Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Составители
А. С. Богатырева
Р. Ф. Гордиенко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензент

Гуцал М. В. – кандидат технических наук, доцент кафедры ТиГМ ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Теоретическая механика [Электронный ресурс]: методические материалы для обучающихся специальности 15.05.01 «Проектирование технологических машин и комплексов» всех форм обучения / сост. А. С. Богатырева, Р. Ф. Гордиенко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

Приведен теоретический и практический материал, необходимый для успешного изучения дисциплины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний в области материаловедения.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. СТАТИКА.
РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.

Авторы: В. А. Хямяляйнен, А. С. Богатырева, Р. Ф. Гордиенко

Введение

Важной задачей при изучении курса теоретической механики является организация самостоятельной работы студентов.

Особую актуальность она приобретает в последнее время в связи с сокращением числа аудиторных часов, отводимых на изучение теоретической механики. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах, которые облегчат студентам самостоятельное изучение теоретических разделов курса и помогут им научиться самостоятельно применять полученные знания теории к решению практических задач.

Используя огромное количество методических разработок, имеющихся в различных источниках по курсу механики и опираясь на многолетний опыт работы в вузе, авторы поставили своей задачей создание руководства к решению задач, в котором предлагается системный подход для приобретения навыков решения задач по основным наиболее важным темам изучаемого курса.

Раздел курса теоретической механики «Статика» является одним из трех разделов изучаемой дисциплины при получении инженерного образования почти во всем направлениям вуза. Знание и умение применять основные теоретические положения этого раздела во многом предопределяет успешное изучение других общетехнических и специальных дисциплин.

Цель настоящего пособия – закрепление теоретических знаний по основным темам раздела «Статика» и оказание помощи студентам в приобретении навыков решения задач.

Для облегчения пользования пособием каждой теме предшествуют теоретические положения, затем представляются примеры задач с подробным указанием их решения, а также рекомендуются задачи для самостоятельного решения и вопросы для самопроверки.

1. Произвольная плоская система сил

Основные теоретические положения

При решении задач, относящихся к разделу «Статика», почти всегда рассматриваемое тело является несвободным. Тела (конструкции, устройства), ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются связями. В механике связи осуществляются при помощи твердых или гибких тел, соединенных с данным телом или касающихся этих тел. Сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, называется реакцией связи. Направление реакции связи противоположно тому направлению, в котором связь препятствует перемещению данного тела.

1.1. Типы связей и их реакции

1. Абсолютно гладкая опорная поверхность.

Реакция $\overline{N}$ такой поверхности направлена по нормали к ней (рис. 1).

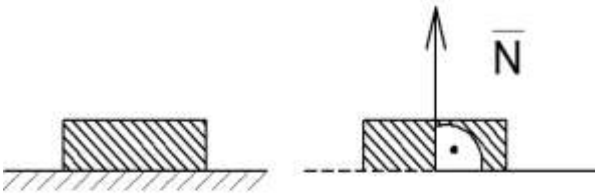


Рис. 1

2. Неподвижная точка или гладкое ребро. Реакция связи $\overline{N}$ приложена к телу в точке соприкосновения его с опорой и направлена по нормали к поверхности тела в этой точке (рис. 2).

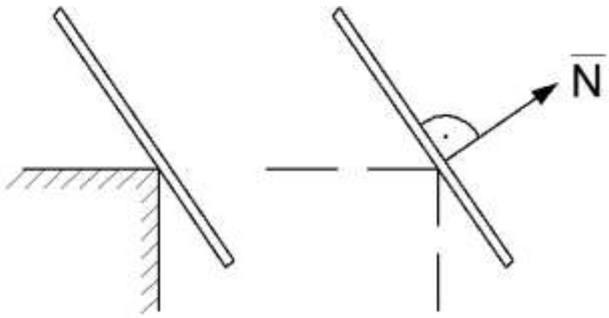


Рис. 2

Рис. 2

3. Гибкая связь.

Связь осуществляется гибкой, нерастяжимой, невесомой нитью (тросом, канатом, цепью). Реакция гибкой связи $\vec{T}$ направлена вдоль нити от тела к точке закрепления нити (рис. 3).

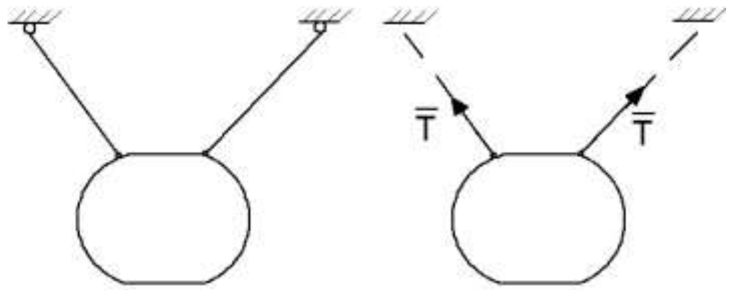


Рис. 3

4. Подвижный цилиндрический шарнир

Тело опирается на гладкую неподвижную плоскость катками, которые могут двигаться вдоль плоскости (подвижный шарнир). Реакция такой связи $\vec{R}$ направлена перпендикулярно плоскости, по которой могут передвигаться катки (рис. 4).

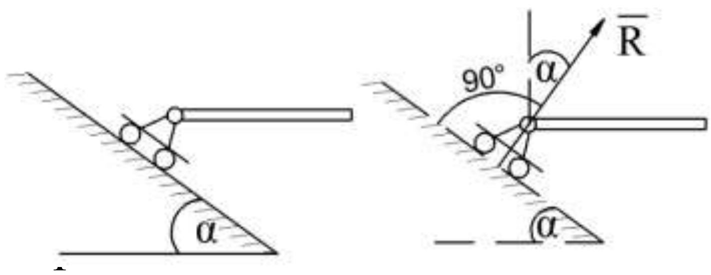


Рис. 4

5. Стержневая опора.

Тело закрепляется при помощи невесомого стержня, шарнирно соединенного, как с телом, так и с опорой, например, стеной или полом. При этом никакие другие силы на стержень не действуют. Реакция стержня $\vec{S}$ направлена вдоль стержня, от тела, которое этот стержень удерживает в равновесии (рис. 5).

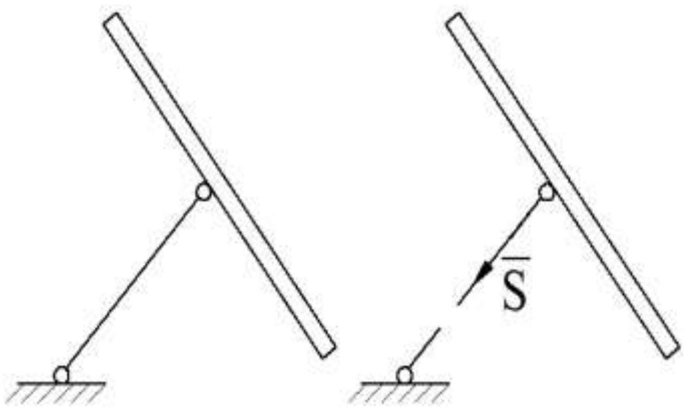


Рис. 5

Во многих задачах невозможно заранее определить работает стержень на сжатие или на растяжение. Поэтому условились реакцию стержня направлять от тела, равновесие которого рассматривается, т. е. считать этот стержень растянутым. Если в результате решения задачи реакция стержня отрицательная, это означает, что рассматриваемый стержень сжат (рис. 5).

6. Шероховатая опорная поверхность

Реакция такой поверхности $\overline{R}$ является равнодействующей нормальной реакции плоскости $\overline{N}$ и силы трения $\overline{F}_{mp}$, препятствующей скольжению тела по этой поверхности. Максимальная величина силы трения скольжения пропорциональна величине нормальной составляющей полной реакции.

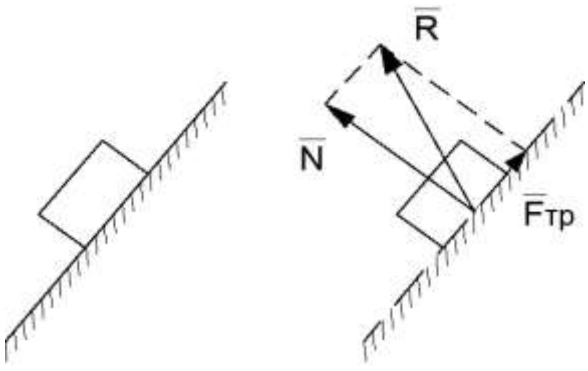


Рис. 6

Коэффициент пропорциональности f – коэффициент трения скольжения, причем сила трения скольжения изменяется в пределах $0 \leq F_{mp} \leq fN$ (рис. 6).

7. Неподвижный цилиндрический шарнир.

Данная связь препятствует любому перемещению тела в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. Реакция $\vec{R}$ неподвижного шарнира приложена в центре шарнира и лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Направление этой реакции зависит от сил, действующих на тело и поэтому заранее неизвестно. Поэтому силу $\vec{R}_A$ представляют двумя ее составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, направленными вдоль осей координат, проведенных в плоскости, перпендикулярной оси шарнира: R_{AX}=X_A, R_{AY}=Y_A (рис. 7).

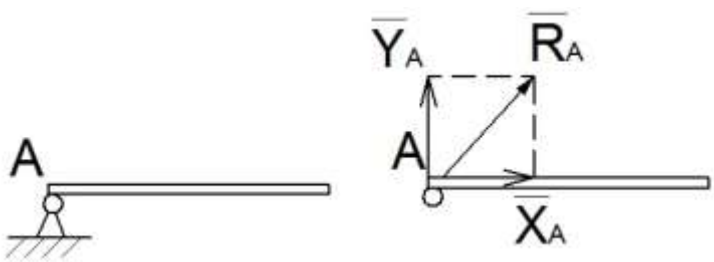


Рис. 7

8. Жесткая заделка.

Балка АВ концом А жестко закреплена. Реакция такой связи эквивалентна силе $\overline{R}_A$, приложенной в точке А, и паре сил с моментом M_A. Так как направление силы $\overline{R}_A$ заранее неизвестно, то ее целесообразно при решении задач представить двумя ее составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (рис. 8).

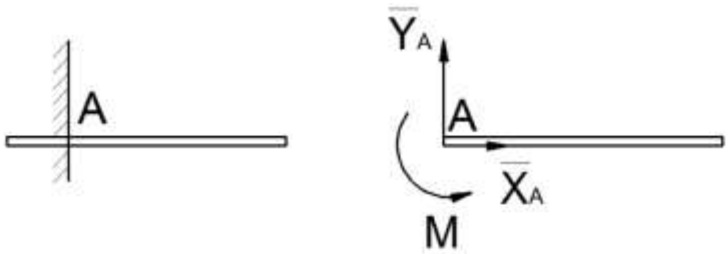


Рис. 8

9. Скользящая заделка.

Реакция такой связи эквивалентна силе $\overline{Y}_A$, направленной перпендикулярно линии скольжения и паре сил с моментом M_A (рис. 9).

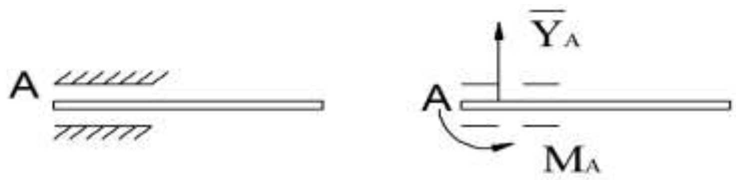


Рис. 9

10. Сферический шарнир.

Этот шарнир препятствует любому перемещению тела в пространстве. Реакция сферического шарнира $\overline{R}_A$ приложена в центре шарнира и имеет любое направление в пространстве. Поэтому при решении задач эту реакцию представляют тремя ее составляющими, направленными по направлению выбранных осей координат $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$ (рис. 10).

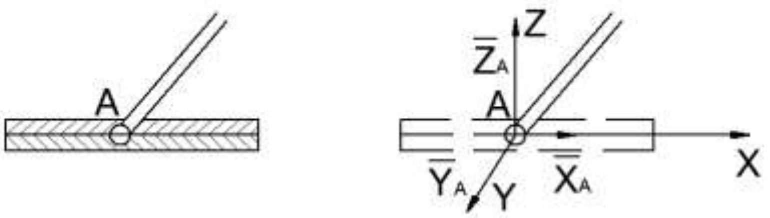


Рис. 10

1.2. Равновесие произвольной плоской системы сил

Система сил, линии действия которых произвольным образом расположены в плоскости, называется произвольной плоской системой сил.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на две взаимно перпендикулярные оси координат и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно произвольной точки равнялись нулю.

Первая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum m_O(\overline{F}_k) = 0. \qquad (1)$$

Наряду с этой формой уравнений равновесия применяют еще две другие.

Вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \sum m_B(\overline{F}_k) = 0. \qquad (2)$$

Третья форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \sum m_B(\overline{F}_k) = 0, \sum m_C(\overline{F}_k) = 0. \qquad (3)$$

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями на ось начала и конца вектора силы (рис. 11).

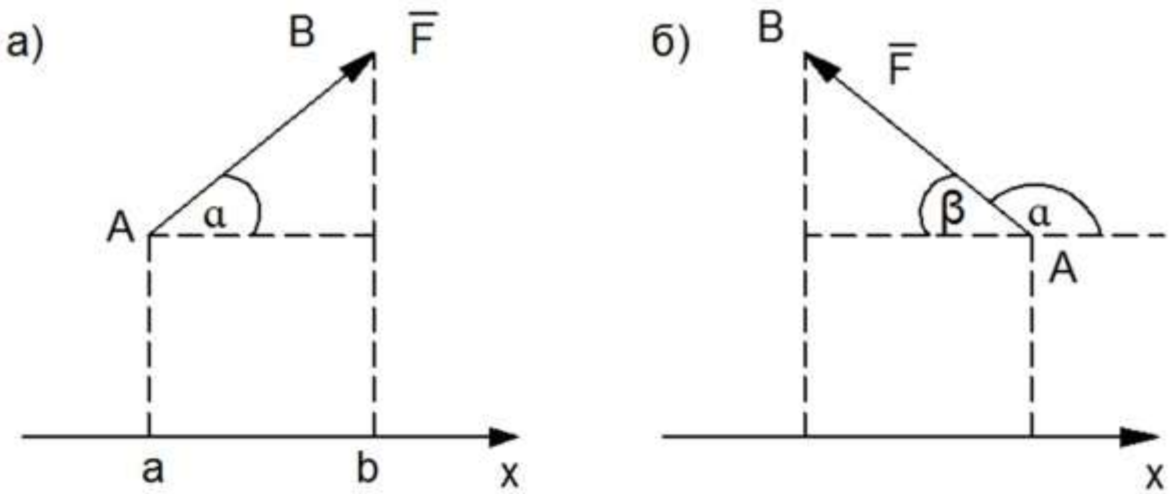


Рис. 11

а) $F_X = ab = \mathrm{F}\cos\alpha$, б) $F_X = ab = \mathrm{F}\, cos\alpha = Fcos(180\text{-}\beta) = -Fcos\beta$.

Таким образом, проекция силы на ось – это скалярная величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Момент силы характеризует вращательный эффект силы относительно точки и является вектором, перпендикулярным плоскости, образованной точкой и силой. Величиной этого вектора является скалярная величина, численно равная произведению, взятому со знаком «плюс» или «минус», модуля силы на плечо силы.

Момент силы относительно точки положителен, если сила стремится повернуть тело вокруг этой точки, против хода часовой стрелки и отрицательной, если – по ходу часовой стрелки.
$m_A(F) = \pm F \cdot h,$ где h – плечо силы (рис. 12).

Плечо силы h равно длине перпендикуляра, проведенного из точки, принятой за центр моментов, на линию действия силы.

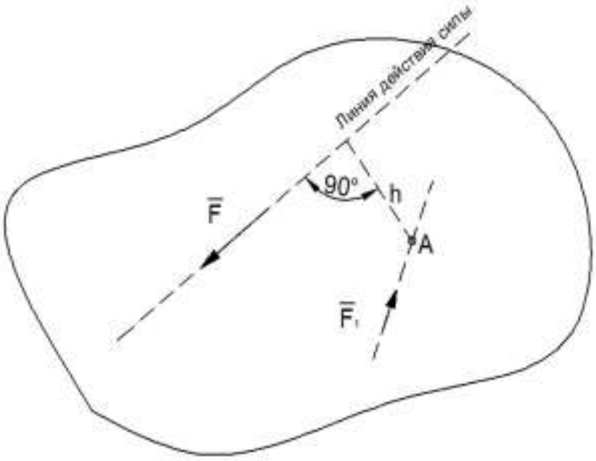


Рис. 12

Если линия действия силы, например $\overline{F_1}$, проходит через точку, то ее момент относительно этой точки равен нулю: $m_А(\overline{F_1}) = 0$.

