опорный план $X^1=(600, 0, 0, 0, 400)$.

Подставляя выражение X^1 в целевую функцию, получаем:

$$L(X^1) = 11 X_1 + 2.5 X_2 + 2.1 X_3 = 11 (600 - 0.2 X_2 - 0.1 X_3 - 4X_4) + 2.5 X_2 + 2.1 X_3 = 6600 + 0.3 X_2 + X_3 - 44 X_4 .$$

Видим $L(X^1)=6600 \gg L(X^0)$, но если бы мы смогли найти опорный план с ненулевым значением X_2 или X_3 , то значение $L(X)$ стало бы еще бóльшим.

Находим минимум из отношений компонент правой части к положительным коэффициентам при X_3 . Здесь $\min (600/0.1, 400/0.2) = \min (6000, 2000) = 2000$ соответствует второму уравнению. Соответственно выражаем X_3 из второго уравнения и исключаем из первого, получая:

$$X_1 + 0.15 X_2 + 8X_4 - 0.5 X_5 = 400$$

$$0.5 X_2 + X_3 - 40X_4 + 5X_5 = 2000,$$

откуда видим опорный план $X^2 = (400, 0, 2000, 0, 0)$. Подставляя выражение X^2 в целевую функцию, получаем:

$$L(X^2) = 6600 + 0.3 X_2 + X_3 - 44 X_4 = 6600 + 0.3 X_2 + (2000 - 0.5 X_2 + 40X_4 - 5X_5) - 44 X_4 = 8600 - 0.2 X_2 - 4 X_4 - 5 X_5 .$$

Видим $L(X^2)=8600 > L(X^1)$ и, заметив неположительность коэффициентов в $L(X)$ при небазисных (нулевых) компонентах и нежелательность придания им ненулевых значений, приходим к выводу об оптимальности найденного плана.

Все выполненные преобразования обычно представляют в табличной форме (т.н. симплексными таблицами).

Как уже было сказано выше, задачу предварительно приводят к канонической форме (приводят основные ограничения к форме равенств, используя ввод дополнительных неотрицательных переменных, и заменяют переменные, на которые отсутствует требование неотрицательности, разностью двух неотрицательных переменных) и информацию о задаче переносят в симплексную таблицу.

В верхней строке записывают коэффициенты целевой функции $C_k (k = 1..n)$. Эта строка неизменна во всех последующих таблицах.

$C_{\text{баз}}$	Базис	План X^k	C_1	C_2	...	C_n
			A_1	A_2	...	A_n
$C_{\text{б}1}$	$A_{\text{б}1}$	B_1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
$C_{\text{б}2}$	$A_{\text{б}2}$	B_2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
...
$C_{\text{б}m}$	$A_{\text{б}m}$	B_m	A_{m1}	A_{m2}	...	A_{mn}
Z_k		$L(X)$	Z_1	Z_2	...	Z_n
Δ_k			Δ_1	Δ_2	...	Δ_n

Под ними размещают коэффициенты при переменных в ограничениях – векторы A_k ($k = 1..n$) и справа от них – вектор правой части ограничений – вектор B .

После этого начинается **выбор начального опорного плана**. В системе векторов A_k ($k = 1..n$) ищем m векторов, из которых можно было бы построить единичную матрицу. Если такой поиск увенчается успехом, то номера этих векторов переносим в столбец <Базис> (мы нашли номера базисных переменных – их значения в столбце B), а в столбец < $C_{\text{баз}}$ > переносим соответствующие коэффициенты целевой функции (из первой строки таблицы).

Замечание. Если указанный поиск не дал результата, *прибегают к искусственному базису*: к матрице ограничений приписывают лишние столбцы так, чтобы возникла единичная матрица, в строке коэффициентов целевой функции появившимся новым переменным сопоставляют коэффициент $+M$ для задачи на минимум и $-M$ для задачи на максимум, где $M > 0$ – очень большое число (считайте бесконечно большим). Далее задача решается обычным путем до получения оптимального плана. Если в этом плане какая-то из искусственных переменных осталась ненулевой, то делаем вывод о противоречивости ограничений исходной задачи (подробнее см. [1]).

Выполнив указанные выше действия, приступаем к **проверке найденного плана на оптимальность**.

Сумму парных произведений столбцов < $C_{\text{баз}}$ > и <План> записываем как значение < $L(X)$ > целевой функции на выбранном плане. Аналогичные суммы парных произведений столбцов < $C_{\text{баз}}$ > и < A_k > записываем как значения Z_k и, наконец, находим элементы последней строки таблицы $\Delta_k = Z_k - C_k$ (из предпоследней строки таблицы вычитаем первую).

Критерий оптимальности. Если все значения Δ_k неположительны (неотрицательны), то для задачи на минимум (максимум) найденный план оптимален.

Если этот критерий не выполняется, придется **перейти к другому опорному плану**, более близкому к оптимальному.

Новый план отличается от старого тем, что k -я переменная, для которой Δ_k не соответствует критерию, принимает некое ненулевое значение $\Theta > 0$ (становится базисной), а одна из бывших базисных (ненулевых) выйдет из базиса. При этом значение целевой функции изменится по правилу:

$$L(X_{\text{новый}}) = L(X_{\text{старый}}) - \Theta \Delta_k \quad (2.8)$$

Выбираем k и отыскиваем минимум из отношений компонент

плана (столбец <План>) к положительным коэффициентам при k -ой переменной (столбец < A_k >):

$$\Theta = \min_{A_{ik} > 0} \frac{X_i}{A_{ik}} \quad (2.9)$$

(ошибка в этом выборе приведет к отрицательным значениям компонент плана, что неприемлемо). Если не обнаружится положительных коэффициентов, можно утверждать неограниченность целевой функции – можно увеличивать $L(X)$ до ∞ (уменьшать до $-\infty$).

Приступаем к **пересчету симплексной таблицы**. Выбираем p -ю строку (уравнение), которой соответствует величина Θ . Выбранное уравнение (правая часть и коэффициенты при неизвестных) делим на коэффициент при X_k :

$$X'_p = X_p / A_{pk}; \quad A'_{pj} = A_{pj} / A_{pk}, \quad j = 1..n$$

Остальные уравнения получаем вычитанием из них преобразованного выбранного, умноженного на соответствующий коэффициент при k -й переменной:

$$X'_i = X_i - X'_p A_{ik}; \quad A'_{ij} = A_{ij} - A'_{pj} A_{ik}, \quad j = 1..n; \quad i \neq p$$

В итоге p -ю переменную в базисе заменили k -й и получили новый опорный план. Выполняем упомянутые выше расчеты, необходимые для проверки на оптимальность, и повторяем процесс до получения оптимального плана или вывода о неограниченности значений целевой функции.

Вернемся к рассмотренной выше задаче:

$$\max L(X) = 11 X_1 + 2.5 X_2 + 2.1 X_3$$

при условиях

$$0.25 X_1 + 0.05 X_2 + 0.025 X_3 + X_4 = 150$$

$$2 X_1 + 0.5 X_2 + 0.4 X_3 + X_5 = 1600$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Переносим данные в симплексную таблицу; обнаружив единичный базис (A^4, A^5), видим начальный опорный план X^0 , в котором четвертая и пятая компоненты равны соответственно 150 и 1600, а остальные – нулю.

