МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
Е. В. Гутова

МАТЕМАТИКА

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензент Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна
Гутова Елена Владимировна
Математика [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева, Е. В. Гутова; КузГТУ;– Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Математика» и организовать самостоятельную работу.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по курсу «Математика» очной формы обучения.

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Математика», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Линейная алгебра

1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства.

1.2. Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса.

1.4. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица.

1.5. Матричный метод решения СЛАУ.

Практическое занятие:

1. Вычислить определитель второго порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. С помощью разложения по элементам первого столбца вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Вычислите определитель четвертого порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Найти сумму и разность матриц $A+B$, $A-B$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a & в \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}.$$

11. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

12. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 5x + y + 3z = 14, \\ 2x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

13. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

14. Решить матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

16. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}.$$

17. Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Найти линейную комбинацию матриц:

$3A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$A-3E$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Транспонировать матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 10 & 4 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение матриц AB и BA (если они существуют):

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти A^3 для следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицы, обратные матрицам:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \; A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \; A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

7. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2};$$

$$\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$$

8. Решите неравенства:

$$\begin{vmatrix} 2x-4 & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} 4x+4 & 8 \\ 3x-7 & 2 \end{vmatrix} < 0; \quad \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$$

9. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ x+2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$$

12. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 6y + 5z = 1 \\ 5x + 3y - 2z = 0 \\ 7x + 4y - 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 3z = -2 \\ -4x - 3y - 5z = 1 \\ 5x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 7x + 9y + 5z = -3 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + z = 9 \\ 2x + 4y + 5z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 3x + 4y + 7z = 1 \end{cases}$$

13. Исследовать, будет ли система уравнений совместна, и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Раздел 2. Векторная алгебра

2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Длина (норма) вектора и отрезка, направляющие косинусы, нормированный вектор

2.2. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности векторов.

2.3. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл. Условие коллинеарности двух векторов.

2.4. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.

Практическое занятие:

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$A_1(1,\ 3,\ 0),\ A_2(3,\ -1,\ 4), A_3(-2,\ 5,\ 6), A_4(0,\ 4,\ -2)$

$A_1(3,\ 1,\ 4), A_2(-1,\ 6,\ 1), A_3(-1,\ 1,\ 6), A_4(0,\ 4,\ -1).$

2. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$\vec{a} = \{1,\ 1,\ 1\}; \vec{b} = \{1,\ 1,\ 2\}; \vec{c} = \{1,\ 2,\ 3\}; \vec{e} = \{6,\ 9,\ 14\}$

$\vec{a} = \{6,\ 4,\ 3\}; \vec{b} = \{3,\ 3,\ 2\}; \vec{c} = \{8,\ 1,\ 3\}; \vec{e} = \{-1,\ 4,\ 1\}$

Самостоятельная работа:

1. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$\vec{a} = \{4,\ -5,\ 2\}; \vec{b} = \{2,\ -2,\ 1\}; \vec{c} = \{2,\ -1,\ 0\}; \vec{e} = \{2,\ -5,\ 3\}$

$$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\};\vec{b}=\{3,\ \ -3,\ \ 1\};\vec{c}=\{2,\ \ -1,\ \ 2\};\vec{e}=\{6,\ \ -8,\ \ 1\}$$

$$\vec{a}=\{4,\ \ 5,\ \ 2\};\vec{b}=\{3,\ \ 0,\ \ 1\};\vec{c}=\{1,\ \ 4,\ \ 2\};\vec{e}=\{5,\ \ 7,\ \ 8\}$$

$$\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\};\vec{b}=\{1,\ 5,\ -4\};\vec{c}=\{4,\ \ 1,\ \ -3\};\vec{e}=\{6,\ \ -15,\ \ 7\}$$

$$\vec{a}=\{3,\ \ -5,\ \ 2\};\vec{b}=\{4,\ \ 5,\ \ 1\};\vec{c}=\{-3,\ 0,\ -4\};\vec{e}=\{-4,\ \ 5,\ \ 16\}$$

2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(-4,-2,\ 0),A_2(-1,\ \ -2,\ \ 4),A_3(3,\ \ 1,\ \ -2),A_4(3,\ \ -2,\ \ 1)$$

$$A_1(3,\ \ 2,\ \ -3),A_2(5,\ \ 1,\ \ -1),A_3(2,\ \ -1,\ \ 0),A_4(1,\ \ -2,\ \ 1)$$

$$A_1(1,\ \ 2,\ \ 1),A_2(3,\ \ -1,\ \ 7),A_3(0,\ \ -3,\ \ 5),A_4(7,\ \ 4,\ \ -2)$$

$$A_1(3,\ \ 3,\ \ 9),\ A_2(6,\ \ 9,\ \ 1),A_3(1,\ \ 7,\ \ 3),\ A_4(8,\ \ 5,\ \ 8).$$

3. Даны две силы $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, приложенные к точке A. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

$$\overrightarrow{F_1}=\{1,\ \ -1,\ \ 3\},\overrightarrow{F_2}=\{2,\ \ 0,\ \ -3\},A(4,\ \ 3,\ \ 6),B(0,\ \ 1,\ \ 2)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{4,\ 2,\ -1\},\overrightarrow{F_2}=\{3,\ \ 4,\ \ 5\},A(-1,\ \ 0,\ \ -2),B(1,\ \ -2,\ \ 2)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{3,\ -1,\ 2\},\overrightarrow{F_2}=\{5,\ \ -3,\ \ -2\},A(3,\ \ 1,\ \ 1),\ B(6,\ \ -7,\ \ 5)$$

4. Даны две силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, приложенные к точке A. Найти работу, которую совершает равнодействующая этих сил, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B.

$$\overrightarrow{F_1}=\{4,\ \ 4,\ \ -9\},\overrightarrow{F_2}=\{5,\ \ 3,\ \ -1\},A(4,\ 3,\ -1),B(-7,\ \ 3,\ \ 2)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{8,\ \ 8,\ \ -2\},\overrightarrow{F_2}=\{-3,\ \ -5,\ \ 1\},A(0,\ \ 2,\ \ 9),B(3,-1,8)$$

$$\overrightarrow{F_1}=\{13,\ \ -10,\ \ 5\},\overrightarrow{F_2}=\{4,\ 8,\ 11\},A(-1,\ \ 2,\ \ 4),B(3,\ \ 1,\ \ 1).$$

5. Тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти линейную скорость точки A этого тела.

$$\vec{\omega}=3\vec{k},\qquad A(5,\ \ 3,\ \ -1)$$

$$\vec{\omega}=4\vec{i},\qquad A(2,\ \ -4,\ \ 0)$$

$$\vec{\omega}=7\vec{j},\qquad A(3,\ \ -7,\ \ 2)$$

6. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Определить, будут ли они компланарны.

$$\vec{a} = \{1, \quad 1, \quad 1\}, \quad \vec{b} = \{1, \quad 1, \quad -1\}, \quad \vec{c} = \{1, \quad -1, \quad 1\}.$$

$$\vec{a} = \{3, \quad 5, \quad 0\}, \quad \vec{b} = \{1, \quad -1, \quad 2\}, \quad \vec{c} = \{5, \quad 3, \quad 4\}$$

$$\vec{a} = \{1, \quad -2, \quad 1\}, \quad \vec{b} = \{3, \quad 2, \quad 1\}, \quad \vec{c} = \{1, \quad 0, \quad -1\}$$

3. Аналитическая геометрия

3.1. Область профессионального применения аналитической геометрии.

3.2. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.

3.3. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.

3.4. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами.

3.5. Плоскость и прямая в пространстве. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Точка пересечения трех плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности.

Практическое занятие:

1. Дано: A(2;1;–1), B(3;3;1), C(4;5;3). Найти:

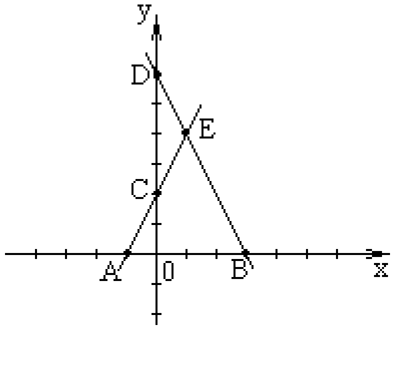
$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}$ $\quad$ $\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ $\quad$ $\cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$

2. Дано: A(3;–4;1), B(5;–1;7), C(7;2;13)

$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA}$ $\quad$ $\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ $\quad$ $\cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$

3. Даны уравнения сторон треугольника; $4x - y - 12 = 0$ (AB); $3x - 7y + 41 = 0$ (BC) и $9x + 4y - 2 = 0$ (AC). Написать уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C на сторону AB.

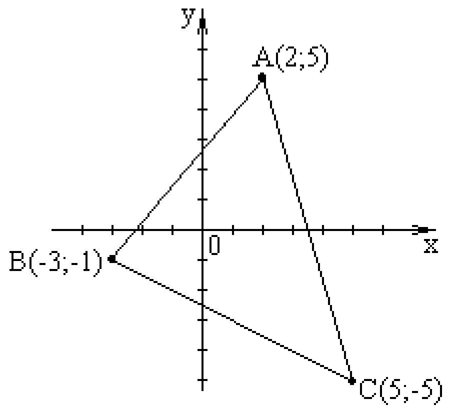
4. По данным, указанным на чертеже, определить острый угол между прямыми AC и BD.



5. Установить, лежит ли точка (1/3; 2) на прямой
$18x - 5y + 4 = 0$?

6. Прямая проходит через точку А(1;5;6) и точку пересечения прямых $2x - 7 + 4 = 0$ и $x + y - 6{,}5 = 0$. Составить её уравнения.

7. По данным, указанным на чертеже, определить угол между высотой и медианой треугольника АВС, проведенных из вершины А.



8. Точка М(x;–3) принадлежит прямой $3x + y + 27 = 0$. Определить абсциссу точки М.

9. Даны точки 0(0;0), Р(–С;0); F_2(–С;0), М(0, y_0). Составить: Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами точках $F_1; F_2$; М. Уравнение эллипса с фокусами в точках F_1, F_2 и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках F_1, F_2 и мнимой осью $|OM|$. Если

С = 7	$y_0 = -6$
С = 6	$y_0 = 5$
С = 5	$y_0 = 4$
С = 4	$y_0 = -3$
С = 3	$y_0 = 2$.

10. Даны точки $A(3;1;5)$, $B(7;-3;-2)$, $C(-1;5;3)$. Найти: косинус угла между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; площадь треугольника ABC; уравнение прямой AB.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;9;-4)$ перпендикулярно прямой (β): $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{-3}$.

12. Найти направляющий вектор прямой:

$$\begin{cases} -x+4y+z=5 \\ 3x-2y+7z=12 \end{cases}$$

13. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A в треугольнике ABC, если $A(-4;3)$, $B(2;2)$, $C(-1;5)$.

14. Написать уравнение линии центров двух окружностей $x^2+y^2-6x=0$ и $x^2+y^2+6x-4y=12$.

15. Дан треугольник с вершинами A(–2;5), B(4;–3), C(6;0). Составить: уравнение прямой AB; уравнение медианы из вершины A; уравнение средней линии, параллельной стороне AB; уравнение высоты из точки C; найти внутренний угол при вершине B.

16. Точка $A(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой линии $x-2y-7=0$. Вычислить площадь квадрата.

17. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3,1)$, $B(7,5)$, $C(5,-3)$.

18. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой линией $y=2x+5$.

19. Точка $A(5,-4)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x-7y-8=0$. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

20. Установите, какие линии определяются уравнениями и схематично их постройте:

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$$

$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$$

$$x=-\frac{1}{4}y^2+y$$

$$y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$$

21. Найдите координаты фокуса параболы по координатам ее вершины $A(6,-3)$ и уравнению ее директрисы $3x-5y+1=0$.

22. На гиперболе $x^2/2-y^2=1$ найти точку, ближайшую к точке $(3;0)$.

23. Найдите угол между прямыми:

$$\frac{X}{1}=\frac{У-1}{-2}=\frac{Z}{3}; \quad \begin{cases} 3X+У-5Z+1=0 \\ 2X+3У-8Z+3=0 \end{cases}$$

24. Найдите угол между прямой $\begin{cases} 3X-У-Z+5=0 \\ X-У-Z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью 4X–8У+Z–3=0;

25. Найдите точку пересечения прямой $\frac{X-7}{5}=\frac{У-4}{1}=\frac{Z-5}{4}$ и плоскости 3X–У+2Z–5=0

26. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку М (3; 4; 1) перпендикулярно прямой $X = 5 - t$; $У = 4t$; $Z = -2 + t$;

27. Покажите, что прямые $\frac{X-1}{2}=\frac{У+2}{-3}=\frac{Z-5}{4}$ и $X = 7 + 3t$; $У = 2 + 2t$; $Z = 1 - 2t$ лежат в одной плоскости и найдите её уравнение.

28. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямые и найдите расстояние между ними:

$$\begin{cases} X=2+3t \\ У=-1+4t \\ Z=2t \end{cases}; \qquad \begin{cases} X=7+3t \\ У=1+4t \\ Z=3+2t \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Дано: A(–2;3; –4), B(5;7;0), C(2;6; –4). Найти:

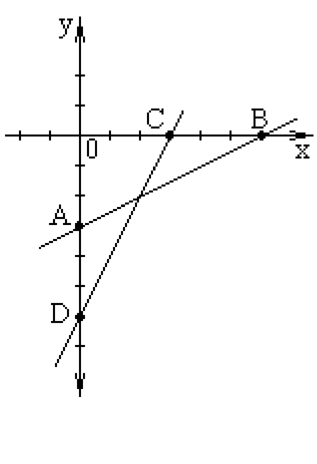
$$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA} \qquad \overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC} \qquad \cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$$

2. Дано: A(3;2; –5), B(11;8; –5), C(4;4; –3). Найти:

$$(2\overline{AB}-\overline{BC})\cdot\overline{BA} \qquad \overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{BC} \qquad \cos(\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{BC})$$

3. Даны вершины треугольника A(–3;2), B(–3;–4), C(9;–4). Определить длину высоты, проведенной из вершины A.

4. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD.

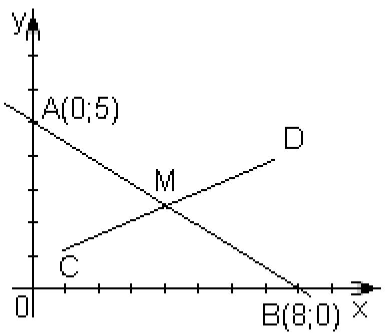


5. Написать уравнения семейства (множества) прямых, угловой коэффициент которых равен (–2/7).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку (–2;5) и отсекающей на оси OY, отрезок, равный 3.

7. Прямые AB и CD пересекаются в точке M(4;2,5) под углом 45°. По данным, указанным на чертеже, написать уравнение прямой CD.

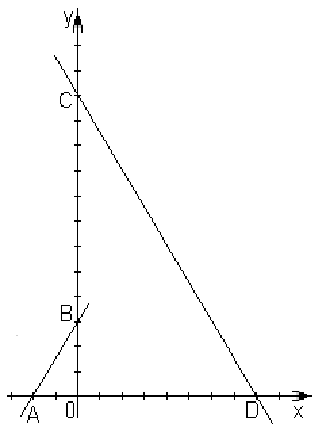
.



8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y = 2 = 0$ и $3x - y + 12 = 0$, перпендикулярно к прямой $5x + 2y + 8 = 0$.

9. Найти площадь треугольника, ограниченного координатными осями к прямой $3x + 10y - 30 = 0$.

10. По данным, взятым из чертежа, определить острый угол между прямыми AB и CD.



11. Доказать, что треугольник с вершинами A(–8;–3), B(6;–1), C(–2;5) равнобедренный.

12. Даны точки 0(0;0), P(–C;0); F_2(–C;0), M(0; y_0). Составить: Уравнение окружности с центром в точке F_2 и радиусом F_2M. Уравнения парабол с вершиной в начале координат и фокусами

точках $F_1; F_2$; M. Уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1,\ F_2$ и малой осью $[OM]$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1,\ F_2$ и мнимой осью $|OM|$. Если

C = 6	$y_0 = 4$
C = 4	$y_0 = -2$
C = 6	$y_0 = 2$
C = 3	$y_0 = -1$.

13. Составить уравнение диаметра окружности $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 30$, перпендикулярного к прямой $5x + 2y - 13 = 0$.

14. Даны вершины пирамиды A1A2A3A4. A1(1;2;1), A2(3,–1; 7), A3 (0,–3,5), A4(7,4,–2). Составить: уравнение плоскости A1A2A3; уравнение плоскости, которая проходит через точку A4 параллельно плоскости A1A2A3; найти угол между прямыми A1A4 и A2A3; найти угол между прямой A1A4 и плоскостью A1A2A3; высоту пирамиды, опущенной из вершины A4 на плоскость A1A2A3.

15. Даны точки M(2,–3), N(3,5), K(–1,3). Составить: уравнение прямой MN; уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно прямой MN; найти расстояние от точки K до прямой MN.

16. Составить уравнение эллипса, если $2a = 30$, έ =3/5.

17. Даны вершины пирамиды A1A2A3A4. A1(1;3;0), A2(3;–1;4), A3(–2;5;6), A4(0;4;–2). Составить: уравнение плоскости A1A2A3; уравнение плоскости, которая проходит через точку A4 параллельно плоскости A1A2A3; найти угол между прямыми A1A4 и A2A3; найти угол между прямой A1A4 и плоскостью A1A2A3; высоту пирамиды, опущенной из вершины A4 на плоскость A1A2A3.

18. Даны точки M(2;–5), N(–2;3), K(4;5). Составить: уравнение прямой MN; уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно прямой MN; найти расстояние от точки K до прямой MN.

19. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ взята точка с абсциссой –8 и положительной ординатой. Найти фокальные радиусы до этой точки.

Раздел 4. Введение в математический анализ функции одной переменной

4.1. Общие представления о функции одной переменной. Понятие функции одной переменной и способы ее задания. Область определения. Сложная и обратная функции. Характеристики поведения функции. Основные элементарные функции и их графики.

4.2. Теория пределов. Предел функции на бесконечности. Предел функции в конечной точке. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых функций и их связь с бесконечно большими. Основные свойства пределов. Нахождение пределов. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции.

4.3. Непрерывность функции. Определение функции, непрерывной в точке. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Практическое занятие:

1. Решить:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2+x-2} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right), \quad \lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2},$$

2. Решить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin5x} \quad \lim_{x\to 0}x\cdot ctgx \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{sin^3x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{sin5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2arcsinx}{3x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{3x}{5}\right)}{x^2},$$

3. Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{5x}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{3x^2-2}\right)^{5x}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{3n^2-2n}\right)^{5n}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+11}{3x^2-2x}\right)^{5x}\quad \lim_{x\to\infty}\{x\cdot[\ln(x+3)-\ln x]\}$$

4. Решить:

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{1-cos8x}{2x^2}\quad \lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{ln(1+5x)}{sin3x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg(5/2\cdot x)}{6x}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{arcsin^2 2x}{5x^2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}-1}{sin10x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+7x)}{sin7x}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 3}\frac{sin(x-3)}{x^3-27}\quad \lim_{x\to -5}\frac{tg(x+5)}{x^2-25}\quad \lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{sin^2(3x)}{ln^2(1+2x)}$$

$$\lim_{\tilde{o}\to 0}\frac{sin3x-sinx}{5x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{cos3x-cos^3 3x}{x^2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-cosx}$$

5. Исследовать на непрерывность функции. Сделать рисунок.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi/2\\ 1-x, & x\ge \pi/2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ (x-1)^2, & 0\le x<2\\ 4-x, & x\ge 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2^x, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1<x\le 1\\ Lnx, & x>1\end{cases}$$

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1$$ в точках $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

$$f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$$ в точках $x_1 = 4$, $x_2 = 3$

6. Решить:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7x+3}{x^4+2x-4}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$$

Самостоятельная работа:

1. Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^3-1}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+21}{2-4x-2x^2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$$

2. Решить:

$$\lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^3-2x+5}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}\quad \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}\quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{12-x-x^2}{x^3-27}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$$

3. Доказать непрерывность функции $f(x)$ во всей ее области определения по определению.

$f(x) = x2 - x + 2 \quad f(x) = x^3 - 2x \quad f(x) = \cos x$

4. Найти точки разрыва функции $f(x)$, исследовать их характер. Построить схематично график функции:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2^x, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1\le x\le 1\\ Lnx, & x>1\end{cases}$$

5. Исследовать поведение функции в указанных точках, схематично построить график.

$$f(x)=4^{\frac{1}{1-x}}+2,\quad x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}-1,\quad x_1 = 2,\ x_2 = 3$$

$$f(x)=7^{\frac{1}{x+4}}-1,\quad x_1 = -5,\ x_2 = -4$$

$$f(x)=6^{\frac{2}{4-x}},\quad x_1 = 3,\ x_2 = 4$$

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

5.1. Производная. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Таблица производных. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Уравнение касательной и нормали к графику. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

5.2. Производные высших порядков.

5.3. Правило Лопиталя.

5.4. Полное исследование функции. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика.

Практическое занятие:

1. Найти производные функций по определению:

$$f(x)=x^2-7 \qquad f(x)=2-4x+x^2 \qquad f(x)=\sin 2x$$

2. Найти производные функций:

$$y=\sqrt[3]{x^2}, \quad y=2\log_3 x+7x, \quad y=2x^4+\frac{3}{x}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \quad y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{8}{x^3}$$

$$y=x^3\cdot\log_5 x \quad y=\sqrt[5]{x^4}\cdot\ln x \quad y=\sin x+2\cos x, \quad y=(\sin x+2x)\cdot\sqrt[3]{x},$$

$$y=\sqrt{x}\cdot\cos x+\frac{3}{x^2} \quad y=x\cdot tgx, \quad y=\frac{2x}{ctgx}, \quad y=3\sin x-\frac{x^2}{tgx}.$$

$$y=2\arcsin x, \quad y=-3\cdot arcctgx \quad y=-3\arccos x+4\sqrt{x}, \quad y=\frac{2-9x^3}{1-\cos x}$$

$$f(x)=\frac{2ctgx}{1-2\sqrt{x}} \quad y=x\cdot arctgx-5\arccos x+\frac{\arccos x}{x^2}$$

3. Производная сложной функции.

$$y=\left(1+3x^2\right)^3 \quad y=(3x+1)^4 \quad y=\sin 2x \quad y=\sin x^2 \quad y=\sin^2 x$$

$$y=\sin e^x \quad y=\sin(3x+5) \quad y=(4x+5)^5 \quad y=\sqrt{x^2+2} \quad y=\sqrt{\cos x}$$

$$y=tg(\ln x) \quad y=\cos(tg3x) \quad y=\sin(\ln x) \quad y=\ln x^3 \quad y=tg\left(6^x\right)$$

$$y=3^{5x}\quad y=\ln(2x-8)\quad y=\arcsin 6x\quad y=(\arcsin 8x)^2$$

$$y=\ln^4(2x-6)\quad y=10^{\cos 5x}\quad y=3^{\arcsin 4x}\quad y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$y=x^3\cdot\sin(\cos x)\quad y=\log_6\sin 4x\quad y=\left(1+tg^2 3x\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y=3^{x^2}\cdot\sqrt{x^3}-5x\quad y=\cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\quad y=\frac{\sin^2 x}{ctg\,x+1}+\frac{\cos^2 x}{tg\,x+1}$$

4. Найти производные функций, используя правило логарифмического дифференцирования:

$$y=x^{\sin x}\quad y=x^{x^2}\quad y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3\cdot(x+4)^4}\quad y=\left(x^2+1\right)^{2x}\quad y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$y=\sqrt[x]{(2x\sin x+1)^2}\quad y=\sqrt{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}\quad y=\frac{(x+1)^3\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{x+7}\cdot(x-3)^4}{(x+2)^5}\quad y=\frac{(x-3)^5\cdot(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

5. Продифференцировать функции, заданные параметрически:

$$\begin{cases}x=k\sin t+\sin kt\\ y=k\cos t+\cos kt\end{cases}\quad \begin{cases}x=\arcsin t\\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{1+t^4}{\left(1+t^2\right)^2}\\ y=\dfrac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\cos^2 t\\ y=3\sin^2 t\end{cases}\quad \begin{cases}x=(2t+3)\cos t\\ y=3t^3\end{cases}$$

6. Продифференцировать функции, заданные неявно:

$$x^3+y^3=\sin(x-2y)\quad x\sin y+y\sin x=0\quad x^4-y^4=x^2y^2$$

$$y^2-x=\cos y\quad 3x+\sin y=5y$$

7. Найти предел функции, используя правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}\quad \lim_{x\to 1/2}\frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}\quad \lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2}-e}{\sin(x^2-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}\quad \lim_{x\to 2\pi}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 2x}\quad \lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\pi x/2}$$

$$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x} \quad \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{tgx} \quad \lim_{x\to 3}\sin\pi x\cdot\ln(2-\frac{x}{3}) \quad \lim_{x\to 0}(\frac{tgx}{x})^{1/x^2}$$

8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y = x^3 - 4x^2 + 3x \quad y=\frac{x^2}{x-2} \quad y=\ln\left(1-x^2\right) \quad y = x^2\cdot e^{-x} \quad y = x - \ln x$$

$$y=\frac{x^3}{3-x^2}$$

9. Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции:

$$f(x)=x^2-3x+1 \quad f(x)=e^{x^2} \quad f(x)=x^5-10x^2+7x-9$$

Самостоятельная работа:

1. Раскрыть неопределенности

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)1},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1} \quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{2x-x^2}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right),$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+1}{3-\sqrt{4+x}} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-1}{3-5x-x^3}$$

2. Раскрыть неопределенности, используя эквивалентные бесконечно малые функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg\,4x}{\exp(2x)-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{\sin 2x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^2)}{x\sin 5x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg(x^3)}{x\sin 2x^2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 5x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x^{2)}}{\exp(x^2)-1} \quad \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{\arcsin 2x}$$

3. Раскрыть неопределенности

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{1/x^3}$$

4. Найти производную функции:

$$y = 2x^4 + \frac{3}{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad f(x) = 3^x \cdot tg(x/2) \qquad \varphi(x) = \frac{2\cos x - \sin x}{2 - tgx}$$

$$y = \sqrt{(2-5x^2)^3} \qquad y = \sin^2\left(\frac{2x+1}{3}\right) \qquad y = 0{,}2x^5 + \frac{4}{x^2} - 6\sqrt{x^3}$$

$$f(x) = e^{2x} \cdot \sin x \qquad \varphi(x) = \frac{7 - x^2}{\sqrt{x+3}} \qquad y = \ln^3(1-2x^2) \qquad y = \ln(\sin x + tg2x)$$

$$y = \frac{2}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{7}{x^3} \qquad f(x) = 2^x \cdot \cos 3x \qquad \varphi(x) = \frac{\sin 2x}{x^2 - 9} \qquad y = 0{,}5e^{\sin 2x}$$

$$y = arctg\left(e^{x/2}\right) \qquad tg\, y = 3x + 5y \qquad y^2 + x^2 = \sin\, y$$

$$y = (7 - 3x^2)\cos(2/x) \qquad y = \arcsin\left(e^{x^2}\right) \qquad y = e^{-arcctgx} \qquad y = sin^3 2x$$

$$y = \frac{(x+2)^7 \cdot (x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}} \qquad y = \frac{(x-1)^4 \cdot (x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$$\begin{cases} x = t - \sin\, t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t \cdot \ln t \end{cases}$$