Парой сил называются две силы равные по модулю, параллельные и противоположно направленные (рис. 13). Равнодействующая пары сил равна нулю, но пара сил оказывает вращательное действие на тело, характеризующееся моментом, который в отличие от момента силы относительно точки является свободным вектором, перпендикулярным плоскости пары. Величина момента

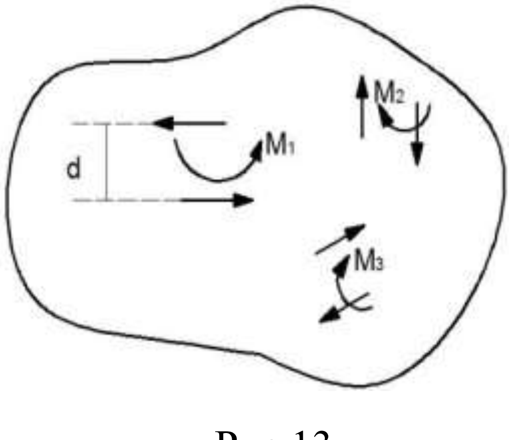


Рис.13

$M = \pm F \cdot d,$ где d – плечо пары сил. Величина момента пары положительна, если пара сил стремится вращать тело против часовой стрелки, и отрицательна, если – по часовой стрелке.

1.3. Указания к решению задач

Решение задач на равновесие тела или несколько тел, соединенных между собою рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) выделить тело, равновесие которого должно быть рассмотрено;

2) установить связи, наложенные на тело и, применяя аксиому связей, заменить их реакциями;

3) изобразить расчетную схему, включающую рассматриваемое тело с приложенными к нему активными силами и реакциями связей;

4) составить уравнения равновесия;

5) решить систему алгебраических уравнений, определив из них искомые величины;

6) провести проверку полученного решения.

При составлении уравнений равновесия можно применять любую форму уравнений (1) – (3). Следует стремиться к получению таких уравнений равновесия, в каждое из которых входила бы одна из определяемых величин. Это можно достичь, проводя соответствующим образом оси координат или выбирая центр моментов.

Иногда при определении момента сил относительно точки возникают трудности в определении плеча силы. Тогда следует воспользоваться теоремой Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы относительно точки равен сумме моментов ее составляющих относительно этой же точки. То есть силу $\overline{F}$ нужно представить в виде ее составляющих $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, направленными чаще всего, параллельно выбранным осям координат, и согласно теореме момент силы относительно центра, например, точки А будет равен:

$$m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}''). \tag{5}$$

Поскольку сумма моментов сил пары относительно любой точки не зависит от выбора этой точки и равна моменту этой пары, то на рисунке силы пары, как правило, не изображаются, а только показывают ее момент. Причем момент пары сил входит только в уравнение моментов со своим знаком.

1.4. Решение задач на равновесие одного твердого тела под действием произвольной плоской системы сил

Задача 1.

Однородная балка весом *P*=200 Н шарнирно закреплена в точке А. К концу балки В прикреплена нить перпендикулярно к балке и переброшена через блок С. Какой груз весом Q необходимо подвесить к нити для того, чтобы балка была в равновесии под углом в 30° к горизонту? Определить также реакцию шарнира А. Весом нити и трением на блоке С пренебречь (рис. 14, а).

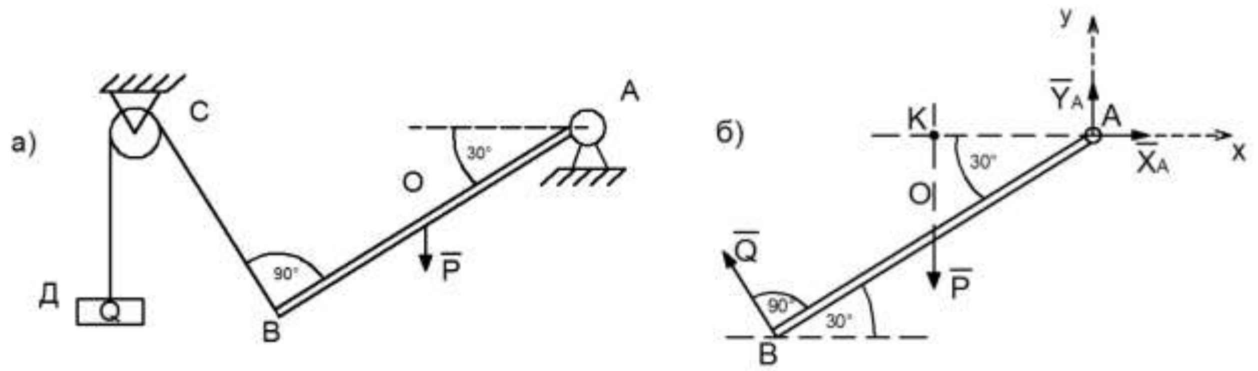


Рис. 14

Решение.

1. Рассмотрим равновесие балки АВ.

2. К балке приложена одна активная сила $\overline{P}$, направленная вертикально вниз и приложенная к середине балки в точке О.

3. На балку наложены две связи: нить ВС и неподвижный шарнир в точке А. Освободим балку от связей и покажем на рисунке реакции этих связей. Реакцию неподвижного шарнира представляем ее составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. Так как весом нити и трением на блоке С пренебрегаем, то реакция нити приложена к балке в точке В, направлена по нити и численно равна весу груза (рис 14 б).

Таким образом, если балка удерживается в равновесии грузом, переброшенным через неподвижный блок, то нужно отбросить и блок и груз, а их действие заменить реакцией нити, приложенной к балке в точке В и численно раной весу груза Q.

4. Проводим оси координат. Направим ось X по горизонтали направо, а ось Y по вертикали вверх. Составляющие реакции шарнира А, т. е. $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направим параллельно проведенным осям координат (рис. 14, б).

Вычисляем проекции всех сил на оси координат и их моменты относительно точки А (табл. 1).

Таблица 1

$\overline{F}$	$\overline{X}_A$	$\overline{Y}_A$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$
F_{kx}	X_A	0	0	-Q·cos60°
F_{ky}	0	Y_A	-P	Q·cos30°
$m_A(\overline{F}_K)$	0	0	P·AK	-Q·AB

5. Запишем уравнения равновесия:

а) сумма проекций всех сил действующих на балку на ось X:

$\sum F_{kx} = 0, X_A - \text{Q}\cos 60° = 0;$

б) сумма проекций всех сил на ось Y:

$\sum F_{ky} = 0, Y_A - P + \text{Q}\cos 30° = 0;$

в) сумма моментов сил относительно точки А:

$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0,\ -Q \cdot AB + P \cdot AK = 0.$

6. Решаем полученную систему уравнений.

Так как $AK = AO\cos 30°$, $AO = \frac{AB}{2}$, то подставляя числовые значения в уравнение моментов, найдем $Q = 86{,}6$ Н.

Тогда из первого и второго уравнения получаем, что

$X_A = Q\cos 60° = 43{,}3H$; $Y_A = P - Q\cos 30° = 125H$.

7. Для проверки правильности решения составим уравнение:

$\sum m_0(\overline{F}_K) = 0;\ -Q \cdot OB - X_A \cdot OA\cos 60° + Y_A \cdot OA\cos 30° = 0.$

Подставляя значения входящих величин, получим:

$-Q \cdot \frac{AB}{2} + Y_A \cdot \frac{AB}{2}\cos 30° - X_A\frac{AB}{2}\cos 60° = 0,$

$-86{,}6 + 125 \cdot 0.866 - 43{,}3 \cdot 0{,}5 = 0,$

$-86{,}6 + 108{,}25 - 21{,}65 = 0$, 0 = 0. Решение верно.

Задача 2.

Однородный стержень АС весом $P = 20$ Н в точке А закреплен шарнирно, а в точке В свободно опирается на опору В. На стержень действует пара сил, момент которой $M = 6\ H \cdot$ м, а к концу стержня в точке С прикреплена нить, перекинутая через блок Д, к концу которой подвешен груз $Q = 5\sqrt{3}H$. Найти реакции шарнира А и опоры В, если $BC = \frac{1}{3}AC = 3\ м$ (рис. 15).

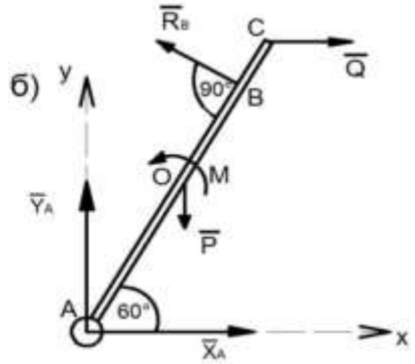
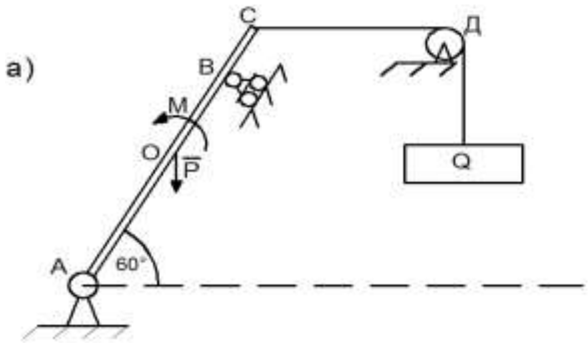


Рис. 15

Решение. 1. Рассмотрим равновесие стержня АС.

2. На стержень действуют сила $\overline{P}$, приложенная в точке О и направленная вертикально вниз, а также пара сил с моментом М (рис. 15б).



3. Начало координат выберем в точке А, укажем оси координат (рис. 15, б).

4. На стержень наложены следующие связи: неподвижный шарнир в точке А, подвижная опора В и нить СД. Освободим стержень от связей и покажем на рисунке реакции этих связей. Реакцию шарнира А изобразим силами $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, направленными параллельно осям координат. Реакция подвижного шарнира В $\overline{R}_B$ направлена перпендикулярно плоскости, на которой установлена опора. Освободим стержень от нити СД, вдоль нити покажем ее реакцию $\overline{T}$, причем численно T=Q (рис. 15, б).

5. Вычислим проекции всех сил на осихиу, а также моменты этих сил относительно точки А (табл. 2).

Таблица 2

$\overline{F}$	$\overline{X}_A$	$\overline{Y}_A$	$\overline{P}$	$\overline{R}_B$	$\overline{Q}$	M
F_{kx}	X_A	0	0	$-R_B\cos 30°$	Q	-
F_{ky}	0	Y_A	-P	$R_B \cos 60\,°$	0	-
$m_A(\overline{F}_k)$	0	0	$-P\dfrac{AC}{2}\cos 60°$	$R_B AB$	$-Q \cdot AC\cos 30\,°$	M

6. Запишем уравнения равновесия: два уравнения проекций сил на оси координат и уравнение моментов этих сил относительно точки А:

$\sum F_{kx} = 0, X_A - R_B \cos 30° + Q = 0;$

$\sum F_{ky} = 0, Y_A - P + R_B \cos 60\ ° = 0;$

$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0, -P \cdot \frac{AC}{2} \cos 60° + R_B \cdot AB - Q \cdot AC \cos 30° + M = 0.$

7. Решим полученную систему уравнений:

Из последнего уравнения найдем R_B.

$$R_B = \frac{P\frac{AC}{2}\cos 60° + Q \cdot AC \cos 30° - M}{AB} = 17{,}75H.$$

Тогда $X_A = R_B \cos 30° - Q = 6{,}72H.$

$$Y_A = P - R_B \cos 60° = 11{,}13H$$

8. Для проверки правильности решения задачи составим уравнение: $\sum m_C(\overline{F}_K) = 0.$

$-R_B \cdot BC + P\frac{AC}{2}\cos 60° + M + X_A \cdot AC \cdot \cos 30° - Y_A AC \cos 60° = 0.$

Подставляя в это уравнение численные значения входящих величин, имеем:

$$-17{,}75 \cdot 3 - 20 \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}5 + 6 + 6{,}72 \cdot 9 \cdot 0{,}866 - 11{,}13 \cdot 9 \cdot 0{,}5 = 0$$

$-103{,}25 + 103{,}3 = 0;$ 0=0, решение верно.

Задача 3.

К однородной горизонтальной балке АВ весом P = 200 кН, заделанной концом А в стену, приложена пара сил, момент которой M = 200 кНм. В точке В под углом 60° к горизонту приложена сила F = 100 кН. На участке ВС действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 100\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}$. Найти реакцию заделки А, если АВ = 4 м, ВС = 1 м (рис. 16, а).

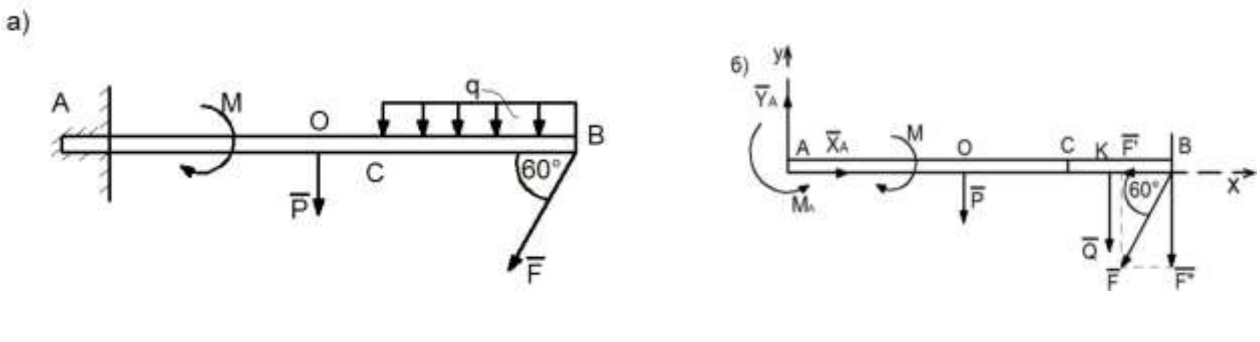


Рис. 16

Решение.1. Рассмотрим равновесие балки АВ.

2. К балке приложены активные силы: $\overline{P}$ – сила тяжести балки, сила $\overline{F}$, приложенная в точке В, и пара сил с моментом М. Также на участке балки ВС приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 100\frac{кН}{м}$. Заменим эту нагрузку силой $\overline{Q}$, модуль которой равен $Q = q \cdot CB = 100\frac{кН}{м} \cdot 1м = 100кН.$

Точка приложения силы $\overline{Q}$ находится в середине отрезка ВС, т.е. ВК=КС=0,5м.

3. На балку наложена одна связь – жесткая заделка в точке А. Эта связь не допускает никаких перемещений, а также любых поворотов балки. Реакциями жесткого защемления являются две силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, приложенные в точке А, и пара сил с моментом M_A (рис. 16 б).

4. Проводим оси координат и вычисляем проекции сил на оси координат и моменты этих сил относительно точки А (табл. 3).

Таблица 3

$\overline{F}$	$\overline{X}_A$	$\overline{Y}_A$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{F}$	M	M_A
F_{kx}	x_A	0	0	0	$-F\cos 60°$	-	-
F_{ky}	0	y_A	$-P$	-Q	$-F\cos 30\,°$	-	-
$m_A(\overline{F}_K)$	0	0	$-P\frac{AB}{2}$	$-Q \cdot AK$	$-F\cos 30° \cdot AB$	-M	M_A

При вычислении момента силы $\overline{F}$ воспользуемся теоремой Вариньона. Силу $\overline{F}$ представили двумя ее составляющими, направленными параллельно осям координат и равными $F^{'} = F\cos 60\,°$, $F" = F\cos 30\,°$. Тогда, согласно теореме, $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}")$, где $\overline{F}'$ направлена параллельно оси X, а $\overline{F}"$ ей перпендикулярна. $m_A(\overline{F}') = 0$, так как линия действия этой силы проходит через точку А, а $m_A(\overline{F}") = F" \cdot AB = F\cos 30° AB$.

5. Запишем уравнения равновесия:

$\sum F_{kx} = 0;\ X_A - F\cos 60\,° = 0;$

$\sum F_{ky} = 0;\ Y_A - P - Q - F\cos 30\,° = 0;$

$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0;\ -P\frac{AB}{2} - Q \cdot AK - F\cos 30\,° AB - M + M_A = 0.$

6. Решаем полученную систему уравнений:
Из первого уравнения: $X_A = F\cos 60° = 50кН$,
Из второго уравнения: $Y_A = P + Q + F\cos 30° = 386{,}6Н$.
Момент в заделке А вычислим из третьего уравнения:

$$M_A = P\cdot\frac{AB}{2} + Q\cdot AK + F\cos 30° AB + M = 1296{,}4кН\cdot м.$$

7. Для проверки правильности решения задачи составим уравнение $\sum m_B(\overline{F}_K) = 0$.

$$-Y_A\cdot AB + P\frac{AB}{2} + Q\cdot KB + M_A - M = 0,$$
$$-386{,}6\cdot 4 + 200\cdot 2 + 100\cdot 0{,}5 + 1296{,}4 - 200 = 0,$$
$$-1746{,}6 + 1746{,}6 = 0,$$ 0 = 0. Решение верно.