C _{баз}	Базис	План X ⁰	11	2.5	2.1	0	0
			A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
0	A ₄	150	0.25	0.05	0.025	1	0
0	A ₅	1600	2	0.5	0.4	0	1
Z _k		0	0	0	0	0	0
Δ _k			-11	-2.5	-2.1	0	0

Выбираем значения $C_4=0$ и $C_5=0$ в столбец <C_{баз}>, умножаем его

на остальные и суммы произведений заносим в клетку $L(X)$ и строку Z_k . Вычитанием из этой строки первой строки таблицы, получаем значения Δ_k , которые позволят проверить найденный план на оптимальность.

Сопоставляя полученные оценки с (2.8), видим возможность увеличения $L(X)$ при переходе к новому плану, где одна из первых трех компонент плана отлична от нуля. Берем $\Delta_1 = -11$ и находим $\Theta = \min(150/0.25, 1600/2) = 600$, соответствует первому уравнению.

Делим первое уравнение на коэффициент при x_1 (0.25); из второго вычтем полученное первое, умноженное на 2.

C _{баз}	Базис	План X ¹	11	2.5	2.1	0	0
			A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
11	A ₁	600	1	0.2	0.1	4	0
0	A ₅	400	0	0.1	0.2	-8	1
Z _k		6600	11	2.2	1.1	44	0
Δ _k			0	- 0.3	-1.0	44	0

Из полученных оценок видим два отрицательных значения Δ_k (обратите внимание на то, что строка совпадает с точно-

стью до противоположного знака с коэффициентами целевой функции, которые мы получали при подстановке в нее выражения x_1 через остальные переменные; см. приведенное выше неформализованное решение задачи).

Берем $\Delta_3 = -1$ и находим $\Theta = \min(600/0.1, 400/0.2) = 2000$, соответствующее второму уравнению.

Делим второе уравнение на 0.2 (коэффициент при x_3) и из первого вычитаем полученное второе, умноженное на 0.1.

Теперь имеем лишь неотрицательные значения Δ_k ; следовательно, достигнут максимум целевой функции.

Получен оптимальный план производства $X^2 = (400, 0, 2000, 0, 0)$ – выпуск 400 сервантов и 2000 зеркал. При этом прибыль составляет 8600 денежных единиц.

С _{баз}	Базис	План X^2	11	2.5	2.1	0	0
			A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
11	A^1	400	1	0.15	0	8	-0.5
2.1	A^3	2000	0	0.5	1	-40	5
Z_k		8600	11	2.7	2.1	4	5
Δ_k			0	0.2	0	4	5

2.2. Вопросы для самоконтроля

1. Что означает выражение «найти оптимальное решение задачи»?
2. В чем состоит идея симплексного метода?

3. В чем преимущества симплекс-метода поиска оптимального плана перед перебором всех вариантов решения задачи?

4. Объясните, почему при поиске оптимального решения задачи рассматривают только опорные планы.

5. Почему искусственные переменные в целевой функции отражаются с коэффициентом $+M$ для задачи минимизации и $-M$ для задачи максимизации?

6. Когда дальнейший перебор опорных планов становится невозможным?

7. Как убедиться, что найденный оптимальный план не единственный и как найти остальные варианты оптимального поведения?

8. В каких случаях, решая задачу линейного программирования симплексным методом, вы сделаете вывод, что она не разрешима?

9. Ищется максимум линейной функции при 3 ограничениях на 5 неотрицательных переменных. Может ли ее план с компонентами (1, 2, 3, 4, 5) быть оптимальным? А набор значений (5, 4, 3, 2, 1)?

10. Имеет ли верхняя строчка симплексной таблицы какое-нибудь отношение к понятию «градиента»?

11. Как вы сможете объяснить обнаружение факта неограниченности значения целевой функции при решении реальной задачи максимизации прибыли от какой-то деятельности?

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

2.3. Варианты заданий для практических занятий

(номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Решить задачу линейной оптимизации симплексным методом. Объяснить полученные результаты (математическая и экономическая интерпретация).

1. Минимизировать

$$F(x) = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. Максимизировать

$$F(x) = 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

при условиях

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 5$$

$$5x_1 - x_3 \geq 10$$

$$-5 \leq x_1 \leq 2$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

3. Минимизировать

$$F(x)=2x_1-x_2-x_3$$

при условиях

$$x_1-2x_2+x_3=10$$

$$2x_1-x_2-2x_3\leq 18$$

$$3x_1+2x_2+x_3\geq 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$$

5. Максимизировать

$$F(x)=x_1+x_2-4(x_3+x_4)$$

при условиях

$$5\leq x_1+x_2\leq 20$$

$$2x_1-3x_2+4x_4\leq 10$$

$$x_3\geq 3$$

$$x_3, x_2, x_4\geq 0$$

7. Минимизировать

$$F(x)=10x_1+2x_2-6x_3$$

при условиях

$$x_1+x_2+x_3\leq 30$$

$$4x_2-2x_3\geq 2$$

$$5x_1+x_3\leq 0$$

$$x_3\leq 0$$

$$x_1, x_2\geq 0$$

9. Максимизировать

$$F(x)=-x_1+3x_2+3x_3$$

при условиях

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

11. Максимизировать

$$F(x)=9x_1+10x_2+16x_3$$

при условиях

$$18x_1+15x_2+12x_3+x_4=360$$

$$6x_1+4x_2+8x_3+x_5=192$$

$$5x_1+3x_2+3x_3\leq 180$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geq 0$$

4. Максимизировать

$$F(x)=4x_1-3x_2+x_3$$

при условиях

$$x_1+3x_2+2x_3\leq 5$$

$$5x_1 - x_3 \geq 10$$

$$-5\leq x_1\leq 2$$

$$x_2, x_3\geq 0$$

6. Максимизировать

$$F(x)=3x_1+(x_2+x_3)+2x_4$$

при условиях

$$x_1+x_2+x_4\leq 12$$

$$2(x_2+x_4) \geq 0$$

$$3x_2-5x_3+x_4\geq 2$$

$$x_2, x_4\geq 0$$

8. Максимизировать

$$F(x)=3x_1+5x_2+3x_3$$

при условиях

$$x_1+2x_2+2x_3\leq 16$$

$$2x_1+x_2+x_3\leq 21$$

$$3x_1+2x_2+x_3\leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3\geq 0$$

10. Минимизировать

$$F(x)=2x_1+3x_2-x_3$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 - 10 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 10 \geq 0$$

$$x_2 + x_3 - 4 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

12. Минимизировать

$$F(x)=x_1+x_2-4x_3-4x_4$$

при условиях

$$5\leq x_1+x_2\leq 20$$

$$2x_1-3x_2+4x_4\leq 10$$

$$x_3\geq 3$$

$$x_3, x_2, x_4\geq 0$$

13. Минимизировать

$$F(x) = -4x_1 + 4x_2 + 12x_3$$

при условиях

$$x_1 - x_2 + x_3 + 1 \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

15. Максимизировать

$$F(x) = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 10x_5$$

при условиях

$$3x_4 + 10x_5 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_1 - x_5 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