5. Вычислить производные, используя линейность операции дифференцирования и правила дифференцирования произведения и частного:

$$y = z^2 \operatorname{arctg}(z) \qquad y = (t+1)\operatorname{tg}(t) \qquad y = 4\sin(x)\cos(x) \qquad y = \exp(t)\sin^2(t)$$

$$y = x^2 \exp(x)\ln(x) \qquad y = \frac{\sin(t) + \cos(t)}{\sin(t) - \cos(t)} \qquad y = \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 + z + 7} \qquad y = \frac{\sqrt{t}}{2 + \sqrt[3]{t}} \qquad y = \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$$

$$y = (x^2 - 7x + 8)\exp(-x)$$

6. Вычислить производные, используя правило дифференцирования сложной функции (выписывать цепочку промежуточных переменных):

$$y(t) = \sqrt[3]{(3t-8)^5} \qquad y = (1-x)^{100} \qquad y = \sqrt[3]{(1-z^3)(z^3+1)} \qquad x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$y = \exp(-t)\ln(2t+1) \qquad y(z) = \exp(-z^2/2) \qquad y = \operatorname{ctg}(x^2) - \operatorname{tg}^2(2x) \qquad y = 2^x \log_4(x)$$

$$y = \operatorname{arctg}(\exp(-t)) \qquad y = \ln(\sin(z)) \qquad y = \ln(\ln(\ln(x))) \qquad y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad y = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$$

$$y = \left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{12} \qquad y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}} \qquad y = \ln(z + \sqrt{1+z^2}) \qquad y = \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}$$

$$y = t\{\sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t))\} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}} \qquad y = \ln(arctg5x)$$

7. Найти производную по определению: $f(x) = 2 - 4x + x^2$

8. Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}. \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}. \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{sin2x-\sin x}.$$

9. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

$$f(x)=x^5-10x^2+7x-9 \quad f(x)=(x-2)^2(x+2) \quad f(x)=x+e^{-x}$$

10. По формулам функций схематически построить их графики. В точках разрыва вычислить односторонние пределы и указать характер точек разрыва:

$$y=1/|x^2-4x+3|; \quad y=\exp(-1/x^2); \quad z=1/\ln(t);$$

$$y=\mathrm{arctg}(1/t); \quad y=\mathrm{arctg}(1/t^2), \quad y=\frac{th\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{x+5}, \quad y=\frac{2^{-\frac{1}{x^2}}}{x-3},$$

$$y=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x-5}, \quad y=arcc\,\mathrm{tg}(1/t), \quad y=arcc\,\mathrm{tg}(1/t^2)$$

6. Функции нескольких переменных

6.1. Понятие функции двух переменных, область определения.

6.2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Практическое занятие:

1. Запишите производные первого и второго порядка для указанной функции в указанной точке. Запишите выражение для первого дифференциала. Запишите выражение для второго дифференциала.

$$f(x,y)=\ln(X^2+У);\quad M_0(0;1);\qquad f(x,y)=\exp(X^2У);\quad M_0(0;1);$$

2. Исследуйте функцию на локальный экстремум:

$$f=X^3-2У^3-3X+6У;$$

$$f=8-6X+4У-2Z-X^2-У^2-Z^2$$

$$f=3X^3+У^2+Z^2+6XУ-2Z+1;$$

3. Найти частные производные функций:

$$z=xy^2-\frac{x}{y}\quad z=\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\quad z=\frac{x}{y^3}+\frac{y}{x^3}-\frac{1}{6x^2y}\quad z=\cos\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{y}{x}$$

$$z=y^5\sin^2(x+y)\quad z=\left(x^3+y^4\right)\cdot\cos(2xy)\quad z=\ln\left(x^3+y^2\right)$$

$$z=6x^2+x^6y-y^4+5x^3y^5-x+5\quad u=x^3+yz^2+3yx-x+z$$

$$z=e^{x^2+y^3}\quad z=\sqrt{4x^3+6y^5}\quad z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$

$$z=x^4\cos y-y^5\sin x\quad z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$$

4. Найти $u'_x+u'_y+u'_z$ при $x=y=z=1$, если $u=\ln\left(1+x+y^2+z^3\right)$.

5. Найти $\dfrac{z'_x+z'_y}{z'_x z'_y}$ при $x=1$ и $y=2$, если $z=x^3y-xy^3$

6. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^3 - x^2 y - y^3; \quad z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3; \quad z = \sin x \cdot \sin y;$$

$$z = xy + \sin(x+y); \quad z = \ln(tg(x+y)); \quad z = x^2 \ln(x+y);$$

$$z = x \cdot \sin xy + y \cdot \cos xy;$$

$$z = \sin(x + \cos y); \quad z = \left(x^2 + y^2\right)^3; \quad z = \ln\sqrt{x^2 + y}; \quad z = x \cdot \ln(xy)$$

7. Дано $u = e^{xyz}$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

8. Дано $v = \sin xyzu$. Найти $\dfrac{\partial^4 v}{\partial x \partial y \partial z \partial u}$.

9. Найти частные производные первого порядка:

$$z = 2x^3 y^5 - 6xy^5 + 5xy - 3 \quad z = \ln(\sqrt{xy} + y^2 - e^{x^2})$$

$$z = \arcsin(xy) - 3xy^2 \qquad z = \cos\frac{x-y}{x^2 + y^2}$$

10. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \sin\sqrt{x^3 y} \qquad z = \cos(xy^2) \qquad z = e^{\sqrt{4x^2 - 7}}$$

11. Найти $\dfrac{z'_x + z'_y}{z'_x z'_y}$ при $x = 1$ и $y = 2$, если $z = x^3 y - xy^3$

12. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \qquad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

$$z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y \qquad z = xy(12 - x - y)$$

$$z = (x-1)^2 + 2y^2 \qquad z = xy - 3x^2 - 2y^2$$

13. Найти область определения функции:

$$z = \ln(y - x^2 + 2x). \quad z = \arcsin(x - 3y).$$

14. Найти область определения функций:

$a)\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,;\ b)\ z = \ln(x + y);\ \ c)\ z = x + \arccos(y);$

$d) z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}};\ e)\ z = \sqrt{x \cdot \cos y}\,;\ f)\ u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$

15. Построить линии уровня функций:

$a)\ z = \ln(x^2 + y);\ \ b)\ z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}.$

16. Найти точки разрыва функции:

$a)\ z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ b)\ z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2};\ c)\ z = \frac{1}{(x-y)^2}.$

17. Найти частные производные I порядка:

$a)\ z = x^3 \cdot y + x \cdot y^2 + 3xy + 7x - y\ ; b)\ z = \frac{y}{x}; c)\ z = \frac{(x^2-y)}{(x+y^2)};$

$d)\ z = arctg\,\frac{y}{x}; e)\ z = x^y; g)\ z = e^{\sin(y \cdot x^2)}; f)\ z = \ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}.$

18. Показать, что функция $z = z(x,y)$ или $u = u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению:

$a)\ z = \ln(x^2 + xy + y^2)\ , x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2;$

$b)\ z = xy + x \cdot e^{\frac{y}{x}},\quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z;$

$c)\ u = x + \frac{x-y}{y-z},\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1;$

$d)\ u = (x-y)(y-z)(z-x),\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

19. Найти частные производные II порядка:

$a)\ z = xy^2 + \ln(x^3 + y) - 3x + y.$

$b)\ u = xy + y^2z - z^3xy.$

20. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$ для функции $z = \sin(xy)$.

21. Показать, что функция $u = arctg\,\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

22. Проверить, что функция $u = \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

23. Найти полные дифференциалы функций:

$a)\ z = 2^{x^2+y^2}$

$b)\ z = x^2 + \ln(x + y^3)$

$c)\ z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ в точке $P(2,1)$.

24. Вычислить: $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$.

25. Найти производную функции $z = x^3 + 2x^2y^3 + xy^2 + 1$ в направлении вектора $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$ в точке M, если $M(1,2), N(4,6)$.

26. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $P(1,2,-1)$ в направлении вектора, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

27.Найти $\overrightarrow{grad(z)}$ в точке P(5;3) , если $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

28.Найти угол между градиентами функции $z = \ln\frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ и $B(1,1)$.

29. Найти эстремумы функций:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

30. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в ограниченной, замкнутой области:

a) $z = xy(2 - x - y)$ в области $x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

b) $z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

31. Найти поток вектора $\bar{a} = (5x + z)\bar{i} + (x - 3y)\bar{j} + (4y - 2z)\bar{k}$ через часть плоскости $x + y - z = 2$, лежащую в первом октанте, орт нормали составляет с осью 0Z острый угол γ.

32. Вычислить дивергенцию векторного поля $\bar{b} = 10u\bar{a}$, где $\bar{a} = \{2;-3;4\}$, $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

33. Найти векторные линии векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j}$

34. Найти векторные линии векторного поля $\bar{a} = 3x^2 y\bar{i} + 3xy^2\bar{j}$.

35. Найти векторную линию поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^3\bar{j} + z^2\bar{k}$, проходящую через точку $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$.

36. Найти векторные линии поля градиента функции $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$.

37. Найти векторные линии поля градиента функции $U = x^2 - 2y + z^2$

Самостоятельная работа:

1. Найти частные производные первого порядка:

$$z = 2x^3 y - 4xy^5 \quad z = 5xy^4 + 2x^2 y^7 \quad z = \arcsin\sqrt{xy}$$

$$z = \ln(y^2 - e^x) \quad z = 5xy^2 - 3x^3 y^4 + 2 \quad z = arctg(x^2 + y^2)$$

$$z = xy^4 - 3x^2 y - 5 \quad z = \ln(3x^2 - y^4) \quad z = 2x^2 y^2 + x^3 - y^2 - 3$$

$$z = \sin\sqrt{xy^3} \quad z = 7x - x^3 y^2 + 9 - y^4 \quad z = tg(x^3 + y^2)$$

2. Найти частные производные второго порядка:

$$z = e^{x^2 - y^2} \quad z = ctg(x + y) \quad z = \ln(3x^2 - 2y^2) \quad z = \cos(xy^2)$$

$$z = \ln(3xy-4) \quad z = e^{\sqrt{x+y}}$$

3. Исследовать на экстремумы функцию.

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5 \quad z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$$

$$z = 1 + 6x - x^2 - y^2 - xy \quad z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$$

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1 \quad z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

4. Найти область определения функции $z = z(x, y)$.

$$z = \frac{3xy}{2x-5y} \quad z = \frac{1}{36-4x^2-y^2} \quad z = \ln(xy). \quad z = \ln(4 - x^2 - y^2) \quad z = \frac{2}{6-x^2-y^2}.$$

$$z = \arccos(x + y). \quad z = \frac{3x+y}{2-x+y} \quad z = \sqrt{9 - 3x^2 - y^2} \quad z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2} \quad z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

5. Найти частные производные первого порядка.

$$z = \ln(y^2 - e^{-x}) \quad z = arctg\,\frac{x}{y^2} \quad z = 2^{3x^2-xy} \quad z = arcsin\sqrt{xy} \quad z = sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}.$$

$$z = tg(x^3 + y^2) \quad z = ctg\sqrt{xy^3} \quad z = e^{-x^2+y^2} \quad z = \ln(3x^2 - y^4) \quad z = arccos\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. Найти частные производные первого порядка для функции $U = U(x,y,z)$ в точке $M_o(x_o,y_o,z_o)$.

$$U = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ M_o(0,-1,1) \quad U = z\cdot\ln(x^3 + y^2), M_o\,(1,2,3)$$

$$U = zx\cdot\sin(2x + y), M_o\left(\frac{\pi}{4}, 0,2\right) \quad U = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)\,, M_o(2,1,0).$$

$$U = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\,, M_o(1,0,1) \quad U = \ln(\cos(x^2y^2 + z))\,,\ M_o(0,0,\frac{\pi}{4})$$

$$U = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}\,, M_o(3,4,2) \quad U = arctg(xy^2 + z), M_o(2,1,0).$$

$$U = \arcsin\left(\frac{x^2}{y} - z\right), M_o(2,5,0) \quad U = \sqrt{z}\,\sin(2x - y)\,,\ M_o\,(0,0,4).$$

7. Найти полный дифференциал функции $z = z(x,y)$

$$z = 2x^3y - 4xy^5 - \frac{6x}{y^2} - 5x. \quad z = xy\cdot\sin(xy) \quad z = \frac{3x+y}{xy-5}$$

$$z = 5xy^4 + 2x^2y^7 - 3x + y \quad z = 3y^2x^3 - 5x - 4y^2 + 1 \quad z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$$

$$z = \ln(3x^2 - 2y^2) \quad z = 5xy^2 - 3x^3y^4 + x - 3y \quad z = e^{x^2+xy} \quad z = arctg(2x - y).$$

8. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = z(x,y)$.

$$z = e^{x^2-y^2} \quad z = 2^{(7x^2y+5)} \quad z = arcctg(xy - 3) \quad z = \cos(xy^2)$$

$$z = arctg(x + y). \quad z = \arcsin(x - y). \quad z = \sin(x^2 - y) \quad z = \arccos(2x - y).$$

$$z = arcctg(x - 2y). \quad z = \ln(3x^2 - y^2).$$

9. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению функция $u = u(x, y)$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \frac{y}{x} \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3).$$

$$u = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$$

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}\,, u = x^y \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u\,, u = \frac{xy}{x+y}.$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, $u = arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

$u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ $\qquad$ $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, u = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u, u = (x^2 + y^2)tg\frac{x}{y}$

10. Исследовать функцию $z = z(x,y)$ на экстремум.