Задача 4.

Балка АД закреплена при помощи неподвижного цилиндрического шарнира А и стержневой опоры CC'. На балку действуют две силы $\overline{P}$, приложенные в точках В и Д, направленные под углом $\alpha = 60°$ к балке и равные P = 10 кН. На участке ВС приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м. Кроме того, на балку действует пара сил, которая стремится повернуть балку против часовой стрелки, момент этой пары сил равен $M = 16\ кН\cdot м$. Определить реакции опор (рис. 17, а).

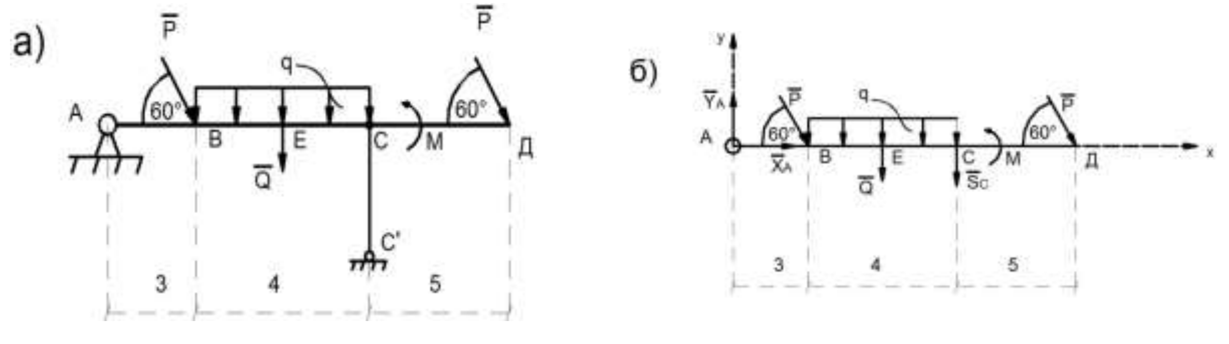


Рис. 17

Решение.

1. Рассмотрим равновесие балки АД.

2. Изобразим на рисунке заданные силы: силы $\overline{P}$, приложенные в точках В и Д, силу $\overline{Q}(Q = q \cdot BC = 8кН)$, приложенную в середине отрезка ВС, и пару сил с моментом М. Балка закреплена при помощи шарнирно неподвижной опоры А и стержневой опоры CC', являющиеся связями для балки.

3. Отбросим связи и заменим их действие реакциями. Реакция шарнирно неподвижной опоры А приложена в центре шарнира, ее направление зависит от действующих на балку сил и заранее не известна. Поэтому покажем реакцию шарнирно неподвижной опоры А двумя ее составляющими $\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, направленными параллельно осям координат. Реакцию стержневой опоры С направим вдоль стержня от балки к точке закрепления, предположив при этом, что стержень растянут (рис. 17, б).

4. Проведем оси координат: ось Ах – вдоль балки, Ау – перпендикулярно ей. Вычислим проекции сил F_{kx}, F_{ky}, действующих на балку и моменты этих сил относительно точки А (табл. 4).

Таблица 4

$\overline{F}$	$\overline{X}_A$	$\overline{Y}_A$	$\overline{S}$	$\overline{P}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	M
F_{kx}	X_A	0	0	$P\cos 60°$	$P\cos 60°$	0	-
F_{ky}	0	Y_A	-S	$-P\cos 30°$	$-P\cos 30°$	-Q	-
$m_A(\overline{F}_K)$	0	0	$-S \cdot AC$	$-P\cos 30\, AB$	$-P\cos 30°\, AД$	$-Q \cdot AE$	M

5. Составим уравнения равновесия.

$\sum F_{kx} = X_A + P\cos 60° + P\cos 60° = 0;$

$\sum F_{ky} = Y_A - S_C - P\cos 30° - P\cos 30° - Q = 0;$

$\sum m_A(\overline{F}_k) = -P \cdot 3\cos 30° - Q \cdot 5 - S_C 7 - P \cdot 12\cos 30° + M = 0;$

Момент пары входит только в уравнение моментов с положительным знаком, так как по условию задачи пара сил стремится вращать балку против часовой стрелки.

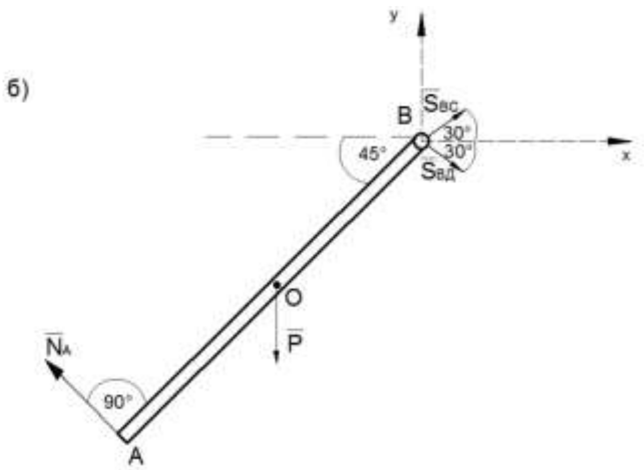
6. Решим полученную систему алгебраических уравнений.

Из первого уравнения имеем: $X_A = -2P\cos 60° = -10кН.$

Из третьего уравнения: $S_C = \frac{-Q \cdot 5 - P \cdot 15\cos 30° + M}{7} = -21{,}99кН.$

Из второго уравнения: $Y_A = S_C + 2P\cos 30° + Q = 3{,}33кН.$

Отрицательное значение реакции $\overline{X}_A$ означает, что она направлена в сторону, противоположную указанной на расчетной схеме (рис. 17, б).



Отрицательное значение реакции стержня $\overline{S}_C$ указывает, что стержень сжат.

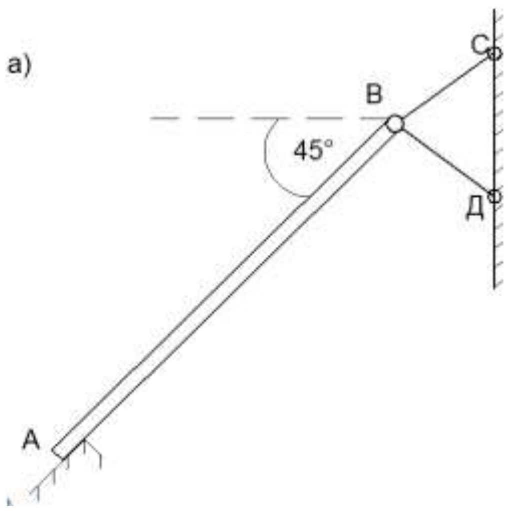
7. Для проверки решения задачи составим уравнение моментов всех сил, действующих на балку, относительно точки Д:

$\sum m_{Д}(F_k) = -Y_A \cdot 12 + P \cdot 9\cos 30° + Q \cdot 7 + S_C \cdot 5 + M = 0.$

Подставляя в это уравнение значения всех входящих величин, получим:

$-149{,}91 + 149{,}92 = 0{,}01 \approx 0.$ Таким образом, задача решена верно.

Задача5.



Плита АВ веса $P = 100$ Н свободно опирается в точке А на гладкую плоскость и удерживается под углом 45° к горизонту двумя стержнями ВС и ВД. Треугольник ВСД – равносторонний. Точки С и Д лежат на вертикальной прямой. Стержни соединены с балкой и вертикальной стеной шарнирами В, С и Д. Пренебрегая весом стержней найти реакцию опоры А и усилия в стержнях (рис. 18, а).

Рис. 18

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плиты АВ.

2. В центре тяжести плиты, в точке О, приложена активная сила $\overline{P}$ – вес плиты, направленная вертикально вниз.

3. Плита, удерживается в равновесии при помощи двух стержней ВС и ВД и опирается на гладкую поверхность в точке А.

Освободим плиту от связей. Реакция гладкой поверхности $\overline{N}_A$ направлена по нормали к поверхности. Реакции стержней ВС и ВД приложены в точке В плиты и направлены по этим стержням. Считaем, что оба стержня растянуты, поэтому их реакции направляем к точкам закрепления стержней С и Д (рис. 18 б).

4. Проведем оси координат и вычислим проекции всех сил, действующих на плиту, на эти оси координат, а также моменты этих сил относительно точки В (табл. 5).

Таблица 5

$\overline{F}$	$\overline{P}$	$\overline{N}$	$\overline{S}_{BC}$	$\overline{S}_{BD}$
F_{kx}	0	$-N\cos 45°$	$S_{BC}\cos 30°$	$S_{BД}\cos 30°$
F_{ky}	-P	$N\cos 45°$	$S_{BC}\cos 60°$	$-S_{BД}\cos 60°$
$m_B(\overline{F}_k)$	$P\cdot\frac{AB}{2}\cos 45°$	$-N\cdot BA$	0	0

5. Запишем уравнения равновесия:

$\sum F_{kx}=0, -N\cos 45°+S_{BC}\cos 30°+S_{BД}\cos 30°=0;$

$\sum F_{ky}=0, -P+N\cos 45°+S_{BC}\cos 60°-S_{BД}\cos 60°=0;$

$\sum m_B(\overline{F})=0; P\frac{AB}{2}\cos 45°-N\cdot BA=0.$

6. Решим полученную систему уравнений:

$$N=\frac{P}{2}\cos 45°=35{,}0\,H; S_{BC}=89{,}5H,\ S_{BД}=-60{,}6\,H.$$

Знак минус у реакции стержня ВД означает, что этот стержень сжат.

7. Проверку полученного решения проведем путем составления уравнения $\sum m_O(\overline{F}_k)=0$.

$-N\frac{AB}{2}-S_{BC}\frac{AB}{2}\sin 15°-S_{BД}\sin 75°=0;$

$-35{,}0-89{,}5\cdot 0{,}256+60{,}6\cdot 0{,}956=0;$

$-35-22{,}91+57{,}9=0;\ -57{,}91+57{,}9=0;$ 0=0. Решение верно.

1.5.Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

На балку АВ действуют распределенная нагрузка интенсивности q=2 Н/м и сила F=6Н. Определить реакцию опоры В, если длина $AC={}^1/_3\,AB$, угол α=45°, АВ= 2,4м (рис. 19).

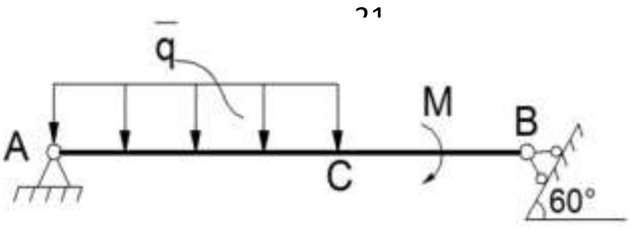


Рис.19

Задача 2.

Балка АС закреплена неподвижным шарниром С и поддерживается в горизонтальном положении веревкой АД, перекинутой через блок. Определить интенсивность распределенной нагрузки q, если ВС = 5 м, АС = 8 м, вес груза Q_1 = 20 Н, угол α = 45°(рис. 20).

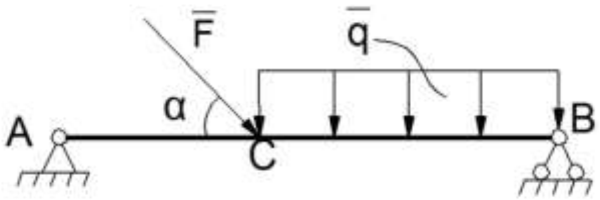


Рис. 20

Задача 3.

Определить момент М пары сил, при котором реакция опоры В равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = 150 Н/м, размеры АС = = СВ = 2 м (рис. 21).

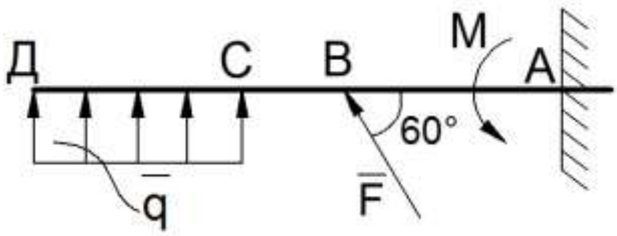


Рис. 21

Задача 4.

Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке А равен 546 Нм, если сила F = 173 Н, момент пары сил М = 42 Нм, размеры АВ= СД = 2 м, ВС = 1 м (рис. 22).

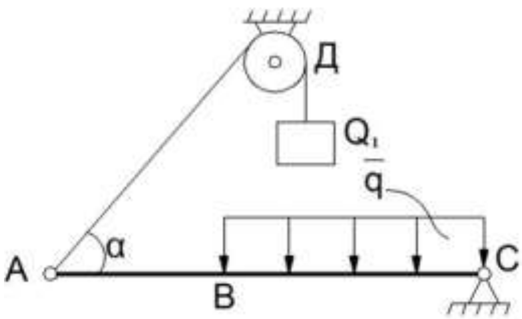


Рис. 22

Задача 5.

На балку, длина которой AB=3м, действуют пары сил с моментом $M_1 = 2кН \cdot м$ и $M_2 = 8кН \cdot м$. Определить в кН модуль реакции опоры В (рис. 23).

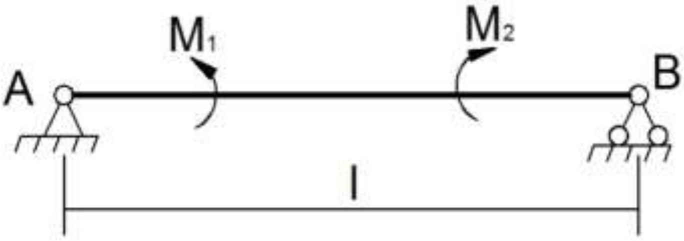


Рис. 23

Задача 6.

Однородный стержень AB весом P=100Н в точке А закреплен шарнирно,а в точке В опирается на гладкую горизонтальную поверхность. В точке С к стержню прикреплена веревка с грузом Q=60Н на конце, переброшенная через блок Д. Определить опорные реакции, если $AC = \frac{1}{4}AB$ (рис. 24).

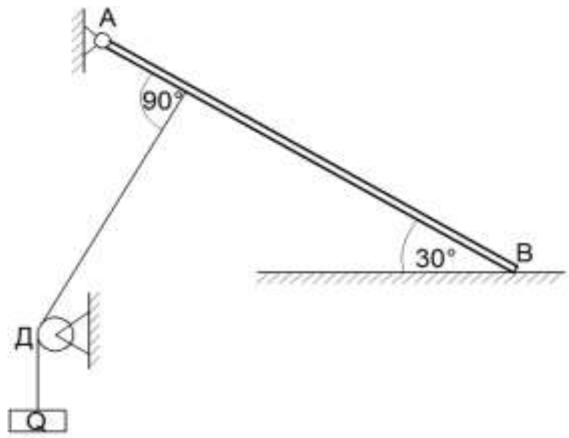


Рис. 24

Задача 7.

Однородная балка AB весом P=36Н удерживается стержнем ДЕ. К концу балки В привязана веревка с грузом Q=14кН на конце, перекинутая через блок С и образующая с вертикалью угол γ=45°. К балке под углом α=120° приложена сила F=20кН. Найти реакции опор, если BE=EK==KA=1 м (рис. 25).

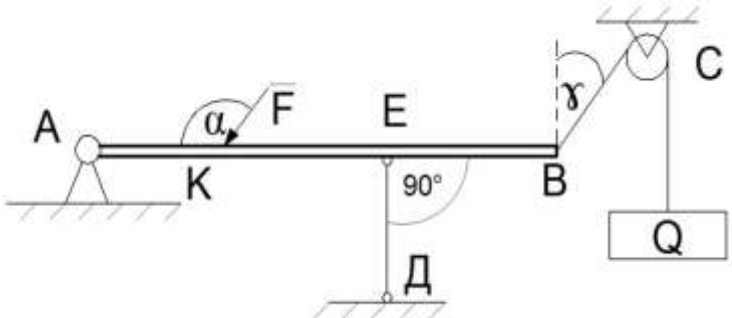


Рис. 25

Задача 8.

Однородный брус AC весом P=6кН в точке А закреплен шарнирно, а в точке В опирается на гладкую поверхность, составляющую с горизонтом угол α=30°. В точке C под углом α=30° к вертикали, на брус дейстует сила F=10 кН. На участке BC= 1 м действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 5 кН/м. К брусу приложена также пара сил с моментом $M = 12кН \cdot м$.

Определить реакции опор, если длина бруса AC = 6 м, OB = 2 м (рис. 26).