17. Максимизировать

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 - 10 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 10 \geq 0$$

$$x_2 + x_3 - 4 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

19. Минимизировать

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0$$

21. Максимизировать

$$F(x) = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18$$

$$-3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24$$

$$x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

14. Максимизировать

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

16. Минимизировать

$$F(x) = 5x_1 + x_2 + 5x_3$$

при условиях

$$4x_1 - 10x_2 + 4x_3 \geq 100$$

$$3x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_2 \geq 0$$

18. Минимизировать

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 - 3x_4$$

при условиях

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

20. Минимизировать

$$F(x) = -x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

при условиях

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

22. Минимизировать

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_4$$

при условиях

$$2x_1 - x_2 - 2x_4 \leq 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_4 \leq 24$$

$$x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

23. Максимизировать

$$F(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_4$$

при условиях

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28$$

$$-3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \leq 30$$

$$4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \leq 32$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

25. Максимизировать

$$F(x) = 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4$$

при условиях

$$3(x_1 + x_2 - x_3) \leq 20$$

$$2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10$$

$$x_2 - x_4 = 2$$

$$3 \leq x_1 \leq 6$$

$$x_3, x_4 \geq 0$$

27. Минимизировать

$$F(x) = x_1 + 2x_2 - x_3$$

при условиях

$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 \leq 0 \quad x_2, x_3 \geq 0$$

29. Максимизировать

$$F(x) = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5$$

при условиях

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118$$

$$x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

31. Минимизировать

$$F(x) = 18x_1 + 16x_2 + 5x_3 + 21x_4 - 15x_5$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

24. Максимизировать

$$F(x) = x_1 + 2x_2 - x_3$$

при условиях

$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

26. Максимизировать

$$F(x) = 8x_2 + 7x_4 + x_6$$

при условиях

$$x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12$$

$$4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12$$

$$5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

28. Минимизировать

$$F(x) = -3x_1 + x_2 + x_3$$

при условиях

$$4x_2 - 5x_3 \geq 3$$

$$3 \leq x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$5x_1 - 20 \geq 2$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

30. Минимизировать

$$F(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_4$$

при условиях

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 28$$

$$-3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \leq 30$$

$$4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \leq 32$$

$$x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

32. Максимизировать

$$F(x) = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3$$

при условиях

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 12$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -10$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

33. Максимизировать

$$F(x)=14x_1+10x_2+14x_3+14x_4$$

при условиях

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 35$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_4 \leq 0$$

35. Максимизировать

$$F(x)=6x_1+3x_2-4x_3+5x_4+6x_5-2x_6$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \leq 36$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 24$$

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_5 - x_6 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

37. Минимизировать

$$F(x)=x_1+x_2+x_3+x_4$$

при условиях

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6$$

$$-x_1 + x_3 \leq 2$$

$$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$x_1 \geq 10, \quad x_2 \geq 2, \quad x_3, x_4 \geq 0$$

39. Максимизировать

$$F(x)=x_1+3x_2+2x_3$$

при условиях

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0$$

41. Минимизировать

$$F(x)=2x_1-3x_2+4x_3+5x_4-x_5+8x_6$$

при условиях

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120$$

$$2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320$$

$$x_2 \leq 0, \quad x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

34. Минимизировать

$$F(x)=-6x_1+10x_2+9x_3+8x_4$$

при условиях

$$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 - x_4 \leq -1$$

$$5x_1 - 3(x_3 + x_4) \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

36. Минимизировать

$$F(x)=x_1+3x_2+2x_3$$

при условиях

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

38. Максимизировать

$$F(x)=4x_1+3x_2+6x_3+7x_4$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 280$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 80$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 250$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

40. Минимизировать

$$F(x)=3x_1+2x_5-6x_6$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34$$

$$4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28$$

$$-3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

42. Минимизировать

$$F(x)=4x_1+15x_2+12x_3+2x_4$$

при условиях

$$2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$$

$$x_3 \geq 1, \quad x_4 \leq 0, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

3. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель практического занятия

Формирование у студентов теоретических знаний и приобретение элементарных практических навыков по формулированию прикладных экономико-математических моделей транспортного типа, их решению, анализу полученного решения и использованию для принятия управленческих решений.

Содержание занятия

3.1. Теоретические положения

Сам термин «транспортная задача» уже говорит о необходимости решения проблемы, возникающей при организации перемещения тех или иных продуктов с помощью некоторых транспортных средств (транспортировка угля из угольных центров Кузбасса по существующей сети железных дорог к потребителям, доставка ночной выпечки от хлебокомбината в булочные города, перекачка нефти (газа, воды) по трубопроводам от источников к потребителям и др.).

Ниже мы предлагаем решение одной из самых простых задач транспортного типа, которую принято называть классической.

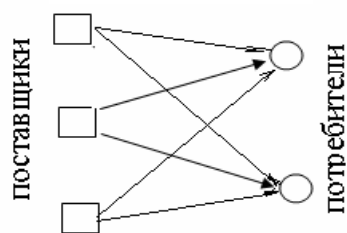
Здесь предполагается наличие поставщиков (производителей, источников) некоторой продукции и заинтересованных в ней ее потребителей. Примечательно, что поставки происходят напрямую без промежуточных пунктов (как показано на рисунке).

В таких условиях возникает естественный вопрос: **«от кого, кому и сколько везти»**, чтобы были «обеспечены жизненные потребности трудящихся». Поиск ответа на этот вопрос, поиск какого-нибудь плана перевозок, едва ли вызовет какие-то затруднения. Однако у нас может возникнуть естественное желание, чтобы найденный план требовал для своей реализации минимума де-

нежных затрат.

Другими словами, мы хотели бы найти план перевозок, который отвечал бы критерию – минимума стоимости.

Экономическая постановка задачи. В трех соседних хозяйствах выращен урожай зерна: «Береговое» – 5, «Озерное» – 8, «Речное» – 7 тыс. ц. Из этих хозяйств зерно необходимо доставить для соответ-



ствующей обработки на любой из элеваторов, расположенных в пунктах «Лесное», «Ровное», «Боровое» и «Степное». Производственные мощности элеваторов одинаковы – 5 тыс. ц. Транспортные затраты (в денежных единицах) на перевозку одного центнера зерна из пунктов производства на элеваторы приведены в таблице.

Элеваторы Хозяйства	Лесное	Ровное	Боровое	Степное
Береговое	4	5	7	8
Озерное	9	3	6	2
Речное	7	8	4	5

В этих условиях нужно определить **план прямых поставок** зерна из пунктов производства на

элеваторы, при котором все поставщики доставили бы имеющееся зерно до элеваторов, мощности элеваторов были бы загружены полностью, а суммарная величина затрат на перевозку зерна была бы минимальной.