$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$. $\quad z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$. $\quad z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$. $\quad z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$. $\quad z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

$z = 4(x - y) - x^2 - y^2$. $\quad z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.

11. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = z(x,y)$ в области D.

$z = 3x + y - xy$, $\qquad D: y = x, y = 4, x = 0.$

$z = xy - x - 2y$, $\qquad D: x = 3, y = x, y = 0.$

$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\qquad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

$z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\qquad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\qquad D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$

12. Найти угол между градиентами скалярных полей $U = U(x,y,z)$ и $V = V(x,y,z)$ в точке M.

$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $U = \frac{yz^2}{x^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$V = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, $U = x^2yz^3, M(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

$V = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $U = \frac{z^3}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

$V = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $U = \frac{z}{x^3y^2}$, $M\left(1{,}2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $U = \frac{x^2}{yz^2}$, $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$V = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $U = \frac{z^2}{xy^2}$, $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

13. Найти производную скалярного поля $U = U(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{S}$.

$U = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$, $\vec{S} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $M(1{,}1{,}1)$.

$U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $\vec{S} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $M(2{,}4{,}4)$.

$U = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz$, $\vec{S} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, $M(1{,}1{,}1)$.

$U = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $\vec{S} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$, $M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$.

$U = xz^2 - \sqrt{x^3y}$, $\vec{S} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $M(2{,}2{,}4)$.

$U = x\sqrt{y} - yz^2$, $\vec{S} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $M(2{,}1{,}-1)$.

$U = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$, $\vec{S} = 14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}$, $M(1{,}1{,}1)$.

$$U = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + xz, \vec{S} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \ M(2,2,-1).$$

Раздел 7. Интегральное исчисление

7.1. Неопределённый интеграл. Таблица и свойства неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: Функции, замена переменной, по частям, дробно-рациональных функций.

7.2. Определённый интеграл. Определение, геометрический смысл и свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла. Приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур, объёма тела вращения.

7.3. Несобственные интегралы

7.4. Приближенное интегрирование: Метод прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Практическое занятие:

1. Найти неопределенные интегралы

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 5}{x^3} dx \quad \int \frac{\sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \int \left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2 + 9}\right) dx \quad \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2\right) dx$$

$$\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[8]{x^2} - 5}{\sqrt{x}} dx \quad \int \sqrt{x}\left(x^2 - 1\right) dx \quad \int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$\int \left(4\sin x + 8x^3 - \frac{11}{\cos^2 x}\right) dx \quad \int \left(7^x - \frac{8}{x} + 4\cos x\right) dx \quad \int \frac{5 + \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad \int \cos 2x \, dx \quad \int (9x + 12)^{17} dx$$

$$\int \frac{dx}{8x - 1} \quad \int 4^{3-5x} dx \quad \int \sqrt{3x + 4} dx \quad \int \sqrt[3]{(2 + x)^2} \, dx \quad \int \sqrt[3]{(2 - x)^5} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{2x + 9} \quad \int \sin\left(\frac{\tilde{o}}{3} - 4\right) dx \quad \int \cos(5 - 3x) dx \quad \int e^{x+3} d\,x \quad \int 4^{3x} dx$$

$$\int 3^{2-9x} d\,x \quad \int \frac{dx}{x^2 + 16} \quad \int \frac{2dx}{9x^2 + 7} \quad \int \frac{dx}{(2x - 8)^5} \quad \int \frac{6dx}{\left(9 - \frac{x}{3}\right)^7} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 + 3}} \quad \int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2 - 3}} \quad \int \frac{dx}{\sin^2(1 + 2x)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^4}} \quad \int \frac{x - 2}{x + 3} dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 9} \quad \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \quad \int \sin^2 x \, dx \quad \int \cos^2 x \, dx \quad \int \frac{\ln(3x + 5)}{(3x + 5)} dx$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3(2x-5)}}{(2x-5)}dx \qquad \int\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(x+\frac{3}{x^2}\right)dx \qquad \int\left(\frac{4}{x^2}+\sqrt{3x}\right)x^3dx$$

$$\int cos\left(\sqrt{x}+2\right)d\left(\sqrt{x}+2\right) \qquad \int\frac{d\,x}{\sqrt{25-9x^2}} \qquad \int\frac{d\,x}{\sqrt{7+4x^2}}$$

$$\int\frac{d\,x}{\sqrt{7-5x^2}} \qquad \int 7^{\,2x\ -3}\,d\,x$$

2. Найти интегралы:

$$\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2} \qquad \int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx \qquad \int\frac{dx}{x^4-x^2} \qquad \int\frac{dx}{x(x^2+1)} \qquad \int\frac{x\,dx}{x^3-1}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+8} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}} \qquad \int\frac{(3x-2)\,dx}{x^2+5x-1} \qquad \int\frac{(21x^2+26)\,dx}{\left(x^2-5x+4\right)(x+3)}$$

$$\int\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx \qquad \int\frac{x+1}{4x-x^2+3}dx \qquad \int\frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2\,(x-1)}$$

$$\int\frac{(5x+3)\,dx}{(x+2)(x+1)(x-3)} \qquad \int\frac{\left(1-2x^2\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4\right)} \qquad \int\frac{dx}{2x^2+6x+3}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} \qquad \int\frac{(x+2)\,dx}{3x^2-x+5} \qquad \frac{(3x^2+24)dx}{\left(x^2+x-2\right)(x+1)}$$

3. Найти интегралы:

$$\int x\cdot\sin\tilde{o}dx \qquad \int(x^2+4)Lnxdx \qquad \int xe^{-2x}dx \qquad \int x\sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int(2x+3)\cdot\cos xdx \qquad \int x^3\cdot\cos x^2dx \qquad \int e^{3x}\cdot 5xdx \qquad \int\arcsin xdx$$

$$\int x^2\ln xdx \qquad \int x\cdot\mathrm{arctg}\,2xdx \qquad \int\left(x^2-4x+1\right)\cdot e^x dx$$

4. Найти интегралы:

$$\int(x+5)^8xdx \qquad \int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \qquad \int\frac{x^3dx}{(x-1)^2} \qquad \int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

5. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx \qquad \int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \int x\cdot(2x-9)^6dx \qquad \int\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \int\frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)} \qquad \int\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{\arccos x\cdot\left(1-x^2\right)}}$$

$$\int \cos(3x)\cdot\sin(2x)dx \quad \int \sin(4x)\cdot\sin(5x)dx \quad \int \cos(4x)\cdot\cos x dx$$

$$\int \sin^3 x\cdot\cos x dx \quad \int \cos^4 x\cdot\sin^3 x dx \quad \int \cos^3 x\cdot\sin^5 x dx$$

$$\int \cos^4 x\cdot\sin^2 x dx \quad \int \mathrm{tg}^4 x\cdot\sec^2 x dx \quad \int \mathrm{ctg}^4 x dx \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} \quad \int \frac{dx}{3+5\cos x}$$

6. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx \quad \int_2^5 \frac{dx}{2x-3} \quad \int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx \quad \int_1^5 \frac{x}{1+x^2}dx \quad \int_0^{\pi}\left(\cos^3 x-\frac{3}{4}\cos x\right)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\cdot(3-\cos 2x)dx \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 6x} \quad \int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx \quad \int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x}dx \quad \int_0^1 \frac{4\,arctg\,x-x}{1+x^2}dx \quad \int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx \quad \int_{0,5}^1 x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$$

$$\int_{-0,4}^0 (2+5x)^4\,dx \quad \int_{-1}^0 x\,e^{-x}dx \quad \int_{-1}^0 x\ln(x+2)dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\,dx$$

$$\int_0^1 (2x+3)\,3^x\,dx \quad \int_0^{0,2} x\,e^{5x}\,dx \quad \int_1^{e^2} \ln x\,dx \quad \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$$

7. Найти значения несобственных интегралов или установить их расходимость:

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2}dx \quad \int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} \quad \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12} \quad \int_0^{+\infty} 2x\sin x\,dx \quad \int_{-\infty}^0 \cos 3x\,dx \quad \int_{-\infty}^0 x\cos x\,dx$$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y^2=x \quad y=0$$

$$x=1, \quad x=4$$

$$y=-x^2+4$$

$$y=0$$

$$y=\cos x \quad y=0$$

$$x=0, \qquad x=\pi/2$$

9. Построить область интегрирования по границам двукратного интеграла:

$$\int_{0}^{2} dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$$

10. Изменить порядок интегрирования, предварительно изобразив на чертеже область интегрирования

а) $\int_{0}^{3} dy \int_{0}^{3-y} f(x,y)dx$ б) $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$ в) $\int_{0}^{4} dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

11. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$ по области, ограниченной прямыми X=2, $У$=Х и гиперболой $XУ$=1 (двумя способами)

12. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} (2x+y)dxdy,$ где (σ) – треугольник с вершинами в точках: A(–1;2), B(3;4), C(6;2)

13. Найти массу квадратной пластины в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояния до диагоналей квадрата.

14. Построить области по известным пределам данного двукратного интеграла

а) $\int_{-2}^{1} dx \int_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$ б) $\int_{1}^{3} dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$

15. Вычислить : а) $\int_{0}^{5} dx \int_{0}^{5-x} \sqrt{4+x+y}\; dy$

б) $\int_{0}^{2} dx \int_{9}^{3} \left(x^2 + xy^2\right)dy$ в) $\int_{0}^{2} dy \int_{0}^{y^2} (x+2y)dx$

г) $\iint\limits_{(\sigma)} (x+y)dx\,dy$, где (σ) ограничена линиями

$$y = \frac{3}{2}x\ (x \succ 0), \quad y = 4-(x-1)^2, \quad x = 0$$

Самостоятельная работа:

1. Найти интегралы:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)}dx \quad \int e^x\cos(e^x)dx \quad \int \frac{x^2}{(1+x^3)^4}dx \quad \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$$

$$\int \frac{1}{x\ln^4(x)}dx \quad \int \frac{(x^3+3x^2-1/4)}{(x^4+4x^3-x+3)^5}dx \quad \int x^3\sqrt{x^4+2}dx \quad \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}} \quad \int \frac{\cos^4(x)}{\sin^2(x)}dx \quad \int\left(\frac{7x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^3}+5x\right)dx \quad \int\left(4x^5-\frac{2}{\sin^2 x}+\cos x\right)dx$$

$$\int\left(\frac{6}{1+x^2}-5^x+2\right)dx \quad \int \frac{dx}{\cos^2(2-5x)} \quad \int(12-5x)^6dx \quad \int \frac{dx}{2x-7}$$

$$\int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{1-3x^4}} \quad \int\left(ax^3-b\right)^5\cdot x^2dx \quad \int 3^{2+3\cos x}\cdot\sin xdx \quad \int \frac{\sqrt[3]{\ln(8-x)}}{8-x}dx$$

$$\int \frac{dx}{b^2-8x^2} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-3\operatorname{tg}x)^2}\cdot\cos^2 x} \quad \int\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-3x}dx$$

$$\int(9+2x)\sin 7xdx \quad \int(8+5x)\ln xdx \quad \int\ln(6+x)dx$$

$$\int\operatorname{arcctg}\frac{5x}{2}dx \quad \int x\cdot\arccos 2xdx \quad \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx \quad \int \frac{x+1}{4x-x^2+3}dx$$

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx \quad \int \frac{3x-4}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx \quad \int \frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2(x-1)}$$

$$\int \frac{(5x+3)dx}{(x+2)(x+1)(x-3)} \quad \int \frac{\left(1-2x^2\right)dx}{(x+3)\left(x^2+4\right)} \quad \int\cos\frac{4x}{3}\cdot\sin\frac{5x}{3}dx$$

$$\int\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^3 x\right)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} \quad \int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x} \quad \int \frac{xe^xdx}{\sqrt{1+e^x}} \quad \int \frac{dx}{\left(x^4-1\right)^2}$$

$$\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+3} \quad \int_3^5 \frac{dx}{x^2+4x-1} \quad \int \frac{3x+2}{(x-2)^3}d\,x$$

$$\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} \quad \int \frac{\ln x}{x^5}dx \quad \int_0^{\pi/2}(x-1)\cos x\,dx \quad \int \frac{dx}{x^3+x} \quad \int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$$

$$\int\sin 5x\cos 3x\,dx \quad \int\sin^2 3x\,dx \quad \int_{-1}^{4}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+5}} \quad \int_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx \quad \int x\sin 3x\,dx$$

$\int x\ln 2x\,dx$ $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ $\int_6^7 \frac{dx}{x^2-7x+10}$ $\int \frac{7x\,dx}{1+\sqrt{x}}$ $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

$\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx$ $\int_0^{0-1} \ln(x+1)dx$ $\int \frac{4+x^2}{x^3+3x}dx$ $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ $\int \sin^2 \frac{5}{2}x\,dx$

$\int_1^{-3} \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}}$ $\int_0^1 x(x-5)^5\,dx$ $\int arc\cos 3x\,dx$ $\int \frac{\ln 3x}{4x^7}\,dx$

2. Найти интегралы

$\int \frac{1}{(x+1)(2x+3)}dx$ $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

$\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$ $\int \frac{x^5}{x+1}dx$

$\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}dx$ $\int \frac{x-4}{\sqrt{4x-3-x^2}}dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$ $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx,$

$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}},$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}},$

3. Найти интегралы:

