МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составитель
Е. А. Николаева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензент Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна
Математическое моделирование и методы оптимизации [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства очной формы обучения / сост. Е. А. Николаева; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Математическое моделирование и методы оптимизации» и организовать самостоятельную работу.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по курсу «Математическое моделирование и методы оптимизации» очной формы обучения.

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Математическое моделирование и методы оптимизации», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Математическое моделирование

1. (Задача об использовании ресурсов)

Для изготовления двух видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	*P2*
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	–	1
S4	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции 2 и 3 руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно *P1* и *P2*, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется ($1x_1 + 3x_2$) единиц ресурса *S1*, ($2x_1 + 1x_2$) единиц ресурса *S2*, ($1x_2$) единиц ресурса *S3* и ($3x_1$) единиц ресурса *S4*. Так как потребление ресурсов *S1, S2, S3* и *S4* не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$x_1 + 3\,x_2 \le 18,$$
$$2\,x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3\,x_1 \le 21,$$

По смыслу задачи переменные неотрицательны

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции $P1$ и $3x_2$ руб. – от реализации продукции $P2$ т.е.

$$f(x) = 2\,x_1 + 3\,x_2 \to max$$

2. (Задача о раскрое материалов) Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить математическую модель задачи.

Решение: Определим всевозможные способы распила бревен.

Способ распила	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим: x_i – число бревен, распиленных i-м способом (i = 1, 2, 3, 4); x – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$f = x \to max$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195,$$
$$5x_1 + 2x_2 = 2x,$$
$$x_2 + 2x_3 = x,$$
$$x_4 = 3x,$$
$$x_i \geq 0 \; (i = 1,2,3,4)$$

Практическое занятие:

1. Фирма производит 2 вида продукции: А и В, объём сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объёма

реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырьё, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В – 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 $ соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

2. Процесс изготовления 2 видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объёмы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин.			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 $
2	5	20	15	3 $

3. В трёх хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т. бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Самостоятельная работа:

1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000

$ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5$, а каждая минута телерекламы – в 100$. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу между радио и телерекламой.

2. У врача диетолога имеется пять видов продуктов. Из них он должен составить наиболее экономную диету. Требуется, чтобы меню содержало 20 единиц белка и 20 единиц жиров. Содержание белков и жиров в единице каждого вида продукта, а также стоимость единицы продукта заданы таблицей:

	Виды продуктов				
	I	II	Ш	IV	V
Белки	1	2	1	1	3
Жиры	2	1	1	2	4
Стоимость	12	10	9	18	7

3. Фирма получила заказ на n разных блоков, которые могут изготовить n фирм. Каждый блок настолько велик, что фирма – поставщик не может выполнить более одного заказа. Известна цена изготовления разных блоков в каждой фирме. Фирма должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом общие затраты на приобретение блоков.

Условия оптимальности в задачах математического программирования

Практическое занятие:

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2$$

Решение: Находим частные производные:

$$f'_{x_1} = 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2$$

$$f'_{x_2} = 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2$$

Приравниваем частные производные нулю:

$$4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0$$
$$4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0$$

Решаем систему уравнений, находим три стационарные точки:

$$X_1 = (0;0); \quad X_2 = (1;1); \quad X_3 = (-1;-1).$$

Найдем вторые частные производные:

$$f''_{x_1x_1} = (4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2)'_{x_1} = 12x_1^2 - 2$$
$$f''_{x_2x_2} = (4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2)'_{x_2} = 12x_2^2 - 2$$
$$f''_{x_1x_2} = (4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2)'_{x_2} = -2$$
$$f''_{x_2x_1} = (4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2)'_{x_1} = -2$$

Вычисляем значения вторых частных производных в каждой стационарной точке, составляем определитель и применяем достаточные условия экстремума.

В точке $X_1 = (0; 0)$ $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Вопрос об экстремуме остается открытым. В точке $X_2 = (1; 1)$ (а также и в точке $X_3 = (-1; -1)$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96.$$

Функция в этих точках имеет минимум $f_{min} = -2.$

Пример 2. Пусть требуется решить задачу минимизации

$$f(x) = x_{1*}\,x_1 + x_{2*}\,x_2 \rightarrow min,$$

при ограничениях

$$g(x) = x_1 + x_2 = 1$$

Решение. В силу присутствия одного ограничения будет выполнено условие регулярности в виде линейной независимости градиентов ограничений в произвольной точке. Поэтому для поиска подозрительных на минимум точек используем необходимые условия

$$\nabla x L(x^*,y^*)=0, \qquad yi \geq 0,\ i \in I^*, \qquad (y^*,g(x^*))=0,$$

для функции Лагранжа, записанной в виде

$$L(x,y) = f(x) + (y, g(x)) = x_{1*}\,x_1 + x_{2*}\,x_2 + y(x_1 + x_2 - 1).$$

В результате получим

$$\nabla_x L(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 + y \\ 2x_2 + y \end{pmatrix} = 0$$

Решая систему уравнений, и исключая y, получим взаимосвязь переменных $x_1 = x_2$.