Поставленная задача легко приводится к т.н. однопродуктовой (зерно) классической транспортной модели, для решения которой существует множество методов, один из которых описан ниже.

Формальная постановка и математическая запись задачи.

Дано:

m – количество пунктов производства ($i = 1, 2, \dots, m$);

n – количество пунктов потребления ($j = 1, 2, \dots, n$);

a_i – объем произведенной продукции в i -ом пункте ($i = 1, 2, \dots, m$);

b_j – платежеспособный спрос на продукцию в j -ом пункте ($j = 1, 2, \dots, n$);

C_{ij} – стоимость прямой поставки единицы продукции i -го пункта производства в j -й пункт потребления.

Требуется найти план прямых поставок, при котором суммарные транспортные затраты будут минимальны.

Обозначим через X_{ij} объем поставки от i -го производителя к j -му потребителю.

Очевидно, что задача будет сведена к поиску значений X_{ij} , обеспечивающих минимум суммарных затрат:

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (3.1)$$

Предположим, что имеет место баланс производства-потребления:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A. \quad (3.2)$$

Тогда ограничения задачи можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i=1, \dots, m; \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j=1, \dots, n; \quad (3.4)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n \quad (3.5)$$

Если баланс (3.2) нарушен, можно ввести дополнительно **фиктивного** производителя или потребителя разницы объемов производства-потребления, задав стоимости общения с ним равными нулю.

В отличие от общей линейной программы, ограничения транспортной задачи непротиворечивы, множество планов ограничено и, соответственно, эта задача всегда разрешима.

Следует отметить, что $m+n$ ограничений (3.3)-(3.4) линейно зависимы и одним из них можно пренебречь. Соответственно, **опорный план** транспортной задачи может содержать **не более $m+n-1$ положительных компонент**. Опорные планы, в которых положительных составляющих меньше $m+n-1$, называются **вырожденными**.

Решение задачи методом Д. Данцига.

Предварительно проверив закрытость модели (сбалансированность совокупного спроса и предложения), приступаем к **выбору начального опорного плана**. Руководствуемся правилом: *на очередной выбранный маршрут ставить максимальную допустимую перевозку*, исчерпывая тем самым возможности поставщика или потребителя.

Суть одного из методов поиска начального опорного плана – **метода северо-западного угла**: начинаем с “северо-западного угла” «шахматки», т. е. с клетки (1,1), и

берем $X_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(5, 5) = 5$ (максимально возможная перевозка при соответствующем предложении и спросе). Очевидно, что тогда $X_{12} = X_{13} = X_{14} = 0$ и $X_{21} = X_{31} = 0$. Берем северо-западный угол матрицы с исключенными строкой и столбцом, т. е. клетку (2,2), и находим $X_{22} = \min(a_2, b_2) = \min(8, 5) = 5$. Очевидно, что тогда $X_{32} = 0$. Затем отыскиваем $X_{23} = \min(a_2 - X_{22}, b_3) = \min(8 - 5, 5) = 3$ и $X_{24} = 0$. Т. к. осталась нерассмотренной лишь одна строка компонент плана, то порядок выбора не имеет значения и получаем значения X_{33} и X_{34} .

$$X_0 =$$

5	.	.	.	5
.	5	3	.	8
.	.	2	5	7
5	5	5	5	$b \backslash a$

Суммарные затраты на реализацию этого плана поставок составляют $L(X_0) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 86$ денежных единиц.

Метод минимального элемента матрицы стоимостей (C_{ij}) – ещё один достаточно востребованный метод выбора начального опорного плана. Основное здесь правило: ставить максимально возможную перевозку на самый “дешевый” маршрут. Так здесь начинаем с клетки (2,4) самого дешевого маршрута, задавая $X_{24} = \min(a_2, b_4) = \min(8, 5) = 5$, $X_{14} = X_{34} = 0$ и т.д. В конечном счете получается начальный опорный план X_0 с затратами, равными $4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 75$.

$$X_0 =$$

5	.	.	.	5
.	3	.	5	8
.	2	5	.	7
5	5	5	5	$b \backslash a$

Заметим, что в обоих планах число положительных компонент равно $5 < m+n-1 = 3+4-1 = 6$, т.е. оба плана X_0 вырожденные.

Для разрешения **проблемы вырожденности** используются различные приемы, но для задач небольшой размерности, решаемых вручную, можно просто включать в число базисных – задействованных направлений (занятых клеток «шахматки») нулевые перевозки с по возможности малой стоимостью, но так, чтобы не возникало «замкнутой цепочки по базису» (среди занятых клеток).

Для нашей задачи (выберем начальный опорный план, построенный методом наименьших стоимостей) таковыми являются X_{12} , X_{13} , X_{14} , X_{31} , X_{21} (принципиально недопустимы X_{34} , X_{23}), останавливаем выбор на $X_{12} = 0$.

Проверка плана на оптимальность. Критерий оптимальности, позволяющий определить, является ли построенный план перевозок оптимальным, строится на утверждениях второй теоремы двойственности [1].

Соответственно **признак оптимальности** формулируется следующим образом: допустимый план перевозок тогда и только тогда является оптимальным, когда каждому пункту производства и потребления можно поставить в соответствие оценки (двойственные переменные), удовлетворяющие двум условиям:

- сумма оценок пунктов производства (u_i) и потребления (v_j), между которыми запланированы перевозки, равна затратам на транспортировку единицы продукта (C_{ij}) между этими пунктами, т.е.

$$u_i + v_j = C_{ij} \quad \text{для} \quad X_{ij} > 0;$$

- аналогичные суммы для всех остальных направлений (не вошедших в план) не превосходят затрат на транспортировку, т.е.

$$u_i + v_j \leq C_{ij} \quad \text{для} \quad X_{ij} = 0.$$

С помощью сформулированного признака оптимальности можно не только проверить на оптимальность любой допустимый план, но и в случае неоптимальности указать способ улучшения этого плана.

Обратимся к рассматриваемому нами примеру:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 8 \\ 9 & 3 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & . & . \\ . & 3 & . & 5 \\ . & 2 & 5 & . \end{bmatrix}$$

Используя принятые обозначения, запишем следующие уравнения для перевозок, вошедших в план (занятые клетки «шахматки» X_0):

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 4, & u_1 + v_2 &= 5, & u_2 + v_2 &= 3, \\ u_2 + v_4 &= 2, & u_3 + v_2 &= 8, & u_3 + v_3 &= 4. \end{aligned}$$

Число неизвестных в данной системе уравнений на единицу больше числа уравнений, поэтому решение может быть получено лишь с точностью до постоянного слагаемого. Приравняв значение одной из переменных какому-либо числу, однозначно находим значения других переменных.

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_1 = 4$, $v_2 = 5$, $u_2 = -2$, $u_3 = 3$, $v_3 = 1$, $v_4 = 4$. Найденные оценки подставляем в остальные условия $u_i + v_j \leq C_{ij} \equiv \Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij} \leq 0$ и проверяем, выполняются ли они.