$\int x\exp(5x)dx$ $\int x\cos(2x)dx$ $\int x^2\ln(x)dx$ $\int x^2\exp(x)dx$

$\int xctg^2 xdx$ $\int \arcsin^2 xdx$ $\int \arcsin(4x)dx$ $\int \mathrm{arctg}(3x)dx$

$\int \ln^2 xdx$ $\int \ln(1+x^2)dx$

4. Вычислить интегралы:

$\int \sin^3(x)\cdot\cos^4(x)\cdot dx$ $\int \cos^4(x)\cdot dx$ $\int \mathrm{tg}^5(x)\cdot dx$

$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx$ $\int \mathrm{ctg}^4(x)\cdot dx$ $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$

$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx$ $\int \sqrt{x^2-4x+3}\cdot dx$ $\int x\sqrt{2x-x^2}dx$ $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5. Вычислить приближенно интеграл

$\int_0^x \exp(-t^2)dt$ $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$

6. Вычислить определенные интегралы

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} (tgx)^4\,dx$, $\int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2+9)^2}dx$, $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, $\int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2}$

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 4 - x^2, \quad x^2 + 2x + y = 0, \quad x^2 - 2x + y = 0$$

$$y = \sqrt{x-4}; \quad y = 4 - x; \quad x = 8$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

$$x + y - 5 = 0 \qquad y = 0$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y = 0 \qquad x = -1$$

$$y = 1/x \qquad y = 0$$

$$x = 1, \qquad x = 3$$

8. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг заданной оси:

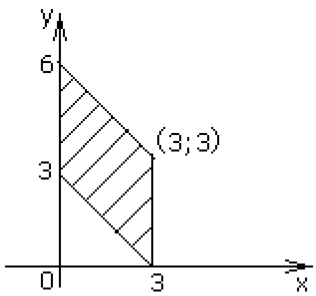
$$y = a - \frac{x^2}{a}, \quad x + y = a, \quad a > 0 \quad \text{вокруг оси} \quad 0y$$

$$y = 4 - x^2, \quad y = 0 \quad \text{вокруг оси} \quad x = 3$$

9. Найдите длину дуги кривой:

$$y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad x \in [1/4; 1]$$

10. Расставить границы интегрирования в том и другом порядке по заштрихованной области. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} (2x - y)\,dx\,dy$.



11. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} \rho^4 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi$, где (σ) – круговой сектор, ограниченный лучами $\varphi = \dfrac{\pi}{3}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и окружностью $\rho = 2$.

Раздел 8. Комплексный анализ

8.1. Комплексные числа. Формы записи и перевод из одной формы в другую. Действия с комплексными числами. Решение уравнений.

8.2. Определение функции комплексного переменного.

8.3. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность и особые точки.

Практическое занятие:

1. Найти значение функции $f(z)=z^4+\dfrac{2+i}{z}-(-3+2i)$ при $z=1-2i$.

2. Решить уравнение $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z=2$; $z=-2$; $z=i$; $z=-i$; $z=1+i$; $z=-1+i$; $z=-1-\sqrt{3}i$.

4. Выполнить действия $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}$.

5. Найти все корни $\sqrt[4]{-4}$.

6. Вычислить $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$.

7. Провести вычисления в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{5+i}+(i-1)(2-3i);\quad \left(\frac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2\quad \frac{4-i}{5+i}+(i-1)(2+3i);$$

$$\frac{2+i}{5+i}+(i-3)(2-3i);\quad \frac{3-i}{5-i}+(i-5)(2-3i);\quad \frac{7-i}{5+i}+(4i-1)(2-2i);$$

$$\frac{2-i}{3+i}+(3i-1)(2-3i);\quad \left(\frac{i^6+2}{i^{21}-1}\right)^2\quad \left(\frac{i^4+2}{i^{18}-1}\right)^2\quad \left(\frac{i^{12}+2}{i^{15}-1}\right)^2$$

8. Для комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Построить вектор комплексного числа на плоскости. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

$$z=4\quad z=-4\quad z=2i\quad z=-3i\quad z=1+i$$

$$z=-1+\sqrt{3}i\quad z=-2-2i\quad z=4-4i$$

9. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа. Дайте геометрическую интерпретацию операции извлечения корня:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};\quad \sqrt[4]{-4};\quad \sqrt[3]{8};\quad \sqrt[6]{1};\quad \sqrt[4]{1+i};\quad \left(\frac{+1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24};\quad \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};\quad \left(\frac{+1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24};\quad \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}.$$

10. Выражение $(2+i)(3+2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

11. Дано $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 2+i$. Тогда z_1, z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

12. Число $z = x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ – чисто мнимое при x, равном:

13. Число $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

14. Выражение $(3i-1)(2i+5) - 4i$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

15. Дано $z_1 = 1+3i$, $z_2 = -2+2i$. Тогда z_1, z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

16. Определить, при каком действительном значении x числа $z_1 = (2-xi)+(3+4i)$ и $z_2 = 5+3xi$ будут сопряженными.

17. Число $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

18. Выражение $(2+3i)(3-2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

19. Дано $z_1 = 2+i$, $z_2 = 1-i$. Тогда z_1, z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

20. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто действительное при x, равном:

21. Число $z = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

22. Выражение $(2+3i)^2 - 2$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

23. Дано $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$. Тогда z_1, z_2; $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно:

24. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто мнимое при x, равном:

25. Число $z = 6e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

26. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $w = e^{z^2}$

27. Восстановить функцию комплексной переменной: $\mathrm{Re}f(z) = x^3 - 3xy^2$, $f(2) = 1$.

28. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $w = \sin z$

29. Восстановить функцию комплексной переменной: $\mathrm{Re}f(z) = 2\sin x \cdot \mathrm{ch}\, y - x$, $f(0) = 1$.

30. Найти особые точки функций:

1) $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$ 2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$

31. Найти вычеты функций в их особых точках.

1) $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z-2)(z+1)^2}$ 2) $f(z) = ctg\, z$, $z=\pi$.

32. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=2} \frac{z^4}{(z+4)^3}dz$, 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2-6z}dz$, 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$

Самостоятельная работа:

1. Определить x так, чтобы комплексные числа были равны, $z_1 = x^2 - 7x + 9xi$ и $z_2 = x^2 i + 20i - 12$.

2. При каких значениях x и y комплексное число $3y - x - 6 + 2yi - 3xi + 10i$ будет равно 0?

3. При каких действительных значениях x комплексное число $x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ будет чисто мнимым?

4. Найти модуль и аргумент комплексных чисел $-1+\sqrt{3}i$, $-7+i$; $-3-2i$, числа сопряженные данным и изобразить их геометрически.

5. Представить в тригонометрической и показательной форме числа: $2+4i$, $12i$, $-4-3i$.

6. Представить в алгебраической и показательной форме числа: $2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $-\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{4}-i\cdot sin\frac{\pi}{4}\right)$

7. Представить в тригонометрической и алгебраической форме числа: $3\cdot e^{\frac{i\cdot\pi}{6}}$ $4\cdot e^{\frac{-i\cdot 2\pi}{3}}$ $5\cdot e^{\frac{i\cdot 4\pi}{3}}$

8. Выполнить сложение комплексных чисел $z=z_1+z_2+z_3$, где $z_1=3-2i$, $z_2=-3+4i$, $z_3=2-i$.

9. Вычислить: а) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; б) $\frac{1+i}{1-i}$; в) $\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}$; г) $(2-3i)^2$; д) $(-3+2i)\cdot 2+(7-5i)\cdot 3$; $\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^2}$; $i4+2i8-4i42+6i123-4i27$

10. Найти комплексное число z из уравнения $(2+5i)\cdot z=2-5i$.

11. Найти два действительных числа, удовлетворяющих равенству: а) $\frac{2i}{x}+iy-2=3i-\frac{3}{x}+y$; б) $3x+xi-5i-y=yi-7$; в) $(2+3i)(x-i)+(y+5i)=1-3i$.

12. Найти x, если $(1+2xi)^3+11$ есть чисто мнимое число.

13. Найти x, если $(x-2i)^3-2xi$ есть действительное число.

14. Найти такие действительные x, y, при которых выполняется равенство: $x+2xi+3+(y-2i)^2=\frac{18-14i}{3+i}$.

15. Найти a и b, если: а) $\sqrt{a+bi}=5+3i$; б) $\sqrt{a+bi^{17}}=1+2i$

16. Провести вычисления в алгебраической форме: $\frac{2-i}{5+i}+(i-1)(2-3i)$; $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2$

17. Для указанных комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Постройте вектор комплексного числа на плоскости. Запишите число в тригонометрической и показательной формах: $z=4$ $z=-4$ $z=2i$ $z=-3i$ $z=1+i$ $z=-1+\sqrt{3}i$ $z=-2-2i$ $z=4-4i$.

18. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа: $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}$

19. Найти корни уравнений: $z^2+6z+13=0$, $z^2-8z+20=0$, $z^3+27=0$.

20. Выражение $(3+2i)^2+5\iota$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

21. Дано $z_1=3+i$, $z_2=2-i$. Тогда $z_1,\ z_2;\ \frac{z_1}{z_2}$ равно:

23. Число $z=4x\ i+(3i+2)^2+x^2$ – чисто действительное при x, равном:

22. Число $z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

23. Выражение $(3-2i)^2-4$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах…

24. Дано $z_1=2-i$, $z_2=1+i$. Тогда $z_1,\ z_2;\ \frac{z_1}{z_2}$ равно:

25. Число $z=4x\ i+(3i+2)^2+x^2$ – чисто мнимое при x, равном:

26. Число $z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

Раздел 9. Дифференциальные уравнения

9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения, задача коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения, уравнения Бернулли.

9.2. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения, задача коши. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

9.3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Практическое занятие:

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (y - x^2y)\mathrm{d}y = 0 \quad xy\cdot y' = 1 - x^2 \quad y' = 10x + y$$

$$y\cdot y' = \frac{1-2x}{y} \quad xy' + y = y^2 \quad y'\mathrm{tg}\, x - y = 2$$

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

$$y'\cdot\sin 2x = y\cdot\ln y, \quad y(\pi/4) = e$$

$$\sin y\cdot\cos x\, \mathrm{d}y = \cos y\cdot\sin x\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = \pi/4;$$

$$y - xy' = 2(1 + x^2y'), \quad y(1) = 1;$$

$$(1 + x^2)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$y' = \frac{y+1}{x} \quad y' = \frac{1+y^2}{xy} \quad (x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x} \quad xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x} \quad xyy' = y^2 + 2x^2$$

$$\frac{xy' - y}{x} = tg\,\frac{y}{x} \quad y' = -\frac{x+y}{x} \quad xy' = y + x\cdot cos^2\frac{y}{x}$$

4. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

$$xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y, \quad y(1)=1$$

$$xy' - y = xtg\,\frac{y}{x},\; y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x},\; y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$y' + 2xy - x = 0,\; y(0) = 2{,}5$$

$$xy' + y = x^2 + 1,\; y(3) = 2$$

5. Построить интегральную кривую уравнения $(x–2)dy–(y + 3)dx = 0$, проходящую через точку М (3;–1)

6. Решить уравнения:

$$\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2 \qquad \left(1-x^2\right)y' - xy = 1$$

$$y' - \frac{1+2x}{x^2}\,y = 1 \qquad y' - y = xe^x$$

7. Решить дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$У - x\cdot y' = y\cdot\ln\frac{x}{y} \qquad y' - 2y = e^{2x} \qquad y(1+x^2)y' = 1 + y^2$$

$$xy^2dy = (x^3 + y^3)dx \qquad xy' + 3y = 7x^4 + 2x^3$$

$$(3x^2y^2 - 1)dx + (2x^3y + 4)dy = 0 \qquad (xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$$

8. Найти решения дифференциальных уравнений:

$$y'' = \sin x$$

$$(1 = x^2)y'' – 2xy' = 0,\; y(1) = 0,\; y'(1) = 1$$

$$1 = (y')2 = 2yy'$$

9. Найти решения дифференциальных уравнений:

$y'' = e^x$, $y'' = 3x^2 – 4x = 1,\; y(0) = 1,\; y'(1) = 1$, $y'' = x^2 – \cos x$,

$y''' = 2x^2 = 3$, $(1 = x)y'' – y' = 0$, $y'' = y' = x$,

$y'' = 3y' = y$ $xy'' = y'$ $y(1) = 1$ $y'(0) = 2$ $y'' = y'/x = x$.

10. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' = y' – 2y = 0$; б) $y'' – 2y' = y = 0$; в) $y'' = 6y' = 13y = 0$;

г) $y'' = 24y' – 144y = 0$; д) $y'' = 15y' = 0$; е) $y'' = 3y = 0$.