На основе условия допустимости, т.е. выполнимости ограничения (4.6.7), с учетом взаимосвязи $x_1 = x_2$, получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, *т.е.* $x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Матрица вторых производных функции Лагранжа имеет вид

$$\nabla^2_{xx} L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Точка $x^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ является точкой минимума.

1. Найти экстремум функции

$$y = \left(1+3x^2\right)^3 \quad y = (3x+1)^4 \quad y = \sin 2x \quad y = \sin x^2 \quad y = \sin 2x$$

$$y = \sin e^x \quad y = \sin(3x+5) \quad y = (4x+5)^5 \quad y = \sqrt{x^2+2} \quad y = \sqrt{\cos x}$$

$$f = X^3 - 2У^3 - 3X + 6У; \quad f = 8 - 6X + 4У - 2Z - X^2 - У^2 - Z^2$$

$$f = 3X^3 + У^2 + Z^2 + 6XУ - 2Z + 1;$$

$$z = xy^2 - \frac{x}{y} \quad z = \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} \quad z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2y} \quad z = \cos\frac{x}{y} \cdot \sin\frac{y}{x}$$

$$z = y^5 \sin^2(x+y) \quad z = \left(x^3+y^4\right) \cdot \cos(2xy) \quad z = \ln\left(x^3+y^2\right)$$

$$z = 6x^2 + x^6 y - y^4 + 5x^3 y^5 - x + 5 \quad u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$$

$$z = f(x;y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y.$$

2. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \qquad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

3. Исследовать функцию на условный экстремум, если

$z = xy$ при $x + y = 1$.

4. Исследовать на условный экстремум следующие функции:

а). $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y - 6 = 0$;

б). $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ при $x + y = 4$.

5. Исследовать функцию $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ на наибольшее и наименьшее значение в области:

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ x + y \leq 4.$

Самостоятельная работа:

1. Найти экстремум функции

$$y = tg(\ln x) \quad y = \cos(tg3x) \quad y = \sin(\ln x) \quad y = \ln x^3 \quad y = tg(6^x)$$

$$y = 3^{5x} \quad y = \ln(2x-8) \quad y = \arcsin 6x \quad y = (\arcsin 8x)^2$$

$$y = \ln^4(2x-6) \quad y = 10^{\cos 5x} \quad y = 3^{\arcsin 4x} \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$z = f(x; y) = 6x^2y - y^3 + 8x - 3y$$

$$z = e^{x^2+y^3} \quad z = \sqrt{4x^3 + 6y^5} \quad z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$

$$z = x^4 \cos y - y^5 \sin x \quad z = \left(5x^2y - y^3 + 7\right)^3$$

2. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

$$z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y \qquad z = xy(12 - x - y)$$

$$z = (x-1)^2 + 2y^2 \qquad z = xy - 3x^2 - 2y^2$$

3. Исследовать функцию на условный экстремум, если

$z = 2xy$ при $x - y = 3.$

4. Исследовать на условный экстремум следующие функции:

а). $z = 2x^2 + y^2$ при $x + 3y - 2 = 0;$

б). $z = 2x^2 + 2y^2 - xy + x + 4y + 1$ при $x + 2y = 2.$

5. Исследовать функцию $z = x^2 - y^2 - xy$ на наибольшее и наименьшее значение в области: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ x - y \leq 7.$

6. Найти эстремумы функций:

$a)\ z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

$b)\ z = x^3 + y^3 - 3xy$;

$c)\ z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

7. Найти наименьшее и наибольшее значение функции в ограниченной, замкнутой области:

$a)\ z = xy(2 - x - y)$ в области $x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

$b)\ z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

Вычислительные методы математического моделирования

Практическое занятие:

Пример. Найти методом скорейшего спуска с точностью до 0,01 минимум функции $f(x) = 2^{x_1^2+x_2^2-x_1-x_1x_2-x_2+1}$ при ограничениях $x_1^2+x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Решение: Найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - 1$ и общее выражение градиента целевой функции:

$$\nabla f = (4x_1 - x_2 - 1;\ -x_1 + 2x_2 - 1).$$

В качестве исходной берем точку (1;1), которая лежит в области решений. Функция *f* является выпуклой функцией.