Построение системы уравнений, ее решение и поиск Δ_{ij} реализуем в достаточно удобной табличной форме:

$$u_i + v_j = \begin{array}{c|cccc} u \setminus v & 4 & 5 & 1 & 4 \\ \hline 0 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 1 & 4 \\ -2 & 2 & \mathbf{3} & -1 & \mathbf{2} \\ 3 & 7 & \mathbf{8} & \mathbf{4} & 7 \end{array} \quad \Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij} \quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & -6 & -4 \\ -7 & \bullet & -7 & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Критерий оптимальности задачи ($\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij} \leq 0$) здесь не выполняется; следовательно, найденный план неоптимален, и целесообразно **перейти к другому опорному плану**, более близкому к оптимальному.

Отрицательные величины Δ_{ij} показывают, что перевозки по данным направлениям невыгодны (на каждой единице транспортируемого продукта можно понести убытки, по сравнению с предыдущим опорным планом, в размере Δ_{ij} .) В клетках, где $\Delta_{ij} > 0$, наоборот, может быть получен эффект в размере Δ_{ij} на единицу перевозки.

В нашем примере такая клетка одна $\Delta_{34} = +2$. Определяя объём поставок в эту клетку, следует руководствоваться следующим:

- поставив в неё какой-то объём перевозки, следует вычесть эту же величину из других занятых клеток, чтобы не нарушать балансо-

вых соотношений по ввозу и вывозу;

- число клеток, включенных в новый план перевозок, должно оставаться неизменным (на единицу меньше общей численности поставщиков и потребителей). Следовательно, вместо вошедшей клетки одна из клеток предыдущего плана перевозок должна быть исключена.

Оба условия легко выполнить, если перераспределение поставок осуществлять по «замкнутому контуру».

Пусть объем новой поставки равен $\Theta > 0$. Знаком « $-\Theta$ » пометим клетку, откуда будет вычитаться величина перераспределяемой поставки, знаком « $+\Theta$ » – наоборот. Искомую величину перераспределяемой поставки определит минимальное значение, стоящее в клетках со знаком «минус».

В нашем случае $\Theta = \min(2, 5) = 2$; на соответствующем маршру-

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 3+\Theta & \cdot & 5-\Theta \\ \hline \cdot & 2-\Theta & 5 & +\Theta \\ \hline \end{array} = \{\Theta=2\} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 5 & \cdot & 3 \\ \hline \cdot & \cdot & 5 & 2 \\ \hline \end{array}$$

те появится ненулевая перевозка $X_{34} = \Theta = 2$ (при этом выборе сохраняется неотрицательность объемов перевозок и одна из бывших перевозок X_{32} исключается из числа «работающих»). Очевидно, что значение целевой функции (транспортные затраты) при переходе к плану X_1 уменьшается на $\Theta \cdot \Delta_{34} = 2 \cdot 2 = 4$.

Найденный план опять-таки проверяем на оптимальность. Строим в соответствии с занятыми клетками «шахматки» систему уравнений, решаем ее при $u_1 = 0$ и отыскиваем значения Δ_{ij} :

$$u_i + v_j = \begin{array}{c|cccc} u \setminus v & 4 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{array} \quad \Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & -10 & -4 \\ \hline -7 & \cdot & -5 & \cdot \\ \hline -2 & -2 & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

Так как все значения Δ_{ij} неположительны, можно утверждать оптимальность найденного плана. По сравнению с первым опорным планом затраты удалось снизить на 4 д.е. ($L(X_0) = 75 \rightarrow L(X_1) = 71$).

Кстати, если для найденного оптимального плана обнаружится нулевое значение Δ_{ij} для какой-то «незанятой клетки» (небазисной составляющей), то это свидетельствует о существовании других оптимальных планов (переход к плану, где соответствующая компонента равна Θ , не сопровождается изменением значения целевой функции, $\Theta \Delta_{ij} = 0$).

3.2. Вопросы для самоконтроля

1. Могут ли оказаться оптимальными планы:

a)

1	3	2
2	1	3
3	2	1

б)

6	0	0
0	6	0
0	0	6

2. Могут ли условия классической транспортной задачи оказаться противоречивыми?

3. Как вы поступите при решении задачи, если какой-нибудь маршрут окажется запрещенным?

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

3.3. Варианты заданий для практических занятий

(номер варианта задания определяется преподавателем; в качестве закрепления материала студент может дополнительно выполнить любой другой вариант задания).

Найти решение транспортных задач минимизации затрат. Дать экономическую интерпретацию решения.

1. B=

15	15	20	10
3	7	9	4

A=

11	29	10	10
----	----	----	----

C=

1	2	10	5
4	1	2	8
7	3	6	5

2. B=

7	7	7	7	7
8	3	2	5	6

A=

15	5	7	8
----	---	---	---

C=

4	3	5	8	2
5	6	3	8	2
4	4	7	5	4

3. B=

30	45	70	90
1	2	3	7

A=

60	80	40	90
----	----	----	----

C=

9	10	4	5
6	3	11	7
2	1	5	4

4. B=

12	8	5	6
5	8	3	4

A=

11	7	4	3
----	---	---	---

C=

6	2	1	8
0	9	10	3
5	6	4	2

5. B=

12	18	14	20
5	7	6	4

A=

10	14	16	18
----	----	----	----

C=

2	1	3	8
6	8	6	4
11	2	3	8

6. B=

20	20	15	15
1	3	6	4

A=

15	20	15	20
----	----	----	----

C=

3	4	4	3
6	5	2	2
9	8	6	7
11	12	3	8

7. B=

9	10	7	13	8
5	6	4	3	2

A=

17	8	5	14
----	---	---	----

C=

1	8	3	5	6
4	3	7	8	6
3	2	1	8	5

8. B=

18	17	16	15	10
5	8	4	3	2

A=

15	10	5	20
----	----	---	----

C=

1	3	7	8	2
6	4	5	1	7
8	3	4	9	5

9.

B=

5	7	8	9	4
3	4	5	6	7
8	9	10	1	2
3	2	7	4	5
3	4	2	1	6

A=

15
6
7
8

10.

B=

9	10	11	12	7
8	1	9	3	6
4	5	1	7	7
3	6	2	4	3
2	7	8	5	1

A=

5
6
7
8

C=

8	9	10	1	2
3	2	7	4	5
3	4	2	1	6

11

B=

15	28	35	10
9	3	10	12
1	7	13	15
7	5	3	4
8	2	9	1

A=

21
28
35
10

12

B=

7	14	12	10
1	4	5	8
7	8	3	5
3	0	4	6
2	4	9	1

A=

8
16
14
12

C=

1	7	13	15
7	5	3	4
8	2	9	1

13.	B=	10	30	50	10	A=		
		5	4	9	11			
		7	1	8	3			
		2	10	3	4			
		5	6	5	7			
						11		
14.	B=	10	10	15	5	10	10	A=
		5	8	6	3	4	1	
		8	7	6	3	4	2	
		1	8	3	7	2	9	
		2	7	4	6	3	8	
							12	
	C=	7	1	8	3	4		
		2	10	3	4	20		
		5	6	5	7	9		
						40		
						20		
						9		

15.	B=	5	8	11	12	18	A=	16.	B=	14	16	20	30	20	A=	
		8	9	0	7	1	3				3	4	5	6	7	13
	C=	5	4	3	1	5	4			C=	2	8	9	6	11	23
		6	7	10	2	8	17				3	4	4	5	1	33
		3	6	6	8	4	20				1	2	3	4	7	43

17.