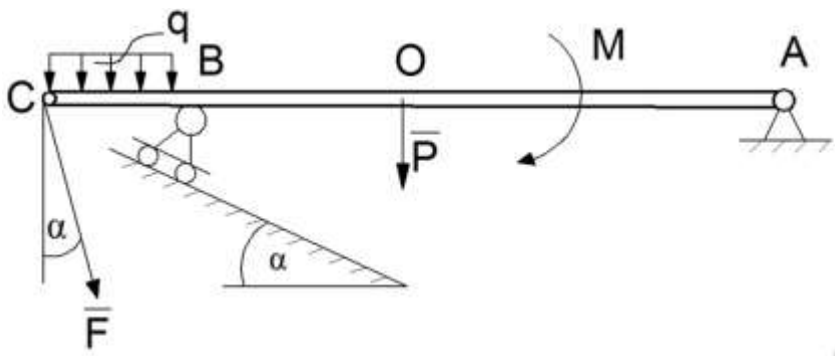


Рис. 26

1.6. Вопросы для самопроверки

1. Что называется связью? В чем заключается принцип освобождаемости от связей?

2. Назовите основные случаи, когда линии действия реакций связей известны.

3. Как направлена реакция невесомого стержня?

4. Как определяется проекция силы на ось?

5. В каком случае проекция силы на ось равна нулю?

6. Как определяется момент силы относительно точки?

7. Когда момент силы относительно точки равен нулю?

8. Перечислите свойства пары сил.

9. Сформулируйте теорему Вариньона.

10. Какая система сил называется плоской системой?

11. Запишите формы уравнений равновесия для плоской системы сил?

12. Какие задачи механики являются статически определимыми и какие – статически неопределимыми?

2. Равновесие системы тел
Решение задач на равновесие системы тел

Условия равновесия для одного твердого тела применимы и для исследования равновесия системы тел.

Системой сочлененных твердых тел называется совокупность тел, касающихся друг друга или соединенных между собой посредством связей (шарниров, стержней, нитей).

Силы взаимодействия между телами конструкции, называют внутренними. По аксиоме действия и противодействия внутренние силы попарно равны по величине, прямо противоположны по направлению и приложены к двум разным взаимодействующим телам системы (конструкции).

Так, например, балка АВ весом $\overline{P}_1$ в точке А жестко заделана в стену. Балка АВ а в точке В опирается свободно на другую балку ВД весом $\overline{P}_2$, которая в свою очередь опирается на неподвижную шарнирную опору Д (рис. 29).

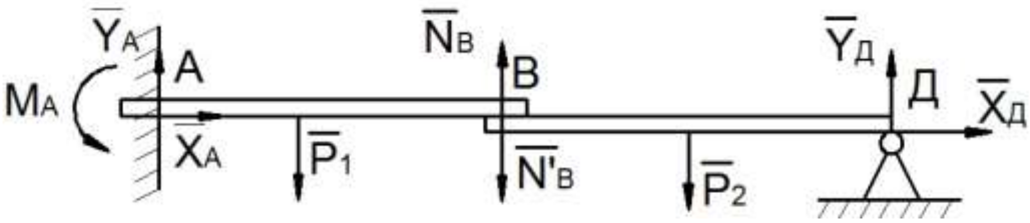


Рис. 29

В данном случае конструкция состоит из двух тел: балки АВ и балки ВД. Силы тяжести балок $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, а также реакции внешних связей, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{M}_A$, $\overline{X}_Д$, $\overline{Y}_Д$ являются для данной конструкции внешними силами, так как опоры в точках А и Д не принадлежат к рассматриваемой системе, состоящей из двух балок.

Внутренними являются силы взаимодействия между балками. Сила $\overline{N}_B$ приложена к балке АВ, $\overline{N}'_B$ – к балке ВД. Эти силы равны по величине и противоположны по направлению, $\overline{N}_B$= -$\overline{N}'_B$.

2.1. Указания к решению задач на равновесие системы сил

При решении задач на равновесие нескольких тел, соединенных между собой необходимо провести следующие действия:

1. Рассмотреть равновесие всей системы в целом и дополнительно равновесие любой ее части, либо равновесие каждого из сочлененных тел в отдельности.

2. Определить общее количество искомых сил. К ним могут относиться появившиеся в результате расчленения системы силы взаимодействия между телами.

3. Прежде всего надо составить уравнения равновесия для того тела, из которых можно вычислить любые неизвестные силы.

4. Затем перейти к следующему телу и составить для него уравнения равновесия и т.д.

5. Проверить полученные расчеты. Для этого можно составить уравнение моментов сил относительно точки, через которую не проходят линии действия определяемых сил.

Задача 1.

Однородная горизонтальная балка ВД весом P_1=10 кН свободно опирается в точке С на одиночную балку АС весом P_2=15 кН. На балку ВД действует пара сил с моментом М и сила $\overline{F}$, приложенная в точке Д, а к балке АС на участке AO_2=$\frac{AC}{2}$ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q. Опорами системы служат жесткая заделка в точке А и неподвижный шарнир в точке В. Дано: F = 20 кН, $M = 40кН \cdot м$, q = 2 кН/м; ВД = 8м, АС = 10 м. Найти реакции опор (рис. 30).

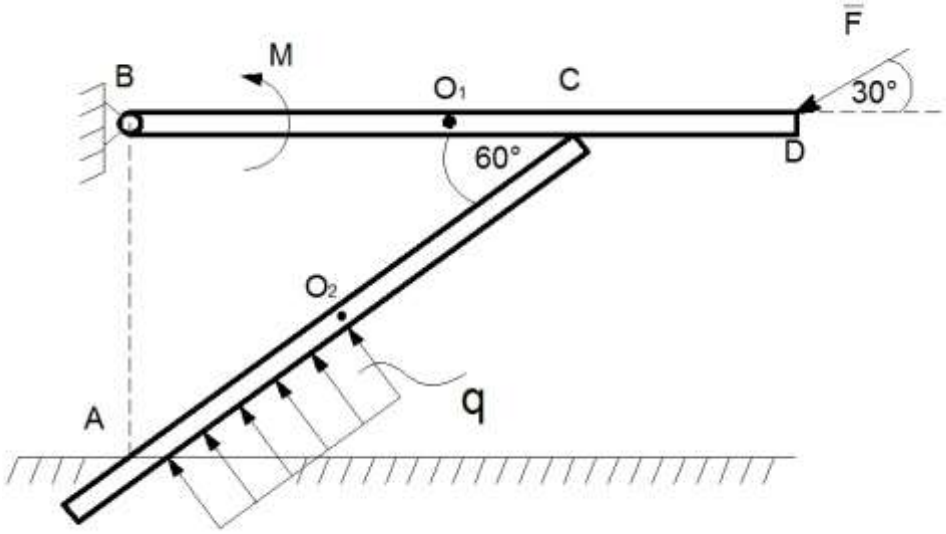


Рис. 30

Решение.

1. Рассмотрим равновесие конструкции, состоящей из двух балок АС и ВД.

2. На конструкцию действуют следующие внешние активные силы:$\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ – вес каждой балки, сила $\overline{F}$ приложенная в точке Д, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q на участке O_2A балки АС и пара сил с моментом М.

3.Освободим эту систему тел от связей и заменим их действие силами реакций: $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$ – составляющие реакции неподвижного шарнира В, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и M_A – реакции жесткой заделки в точке А. Таким образом, на конструкцию действует система сил, лежащих в одной плоскости (рис. 31, а).

4. Так как число неизвестных сил больше трех ($\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, M_A, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$), то для решения задачи расчленим конструкцию на две части и рассмотрим равновесие каждой части в отдельности.

Согласно свойству внутренних сил $\overline{R}_C = -\overline{R'}_C$. $\overline{R}_C$ – приложена к балке ВД, а $\overline{R'}_C$ – к балке АС и $R'_C = R_C$

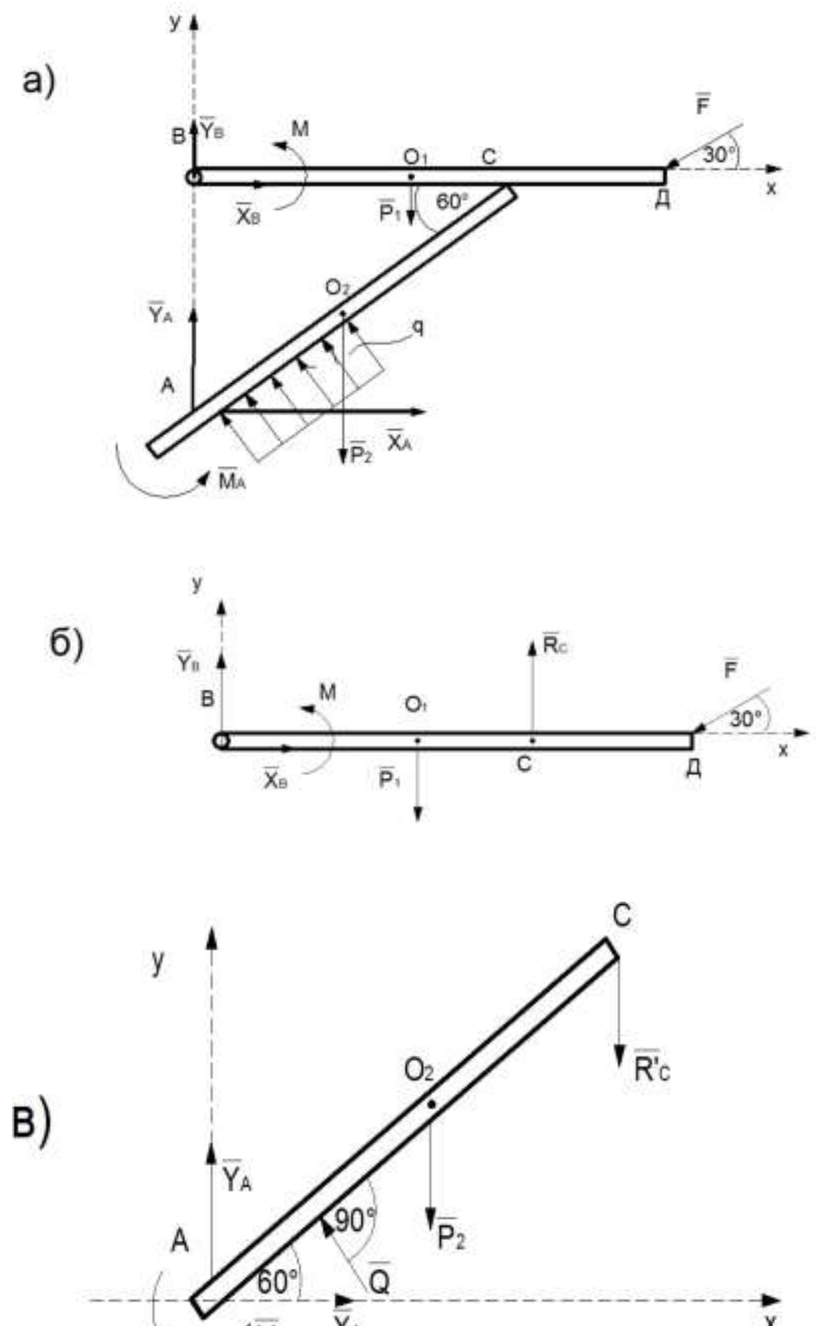


Рис.31

5. Запишем уравнение равновесия для балки ВД (рис. 31 б).

$\sum F_{kx} = 0,\ X_B - F\cos 30^\circ = 0;$

$\sum F_{ky} = 0,\ Y_B - P_1 + R_C - F\cos 60^\circ = 0;$

$\sum m_B(\overline{F}_k),\ M - P_1 \cdot BO_1 + R_C \cdot BC - F\cos 60^\circ В Д = 0.$

Затем составим уравнения равновесия для балки АС. Равнодействующая распределенной нагрузки $Q = q \cdot AO_2 = 10 кН$. Приложена сила $\overline{Q}$ в середине отрезка AO_2 (рис. 31 в).

$\sum F_{kx} = 0,\ X_A - Q\cos 30^\circ = 0;$

$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A - Q\cos 60^\circ - P_2 - R'_C = 0;$

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,\ M_A - Q\frac{AO_2}{2} - P_2 \cdot AO_2 \cos 60^\circ - R'_C \cdot AC\cos 60^\circ = 0.$

6. Решая полученную систему из шести уравнений, находим:

$$X_B = F\cos 30^\circ = 17{,}3 кН;$$
$$X_A = Q\cos 30^\circ = 8{,}66 кН;$$
$$R_C = \frac{F\cos 60^\circ BD + P_1 BO_1 - M}{BC} = 16 кН;$$
$$Y_A = Q\cos 60^\circ + P_2 + R_C = 36 кН;$$
$$M_A = Q\frac{AO_2}{2} + P_2 AO_2 \cos 60^\circ + R'_C AC\cos 60^\circ = 142{,}5 кН \cdot м;$$
$$Y_B = P_1 - R'_C + F\cos 60^\circ = 4 кН.$$

7. Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия для системы сил, приложенных ко всей конструкции, например $\sum M_{O_2}(\overline{F}_k) = 0$ (за центр моментов выбрана точка, через которую не проходят линии действия ни одной из определяемых реакций связей).

$$M_A + X_A \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ - Y_A \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ - Y_B \cdot 2{,}5 - X_B \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ +$$
$$+ Q \cdot 2{,}5 + M - P_1 \cdot 1{,}5 - F\cos 60^\circ \cdot 5{,}5 + F\cos 30^\circ \cdot 5\cos 30^\circ = 0.$$

После подстановки численных значений получаем тождество 0=0. Решение верно.

Задача 2.

Кронштейн состоит из горизонтального бруса АД весом $P_1 = 15\ H$, прикрепленного к стене шарниром А, и подкоса ВС весом P_2 = 12 Н, который с брусом и стеной соединен шарнирами. К концу Д бруса подвешен груз весом Q= 30 Н. Определить реакции шарниров А и С, а также давление в шарнире В (рис. 32).

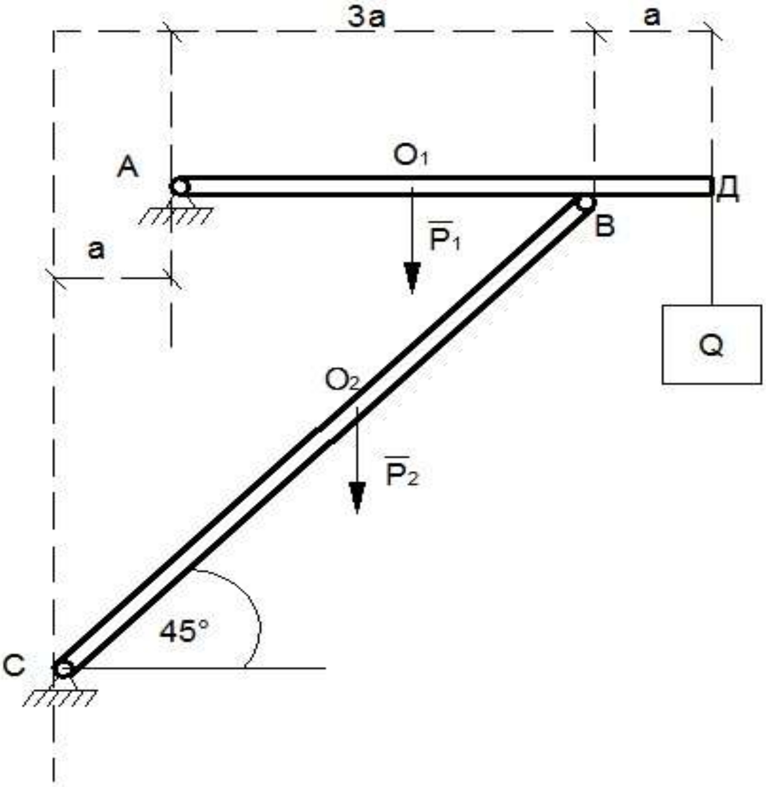


Рис. 32

Решение.

1. Рассмотрим равновесие всего кронштейна.

2. На кронштейн действуют две активные силы: $\overline{P}_1$ – вес бруса, приложенный в точке O_1 и вес подкоса $\overline{P}_2$ – в точке O_2.

3. Освободим кронштейн от внешних связей и заменим их действие силами реакций: $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ – составляющие реакции шарнира А, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ – шарнира В. В точке Д отбросим нить, на которой подвешен груз, и заменим действие нити силой $\overline{T}$, численно равной весу груза, т.е. T = Q (рис. 33 а).