11. Найти частные решения уравнений:

$$y'' – 4y' = 3y = 0,\quad y(0) = 6,\; y'(0) = 10$$

$$y'' = 4y' = 29y = 0,\quad y(0) = 0,\; y'(0) = 15$$

$$4y'' = 4y' = y = 0,\quad y(0) = 2,\; y'(0) = 0$$

12. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни его характеристического уравнения, и написать его общее решение:

а) $к_1 = 2$, $к_2 = –1$
б) $к_1 = 1$, $к_2 = 3$
в) $к_1 = 2j$, $к_2 = –2j$
г) $к_1 = 1 + 3j$, $к_2 = 1–3j$
д) $к_1 = 2$, $к_2 = 2$

13. Решить уравнения:

$y'' + 4y' + 3y = 9e – 3x$ $\qquad y'' – y = 2x$

$y'' – 4y' + 4y = x^2$ $\qquad y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

$y'' + 4y' = 12x^2 – 2x + 2,$ $\qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

$y'' – 3y' = 2e^{3x}$ $\qquad y'' – 3y' = 2x + 5.$

$y'' + 8y' + 16y = x^2 – 2$ $\qquad y'' + 8y' + 16y = 3e – 4x$

$$y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$$

$y'' + y = – 8\cos 3x$ $\qquad y'' + 100y = \sin 2x,$

$y'' – 3y' + 2y = 2e^x\cos(x/2),$ $\qquad y'' + y + \sin 2x = 0,\ y(\pi) = y'(\pi) = 1.$

$y'' + 3y' = 9\cos 3x – 4\sin 3x,$ $\qquad y'' + 6y' + 9y = e – x\sin x.$

$y''–7y'+6y = \sin x,$ $\qquad 5y''–6y'+5y=e0,6x\sin\frac{4}{5}x.$

14. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $\dfrac{dy}{x^2+x+1} - \dfrac{dx}{y(x-1)} = 0, \quad y(0) = 2$

б) $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 1/2, \quad y'(\pi/2) = 7$

15. Найти общие решения уравнений:

а) $y' + (1 + \dfrac{1}{x^2})y = e^{1/x}$

б) $(3x^2 + xy - y^2)dx + x^2dy = 0$

в) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$

16. Записать в общем виде частные решения уравнений:

$$2y'' - 3y' - 14y = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \\ xe^{-2x} \\ 3\cos 2x \end{cases}$$

Самостоятельная работа:

1. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям

$a)\ y'\,tgx - y = 1, \quad y(\pi/2) = 1$

$б)\ y'' - 2y' + 2y = 0, \ \ y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$

2. Найти общие решения уравнений:

$a)\ y' + 2y\ = e^{-x}$ $\qquad$ $б)\ xy' = y1n\frac{y}{x}$ $\qquad$ $в)\ y'' - 5y' = -9e^{5x}$

3. Записать в общем виде частные решения уравнений:

$$y'' + 4y = \begin{cases} e^{3x} \\ x - 5 \\ 8\sin 2x \\ e^{2x}\cos x \\ 3x^2 + 5 + e^{-x} \end{cases}$$

4. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $y' = y, \quad y(0) = 1$

б) $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

5. Найти общие решения уравнений :

а) $y' + 2xy = e^{=x^2}$ б) $2xy\,y' = 3y^2 + 4x^2$ в) $y'' - 2y' = e^{2x}$

6. Записать в общем виде частные решения уравнений.

$$4y'' + 4y' + y = \begin{cases} 3x^2 - 8x + 2 \\ e^{-x/2} \\ 2\cos x \\ e^{3x}\sin(x/2) \\ 3x - 2e^{x} \end{cases}$$

7. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $(y - 4)dx - (x + 1)dy = 0, \quad y(1) = 10$

б) $y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 10$

8.Найти общие решения уравнений:

$$2xy' - y = 3x^2 \qquad y - xy' = \frac{x}{\cos(y/x)} \qquad y'' + 2y' + 2y = x + 1$$

9. Записать в общем виде частные решения уравнений.

$$y'' + 16y = \begin{cases} 1 - 6x \\ 8e^{3x} \\ \sin 2x - 3\cos 2x \\ x^2 + 1 - e^x \\ 3\cos 4x \end{cases}$$

10. Найти общие решения уравнений:

$a)$ $y' + 2y = e^{-x}$ $\qquad$ $б)$ $xy' = y1n\dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $в)$ $y'' - 5y' = 0$

11. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

$a)$ $y'\,tgx - y = 1, y(\pi/2) = 1$ $б)$ $y'' - 2y' + 2y = 0, \;\; y(0) = 1; y'(0) = 3$

12. Решить уравнение:

$$y'' + 4y' + 29y = x^2 - x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0$$

13. Найти общие решения уравнений:

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \qquad 2xyy' = 3y^2 + 4x^2 \qquad y'' - 2y' = 0$$

14. Найти решения данных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

а) $y' = y, \quad y(0) = 1$

б) $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

15. Решить уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

10. Теория вероятностей

10.1. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Определение вероятности. Формулы комбинаторики.

10.2. Вероятность суммы и произведения событий. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.

10.3. Повторные независимые испытания. Формулы Бернулли, Пуассона, Муавра-Лапласа.

10.4. Дискретные случайные величины. Ряд и функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Биномиальное распределение.

10.5. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность распределения, их свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное и равномерное распределение.

Практическое занятие:

1. Элементы комбинаторики.

1.1. Сколькими способами можно расставить 7 книг на книжной полке?

1.2. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

1.3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что цифры в числе не повторяются?

1.4. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

1.5. Сколькими способами можно группу из 15 учащихся разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4, а в другой – 11 человек?

1.6. Из 20 студентов надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

1.7. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Сколько различных трехзначных чисел можно из них составить?

1.8. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

1.9. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек, причем один из преподавателей должен быть назначен старшим. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

1.10. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

1.11. Имеется шестизначная кодовая комбинация, состоящая из трех цифр 1, 3, 5, в которой цифра 1 встречается один раз, цифра 3 – два раза и цифра 5 – три раза. Сколько существует комбинаций таких наборов?

1.12. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

1.13. В почтовом отделении имеются открытки 3 видов. Сколькими способами можно купить набор из 5 открыток?

1.14. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

1.15. Сколько четырехбуквенных слов можно составить из букв М и А?

1.16. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

1.17. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколько может быть вариантов такой выдачи?

1.18. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый участник сыграл с каждым по одной партии, а партий было сыграно в 10 раз больше числа участников.

1.19. Имеются в неограниченном количестве палочки длиной 5, 6, 7, 8, 9, 10см. Сколько различных треугольников можно из них составить?

1.20. Из 10 роз и 8 лилий нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 розы и 3 лилии. Сколькими способами это можно сделать?

1.21. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколько существует возможностей выбора этих пяти человек?

1.22. Сколькими способами можно расставить 8 томов энциклопедии на книжной полке так, чтобы первый и второй тома:

а). стояли рядом;б). не стояли рядом?

1.23. Даны две параллельные прямые. На одной из них имеется 10 точек, а на другой – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

1.24. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

1.25. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

1.26. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом? Стояли не рядом?

1.27. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных; в) 5 шаров одного цвета; г) 4 шара одного цвета?

1.28. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове: «ГОРА», «ИНСТИТУТ»?

1.29. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать три студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

1.30. Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в эстафете надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочек. Сколькими способами это можно сделать?

1.31. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом – 5 и в третьем – 2 вакантных места?

2. Непосредственный подсчет вероятностей.

2.1. При стрельбе из винтовки вероятность попадания в цель равна 0,75. Найти число попаданий, если всего было произведено 140 выстрелов.

2.2. В лотерее разыгрывается тысяча билетов. Среди них один выигрыш в 50 рублей, пять выигрышей в 20 рублей, двадцать выигрышей по 10 рублей и пятьдесят выигрышей по 5 рублей. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выиграть не менее 10 рублей; б) какого-либо выигрыша.

2.3. Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах?

2.4. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадает четное число очков.

2.5. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.

2.6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу излеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну, б) две, в) три.

2.7. В ящике содержится 100 перемешанных жетонов, пронумерованных целыми числами от 1 до 100. Найти вероятность того, что извлечённый наудачу жетон имеет номер, который не делится ни на 2, ни на 3.

2.8. В урне а белых и в черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

2.9. На 20 одинаковых жетонах написано 20 двухзначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

2.10. В мешке смешаны нити 5 сортов; 30 % белых, 40 % черных, 15 % – красных, 10 % зелёных, 5% голубых. Определить вероятность того, что наудачу взятая нить будет цветной.

2.11. В команде спортсменов 6 бегунов на короткие дистанции, 3 бегуна на длинные, 5 метателей, 7 борцов и 4 боксёра. Определить вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен будет легкоатлетом.

2.12. В пачке имеется 100 жетонов, занумерованных числами от 1до 100. Определить вероятность того, что номер наудачу взятого жетона будет кратным 25 или 30.

2.13. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что А – выпадет одинаковое число очков; В – сумма выпавших очков равна 8; С – сумма выпавших очков четная; Д – число очков, выпавших при первом броске, больше числа очков, выпавших при втором броске; Е – сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

2.14. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «мел». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

2.15. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «рама». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

2.16. На одинаковых карточках написаны буквы а, а, б, г, е, р, л. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «алгебра»?

2.17. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наудачу последовательно вынимаются 3 карточки и ставятся слева направо в порядке появления. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число не содержит цифры 4?

2.18. В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

2.19. Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных?

2.20. Какова вероятность того, что три друга попадут в комиссию, состоящую из трех человек, если комиссию можно избрать из 15 человек?

2.21. Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу случайно берут 4 карточки и складывают в ряд. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?

2.22. Из колоды карт наудачу извлекается 3 карты. Найти вероятность того, что А–одна карта окажется бубновой масти; В – 2 карты черви; С– все разной масти.

2.23. Из колоды карт извлекается 4 карты. Найти вероятность событий: А – все черви; В – три короля и одна дама; С– один туз, один король, одна дама, один валет; Д – разной масти.

2.24. В группе из 25 студентов оценку «отлично» получили трое студентов, «хорошо» – шесть студентов, «удовлетворительно» – девять студентов. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных студента имеют неудовлетворительные оценки.

2.25. В корзине 2 красных, 5 белых и 8 синих шара. Наудачу достают три шара. Найти вероятность событий: А – все одного цвета; В – все разного цвета; С – есть два синих шара; Д – ровно два шара одного цвета.

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3.1. В ящике 7 белых шаров и 8 черных. Найти вероятность того что взяли 1 белый; 2 черных; 3 белых.

3.2. Студент сдает математику с вероятностью 0,7, физику с вероятностью 0,8, философию – 0,9. Найти вероятности: А – сдаст все экзамены; В – сдаст хотя бы один экзамен; С – сдаст ровно два экзамена; Д – сдаст ровно один экзамен? (0,504; 0,994; 0,398; 0,092)

3.3. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос преподаватель задает еще один вопрос? (28/29)

3.4. Программа экзамена содержит 30 вопросов, из которых студент знает только 15. Для успешной сдачи экзамена нужно ответить на 2 предложенных вопроса, или на один из них и дополнительный вопрос. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

3.5. В городе 4 библиотеки, в фонде каждой из которых с вероятностью 0,4 есть нужная студенту книга. В поисках книги студент обходит библиотеки пока не найдет ее или пока не обойдет все библиотеки. Найти вероятность: А – студент посетит 2 библиотеки; В – не более двух библиотек; С – четыре библиотеки. Что вероятнее: найдет книгу, или нет? (0,24; 0,64)

3.6. Три друга идут сдавать экзамен. Вероятность сдачи для первого – 0,9, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятности: А – все сдадут экзамен; В – сдаст ровно один из них; С – сдадут больше двух; Д – сдаст хотя бы один. (0,36; 0,14; 0,49; 0,99)

3.7. В первой корзине 4 белых и 6 черных шаров; во второй – 5 белых и 5 черных; в третьей 7 белых и 3 черных шара. Из каждой корзины достают по одному шару. Найти вероятности, что среди этих шаров: А – все белые; В – ровно один белый; С – хотя бы один белый; Д – два белых шара (0,14; 0,36; 0,91;0,41).

3.8. Два стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,7. Найти вероятности следующих событий: а) оба стрелка попали в мишень; б) в мишень попал хотя бы один стрелок.

3.9. В группе из 30 учеников на контрольной работе получили: 6 учеников оценки отлично, 10 учеников оценку хорошо, 9 человек оценку удовлетворительно. Какова вероятность того, что все три ученика, вызванных к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

3.10. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: 1) два мальчика, 2) две девочки, 3) девочка и мальчик?

3.11. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

4. Формулы полной вероятности и Байеса.

4.1. Болты изготавливаются на 3 станках, производящих соответственно 25 %, 30 %, 45 % общего количества продукции. В продукции станков брак составляет соответственно 4 %, 3 %, 2 %. Какова вероятность, что случайно взятый болт окажется дефектным?

4.2. В тире имеется 5 ружей, вероятности из попадания из которых соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

4.3. Вероятности правильного определения химического состава детали для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4 и 2/5. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка, если равновероятно деталь может попасть на проверку к любому из контролеров.

4.4. Из 25 приборов, имеющихся в магазине, 5 штук произведены заводом №1, 12 штук – заводом №2 и 8 штук – заводом №3. Вероятность того, что прибор, изготовленный заводом№1, в течение гарантийного срока не выйдет из строя, равна 0,95. Для прибора 2-го завода такая вероятность равна 0,9, а 3-го завода – 0,8.

Найти вероятность того, что наудачу взятый прибор выдержит гарантийный срок.

4.5. Два токаря обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака первого – 0,03; второго – 0,04. Обработанные детали складываются в одно место. При этом первый токарь изготавливает деталей в 2 раза больше, чем второй. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

4.6. В железнодорожном составе 50 вагонов с углем двух сортов. По сортности угля вагоны состава делятся на три группы: 25 вагонов содержат 70% угля первого сорта и 30% угля второго сорта, 15 вагонов содержат соответственно 60% и 40%, остальные – 85% и 15%. Случайно взятый для анализа уголь оказался второго сорта. Какова вероятность, что он взят из вагона первой группы?

4.7. В трех одинаковых по виду и размеру коробках находятся по 20 сверл. В первой коробке 2 сверла бракованные, во второй – 3, в третьей – 5. Взятое наудачу сверло оказалось годным. Какова вероятность того, что оно взято из второй коробки?

4.8. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется годной, равна 0,96. Контролер ОТК проверяет детали по упрощенной системе. Вероятность ошибки при проверке годных деталей равна 0,02, при проверке негодных деталей – 0,01. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее контроль, является годным?