I шаг.

$X_0 = (1;\ 1),\ \nabla f_0 = (4*1 - 1 - 1; - 1 + 2*1 - 1) = (2;\ 0).$

$X_1 = X_0 - \lambda \nabla f_0 = (1;\ 1) - \lambda\,(2;\ 0) = (1 - 2\lambda;\ 1).$

$\nabla f_1 = (4\,(1 - 2\lambda) - 1 - 1; - 1 + 2\lambda + 2*1 - 1) = (2 - 8\lambda;\ 2\lambda).$

$\nabla f_0 * \nabla f_1 = (2;\ 0)(2 - 8\lambda;\ 2\lambda) = 4 - l6\lambda + 0*2\lambda = 4 - 16\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$

$X_1 = \left(1 - 2\cdot\frac{1}{4};\ 1\right) = \left(\frac{1}{2};\ 1\right),\ \nabla f_1 = \left(0;\ \frac{1}{2}\right).$

II шаг. Вместо ∇f_1 возьмем $l_1 = (0;1)$. Тогда

$X_2 = X_1 - \lambda\, l_1 = \left(\frac{1}{2};\ 1\right) - \lambda\,(0;\ 1) = \left(\frac{1}{2};\ 1 - \lambda\right).$

$\nabla f_2 = \left(4\cdot\frac{1}{2} - (1 - \lambda) - 1; -\frac{1}{2} + 2(1 - \lambda) - 1\right) = \left(\lambda;\ \frac{1}{2} - 2\lambda\right).$

$l_1 * \nabla f_2 = (0;\ 1)\left(\lambda;\ \frac{1}{2} - 2\lambda\right) = 0*\lambda + 1\left(\frac{1}{2} - 2\lambda\right) = \frac{1}{2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$

$X_2 = \left(\frac{1}{2};\ 1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right),\ \nabla f_2 = \left(\frac{1}{4};\ 0\right).$

III шаг. Вместо ∇f_2 возьмем $l_2 = (1;\ 0)$. Тогда

$X_3 = X_2 - \lambda\, l_2 = \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right) - \lambda\,(1;\ 0) = \left(\frac{1}{2} - \lambda;\ \frac{3}{4}\right).$

$$\nabla f_3 = \left(4\cdot\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{3}{4}-1;\ -\frac{1}{2}+\lambda+2\cdot\frac{3}{4}-1\right) = \left(\frac{1}{4}-4\lambda;\lambda\right).$$

$$l_2 * \nabla f_3 = 1\left(\frac{1}{4}-4\lambda\right) + 0\lambda = \frac{1}{4}-4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{16}.$$

$$X_3 = \left(\frac{1}{2}-\lambda;\ \frac{3}{4}\right)=\left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}\right)= (0{,}4375;\ 0{,}75),\ \nabla f_3 = \left(0;\ \frac{1}{16}\right).$$

IV шаг. Берем $l_3 = (0; 1)$. Тогда

$$X_4 = X_3 - \lambda\, l_3 = \left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}\right) - \lambda\,(0;\ 1) = \left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}-\lambda\right).$$

$$\nabla f_4 = \left(\lambda;\ \frac{1}{16}-2\lambda\right).$$

$$l_3 * \nabla f_4 = 0\lambda + 1\left(\frac{1}{16}-2\lambda\right) = \frac{1}{16}-2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{32}.$$

$$X_4 = \left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}-\lambda\right)=\left(\frac{7}{16};\frac{23}{32}\right)= (0{,}4375;\ 0{,}71875),\ \nabla f_3 = \left(\frac{1}{32};\ 0\right).$$

V шаг. Берем $l_4 = (1; 0)$. Тогда

$$X_5 = X_4 - \lambda\, l_4 = \left(\frac{7}{16};\frac{23}{32}\right) - \lambda\,(1;\ 0) = \left(\frac{7}{16}-\lambda;\frac{23}{32}\right).$$

$$\nabla f_5 = \left(\frac{1}{32}-4\lambda;\lambda\right).$$

$$l_4 * \nabla f_5 = 1\left(\frac{1}{32}-4\lambda\right) + 0\lambda = \frac{1}{32}-4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{128}.$$

$$X_5 = \left(\frac{55}{128};\ \frac{23}{32}\right).$$

Таким образом, $X_5 = (0{,}4296875;\ 0{,}71875)$. Сравнение X_4 и X_5 показывает, что координаты этих точек отличаются меньше, чем на 0,01, и поэтому можно положить $X^* \approx (0{,}43;\ 0{,}72)$. Нетрудно убедиться, что все точки $X_0, X_1,\dots, X_5, X^*$ лежат в области решений системы ограничений.