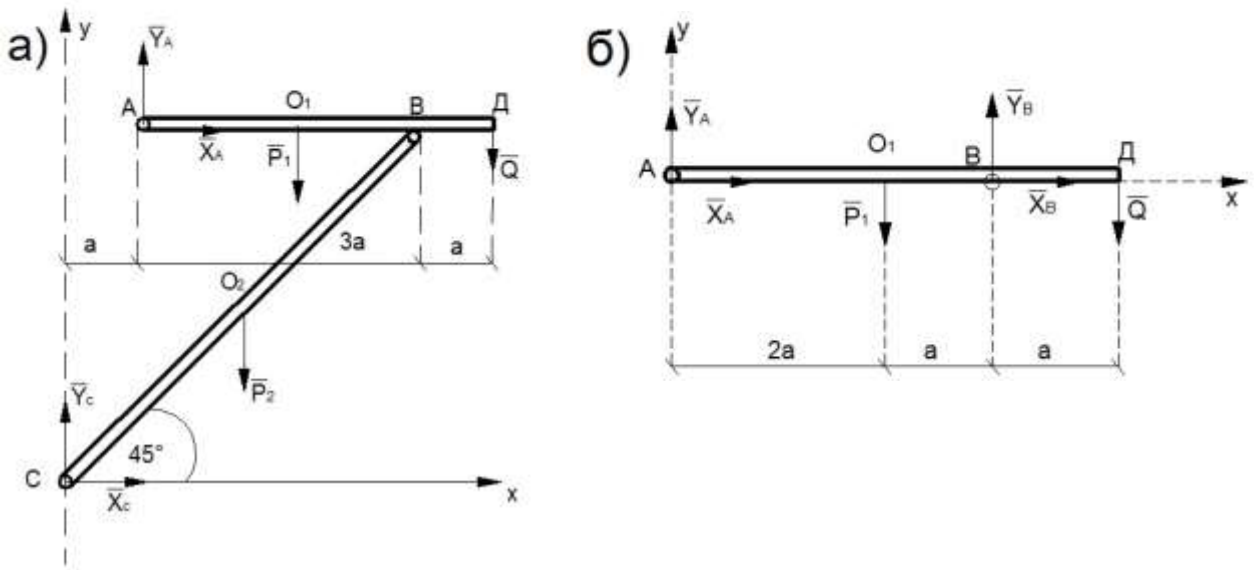


Рис. 33

4. Проведем оси координат и составим уравнения равновесия для всей конструкции (рис. 33а):

$\sum F_{kx} = 0, X_A + X_C = 0,$
$\sum F_{ky} = 0, Y_A + Y_C - Q - P_1 - P_2 = 0,$
$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, -Q \cdot 4a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - Y_C \cdot a + X_C \cdot 4a = 0.$

Полученные три уравнения, как видно, содержат четыре неизвестных $\overline{X}_C, \overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Y}_C$ и $\overline{Q}$, следовательно, этих уравнений недостаточно, чтобы решить эту задачу. Тогда расчленим эту конструкцию и рассмотрим дополнительно равновесие какой-нибудь ее части, например, горизонтальный брус АД. Реакцию шарнира В представляем ее составляющими $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$ (рис. 33, б).

5. Запишем уравнения равновесия для балки АД:
$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + X_B = 0,$
$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A - P_1 + Y_B - q = 0,$
$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0,\ -Y_A \cdot 3a + P_1 \cdot a - q \cdot a = 0.$

6. Решим полученную систему шести уравнений:
$Y_A = \frac{1}{3}(P_1 - Q) = -5H,\ Y_B = P_1 + q - Y_A = 50H,$
$Y_C = Q + P_1 + P_2 - Y_A = 62H,\ X_A = -X_C, X_B = -X_A,$
$X_C = \frac{1}{4}(2P_1 + 2P_2 + Y_C + Q4) = 56H,\ X_A = -56H, X_B = 56H.$

7. Для проверки правильности решения задачи составим для всей конструкции (рис. 33а) уравнение $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0.$

$-Y_C \cdot 4a + X_C \cdot 4a - Y_A \cdot 3a + P_1 \cdot 1 \cdot a + P_2 \cdot 2a - Q \cdot 1 \cdot a = 0.$

Сократив на «а» и подставив численные значения входящих величин, получим:
–278+278=0, 0=0. Таким образом, задача решена верно.

Задача 3.

Две однородные балки АВ и ВС одинакового веса $P_1 = P_2 = 4$ кН соединены шарниром В и удерживаются в горизонтальном положении при помощи шарнира А, опоры Д и нити, прикрепленной в точке С, переброшенной через неподвижный блок и несущей на конце груз Q. Участок КС находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q = 2 кН/м, а участок АЕ – под действием распределенной нагрузки, изменяющейся по линейному закону с максимальной интенсивностью q_{max} = 2 кН/м. Найти величину груза Q и реакции опор в точках А, В, Д, если АЕ=ВЕ=ВК=КС=3 м, ЕД=2 м, α=60° (рис. 34).

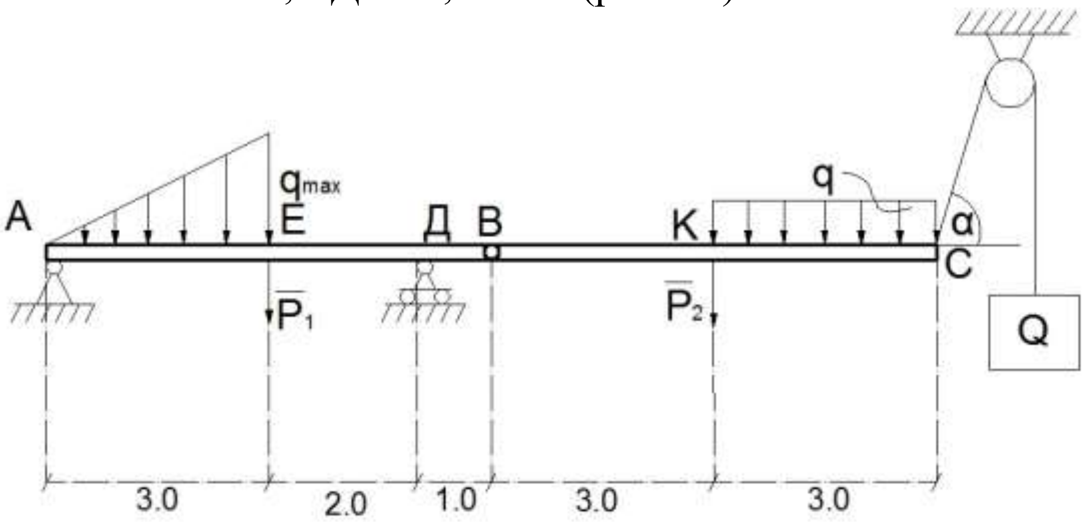


Рис. 34

Решение.

1. Для решения задачи систему балок делим на две части и рассматриваем равновесие каждой части в отдельности. Сначала рассмотрим равновесие балки ВС (рис. 35, а).

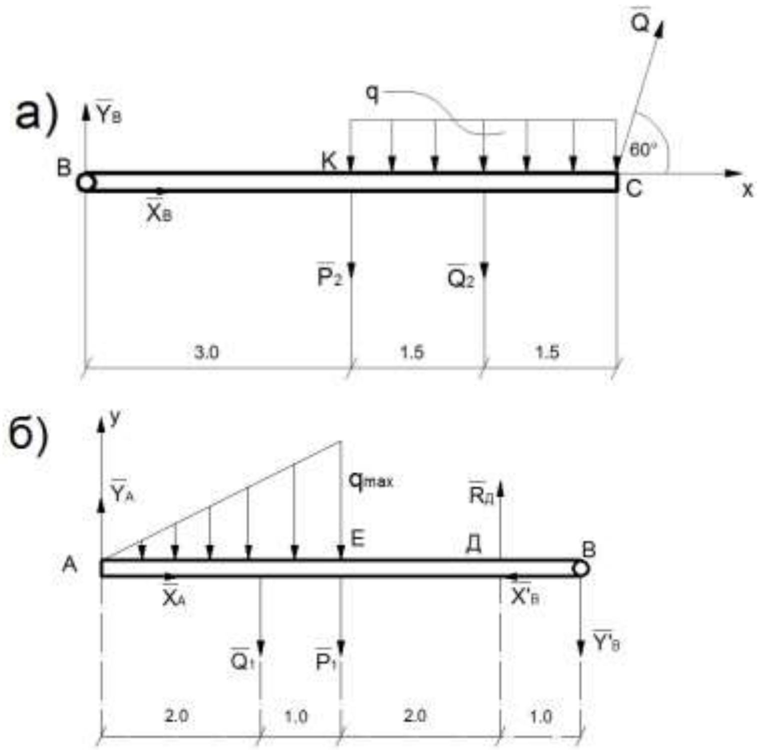


Рис. 35

2. На балку ВС действует ее сила тяжести $\overline{P}_2$, приложенная посередине балки. Равномерно распределенную нагрузку на участке КС заменим равнодействующей силой $\overline{Q}_2$, $Q_2 = q \cdot KC = 2\frac{кН}{м} \cdot 3м = 6кН$. Сила $\overline{Q}_2$ приложена в середине отрезка КС.

3. Освободим балку от связей и покажем на рисунке реакции этих связей. Реакцию шарнира В представим ее составляющими $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, направленными параллельно проведенным осям координат. Реакция нити $\overline{T}$ направлена по нити, приложена в точке С и равна весу груза Q, т. е. T=Q.

4. Запишем уравнения равновесия для этой балки:

$\sum m_B\left(\overline{F}_к\right) = 0,\ Q \cdot 6 \cdot \sin 60° - P_2 \cdot 3 - Q_2 \cdot 4{,}5 = 0;$

$\sum F_{кx} = 0\,, X_B + Q\cos 60° = 0;$

$\sum m_C\left(\overline{F}_к\right), P_2 \cdot 3 + Q_2 \cdot 1{,}5 - Y_B \cdot 6 = 0.$

5. Решая эти уравнения получим:

$Q = \frac{1}{2\sin 60°}(P_2 + 1{,}5 \cdot Q_2) = 7{,}5\,кН;\quad X_B = -Q\cos 60° = 3{,}75\,кН;$

$Y_B = 0{,}5 \cdot P_2 + 0{,}25 \cdot Q_2 = 3{,}5\,кН.$

6.Затем рассмотрим равновесие балки АВ(рис. 35 б). Распределенную нагрузку на участке АЕ балки заменим силой $\overline{Q}_1$, $Q_1 =$

$= \frac{1}{2} q_{max} AE = 9\ кН$. Модуль силы $\overline{Q}_1$ равен половине площади фигуры, которая изображает равномерно распределенную нагрузку на этом участке балки интенсивности q_{max}. Приложена сила $\overline{Q}_1$ к балке АВ на расстоянии $\frac{2}{3}AE$ от точки А. На балку АВ действуют силы $\overline{P}_1$ – ее вес, $\overline{R}_Д$ – реакция опоры Д, и же реакция шарнира В $\overline{X'}_B, \overline{Y'}_B$. По свойству внутренних сил составляющие $X'_B = X_B$, $Y'_B = Y_B$ и направлены противоположно $\overline{Y}_B$ и $\overline{X}_B$.

1. Запишем уравнения равновесия для этой балки (рис. 35 б):

$\sum F_{кx} = 0, X_A - X'_B = 0;$

$\sum m_Д\left(\overline{F}_к\right) = 0, P_1 \cdot 2 + Q_1 \cdot 3 - Y_A \cdot 5 - Y'_B \cdot 1 = 0;$

$\sum m_A\left(\overline{F}_к\right) = 0, -Q_1 \cdot 2 - P_1 \cdot 3 + R_Д \cdot 5 - Y'_B \cdot 6 = 0.$

2. Решим эту систему алгебраических уравнений.

$X_A = X'_B = -3{,}75кН,$

$Y_A = \frac{1}{5}(P_1 \cdot 2 + Q_1 \cdot 3 - Y'_B \cdot 1) = 6{,}3\ кН,$

$R_Д = \frac{1}{5}(Q_1 \cdot 2 + P_1 \cdot 3 + Y'_B \cdot 6) = 10{,}2кН.$

3. Для проверки полученного решения для всей конструкции составим уравнение $\sum m_В\left(\overline{F}_к\right) = 0$:

$$-Y_A \cdot 6 + Q_1 \cdot 4 + P_1 \cdot 3 - R_Д \cdot 1 - P_2 3 - Q_2 \cdot 4{,}5 + Q\cos 30° \cdot 6 = 0$$

$$-6{,}3 \cdot 6 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 10{,}2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 - 6 \cdot 4{,}5 + 7{,}5 \cdot 0{,}86 \cdot 6 = 0$$

$$-37{,}8 + 36 + 12 - 10{,}2 - 12 + 27 + 38{,}97 = 0,$$

$-75 + 74{,}9 \approx 0.$ Решение верно.

Задача 4.

На невесомую трехшарнирную арку в точке Е действует сила F = 10 кН, составляющая угол α = 60° с горизонтом. На части ДС арки приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м и пара сил с моментом М = 4 Н · м. Определить реакции шарниров А и В, если ДС = СЕ = 4 м, АД = 6 м (рис. 36).

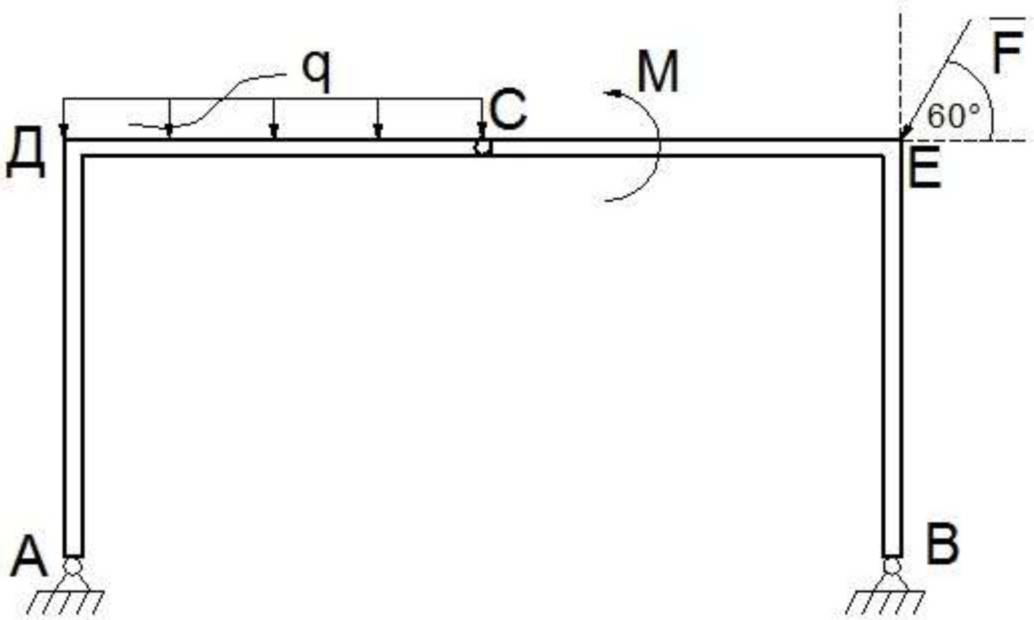


Рис. 36

Решение.

1. Рассмотрим равновесие всей арки в целом.

2. К арке приложены следующие активные силы: $\overline{F}$, приложенная в точке Е и пара сил с моментом М. Равномерную нагрузку заменяем равнодействующей силой $Q = q \cdot ДC = 8kH$, приложенной в середине отрезка ДС.

3. Освободим арку от внешних связей – неподвижных шарниров А и В. Заменим их действие силами реакций $\overline{X}_А, \overline{Y}_А, \overline{X}_B, \overline{Y}_B$ (рис. 37, а).

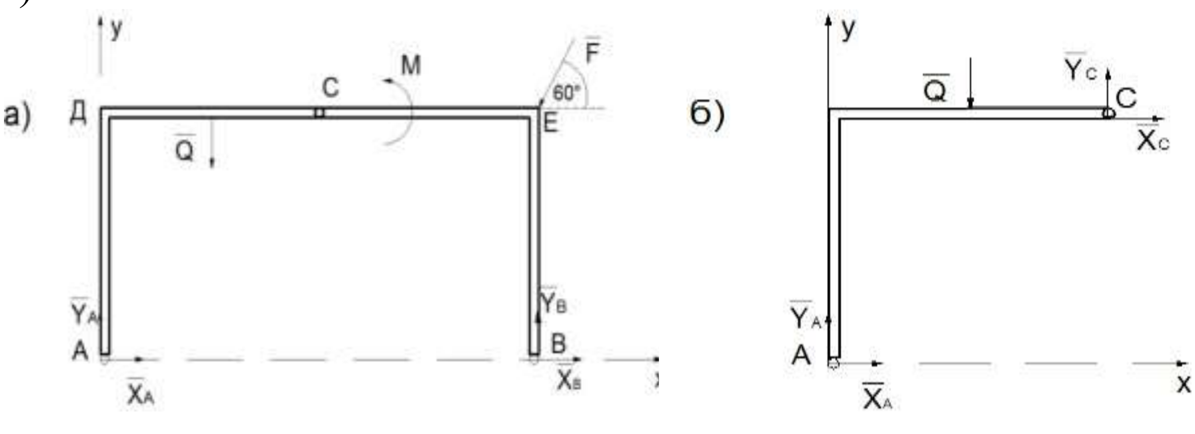


Рис. 37

4. Запишем уравнения равновесия для всей арки (рис. 37, а):

$\sum F_{kx} = 0$, $X_A + X_B - F\cos 60° = 0;$

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$

$-Q \cdot 2 + M + Y_B \cdot 8 + F\cos 60° \cdot 6 - F\cos 30° \cdot 8 = 0;$

$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0, -Y_A \cdot 8 + Q \cdot 6 + M + F\cos 60° \cdot 6 = 0.$

Полученные три уравнения, как видно, содержат четыре неизвестных $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_B, \overline{Y}_B$. Поэтому для решения задачи расчленим арку в точке С на две части, рассмотрим дополнительно равновесие любой ее части, например, левой части (рис. 37, б).