4.9. В телеателье поступили кинескопы с двух заводов: 35 штук с первого завода и 50 – со второго. Вероятность того, что кинескоп, изготовленный на первом заводе, не выйдет из строя в течение гарантированного срока, равна 0,85. Аналогичная вероятность для второго завода – 0,7. Наудачу выбранный кинескоп выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что он был изготовлен на втором заводе.

4.10. У рабочего есть 10 сверл, 2 из которых имеют дефект. Вероятность того, что в течение смены сверло не придется менять, равна 0,6 для сверла, не имеющего дефект, и 0,3 – для сверла с дефектом. Наудачу взятое сверло в течение смены сломалось. Какова вероятность того, что было взято сверло без дефекта?

4.11. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях направлено из 1 группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей групп попадет в сборную университета, равны соответственно 0,9;

0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал студент?

4.12. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20 % пряжи составляет продукция цеха №2, а остальная – цеха №1. Продукция цеха №1 содержит 90%, а цеха №2 – 70 % пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Какова вероятность, что он из цеха №1?

5. Повторные независимые испытания.

5.1. Производится 3 выстрела, вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Найти вероятности того, что будет ровно одно; два; три попадания.

5.2. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,3. Наугад выбираются 4 студента. Найти вероятности того, что среди них получают стипендию: ровно 1; ровно 2; ровно 3; никто не получает.

5.3. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб будет более 2 раз.

5.4. В комнате 6 электролампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она придет в негодность в течение года, равна 3/4. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не более двух лампочек?

5.5. Вероятность того, что расход воды на предприятии не превысит нормы в течение суток, равна 0,75. Найти вероятность того, что в течение 7 дней расход воды будет нормальным более 5 дней?

5.6. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,10. Какова вероятность того, что в сообщении из 8 знаков будет искажено не более трех знаков?

5.7. 5% телевизоров одного из телевизионных заводов требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что из 5 телевизоров более трех потребуют ремонта.

5.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

5.9. Вероятность того, что студент – девушка, равна 0,4. Найти вероятность, что из 800 студентов девушек меньше 200; более 500.

5.10. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,002 отходит в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

5.11. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени T равна 0,005. Найти вероятность того, что произойдет не более 3 обрывов.

5.12. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Какова вероятность того, что из 600 пассажиров опоздают не более двух?

5.13. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 42 размера, равна 0,4. Найти вероятность того, что из 900 покупателей не более 460 потребуют обувь этого размера.

5.14. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха от 400 до 520 раз?

5.15. Вероятность того, что человек имеет высшее образование в России 0,3. Какова вероятность того, что из 100 случайно взятых человек высшее образование имеют более 20 %?

5.16. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий хотя бы одно не выдержит испытание.

5.17. Магазин получил 2000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти вероятность того, что магазин получит более трех разбитых бутылок.

6. Случайные события.

6.1. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник?

6.2. В группе из 30 студентов оценку «отлично» получили трое студентов, «хорошо» – шесть студентов, «удовлетворительно» – девять студентов. Какова вероятность того, что из четырех наудачу выбранных студентов, один имеет неудовлетворительную оценку.

6.3. У сборщика имеется 3 корпусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

6.4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что А – в мишень попадает только один из стрелков; В – в мишень попадет хотя бы один из стрелков.

6.5. Студент разыскивает нужную ему формулу в трёх справочниках. Вероятность того, формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны: 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трёх, г) только в третьем справочнике.

6.6. В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения расчета автомат не откажет, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не откажет.

6.7. Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 изготовлены на I заводе, 250 на II заводе и 150 на III заводе. Известны также вероятности 0,97; 0,91; 0,93 того, что лампочка окажется стандартного качества при изготовлении её соответственно I, II, и III заводами. Какова вероятность того, что наудачу выбранная стандартная лампочка изготовлена на втором заводе.

6.8. Характеристика материалов, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16; и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

6.9. Имеется 5 станций, с которыми поддерживается связь. Время от времени связь прерывается из-за атмосферных помех. Вследствие удаленности станций перерыв друг от друга связи с каждой из них происходит независимо от остальных с вероятностью p = 0,2. Найти вероятность того, что данный момент времени будет иметься связь не более чем с двумя станциями.

6.10. Вероятность появления успеха в каждом из 800 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха 455 раз? От 400 до 700 раз?

6.11. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 6000 изделий хотя бы три бракованные.

7. Дискретная случайная величина.

Составить ряд распределения случайной величины Х и вычислить ее числовые характеристики.

7.1. Вероятность выигрыша по лотерейному билету 0,2. Случайная величина X – число выигравших билетов из трех купленных.

7.2. Студент сдает в сессию экзамены с вероятностями: математику – 0,8, физику – 0,7, историю – 0,9. Случайная величина X – число сданных экзаменов.

7.3. Студент может сдавать экзамен 3 раза, после чего его отчисляют. Вероятность сдать с 1-го раза равна 0,6, со 2-го –0,7, с 3-го – 0,8. Случайная величина X – число приходов на экзамен. Записать функцию распределения.

7.4. Студент получает «5» за экзамен: по математике с вероятностью 0,2, по физике – 0,1, по истории – 0,4. Случайная величина X – число «пятерок» в сессию.

7.5. Студент ищет нужную формулу в 3 справочниках, причем если нашел, то дальше не ищет. Вероятность найти формулу в 1-м справочнике – 0,4, во 2-м –0,5, в 3-м – 0,7. Случайная величина X – число просмотренных справочников.

7.6. Шахматист должен сыграть с тремя другими шахматистами. Он знает, что вероятность выиграть у 1-го равна 0,9, у 2-го – 0,7, у 3-го – 0,3. Случайная величина X – число выигранных партий.

7.7. У студента в сумке учебники по математике, физике, истории, геологии. Ему нужно достать учебник по математике, и он наугад достает по одному, пока не достанет нужный. Случайная величина Х – число вынутых учебников.

7.8. Студент посещает занятия с вероятностями: первую пару с вероятностью – 0,6, 2-ю – 0,9, 3-ю – 0,8. Случайная величина X – число пар, на которых был студент.

7.9. У охотника 3 патрона и он стреляет в дичь пока не попадет, или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина X – число израсходованных патронов. Записать функцию распределения.

7.10. В колоде 36 карт, сдают 6 карт. Случайная величина X – число тузов среди сданных карт.

7.11. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,4. Случайная величина Х – число студентов, получающих стипендию из 4-х наугад выбранных.

7.12. У дежурного гостиницы в кармане 4 различных ключа. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь комнаты. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если проверенный ключ не возвращается обратно. Найти его числовые характеристики.

8. Непрерывная случайная величина.

8.1. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)$. Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности); б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (α; β), то есть $P(\alpha<X<\beta)$; г) построить $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 0{,}5\cdot x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, & 0<x<10,\\ 1, & x\ge 10\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

1) $a = 1, b = 2$; $a = 5, b = 8$; $a = 0, b = 3$.
2) $a = 1, b = 5$; $a = 6, b = 12$; $a = -1, b = 4$.
3) $a = -1, b = 1$; $a = 2, b = 10$; $a = -3, b = 1$.

8.2. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0 \\ Ax+\dfrac{1}{12} & \text{при } 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{при } x>4 \end{cases}.$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0 \\ Ax^2+\dfrac{1}{20} & \text{при } 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{при } x>0 \end{cases}$$

Найти коэффициент *A*. Записать функцию распределения данной случайной величины. Найти числовые характеристики.

9. Нормальный закон распределения.

9.1. Вес вылавливаемых в прудах зеркальных карпов *X* – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 500 г, и средним квадратическим отклонением – 75 г. Записать плотность вероятности случайной величины *X*. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого карпа: а) заключен в пределах от 425 до 550 г; б) более 700 г; в) менее 400 г.

9.2. Некоторая категория работников имеет среднюю зарплату 16 тыс. руб. и среднее квадратическое отклонение зарплаты 4 тыс. руб. Предполагая, что зарплата *X* – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить процент работников, получающих зарплату: а) более 20 тыс. руб.; б) менее 8 тыс. руб.; в) от 15 до 18 тыс. рублей.

9.3. Длина изготавливаемых станком-автоматом деталей представляет собой случайную величину X, имеющую нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 200 см, и среднеквадратическим отклонением – 0,2 см. Записать плотность распределения случайной величины *X*. Определить вероятность брака, если допустимые размеры детали 20 + 0,3 см.

9.4. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Предполагая, что вес m – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить вероятность того, что вес случайно взятого человека: а) отличается от среднего не более чем на 5 кг; б) находится в пределах от 62 до 66 кг; в) менее 50 кг.

9.5. В нормально распределенной совокупности 15 % значений X меньше 12, а 40 % значений X больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

9.6. Игральную кость бросают 80 раз. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 будет заключено число m выпадений шестерки.

10. Равномерное распределение.

10.1. Случайная величина X распределена равномерно на интервале (2;8). Записать функцию плотности вероятности, функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и медиану. Найти вероятности $P(X<3)$; $P(X>5)$; $P(4<X<6)$.

10.2. Число дней, проведенных больным в больнице, T – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Наименьшее число дней, необходимое для обследования, равно 5; наибольшее – 12. Записать плотность распределения случайной величины T. Найти ее математическое ожидание, дисперсию; вероятность того, что время пребывания больного в больнице: а) не превысит 7 дней; б) превысит 10 дней; в) будет в пределах от 6 до 8 дней.

10.3. Автобусы идут с интервалом 10 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса имеет равномерное распределение, найти А) функции плотности и распределения, построить их графики; Б) среднее время ожидания, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания; В) вероятности того, что время ожидания автобуса будет не более 3 минут; более 4 минут; от 5 до 8 минут.

11. Показательный закон распределения.

11.1. Записать функцию плотности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$; построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вероятности $P(X<7)$; $P(X>3)$; $P(2<X<5)$.

11.2. Время между двумя сбоями вычислительной машины t – случайная величина, имеющая показательное распределение с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию плотности вероятности данной случайной величины. Найти вероятность безотказной работы машины в течение а) менее 300 часов; б) более 500 часов.

11.3. Для ремонта автомобиля требуется в среднем 3 часа. Предполагая, что время *T*, необходимое для ремонта автомобиля, случайная величина, имеющая показательное распределение, записать плотность вероятности случайной величины *T*. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что время ремонта составит: а) самое большее 1,5 часа; б) от 1 до 2 часов; в) более 2,5 часов.

12. Случайные величины.

12.1. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7. Х – число СУ, перевыполнивших план. Составить закон распределения. Вычислить числовые характеристики. Построить функцию распределения.

12.2. Х – непрерывная случайная величина, задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0; & x<1 \\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right); & 1\le x\le 2 \\ 1; & x>2 \end{cases}.$$

Найти плотность распределения вероятностей, числовые характеристики, вероятность попадания СВ в интервал: $[1{,}5;\,1{,}9]$, $[1{,}2;\,2{,}3]$.

12.3. Из пункта С ведется стрельба из орудия. Предполагается, что дальность полета распределена нормально и среднее его значение 1000 м, с отклонением 5 м. Определить (%), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 метров.

Записать функции плотности и распределения.

12.4. Случайная величина распределена по показательному закону с математическим ожиданием равным 3. Записать функции плотности и распределения. Найти вероятность того, что данная СВ примет положительное значение.

12.5. Ребро куба х измерено приближенно: $1\le x\le 2$. Рассматривая ребро куба как СВ *X*, распределенную равномерно, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба и вероятность того, что объем куба будет в пределах от 5 до 9.

12.6. X – непрерывная случайная величина, задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ Ax-4 & 2\le x\le 3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

Найти А, функцию распределения, числовые характеристики.

Самостоятельная работа:

1. На экзамене студенту предлагаются 25 билетов. В каждом билете 3 вопроса. Из 75 вопросов, вошедших в билеты, студент знает 60. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет содержать только один не известный ему вопрос?

2. В двух ящиках находятся детали: в 1-м – 10 (из них 3 стандартных), во 2-м – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

3. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причем из них в 1-м – 17, а во 2-м – 15 стандартных деталей. Из 2-го ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в 1-й ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная после этого деталь из 1-го ящика будет стандартной.

4. Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 6?

5. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень два раза и один раз промахнуться.

6. Имеется 5 урн: две из них содержат по 2 белых и 3 черных шара, две – по 1 белому и 4 черных и одна урна – 4 белых и 1 черный шар. Из одной наудачу выбранной урны взяли шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынули из урны с 4 белыми и 1 черным шарами?

7. В коробке находятся 2 черных, 3 красных и 5 белых шаров. Три человека вынимают по шару. Найти вероятность того, что вынутые шары будут разных цветов.

8. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при 4 циклах объект будет обнаружен.

9. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

10. На столе лежат 36 экзаменационных карточек с номерами 1,2,...,36. Преподаватель берет 2 любые карточки. Какова вероятность того, что они из первых 6?

11. Стрелок выстрелил три раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень хотя бы один раз.

12. В партии 600 лампочек; 200 изготовлены на 1-м заводе, 250 – на 2-м, 150 – на 3-м. Вероятность того, что лампочка окажется стандартной для 1-го завода равна 0,97, для 2-го – 0,91, для 3го – 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка, оказавшаяся стандартной, изготовлена 1-м заводом?

13. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет число очков, составляющих в сумме число, кратное трем.

14. Три баскетболиста должны произвести по одному броску мяча. Вероятности попадания мяча в корзину для первого, второго и третьего баскетболистов равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что удачно произведет бросок только один спортсмен.

15. В стройотряде 70 % первокурсников и 30 % студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса – 5 % девушек. Все студенты по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит девушка.

16. Для проверки магазинов нужны три ревизора, каждый из которых должен проверить два магазина. Чему равна вероятность

того, что при случайном распределении объектов первому ревизору попадут данные два магазина?

17. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень один раз и два раза промахнуться.

18. Три станка расположены на одной прямой, расстояние между каждыми двумя соседними станками одинаково и равно а. Рабочий, обслуживающий станки, переходит от станка, на котором работа закончена, к любому из двух остальных с равными вероятностями. Найти вероятность того, что длина совершаемого им перехода равна а.

19. Студентам, едущим на практику, предоставили 7 мест в Ленинград, 8 – в Омск и 10 – в Воронеж. Какова вероятность того, что три определенных студента попадут на практику в Воронеж?

20. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появятся хотя бы один раз?

21. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна 0,9. Вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна 0,001. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

22. Из букв разрезной азбуки составлено слово «воздух». Перемешаем карточки, затем, вынимая их наудачу, кладем по порядку. Какова вероятность того, что получится слово «ход»?

23. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.

24. Партия состоит из вентиляторов рижского и московского заводов. В партии 70% вентиляторов рижского завода. Для вентилятора московского завода надежность в течение времени t равна 0,95, рижского – 0,92. Найти вероятность безотказной работы вентилятора в течение времени t.

25. На сборку поступил ящик с 30 деталями, из которых 3 нестандартных, а детали высшего и первого сортов находятся в отношении 2:7. Рабочий взял 4 детали из ящика. Найти вероятность

того, что взяты две детали первого сорта и по одной детали высшего сорта и нестандартной.

26. Подбрасываются две монеты. Какова вероятность того, что на обеих выпадет герб?

27. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний – 0,3, мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок и пробивший ее был крупный?

28. В партии из пяти деталей имеются две дефектных. Наудачу отобраны три детали. Найти вероятность того, что будут отобраны две стандартных и одна дефектная детали.

29. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – по 100 руб., на 50 билетов – по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

30. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый автомат дает 0,3 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,4 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

31. Группа состоит из 4 студентов горного, 8 – механического, 6 – химического и 7 – электротехнического факультетов. Какова вероятность того, что 3 первых студента, явившихся на экзамен, окажутся студентами химического факультета?

32. Имеется четыре различных ключа, из которых только один подходит к замку. Определить вероятность трех опробований при открывании замка, если испробованный ключ, в последующих попытках открыть замок не участвует.

33. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе – 90 %, а во второй – 80 % отличного шрифта. Извлеченная литера из наудачу взятой кассы оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она взята из первой кассы.

11. Математическая статистика

11.1. Основные понятия математической статистики. Гистограмма. Точечные оценки параметров распределения случайных величин. Мода, медиана, размах выборки.

11.2. Интервальная оценка параметров распределения случайных величин. Доверительный интервал, доверительная вероятность, точность оценки.

11.3. Проверка статистических гипотез. Уровень значимости, критическая область, статистические критерии.

11.4. Парная линейная регрессия. Коэффициент корреляции, его свойства, проверка значимости.

Практическое занятие:

1. На угольных предприятиях исследовали производительность труда рабочих при проходке штрека (случайная величина X). Результаты наблюдений приведены в таблице:

№	X	№	X	№	X	№	X	№	X
1	0,32	11	0,19	21	0,16	31	0,15	41	0,15
2	0,16	12	0,16	22	0,33	32	0,18	42	0,19
3	0,27	13	0,14	23	0,23	33	0,21	43	0,31
4	0,25	14	0,27	24	0,35	34	0,26	44	0,22
5	0,29	15	0,18	25	0,20	35	0,27	45	0,23
6	0,17	16	0,24	26	0,17	36	0,22	46	0,36
7	0,18	17	0,12	27	0,25	37	0,23	47	0,31
8	0,22	18	0,24	28	0,20	38	0,16	48	0,21
9	0,29	19	0,21	29	0,18	39	0,18	49	0,16
10	0,25	20	0,23	30	0,17	40	0,17	50	0,28

По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

2. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y, где X – стаж работы работника, а Y – производительность его труда. Данные приведены в табл. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
8	1,9	14	2,3	9	1,9	12	2,3	19	2,5
11	2,3	2	1,4	9	1,9	10	1,9	13	2,1
5	1,6	11	2,2	13	2,1	16	2,5	12	2,3
8	2,0	6	1,7	16	2,5	5	1,3	15	2,4
12	2,3	10	1,9	8	1,8	9	2,0	16	2,6
1	1,3	10	2,0	11	2,2	7	1,7	11	2,1
9	2,0	12	2,2	17	2,8	6	2,0	12	2,2
8	1,8	18	2,6	9	1,8	11	2,3	8	1,5
10	1,8	8	1,9	6	1,5	11	2,8	7	1,6
13	2,2	13	2,1	10	1,9	12	1,3	12	2,1

3. На угольных предприятиях определяли производительность труда рабочих при проходке штрека (случайная величина X) и скорость проходки (случайная величина Y, м/мес). Результаты наблюдений приведены в таблице.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0,31	136	0,19	110	0,16	70	0,15	118	0,15	100
0,16	76	0,16	87	0.33	300	0,18	152	0,19	64
0,27	160	0,14	75	0,23	185	0,21	155	0,31	150
0,25	170	0,21	120	0,36	311	0,26	151	0,22	150
0,23	101	0,18	97	0,20	97	0,29	230	0,23	126
0,17	87	0,24	100	0,17	120	0,22	215	0,36	280
0,18	72	0,12	123	0,25	201	0.23	202	0.31	154
0,22	100	0,24	103	0.20	152	0,16	120	0,21	120
0,29	194	0,21	100	0,18	118	0,18	101	0,16	120
0,25	190	0.23	103	0,17	158	0,17	100	0.28	125

По данным X – производительности труда рабочего (табл. 1) необходимо: а) составить вариационный ряд; б) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$, выборочную дисперсию D_b, выборочное среднее квадратическое отклонение σ_x.

4. По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

е) исследовать линейную корреляционную зависимость между двумя случайными величинами X и Y. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции

задача 1		задача 2		задача 3		задача 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
9	10	21	30	45	65	25	60
97	60	32	40	46	50	32	50
63	40	8	20	41	40	14	45
82	50	28	30	38	45	19	45
85	50	32	35	47	64	40	64
45	30	5	15	36	44	2	44
92	56	35	44	48	55	30	55
100	60	27	30	51	57	27	57
97	64	29	32	47	61	29	61
99	71	37	41	57	64	28	64
125	80	40	40	56	66	46	66
68	40	12	20	39	43	8	43
117	75	24	30	50	59	30	59
74,7	45	11	15	46	54	12	54
105	69	24	25	51	64	38	64
110	65	45	50	48	55	42	55
108	64	39	40	52	64	36	64
135	80	52	54	64	75	54	75
86	53	13	18	48	51	22	51

105	67	43	42	53	62	39	62
112	66	27	31	49	53	28	53
107	66	31	25	58	68	24	68
118	69	36	33	50	59	43	59
93	60	37	34	53	67	50	67
72	50	39	38	44	51	26	51
104	70	33	35	49	55	36	55
130	80	49	48	60	68	52	68
112	66	38	35	42	57	31	57
53	44	18	22	41	50	15	50
103	65	25	23	52	60	34	60
102	61	23	25	62	74	30	65
106	63	38	34	55	61	28	61
124	70	58	59	61	62	43	62
78	44	15	26	38	42	12	42
77	45	23	23	43	53	23	53
91	58	16	21	47	51	22	51
88	54	31	27	46	55	33	55
116	68	24	25	57	69	44	69
99	55	32	33	58	68	26	68
108	64	25	25	54	65	38	65
148	84	60	65	64	78	60	76
93	53	38	42	54	61	38	63
132	60	28	34	47	51	35	54
128	74	44	46	57	63	49	67
137	85	39	32	59	62	45	62
114	55	19	22	58	61	38	64
79	40	30	36	55	68	26	67
84	52	46	49	49	57	26	55
95	45	22	24	44	51	18	40
91	50	47	35	53	65	34	65

Самостоятельная работа:

1. По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

е) исследовать линейную корреляционную зависимость между двумя случайными величинами *X* и *Y*. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами *X* и *Y*. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции

Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
56	60	42	55	63	50	2,5	25
76	50	67	90	84	90	3,6	30
40	45	21	34	60	44	4,6	33
60	55	34	56	70	51	2,8	32
74	90	50	70	88	70	2,6	22
11	20	22	33	36	33	3,7	23
56	65	47	65	72	65	5,9	33
68	67	45	67	75	67	2,2	21
72	85	53	77	78	77	1,8	28
104	111	61	89	88	89	2,7	23
110	120	64	85	90	85	2,2	21
15	20	25	43	97	66	1,5	23
84	70	59	68	93	68	3	26
45	54	38	59	60	59	3,6	34
68	76	50	70	78	70	5,3	36
72	80	48	64	80	64	4,7	30
86	100	54	79	92	79	2,9	20
120	95	75	100	125	100	4,5	29
56	51	43	61	69	61	2,9	22
108	105	59	74	93	74	3,3	21
64	65	50	70	74	70	2,4	22
68	71	48	56	70	56	2,2	23
105	99	60	81	95	81	5,7	33
108	88	69	90	110	90	5	30
59	51	41	60	72	60	2,5	25
83	77	59	76	83	76	3,7	24
106	98	76	99	115	99	3,7	26
52	57	48	61	86	61	1,5	23
35	50	34	45	60	45	2,6	26
70	60	48	56	80	51	3,8	25
75	87	59	78	90	78	6	32
68	67	60	89	78	89	2,8	24
80	88	66	84	108	88	1,6	21
40	42	32	50	52	50	0,5	21
67	53	48	61	76	61	1,9	22
52	51	36	50	68	50	2,2	22
60	55	42	66	70	66	0,5	21

Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
73	69	52	79	85	76	4,3	26
75	68	60	81	90	87	2,5	25
80	65	58	61	92	56	5,8	32
130	140	80	103	120	99	3,4	23
84	63	57	71	96	79	3,9	24
80	54	51	79	90	76	2,7	25
95	75	68	95	100	92	1,8	22
100	62	72	111	108	109	1,4	24
74	64	55	54	84	53	4,8	26
48	67	58	77	92	76	3,7	26
50	55	38	47	65	44	4	28
52	40	40	55	60	54	3,6	30
81	69	55	70	95	80	3,8	31

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
36	40	48	47	40	24	3,8	48
44	60	66	65	50	34	4,5	60
24	34	40	40	25	21	2,7	34
35	45	52	49	42	26	3,2	45
48	60	72	64	54	34	5	60
12	20	18	24	6	14	1,3	20
39	45	58	49	48	27	3,6	45
34	40	47	44	35	24	3,7	40
40	50	62	54	52	29	4	60
48	55	75	59	65	31	4,8	55
52	67	78	71	68	37	5,3	67
15	25	19	29	7	16	1,6	20
47	51	64	55	52	29	4,9	51
24	30	40	34	32	19	2,6	30
38	45	50	49	48	28	3,5	45
40	45	60	49	51	26	4	40
49	67	68	71	60	37	4,9	75
68	85	100	89	92	46	6,7	90
28	34	52	38	36	21	2,9	34
51	67	73	71	64	37	5,2	67
35	41	57	45	45	24	3,6	41
38	56	60	60	47	32	3,7	56
49	54	72	58	66	31	4,8	54
60	80	88	84	80	44	6	85
32	34	48	38	38	21	3,3	34
46	50	62	54	53	29	4,5	50
67	70	90	74	57	39	6,8	70
36	34	56	38	47	21	3,7	34
28	41	40	45	25	24	2,9	47
41	56	58	60	48	32	4,3	56
46	70	70	74	56	39	4,5	75
40	50	60	54	49	29	4	50

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
58	65	87	69	77	36	5,7	65
22	31	35	35	24	19	2,3	26
39	45	56	49	44	26	3,7	45
28	34	45	38	36	21	2,5	33
34	41	50	45	49	24	3,6	45
42	55	62	59	52	31	4,8	54
48	58	65	62	56	33	4,3	58
46	50	72	54	63	29	4,5	50
62	67	100	71	94	37	6,5	67
51	56	74	60	65	32	5,2	56
50	60	68	64	53	34	5	60
57	61	80	65	70	34	5,8	60
62	72	85	76	80	40	6,3	72
42	55	64	59	55	31	4,5	52
48	60	72	64	60	34	4,7	60
30	40	52	44	38	24	3	35
27	30	47	34	34	19	2,8	28
45	45	71	49	63	26	4,4	41

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины математика:

Основная литература

1. Сборник задач по алгебре. В 2 т. Т. 1, Ч. I и II. Основы алгебры. Линейная алгебра и геометрия [Электронный ресурс]. – Москва : Физматлит, 2007. – 263 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82941. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

2. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва : Высшая школа, 2010. – 479 с.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах [с решениями]: в 2 ч. [Текст] Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. – Москва : ОНИКС, 2008. – 368 с.

Дополнительная литература

1. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Москва : Физматлит, 2009. – 512 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=68387. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

2. Зуланке, Р. Алгебра и геометрия. Т. 1. Введение [Электронный ресурс]. – Москва : МЦНМО, 2004. – 405 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=69113. – Загл. с экрана. (07.06.2018)

3. Трухан, А. А. Линейная алгебра и линейное программирование. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 316 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/99214. – Загл. с экрана. (07.06.2018) 4. Горлач, Б. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 300 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/99103. – Загл. с экрана. (07.06.2018

4. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва : ОНИКС, 2007. – 304 с.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва : ОНИКС, 2006. – 304 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч Ч. 1 : учебное пособие / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : ОНИКС 21 век, 2005. – 304 с.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч [Текст] Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : ОНИКС 21 век, 2003. – 304 с.