B=

7	3	8	9	10
1	0	7	4	5
8	9	3	1	2
5	6	3	7	9

A=

11
10
20

18.

B=

16	26	30	10
8	5	6	7
3	4	2	1
9	10	11	2
5	6	3	4
1	8	3	4

A=

17
27
37
7
10

19.

B=

5	15	10	20
3	4	1	2
2	1	7	5
6	2	4	1
5	6	3	4

A=

10
10
15
15

20.

B=

27	31	45	19
5	7	6	8
3	4	5	7
2	1	9	11
15	13	3	1

A=

45
17
13
28

C=

2	1	7	5
6	2	4	1
5	6	3	4

C=

3	4	5	7
2	1	9	11
15	13	3	1

21.

B=

20	20	30	60
8	3	5	1
3	4	8	5
4	1	6	10
12	7	9	2

A=

18
28
36
48

22.

B=

13	15	17	19
2	7	4	8
5	8	3	1
7	12	4	9
4	5	10	7

A=

14
16
18
20

C=

5	8	3	1
7	12	4	9
4	5	10	7

23. B=

10	11	12	18
3	4	5	6

 A=

11
12
13
14

C=

7	8	9	9
1	2	3	4
5	6	7	8

24. B=

8	10	12	12	5
5	4	3	2	1

 A=

11
18
13
14

C=

1	2	3	4	5
7	8	3	4	5
8	9	6	11	3

25. B=

3	7	9	2
2	5	2	2

 A=

4
5
6
8

C=

4	3	7	5
6	2	1	8
3	7	3	9

26. B=

15	15	20	40
5	8	3	4

 A=

20
10
30
10

C=

1	2	5	6
3	4	7	8
8	9	5	3

27. B=

17	10	30	10	20
5	8	11	3	12

 A=

27
37
20
10

C=

5	3	7	4	9
10	1	2	8	4
8	2	4	5	6

28. B=

7	7	7	7	7
8	3	5	2	6

 A=

15
5
5
8

C=

4	3	7	8	2
5	6	3	5	6
4	4	2	8	2

29. B=

30	45	65	95
1	2	5	4

 A=

60
80
40
90

C=

9	10	3	7
6	3	4	5
2	1	11	7

30. B=

13	9	6	7
5	6	0	5

 A=

12
8
5
4

C=

8	2	9	6
3	1	10	4
4	7	3	2

31. B=

12	18	14	20
5	7	6	4

 A=

10
24
16
19
21

C=

1	3	5	4
2	1	3	8
3	4	11	3
11	2	3	8

32. B=

20	20	15	15
1	3	6	4

 A=

15
20
15
20
15

C=

6	8	3	8
9	8	6	7
6	5	2	2
11	2	3	8

33. B=

7	14	8	20
5	4	1	3

 A=

10
8
7
10
14

C=

6	3	6	2
4	7	3	1
3	8	5	9
2	6	6	8

34. B=

20	20	15	15
5	3	5	9

 A=

15
20
15
20
15

C=

1	4	3	2
6	3	8	2
8	7	1	5
2	8	7	3

35. B=

6	8	5	15	6
3	4	2	1	6

 A=

15
10
8
7

C=

8	9	7	4	5
6	7	5	3	4
1	2	10	3	2

36. B=

7	7	7	7	7
2	8	5	2	6

 A=

15
5
5
8

C=

3	4	4	8	6
1	1	4	1	6
9	7	3	3	7

4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ (ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ)

Цель практического занятия

Обучение студентов применению экономико-математических методов и моделей в процессе подготовки и принятия управленческих решений в экономических системах.

Содержание занятия

4.1. Теоретические положения

Теория статистических решений может быть истолкована как теория поиска оптимального поведения в условиях неопределенности (неполноты/ неточности информации). Поведение может быть детерминированным или недетерминированным (предлагающим использовать те или иные возможные выборы с некоторыми вероятностями). Следствием неопределённости, как известно, является риск. Современная концепция статистического решения считает поведение оптимальным, если оно минимизирует риск в последовательных экспериментах, т.е. математическое ожидание убытков статистического эксперимента. В такой постановке любая задача статистических решений может рассматриваться как игра двух лиц, в которой одним из игроков является «природа».

Выбор наилучших решений в условиях неполной информации – одно из основных занятий людей. К примеру, собираясь в туристический поход, мы укладываем вещи в рюкзак с учетом неизвестной (непредсказуемой) погоды и преследуем цель получения максимума удовольствий, не превращаясь в рекордсмена по переноске тяжестей.

Одним из наиболее распространенных видов управленческой деятельности также является принятие решений в условиях неполной или неточной информации, что сопряжено с неизбежным риском (убытками) в случае принятия ошибочного решения.

При принятии решений в условиях неполной информации следует различать *ситуацию риска* и *ситуацию неопределённости*. Собственно разница между риском и неопределённостью касается того, знает ли принимающий решение что-либо о вероятности наступления определённых событий. *Риск* присутствует тогда, когда вероятности, связанные с различными последствиями принятия решения, могут оцениваться на основе данных предшествующего периода (имеется

статистическая информация о подобных ранее принимаемых решениях / о подобных изучаемой ситуациях/ т.п.). *Неопределённость* существует тогда, когда эти вероятности приходится определять субъективно, т.к. нет данных предшествующего периода (нет соответствующей статистики).

Задача выбора решения в условиях неопределённости сводится к следующему.

Пусть задан некоторый **вектор** $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$, описывающий n **состояний внешней среды**, и **вектор** $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, описывающий m **допустимых решений**. Требуется найти такой вектор $X^* = (0, 0, \dots, 0, X_i, 0, \dots, 0)$, который бы обеспечивал **оптимум** некоторой **функции полезности** $W(X, S)$ по некоторому **критерию** K .

Значение оптимума функции $W(X, S)$ раскрывается, исходя из постановки конкретной задачи (к примеру, если обсуждается получение прибыли, то значение функции стремятся максимизировать, если себестоимость – минимизировать).

Информацию об указанной функции полезности (по сути *исходные данные задачи* такого типа) представляют *матрицей* размерности $m \times n$ с элементами $W_{ij} = F(X_i, S_j)$, где F – *решающее правило* (определяемое из постановки конкретной задачи).

Следует отметить, что формирование решающего правила во многом предопределяет конечный результат расчетов (в случае его неточности/ ошибок даже правильный выбор критерия оптимальности и соответствующие расчеты не дают основания считать принятое решение наилучшим).