Замечание: при решении задач статики на равновесие системы тел не всегда надо составлять все уравнения равновесия. Если в условии задачи не требуется определение реакции какой-нибудь связи, то целесообразно составить такое уравнение, в которое эти неизвестные реакции не входили бы.

5. В данной задаче не требуется находить реакцию внутреннего шарнира С. Тогда для левой части арки АС составим, дополнительно к выше составленным, одно уравнение:

$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0,\ -Y_A \cdot 4 + X_A \cdot 6 + Q \cdot 2 = 0.$

6. Решим систему полученных алгебраических уравнений:

$Y_B = \frac{1}{8}(Q \cdot 2 - M - F\cos 60° \cdot 6 + F\cos 30° \cdot 8) = 6{,}41kH,$

$Y_A = \frac{1}{8}(Q \cdot 6 + M + F\cos 60° \cdot 6) = 10{,}25kH,$

$X_A = \frac{1}{6}(Y_A \cdot 4 - Q \cdot 2) = 4{,}16kH,$

$X_B = F\cos 60° - X_A = 0{,}84kH.$

7. Для проверки правильности решения задачи составим уравнение равновесия для всей арки (рис. 37а).

$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0,$$

$-Y_A \cdot 4 + X_A \cdot 6 + Q \cdot 2 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 6 - F\cos 30° \cdot 4 + M = 0.$

Подставляя численные значения входящих величин, получим $75{,}64 - 75{,}46 \approx 0$. Решение верно.

2.2.Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

Два стержня соединены в шарнире В. Определить момент в заделке А, если силы F_1 =60 Н, F_2 = 50 Н (рис. 38).

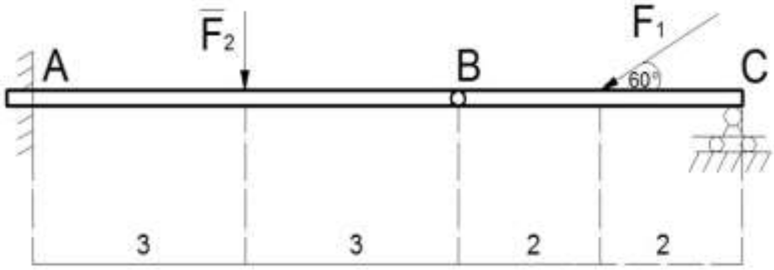


Рис. 38

Задача 2.

Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире B, если сила F=850Н, а CE=ДС=BE (рис. 39).

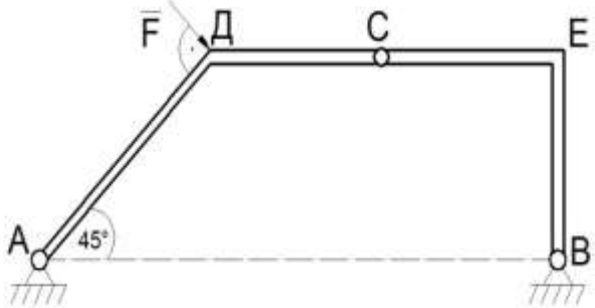


Рис. 39

Задача 3.

Стержень AB концом B свободно опирается на вертикальный стержень СД, один конец которого заделан в основание. В середине AB приложена вертикальная сила F=2кН. Найти давление стержня AB на стержень СД (рис. 40).

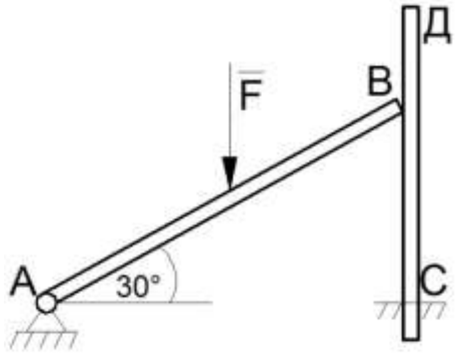


Рис. 40

Задача 4.

Пренебрегая весом конструкции, определить реакцию опоры A, если сила F=400Н, угол α=45° (рис. 41).

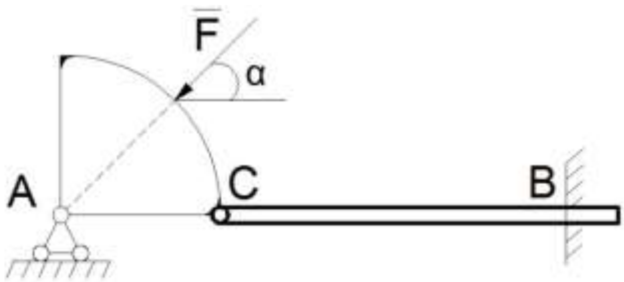


Рис. 41

Задача 5.

Определить длину BC, для того чтобы вертикальная составляющая реакции шарнира Д равнялась 6 кН, если интенсивность распределенной нагрузки q = 6 кН/м и размеры ДЕ=AE=CE=BC (рис. 42).

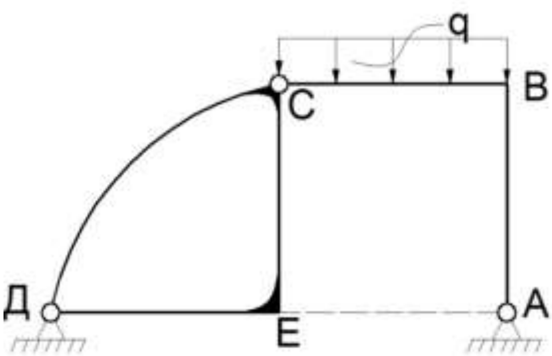


Рис. 42

Задача 6.

На систему балок действуют равномерно распределенная нагрузка интенсивности q, пара сил с моментом m и сосредоточенная сила $\overline{F}$. Определить опорные реакции, считая балки однородными телами, центры тяжести которых находятся в точках O_1 и O_2.

Схемы балок показаны на рис. 43, а необходимые для решения данные приведены в табл. 6.

Таблица 6

Номер задачи	AB	СД	AC	BC	α	β	q	m	F	P	P
	м				град.		кН/м	кН·м	кН		
1	6	4	2		30		2	15	10	5	4
2			6		60	60	1,5	10	20	15	15
3	3	4	2		45		1	4	5	4	6
4	4	1,5		5	60	45	3	20	10	30	20

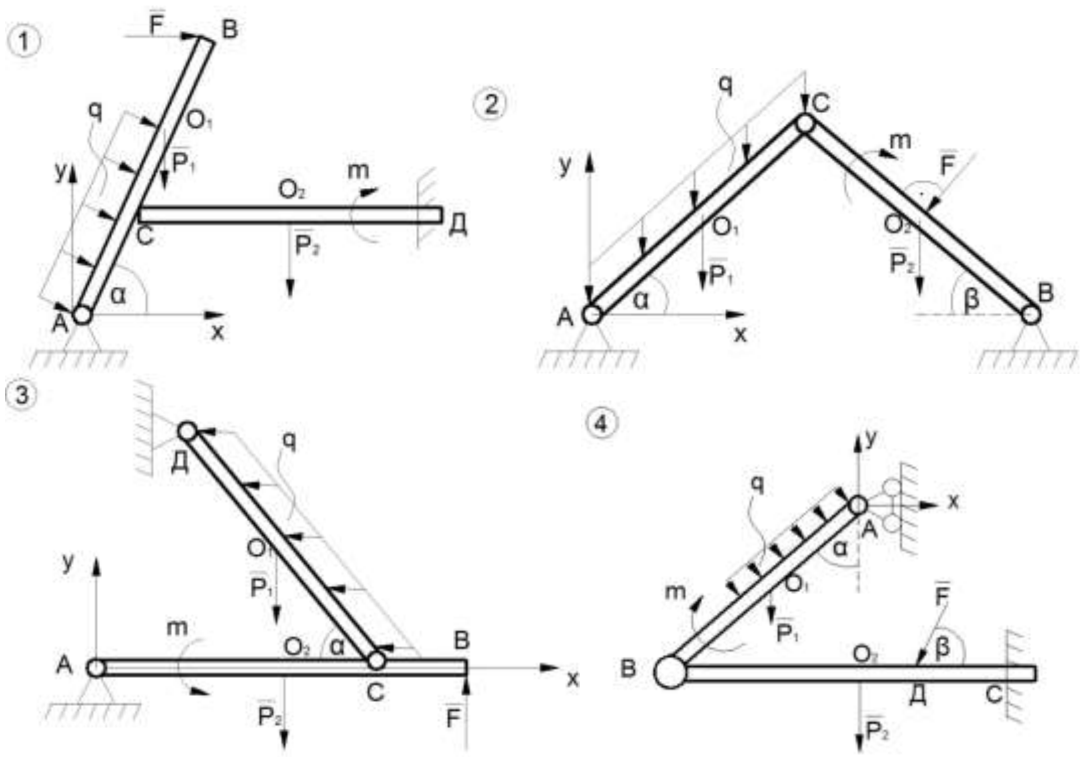


Рис. 43

2.3. Вопросы для самопроверки

1. Какие силы, действующие на систему тел, называют внешними, а какие внутренними?

2. Как осуществляется соединение тел в конструкцию?

3. Каковы свойства внутренних сил?

4. Какие методы (или способы) применяются при решении задач, когда рассматривается система тел, соединенных между собой?

5. Сколько уравнений равновесия составляется при рассмотрении равновесия системы тел, соединенных между собой?

6. Как осуществляется проверка полученного решения?

3. Произвольная пространственная система сил.

3.1. Равновесие тела под действием пространственной системы сил

Пространственной называется такая система сил, линии действия которых, расположены произвольным образом в пространстве.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы проекции всех сил на каждую из трех выбранных координатных осей и суммы моментов этих сил относительно тех же осей были равны нулю:

1. $\sum F_{kx} = 0$; 2. $\sum F_{ky} = 0$; 3. $\sum F_{kz} = 0$.
4. $\sum m_x(\bar{F}_k) = 0$; 5. $\sum m_y(\bar{F}_k) = 0$; 6. $\sum m_z(\bar{F}_k) = 0$.

Момент силы $\bar{F}$ относительно оси Oz равен величине момента проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

$$m_z\,(\bar{F}) = m_o\big(F_{xy}\big) = \pm F_{xy} \cdot h$$

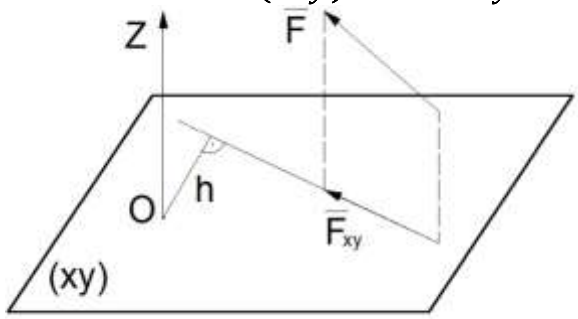


Рис. 44

Момент силы $\bar{F}$ будет иметь знак плюс, когда со стороны положительного направления оси, видим, что под действием этой проекции F_{xy} тело стремится вращаться против часовой стрелки и отрицательным, если по часовой стрелке.

Момент силы относительно оси равен нулю:

1) F_{xy} = *0*, то есть сила $\overline{F}$ параллельна оси;
2) *h*= *0*, то есть сила $\overline{F}$ пересекает ось.

Объединяя эти два случая, можно сказать, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Итак, чтобы вычислить момент силы относительно оси *z* нужно:

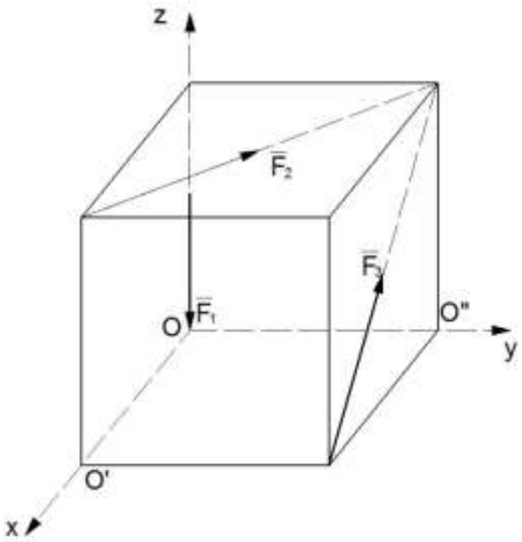
1) провести плоскость О*xy* перпендикулярную оси *z* в любом месте;

2) спроецировать силу $\overline{F}$ на эту плоскость и найти величину проекции этой силы F_{xy};

3) опустить из точки пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на линию действия $\bar{F}_{xy}$ и найти его длину h ;

4) вычислить произведение $F_{xy} \cdot h$ и присвоить знак.

Задача 1.



К кубу с ребром *a*=1,5м приложены силы F_1= 20Н, F_2 =50Н, F_3=40Н. Вычислить моменты сил F_1, F_2, F_3 относительно осей координат x, y,z (рис.45).

Решение. 1. Выберем начало координат в точке О. Линия действия силы $\overline{F_1}$, проходит через начало координат, пересекая все три оси. Поэтому моменты этой силы относительно всех осей равны нулю.

$$m_x(\overline{F_1}) = m_y(\overline{F_1}) = m_z(\overline{F_1}) = 0.$$

Рис. 45

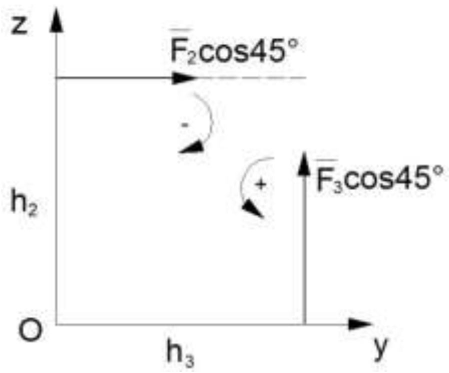
2. Для определения моментов сил $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$ относительно оси x нужно (рис.46):

- силы спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси x, то есть на плоскость Oyz;

- вычислить величины этих проекций $F_{2yz} = F_2 cos45$, $F_{3yz} = F_3 cos45$;

- определить плечи сил h_2 и h_3 этих сил относительно точки O;

- вычислить моменты этих сил относительно точки O.

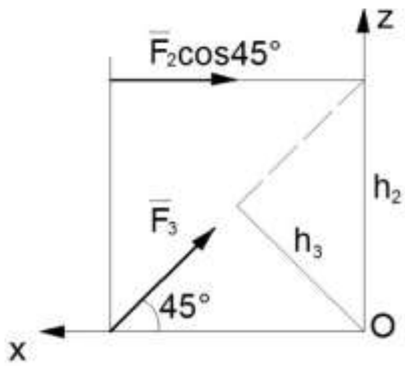


$m_x(\overline{F_2})$=$-F_2cos45° \cdot h_2$= $F_2cos45°a$ ==
$-50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}5 = -53{,}03$Нм
$m_x(\overline{F_3})$ =$F_3cos45° \cdot h_3$ = $F_3cos45° \cdot a =$
$= 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}5 = 42{,}4$ Нм.

Рис. 46

3. Для определения моментов сил $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$ относительно оси y нужно (рис .47):

- силы спроецировать на плоскость Oxz, перпендикулярную оси y;
- вычислить моменты этих проекций относительно точки O.

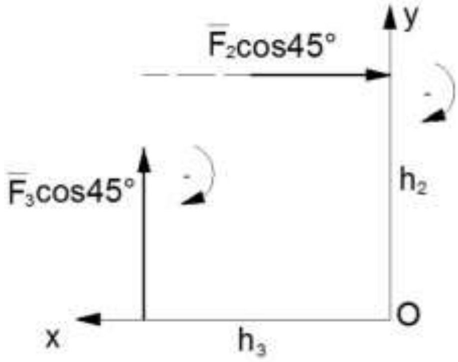


$m_y(\overline{F_2})$ =$-F_2cos45 \cdot a = -50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}5 =$
$= -53{,}03$Нм

$m_y(\overline{F_3})$=$-F_3acos45 \cdot a = -40 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ==
$-$ 42,4 Нм

Рис. 47

4. Для определения моментов сил $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$ относительно оси z нужно (рис.48):
- силы спроецировать на плоскость Oxy, перпендикулярную оси z;
- вычислить моменты этих проекций относительно точки O.