1. Найдите решение и постройте дерево подзадач, получаемое при использовании метода ветвей и границ для каждой из приведенных ниже задач.

$f(x) = -2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$ $4x_1 + x_2 \le 8,$ $-5x_1 + 6x_2 \le 7,$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$ *целые*	$f(x) = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow min$ $-6x_1 + 8x_2 \le 11,$ $-7x_1 + x_2 \le 5,$ $7x_1 - 3x_2 \le 13,$

	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, *целые.*
$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$ $2x_1 + 5x_2 \leq 9,$ $4x_1 + 2x_2 \leq 9,$ $x_1,\ x_2 \geq 0,$ и целые.	$f(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \max,$ $2x_1 + 5x_2 \leq 35,$ $4x_1 + 9x_2 \leq 36,$ $x_1,\ x_2 \geq 0,$ и целые.

2. Дано уравнение *f(x) = 0*. Найти с точностью 10^{-5} все корни уравнений, содержащиеся на отрезке *[a, b]*. Для решения задачи использовать численный метод решения алгебраических уравнений, указанный в задаче.

№	*f(x)*	*[a, b]*	Метод
1	$\sin^2(x) - \frac{5}{6}\cdot\sin(x) + \frac{1}{6}$	*[0, 1]*	Бисекции
2	$\sin^2(x) + \frac{7}{12}\cdot\sin(x) + \frac{1}{12}$	*[-1, 0]*	Ньютона
3	$\sin^2(x) - \frac{1}{30}\cdot\sin(x) - \frac{1}{30}$	*[-0.5, 0.5]*	Упрощ. Ньютона
4	$\cos^2(x) + \frac{2}{35}\cdot\cos(x) - \frac{1}{35}$	*[0, 2]*	Секущих

3. Найти методом скорейшего спуска с точностью до 0,01 минимум функции

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2, \quad 4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$f(x) = 5x_1 - 3x_2, \quad -6x_1 + 8x_2 \leq 11$$

$$f(x) = 2^{x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_1 x_2 + 15}, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 7,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

4. Проверьте выполнение условий Куна-Таккера в указанных точках, для указанной задачи

$$f(x) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4$$

$$f(x) = 2x^2 + y^2 \quad x + 3y - 2 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 2y^2 - xy + x + 4y + 1 \quad x + 2y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

$f(x) = 2^{x_1^2 - x_1 - 3x_1 x_2 - x_2}, \quad x_1^2 + x_2^2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

5. Построить множество M , заданное неравенствами и найти его угловые точки

$$\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 &\le 29, \\ 3x_1 - x_2 &\le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 &\ge 38; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\ge 4, \\ x_1 + 3x_2 &\le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 &\ge 20; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &\ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 &\le 15; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\ge 6, \\ 9x_1 + 8x_2 &\le 157, \\ -3x_1 + 11x_2 &\ge 16; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

6. Пусть M – выпуклая оболочка системы точек $A_1 = (3k, 8)$, $A_2 = (5, 8)$, $A_3 = (3k, 10)$, $A_4 = (3, 1)$, $A_5 = (4k, 15)$, $k=1,2,3,4$. Построить область M на плоскости и задать ее системой неравенств.

7. Начертите на плоскости область D, заданную следующими угловыми точками $A_1 = (2k, 1)$, $A_2 = (5k, 1)$, $A_3 = (3, k)$, $A_4 = (2, 1)$, $A_5 = (4, 1)$, $k=1,2,3,4$

Самостоятельная работа:

1. Найдите решение и постройте дерево подзадач, получаемое при использовании метода ветвей и границ для каждой из приведенных ниже задач.

$f(x) = x_1 + x_2 \to \max,$ $2x_1 + 5x_2 \le 16,$ $6x_1 + 5x_2 \le 27,$ $x_1,\ x_2 \ge 0,$ и целые.	$f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \min,$ $3x_1 + 2x_2 \ge 5,$ $2x_1 + 3x_2 \ge 7,$ $x_1,\ x_2 \ge 0,$ и целые.
$f(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \max,$ $2x_1 + x_2 \le 13,$ $6x_1 + 9x_2 \le 41,$ $x_1,\ x_2 \ge 0,$ и целые.	$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$ $2x_1 + 5x_2 \le 9,$ $4x_1 + 2x_2 \le 9,$ $x_1 \ge 0,$ $x_2 \ge 0,\ x_2 -$ целое.