При достаточно четкой экономической постановке задачи практически не возникает проблем с формированием матрицы $\{W_{ij}\}$ (ниже предлагается к рассмотрению несколько простых примеров, наглядно иллюстрирующих это положение).

Критерий принятия решения в ситуации риска. Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного состояния внешней среды, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях P_j для возникновения состояния S_j можно найти математическое ожидание $W(X, S, P)$ и определить вектор X^* , обеспечивающий

$$W = \max_{i=1..m} \sum_{j=1}^n W_{ij} P_j \quad .$$

Критерии принятия решения в ситуации неопределённости достаточно многообразны.

А. Критерий Лапласа. По принципу недостаточного основания в условиях, когда невозможно выяснить вероятности для возникновения того или иного состояния внешней среды, им сопоставляют *равные вероятности*, находят *средний эффект* для каждого из рассматриваемых вариантов решения и выбирается тот из них, где средний эффект максимален:

$$W = \max_{i=1..m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_{ij} .$$

Б. Критерий Вальда (критерий наибольшей осторожности / пессимиста). Для каждого из рассматриваемых вариантов решения X_i выбирается *самая худшая ситуация* (наименьшее из W_{ij}) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} W_{ij}$$

В. Критерий Гурвица. Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой, однако опрометчиво выбирать и излишне оптимистичную политику. Критерий Гурвица *предлагает некоторый компромисс*:

$$W = \max_{i=1..m} [\alpha \max_{j=1..n} W_{ij} + (1 - \alpha) \min_{j=1..n} W_{ij}]$$

где параметр α принимает значение от 0 до 1 и выступает как *коэффициент оптимизма*. К примеру, при $\alpha = 0$ (полный пессимизм) критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0.5$ мы рассцениваем равновероятно шансы на успех и неудачу, при $\alpha = 0.2$ мы более осторожны и вероятность успеха считаем меньшей (0.2) чем возможную неудачу.

Г. Критерий Сэвиджа. Суть его – *нахождение минимального риска*. При выборе решения по этому критерию:

- матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется новая матрица – *матрица сожалений*

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_i (W_{ij}) ,$$

элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т.е. выгоду, упущенную в результате принятия i -го решения в j -м состоянии;

• по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления

$$W = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} D_{ij}.$$

Вполне логично, что **различные критерии приводят к различным выводам относительно наилучшего решения.** Вместе с тем *возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения* (если они, конечно, располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи). *Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.*

Пример экономической постановки задачи, формирования исходных данных и решения по различным критериям

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. *Сколько следует закупить яхт* (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц (д. е.). Цена яхты – 170 д. е. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 д. е. в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет великоват, и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий расчет). Итак:

$x = \{x_i\} = (2, 3, 4, 5)$ – количество яхт ($i = 1, 2, 3, 4$);
 $S = \{S_j\} = (10, 15, 20, 25)$ – количество членов яхт-клуба ($j = 1, 2, 3, 4$).

Для того, чтобы начать поиск решения, построим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i -го решения при j -ом количестве членов яхт-клуба:

$$W_{ij} = 100 \cdot \min(5 \cdot x_i; S_j) - 170 \cdot x_i - 730,$$

т.е. решающее правило в задаче формулируется как «доход – затраты».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности $\{W_{ij}\}$:

	$S_1 = 10$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$x_1 = 2$	-70	-70	-70	-70
$x_2 = 3$	-240	260	260	260
$x_3 = 4$	-410	90	590	590
$x_4 = 5$	-580	-80	420	920

Например, $W_{11} = 100 \cdot \min(5 \cdot 2, 10) - 170 \cdot 2 - 730 = -70$

$$W_{12} = 100 \cdot \min(5 \cdot 2, 15) - 170 \cdot 2 - 730 = -70$$

$W_{13} = W_{14} = -70$ (спрос на яхты останется неудовлетворенным). Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий принятия решения в ситуации риска. Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе: $P = (0,1; 0,2; 0,4; 0,3)$. Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$$W_1 = (-70 \cdot 0,1) + (-70 \cdot 0,2) + (-70 \cdot 0,4) + (-70 \cdot 0,3) = -70,$$

$$W_2 = (-240 \cdot 0,1) + (260 \cdot 0,2) + (260 \cdot 0,4) + (260 \cdot 0,3) = 210;$$

$$W_3 = 390; \quad W_4 = 370.$$

Вывод: в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 денежных единиц).

Принятие решения в ситуации неопределенности.

А. Для применения критерия Лапласа находим:

$$W_1 = ((-70) + (-70) + (-70) + (-70)) / 4 = -70;$$

$$W_2 = ((-240) + (260) + (260) + (260)) / 4 = 135;$$

$$W_3 = 215; \quad W_4 = 170.$$

Вывод: в условиях равной вероятности возникновения любого из рассматриваемых спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты, и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д.е.

Б. Критерий Вальда (выбор осторожной, пессимистической стратегии) – для каждой альтернативы (различное количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект: $W = \max(-70; -240; -410; -580) = -70$.

Вывод: принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д.е.

В. Критерий Гурвица (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных α):

	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,8$
$x_1 = 2$	-70	-70	-70
$x_2 = 3$	-140	10	160

$x_3 = 4$	-210	90	390
$x_4 = 5$	-280	170	620

Вывод: при $\alpha \geq 0,5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль, не меньшую 170 д.е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), при $\alpha = 0,2$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

Г. Критерий Сэвиджа (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений D – для нашего примера, вычитанием (-70) из первого столбца матрицы полезности, 260 из второго столбца, 590 и 920 из третьего и четвертого столбцов соответственно:

	$S_1 = 10$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$x_1 = 2$	0	-330	-660	-990
$x_2 = 3$	-170	0	-330	-660
$x_3 = 4$	-340	-170	0	-330
$x_4 = 5$	-510	-340	-170	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$$\max(-990; -660; -340; -510) = \mathbf{-340}.$$

Вывод: покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д.е.

Общий вывод. Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

4.2. Вопросы для самоконтроля

1. В чем разница между понятиями риск и неопределенность?
2. В чем разница между ситуацией риска и ситуацией неопределенности? Приведите примеры.
3. Сформулируйте критерии принятия решения для ситуации риска и для ситуации неопределенности?

При возникновении затруднений необходимо обратиться к учебной литературе.

4.3. Контрольные задания

Для предложенной экономической ситуации (номер варианта задания определяет преподаватель, учитывая повышенную сложность отдельных задач) сформулируйте математическую ее постановку:

установите вектор состояний внешней среды, вектор решений и функцию полезности. Найдите оптимальное решение *в ситуации риска* и *в ситуации неопределенности* (с позиций критериев Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа); дайте соответствующие комментарии к их применению.

1. Фирма может за определенную плату (100 руб.) составить любому студенту программу для каких-то типовых расчетов на ПЭВМ. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить до 10 заказов. Стоимость аренды машинного времени составляет 800 руб. в месяц (этого времени достаточно для выполнения 10 работ). Количество студентов, пользующихся услугами фирмы, не превышает 100 человек в месяц. Определить число сотрудников фирмы, дающее максимум общего дохода (для регистрации фирмы необходима численность не менее двух человек).