$m_z(\overline{F_2})$=$F_2cos45 \cdot a = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}5 =$
=53,03Нм;
$m_z(\overline{F_3})$=$F_3cos45 \cdot a = 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}5 =$
= 42,4 Нм.

Рис. 48

Для определения моментов сил относительно координатных осей в некоторых случаях удобно применять теорему Вариньона о моменте равнодействующей: если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно той же оси.

Задача 2.

Определить момент силы Q=10 кН относительно координатных осей x, у, z, применяя теорему Вариньона, если OA= 2 м, OB=1,5м, h= 0, 5м, $\alpha = 30°$ (рис.49).

Решение. Разложим силу $\bar{Q}$ на составляющие $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$, параллельные осям x, и z, где по модулю Q_1=$Qcos30°$,$Q_2 = Qsin30°$.

По теореме Вариньона момент силы $\bar{Q}$ равен алгебраической сумме моментов сил $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$:

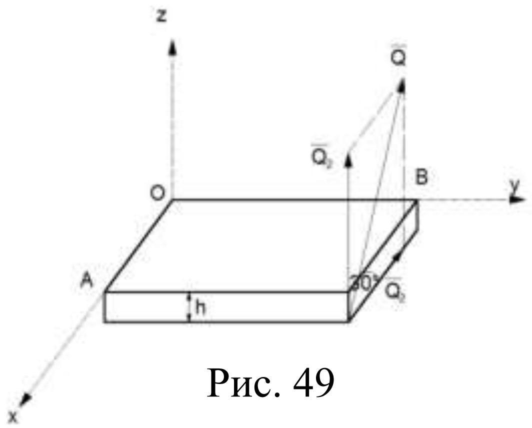


Рис. 49

$m_x(\bar{Q})$ = $m_x(\bar{Q}_1)$ + $m_x(\bar{Q}_2)$.

Так как сила $\bar{Q}_1$ араллельна оси x, то ее момент относительно этой оси будет равен нулю, т. е. $m_x(\bar{Q}_1) = 0$, и момент силы $\bar{Q}$ относительно оси Ox равен моменту силы $\bar{Q}_2$ относительно этой же оси $m_x(\bar{Q})$ = $m_x(\bar{Q}_2)$ = $Qsin30°OB$=7,5кН.

Аналогичным образом определим моменты силы $\bar{Q}$ относительно координатных осей у, z:

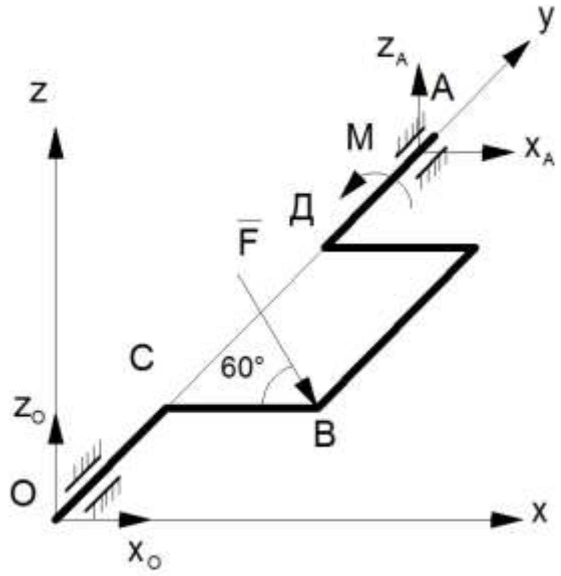
$m_y(\bar{Q})$ = $m_y(\bar{Q}_1\ )$ + $m_y(\bar{Q}_2)$= Q_1h –Q_2OA=

$= Qcos30°\ h – Q\ sin\ 30°OA$ =−5,67 кН,

$m_z(\bar{Q})$ = $m_z(\bar{Q}_1\ )$ + $m_z(\bar{Q}_2)$ = Q_1OB $= Qcos30°\ OB$=12,99 кН.

Задача 3.

К коленчатому валу ОА в точке В под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту приложена сила F= 10 Н и пара сил, момент которой равен М. Определить реакции цилиндрических шарниров О и А и модуль момента, если ОС = 1 м, CD = 1,5 м, AD = 1 м, ВС = 0,9 м, а сила Fлежит в плоскости параллельной плоскости Оху (рис. 50).



Решение.

1. На схеме закрепления коленчатого вала ОА покажем заданную силу $\bar{F}$ и пару сил, момент которой равен М.

2.Начало координат выберем в точке О, ось у направим по оси вала, оси х и z как показано (рис. 50).

3. Освободим коленчатый вал ОА от связей, а их действие заменяем реакциями.

4. Реакция цилиндрического подшипника О приложена в центре подшипника, лежит в плоскости перпендикулярной оси подшипника и изображается двумя силами $\bar{X}_o$ и $\bar{Z}_o$.

5. Аналогичным образом изображаем реакции подшипника А силами $\bar{X}_A$ и $\bar{Z}_A$.

6. Определим проекции сил на координатные оси и моменты сил относительно тех же осей (табл.6).

Таблица 6

	$\bar{F}$	М	$\bar{X}_o$	$\bar{Z}_o$	$\bar{X}_A$	$\bar{Z}_A$
F_x	Fcos60	-	X_o	0	X_A	0
F_y	0	-	0	0	0	0
F_z	−Fcos30	-	0	Zo	0	Z_A
m_x	−Fcos30·OC	0	0	0	0	Z_A · AO
m_y	Fcos30·BC	−M	0	0	0	0
m_z	−Fcos60·OC	0	0	0	$-X_A$· AO	0

7. Запишем уравнения равновесия.

1. $\sum F_{kx} = 0$,   Fcos60+ X_o + X_A=0;

2. $\sum F_{ky} = 0$, $0 \equiv 0$;

3. $\sum F_{kz} = 0$, $-$ Fcos30$+$ Z_o + Z_A=0;
4. $\sum m_x(\bar{F}_k) = 0$, $-$ Fcos30$\cdot$ $OC +$ $Z_A \cdot AO$=0;
5. $\sum m_y(\bar{F}_k) = 0$, Fcos30$\cdot$ $BC -$ M=0;
6. $\sum m_z(\bar{F}_k) = 0$, $-$ Fcos60$\cdot$ $OC -$ $X_A \cdot AO$=0.

Все силы, действующие на вал, лежат в плоскостях перпендикулярных оси y. Тогда проекция каждой силы на эту ось равна нулю и уравнение равновесия выполняется тождественно.

$\sum F_{ky} = 0, \; 0 \equiv 0.$

Пара сил, момент которой равен M, лежит в плоскости перпендикулярной оси y и может повернуть вал только вокруг этой оси. Поэтому момент этой пары входит только в уравнение моментов $\sum m_y(\bar{F}_k) = 0$ со своим знаком “минус”.

Линии действия реакции связей $\bar{X}_o$, $\bar{Z}_o$, $\bar{X}_A, \bar{Z}_A$ проходят через ось y, поэтому моменты этих сил относительно этой оси равны нулю. Тогда уравнение (5) содержит только момент силы $\bar{F}$ и момент пары сил M.

8. Из уравнений 1-6 вычислим реакции связей X_o, Z_o , X_A , Z_A и момент пары сил M.

Из уравнения (6) X_A: $-10\cdot0{,}5\cdot 1 -$ $X_A \cdot 3{,}5$=0 , X_A =$-$1, 43 Н.

Из уравнения (1) X_o: 10$\cdot$0,5$+$ X_o+ 2,47=0, X_o= $-$3,53 Н.

Из уравнения (4) Z_A: $-10\cdot0{,}866\cdot 1 +$ $Z_A \cdot 3{,}5$=0, Z_A = 2, 47 Н.

Из уравнения (3) Z_o: $-10\cdot 0{,}866 +$ Z_o+ 2, 47 =0, Z_o = 6,19 Н.

Из уравнения (5) вычислим момент пары сил M:

$$10\cdot 0{,}866 \cdot 0{,}9 - M=0 , \; M=7{,}79 \text{ Нм}.$$

9. Выполним проверку расчетов.

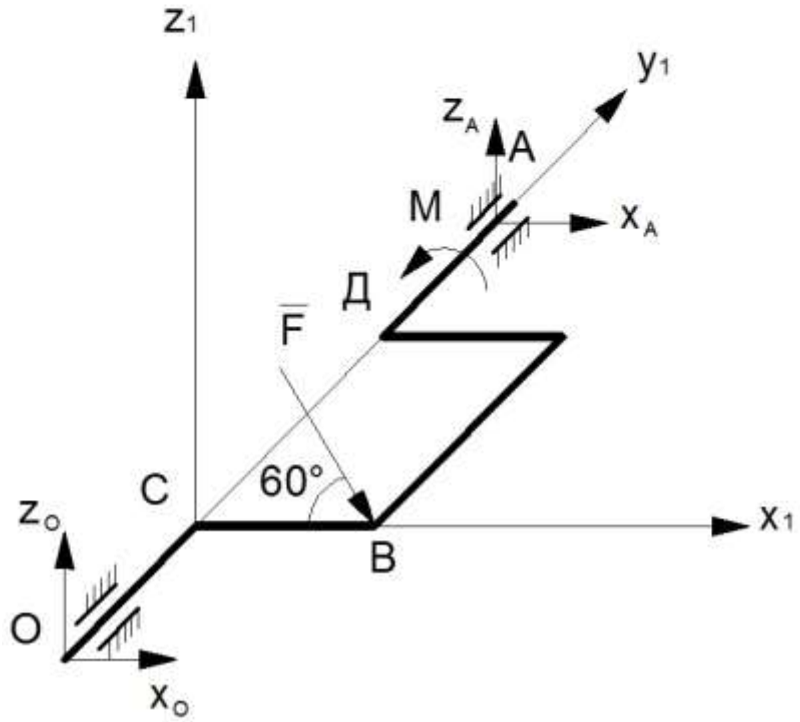


Рис. 51

Для этого начало координат переместим в точку С и составим уравнение моментов относительно новой оси x_1 (рис.51).

$\sum m_{x_1}(\bar{F}_k) = 0 - Z_o \cdot \text{OC} + Z_A \cdot AC = 0,$ подставим в это уравнение вычисленные значения реакций $Z_o = 6{,}19$ Н и $Z_A = 2{,}47$ Н.

$-6{,}19 \cdot 1 + 2{,}47 \cdot 2{,}5 = 0$, $-6{,}19+6{,}17=0$, погрешность расчетов составляет 0,02, что вполне допустимо.

Для проверки правильности расчета реакций X_oи X_A составим уравнение моментов относительно новой оси z_1.

$\sum m_{z_1}(\bar{F}_k) = 0$, $X_o \cdot \text{OC} - X_A \cdot AC = 0,$ $-3{,}53 \cdot 1 + 1{,}43 \cdot 2{,}5 = 0$

$-3{,}53 + 3{,}57 = 0$, погрешность расчетов составляет 0,04, что является также вполне допустимым результатом.

Ответ: $X_o = -3{,}53$ Н, $X_A = -1{,}43$ Н, $Z_o = 6{,}19$ Н, $Z_A = 2{,}47$ Н, М=7,79 Нм.

Задача 4.

Однородная квадратная пластина *АВСД* (рис. 52) весом $\overline{G}$ удерживается в горизонтальном положении при помощи сферического шарнира *А*, цилиндрического шарнира *В* и нити *СЕ*, образующей угол α с вертикалью. Определить реакции шарниров и натяжение нити. Дано: $AB = AД = a$, $\alpha = 60^{\circ}$, $G = 2$ кН.

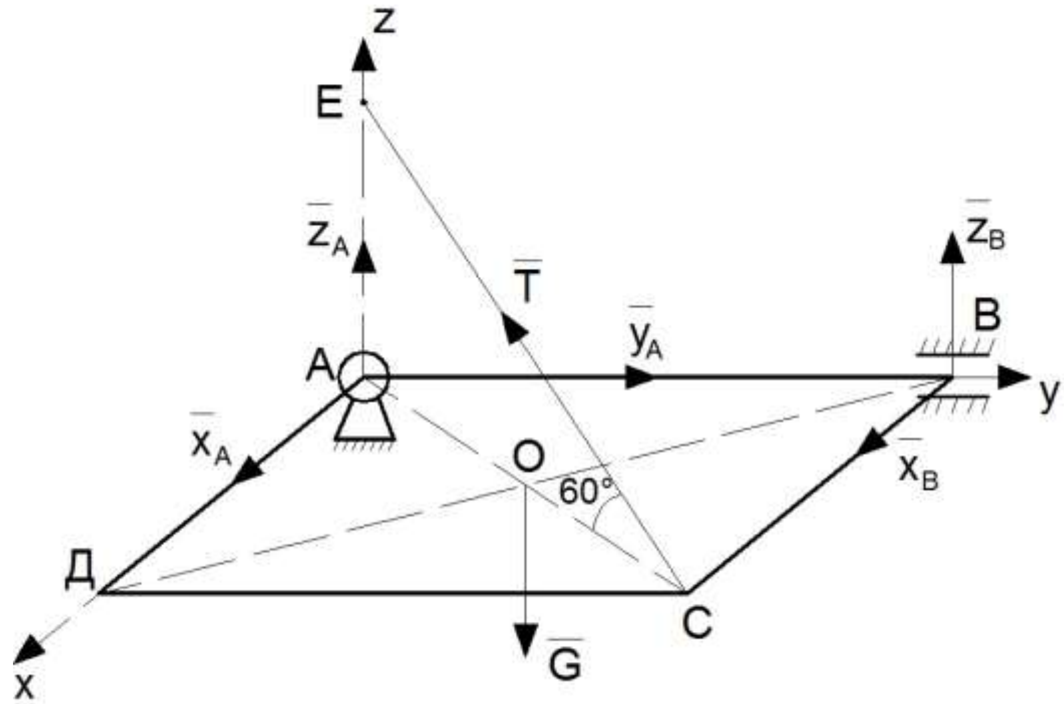


Рис. 52

Решение.

1. На схеме закрепления пластины покажем заданную силу $\overline{G}$, ее вес.

2. Начало системы координат поместим в точку A и оси координат изобразим как показано на схеме закрепления пластины (рис.52).

3. Освободим пластину от связей, а их действие заменим реакциями связей.

4. Пластина удерживается в равновесии нитью *CE,* реакция нити $\overline{T}$ направлена вдоль нити от пластины к точке закрепления Е.

5. Опора А представляет собой сферический шарнир. Реакция сферического шарнира приложена в центре шарнира А и изображается тремя силами $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$.

6. Опора В представляет собой цилиндрический шарнир. Реакция цилиндрического шарнира В, лежит в плоскости перпендикулярной его оси и изображается двумя силами $\overline{X}_B, \overline{Z}_B$.

7. На пластину действует произвольная пространственная система сил. Определим проекции сил на координатные оси и моменты сил относительно тех же осей (табл. 7).

Таблица 7

	$\bar{G}$	$\bar{T}$	$\bar{X}_A$	$\bar{Y}_A$	$\bar{Z}_A$	$\bar{X}_В$	$\bar{Z}_В$
F_x	0	$-Tcos60 \cdot cos45$	$X_А$	0	0	$X_В$	0
F_y	0	$-Tcos60 \cdot cos45$	0	$Y_А$	0	0	0
F_z	$-G$	$Tcos30$	0	0	ZA	0	$Z_В$
m_x	$-G\dfrac{a}{2}$	$Tcos30 \cdot a$	0	0	0	0	$Z_В a$
m_y	$G\dfrac{a}{2}$	$-Tcos30 \cdot a$	0	0	0	0	0
m_z	0	0	0	0	0	$-X_В \cdot a$	0

Составим уравнения равновесия сил, действующих на пластину:

1. $\sum F_{kx} = 0$ $\quad - Tcos60° \cdot cos45° + X_А + X_В = 0$;
2. $\sum F_{ky} = 0$ $\quad - Tcos60° \cdot cos45° + Y_А = 0$;
3. $\sum F_{kz} = 0$ $\quad - G + Tcos30° + ZA + Z_В = 0$;
4. $\sum m_x(\bar{F}_k) = 0$ $\quad - Ga + Tcos30° \cdot 2a - Z_В \cdot 2a = 0$;
5. $\sum m_y(\bar{F}_k) = 0$ $\quad G \cdot a - Tcos30° \cdot 2a = 0$;
6. $\sum m_z(\bar{F}_k) = 0$ $\quad -X_В \cdot a = 0$.

8. Из уравнений 1-6 вычислим реакции связей.