2. Дано уравнение $f(x) = 0$. Найти с точностью 10^{-5} все корни уравнений, содержащиеся на отрезке $[a, b]$. Для решения задачи использовать численный метод решения алгебраических уравнений, указанный в задаче.

№	$f(x)$	$[a, b]$	Метод
1	$\cos^2(x) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})\cos(x) + \frac{1}{4\sqrt{2}}$	$[0, 1.5]$	Бисекции
2	$\cos^2(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{18}$	$[0, 2]$	Ньютона
3	$\ln^2(x) - 5 \cdot \ln(x) + 6$	$[5, 25]$	Упрощ. Ньютона
4	$\ln^2(x) - \ln(x) - 2$	$[0.1, 10]$	Секущих
5	$\ln^2(x) - \frac{3}{4} \cdot \ln(x) + \frac{1}{8}$	$[0.1, 2]$	Бисекции
6	$\mathrm{tg}^2(x) + (\sqrt{3} - 1)\,\mathrm{tg}(x) - \sqrt{3}$	$[-1.2, 1]$	Ньютона
7	$\ln(x) + (x+1)^3 - 7x$	$[0.5, 1.5]$	Упрощ. Ньютона
8	$10x - \cos(x) - 2$	$[0, 1]$	Секущих
9	$2^x + 5x - 3$	$[0, 1]$	Бисекции
10	$2x + 4 \cdot \lg(1+x) - 1$	$[0, 1]$	Ньютона

3. Найти методом скорейшего спуска с точностью до 0,01 минимум функции

$$f(x) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10 \qquad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 4$$

$$f(x) = 2x^2 + y^2 \qquad x + 3y - 2 \le 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 2y^2 - xy + x + 4y + 1 \qquad x + 2y \le 2$$

$$f(x) = 2^{x_1^2 - x_1 - 3x_1 x_2 - x_2}, \qquad x_1^2 + x_2^2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

4. Проверьте выполнение условий Куна-Таккера в указанных точках, для указанной задачи

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2, \quad 4x_1 + x_2 \le 8,\ x_1 \ge 0$$

$$f(x) = 5x_1 - 3x_2, \quad -6x_1 + 8x_2 \le 11,\ x_1 \ge 0$$

5. Построить множество M, заданное неравенствами и найти его угловые точки

$$\begin{aligned} -x_1 + \ \ x_2 &\le 3, \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 97, \\ x_1 + 7x_2 &\ge 77; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 &\ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 50, \\ -x_1 + 4x_2 &\ge 19; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\le 53, \\ x_1 - \ x_2 &\le 3, \\ 7x_1 + 3x_2 &\ge 71; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x_1 - 5x_2 &\ge 17, \\ x_1 + 2x_2 &\le 34, \\ -4x_1 + 9x_2 &\ge 17; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 14x_2 &\le 78, \\ 5x_1 - \ 6x_2 &\le 26, \\ x_1 + \ 4x_2 &\ge 26; \\ x_1, x_2 &\ge 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 11x_1 - 3x_2 &\ge 24, \\ 9x_1 + 4x_2 &\le 110, \\ -2x_1 + 7x_2 &\ge 15; \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6. Пусть M – выпуклая оболочка системы точек $A_1 = (2k, 1)$, $A_2 = (5k, 1)$, $A_3 = (3, k)$, $A_4 = (2, 1)$, $A_5 = (4, 1)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Построить область M на плоскости и задать ее системой неравенств.

7. Начертите на плоскости область D, заданную следующими угловыми точками $A_1 = (3k, 8)$, $A_2 = (5, 8)$, $A_3 = (3k, 10)$, $A_4 = (3, 1)$, $A_5 = (4k, 15)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины «Математическое моделирование и методы оптимизации»

Основная литература

1. Горлач, Б. А. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 292 с.
2. Алпатов, Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов: 2018-06-07. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 136 с.
3. Коробова, Л. А. Математическое моделирование. Практикум: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2017. – 113 с.

Дополнительная литература

1. Медведев, П. В. Математическое планирование эксперимента: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2017. – 98 с.
2. Катаргин, Н. В. Экономико-математическое моделирование: учебное пособие. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 256 с.
3. Осипенко, С. А. Экономико-математическое моделирование: учеб.-метод. пособие [Электронный ресурс]. – Москва, Берлин : Директ-Медиа, 2018. – 147 с.
4. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 192 с.