2. Землевладелец на знойном юге решает вопрос о числе рабочих, привлекаемых к уборке томатов. Урожайность колеблется в зависимости от погоды от 500 до 600 центнеров, закупочная цена стабильна и равна 5 руб./кг. Рабочий за сезон собирает 20 ц, получая 1.2 руб./кг за уборку и 280 руб. для оплаты стоимости проезда к месту работ. Затраты на обеспечение рабочих жильем (речь не идет даже о трехзвездочной гостинице) составляют 300 руб. и не зависят от численности.

3. В сельхозрайоне с посевной площадью 1430 га решено построить элеватор по одному из типовых проектов на 20, 30, 40, 50 или 60 тыс. центнеров зерна. Привязка проекта обойдется в 37 тыс.руб. Стоимость материалов и оборудования для элеватора мощности 20 тыс. равна 60 тыс.руб. и растет на 10% с ростом мощности на 10 тыс. Затраты на эксплуатацию элеватора на 20 тыс. равны 10 тыс. руб. и растут на 10 тыс. с ростом мощности на 10 тыс. За хранение зерна на счет элеватора вносится плата 10 руб. за центнер. Урожайность колеблется от 14 до 20 ц/га.

4. Председатель сельхозкооператива решает закупить бочки для засолки огурцов. Виды на урожай колеблются от 700 до 1000 кг, в бочку вмещается 50 кг, цена бочки – 300 руб., затраты на засолку – 20 руб. за бочку, аренда места на рынке – 50 руб., реализационная цена – 7.20 руб./кг.

5. Фирма, действующая в живописном Горном Алтае, планирует десятидневные маршруты для туристов в летнем сезоне (60 дней). Известно, что число туристов в течение десятидневки колеблется от 1 до 1.5 тыс. чел. Группы комплектуются из 25 чел. Стоимость путевки –

2 тыс. руб. Заработная плата инструктора составляет 6 тыс.руб. в месяц. На экипировку группы затрачивается 1.5 тыс.руб., на питание группы – 12 тыс.руб. К тому же приходится оплачивать ремонт помещений и снаряжения при подготовке к сезону 30 тыс.руб. Сколько же инструкторов разумно пригласить на работу?

6. В транспортном цехе ежедневно выходит из строя до 8 агрегатов, каждый из которых мог бы дать продукции на 350 руб. Слесарь-ремонтник, получающий 2500 руб. в месяц, не может в день обслужить более двух станков. Сколько же слесарей должен привлечь на работу начальник транспортного цеха?

7. Организуются пригородные автобусные рейсы. Число пассажиров колеблется от 300 до 450 чел., из которых 10% имеют право бесплатного проезда. Цена билета 6 руб. Вместимость автобуса – 30 чел. Эксплуатационные затраты на один рейс – 50 руб. Оплата шофера за одну поездку – 60 руб. Сколько же организовать рейсов?

8. В райцентре решается вопрос о строительстве сыроваренного завода. Известно, что дневной объем поставок молока колеблется от 4800 до 5600 л в день. Один сепаратор ежедневно перерабатывает 600 л молока в 50 кг сыра. Стоимость аппарата 40000 руб., ежемесячные эксплуатационные расходы – 1500 руб., аренда помещения – 12000 руб. в год. Молоко закупается по 3 руб./л, сыр продается по 45 руб./кг. Неиспользованное молоко приходится вывозить на свинокомплекс молоковозами (вместимость 5 ц) с затратами 100 руб. за рейс. Сколько же сепараторов закупать?

9. Прядильная фабрика ежемесячно получает от 35 до 50 т хлопка повышенной влажности. Один сушильный агрегат может высушить 5 т. Затраты на техническое обслуживание агрегата 1000 руб. (независимо от его использования или простоя). Потери от 1 т невысушенного хлопка – 7000 руб. Сколько агрегатов разумно иметь на фабрике?

10. В 50-е годы в одном из небольших городов области планировалось строительство кинотеатра. Имелись проекты на 400, 500, 600 и 750 мест. Затраты на содержание кинотеатра составляли 40 руб. в день и дополнительно 10 руб. за каждые сто мест (свыше 600). В день можно было дать 6 сеансов, стоимость билета составляла в среднем 40 коп. Количество посетителей колебалось от 2000 до 3000 чел. Какой из проектов следовало выбрать?

11. Требуется выяснить потребности транспортного агентства в автобусах для экскурсионного обслуживания. Обычно число заявок на автобусы колеблется в пределах от 10 до 50. Затраты на эксплуатацию каждого автобуса составляют 10 денежных единиц плюс 100 на со-

держание автопарка в целом в день. Экскурсионное бюро выплачивает транспортному агентству 20 денежных единиц за каждую заявку.

12. Бюро трудоустройства населения планирует открытие курсов компьютерной грамотности. Ожидаемая численность слушателей в пределах от 100 до 200 чел. За каждого из них бюро получает от работодателя 1000 руб. Преподаватель работает с группой, не превышающей 10 чел. Расходы на хозяйственные нужды составляют 5000 и на оплату преподавателя 4500 руб. Сколько преподавателей разумно привлечь?

13. В условиях задачи 13 по некоторым мотивам было решено увеличить оплату преподавателя до 6500 руб. Сколько преподавателей приглашать в этом случае?

14. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине колеблется от 1000 до 1500. Булочки покупаются лотками по 100 штук по цене 1.60 и продаются по цене 2.20 за штуку. Непроданные булочки распродают по цене 0.80 на следующее утро. Ваши рекомендации?

15. В условиях задачи 15 изменились цены: закупочная цена – 0.25; продажные цены на свежую и черствую булочку, соответственно, равны 0.49 и 0.15. Сколько же булочек заказывать?

16. В условиях задачи 9 изменилась стоимость сепаратора до 50000 руб. и стоимость вывоза неиспользованного молока до 150 рублей за рейс. Сколько покупать сепараторов?

17. В условиях задачи 9 изменилась закупочная цена на молоко и стала равной 3.50 руб. Сколько покупать сепараторов?

18. В условиях задачи 9 изменилась закупочная цена на молоко и стала равной 4.00 руб. Сколько покупать сепараторов?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тынкевич, М. А. Экономико-математические методы (исследование операций) [электронный ресурс]: учеб. пособие для студентов инж.-экон. специальностей и направлений вузов / КузГТУ. – Кемерово, 2011. – 222 с. – Режим доступа:

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90515&type=utchposob:common>

2. Тынкевич, М. А. Исследование операций [электронный ресурс]: электр. учеб. пособие / М. А. Тынкевич, А. А. Тайлакова. КузГТУ. – Кемерово, 2012. Режим доступа:

<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90797&type=utchposob:common>

3. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации: учеб. пособие [электронный ресурс] / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – 3-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 352 с. Режим доступа:

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=1552

4. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [электронный ресурс]: учеб. пособие для студентов вузов, изучающих экономико-мат. методы и модели. – СПб.: Лань, 2011. Режим доступа:

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2027