Из уравнения (5) вычислим реакцию нити *T:*

$T = \frac{G}{2\cos 30} = 1{,}15$ кН.

Из уравнения (6) $X_В = 0$.

Из уравнения (4) $Z_B = 0$ кН.

Из уравнения (2) $Y_А = 1{,}41$ кН.

Из уравнения (1) $X_А = 1{,}41$ кН.

Из уравнения (3) $Z_А = 1$ кН.

9. Для проверки вычислений поместим начало координат в С и составим уравнения моментов относительно новых осей x_1, y_1, z_1.

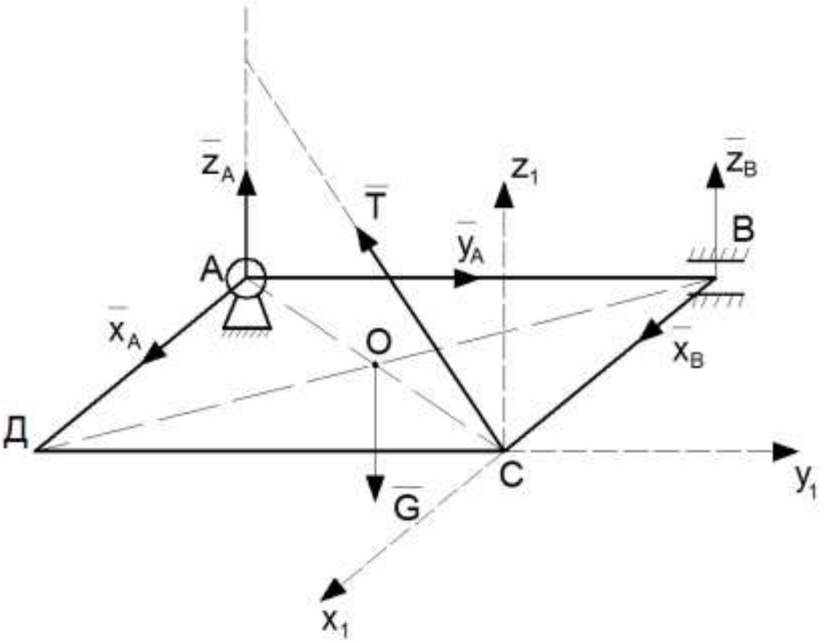


Рис. 53

1.$\sum m_{x_1}(\bar{F}_k) = 0$ $\quad G \cdot \frac{a}{2} - Z_A \cdot a = 0,\ Z_A = 1$кН.

2. $\sum m_{y_1}(\bar{F}_k) = 0$ $\quad -G \cdot \frac{a}{2} + Z_A \cdot a + Z_{\text{B}} \cdot a = 0, Z_{\text{B}} = 0.$

3. $\sum m_{z_1}(\bar{F}_k) = 0$ $\quad X_A \cdot a + Y_A \cdot a = 0, X_A = Y_A$.

Вычисленные значения реакций связей Z_A, Z_{B} , X_A совпадают с ранее полученными величинами. Следовательно, задача решена правильно.

Ответ: X_{A}=1,41 кН, X_{B}= 0, Z_{A} = 1 кН, Z_B= 0 кН, $T = 1{,}15$ кН.

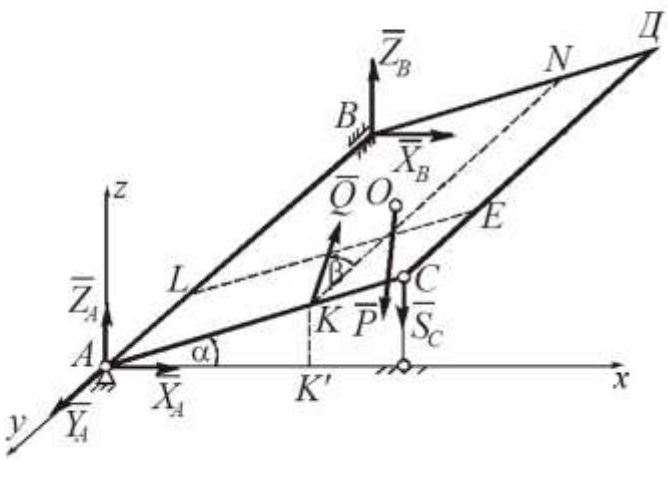


Рис. 54

Задача 5.

Прямоугольная плита весом $\bar{P}$ закреплена при помощи шарового шарнира A и цилиндрического подшипника B, стержневая опора C удерживает плиту от опрокидывания. На плиту действует сила $\bar{Q}$, расположенная в плоскости параллельной координатной плоскости Вyz и направленная под углом β к плите. Определить реакции опор A, B, C.

Дано: P = 10 кН; Q = 20 кН; AB = 4 м; AC = 3 м; AK = 1,5 м; CE = 1 м; α = 60°, β = 30°. Определить реакции опор (рис. 54).

1. Рассмотрим равновесие плиты.

2. Начало системы координат xyz поместим в точку А.

3. На схеме закрепления плиты покажем заданные силы $\bar{P}$, $\bar{Q}$. Так как плита однородная, то ее вес приложен в геометрическом центре в точке О, а направление силы $\bar{Q}$ задано в условии задачи.

4. Освобождаем плиту от связей, а их действие заменяем реакциями. Реакция шарового шарнира A приложена в центре шарнира, ее направление зависит от действующих на плиту сил и заранее неизвестно. Поэтому изобразим реакцию шарового шарнира A ее составляющими $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$, направленными по осям координат.

5. Реакция цилиндрического подшипника B приложена в центре подшипника, лежит в плоскости перпендикулярной оси подшипника. Направление этой реакции зависит от действующих на плиту сил и так же заранее неизвестно. Поэтому покажем ее двумя силами $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, направленными по соответствующим осям координат.

6. Реакцию стержневой опоры $\bar{S}_C$ направляем вдоль стержня от плиты, предполагая при этом, что стержень растянут.

7. Плита находится в равновесии под действием заданных сил $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и реакций связей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, $\bar{S}_C$, которые нужно определить.

7.Система вышеуказанных сил является пространственной. Составим уравнения равновесия.

1. $\sum F_{kx} = 0$; $X_A + X_B = 0$;
2. $\sum F_{ky} = 0$; $Y_A + Q\cos\beta = 0$;
3. $\sum F_{kz} = 0$; $-S_c + Z_A + Z_B - P + Q\sin\beta = 0$;
4. $\sum m_x(\bar{F}_k) = 0$; $Z_B \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} + Q\cos\beta \cdot AK \cdot \sin\alpha = 0$
5. $\sum m_y(\bar{F}_k) = 0$; $-S_c \cdot AC \cdot \cos\alpha + Q \cdot \sin\beta \cdot AK \cdot \cos\alpha -$
$-P \cdot AK \cdot \cos\alpha = 0$
6. $\sum m_z(\bar{F}_k) = 0$; $X_B \cdot AB + Q \cdot \cos\beta \cdot AK \cdot \cos\alpha = 0$.

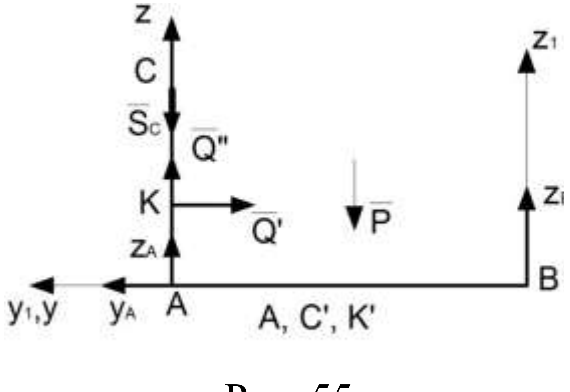


Рис. 55

Замечание. Для определения проекций сил на координатные оси и моментов сил относительно оси нужно спроецировать все силы на плоскость, перпендикулярную этой оси. Например, силы, действующие на плиту, спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси x (рис. 55). Из рисунка легко определяются проекции сил на оси y и z. А моменты проекций этих сил определяем относительно точки пересечения оси x с плоскостью Ayz, т.е. точки A. Так момент силы $\bar{Z}_B$относительно точки A равен $m_x(Z_B) = m_A(Z_B) = Z_B \cdot AB$, где AB – плечо силы $\bar{Z}_B$.

Момент силы $\bar{Q}$ относительно точки А можно определить по теореме Вариньона. Для этого силу $\bar{Q}$ разложим в точке ее приложения на составляющие: горизонтальную $Q' = Q\cos\beta$ и вертикальную

$Q'' = Q\sin\beta$. Момент силы $\bar{Q}$ относительно точки A будет равен алгебраической сумме моментов сил Q' и Q'' относительно той же точки $m_x(\bar{Q}) = m_A(Q') + m_A(Q'') = -Q' \cdot KK' = Q\cos\beta \cdot AK\sin\alpha$, момент силы Q'' равен нулю $m_A(Q'')=0$, так как линия действия этой силы проходит через центр моментов A.

Из уравнения (5), сократив его на $cos\alpha$, определим S_c :

$-S_c \cdot 3 + Q \cdot sin60 \cdot 1{,}5 - P \cdot 1{,}5 = 0, \quad S_c = 0,$ т.е. при заданной нагрузке усилие в стержне равно нулю и он установлен для придания жесткости данной конструкции.

Из уравнения (4) определим Z_B =10,6 кН, из уравнения (3)

$Z_A = -10{,}6$ кН, из уравнения (6) $X_B = 3{,}25$ кН, из уравнения (1)

$X_A = -3{,}25$ кН, из (2) $Y_A = 17{,}32$ кН.

Проверка: Для проверки решения поместим начало новой системы координат $x_1y_1z_1$ в точку В и составим уравнение моментов относительно оси x_1.

Для составления этого уравнения воспользуемся рекомендацией сделанной выше. Спроецируем все силы на плоскость перпендикулярную оси x_1 и составим уравнение моментов относительно точки пересечения оси x_1с плоскостью Вy_1z_1, т.е. относительно точки B.

$\sum m_{x1}(\bar{F}_k) = 0$ (рис.55)

$$-Z_A AB + S_c AB - Qcos\beta \cdot AKsin\alpha - Qsin\beta \cdot AB + P\frac{AB}{2} = 0;$$

В уравнение подставим все известные числовые значения:

$$-Z_A \cdot 4 + S_c \cdot 4 - Qcos30° \cdot 1{,}5sin60° - Qsin30° \cdot 4 + P \cdot 2 = 0;$$

Отсюда $Z_A = -10{,}6$ кН. Это значение реакции Z_A совпадает с рассчитанным из уравнения (3).

Ответ: $X_A = -3{,}25$ кН, $X_B = 3{,}25$ кН, $Z_A = -10{,}6$ кН, Z_B =10,6 кН,

Y_A = 17,32 кН, $S_c = 0$.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

На куб, ребро которого равно a = 0,9 м, действуют три силы F_1= F_2 =F_3 = 8 Н. Определить сумму моментов этих сил относительно координатных осей x,y,z (рис. 56).

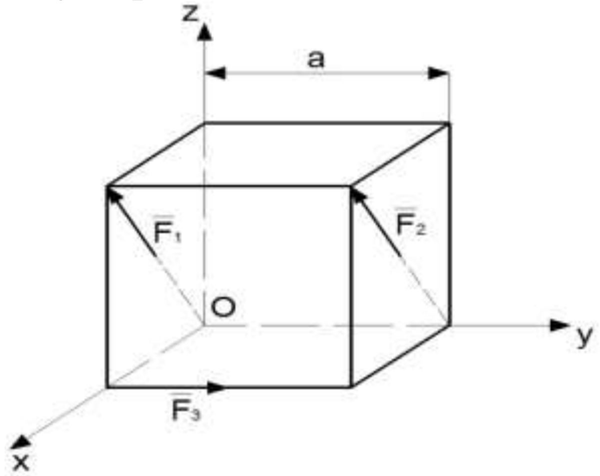


Рис 56

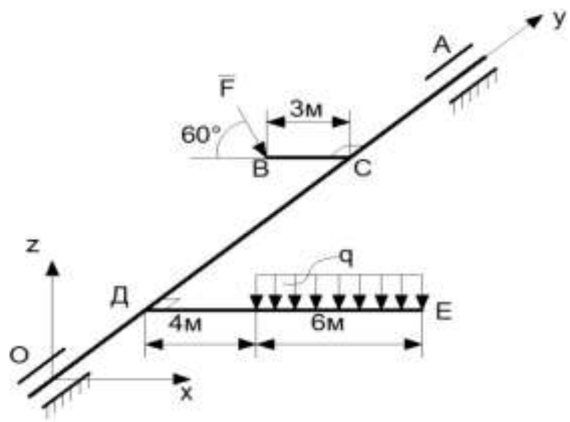


Рис 57

Задача 2.

К валу OA под прямым углом прикреплены стержни BC и DE. К стержню DE приложена распределенная нагрузка q = 0,5 Н/ м. Определить модуль силы $\bar{F}$, уравновешивающей нагрузку q, если сила $\bar{F}$ расположена в плоскости параллельной плоскости Oxy (рис. 57).

Ответ: 8,08 Н.

Задача 3.

Однородная квадратная плита OABC весом G = 30 Н удерживается в горизонтально положении шаровым шарниром O, цилиндрическим шарниром A и тросом BD. Определить натяжение троса, если, a = 2 м, и угол $\alpha = 60°$ (рис. 58). Ответ: 30 Н.

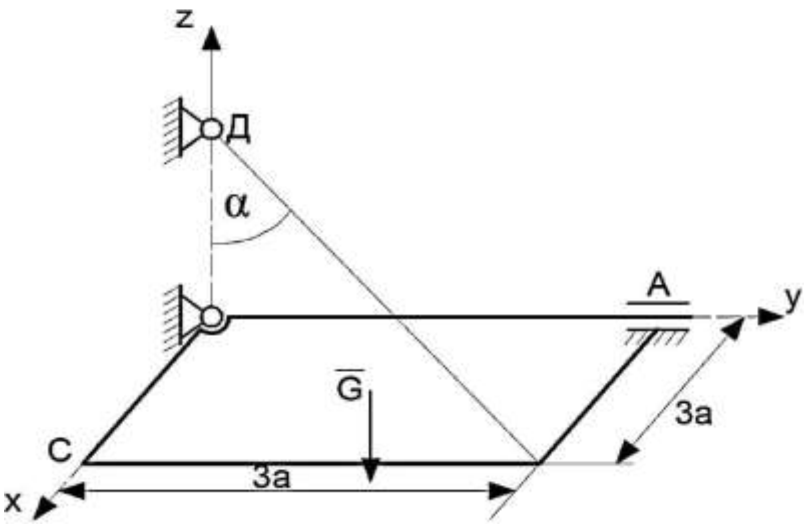
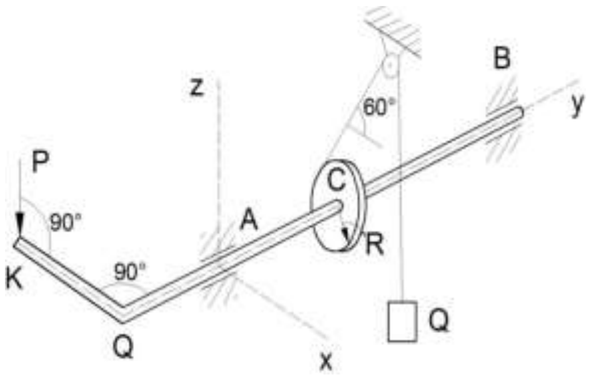


Рис. 58

Задача 4.

С помощью ворота, изображенного на рисунке (рис. 59), удерживается груз Q = 1 кН. Радиус барабана R=1 см. Длина рукоятки KD=40см, AD =30см, AC = 40 см, BC = 60 см. Веревка сходит с барабана по касательной, наклоненной к горизонту под углом 60°. Определить давление P на рукоятку и реакции опор A и B при том положении ворота, когда рукоятка KD горизонтальна.

Ответ: P =125 Н, X_A = –300 Н, Z_A = –357 Н, X_B= –200 Н, Z_B = –384 Н.



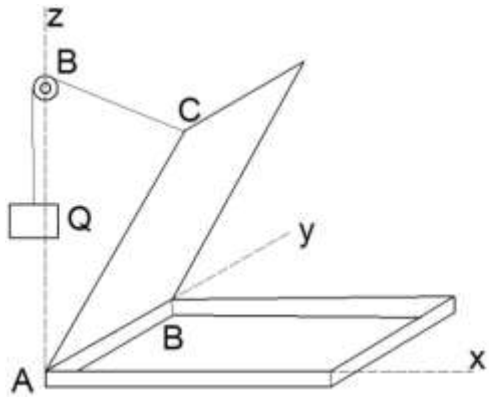


Рис. 59

Рис. 60

Задача 5.

Однородная прямоугольная крышка веса P =400 Н удерживается приоткрытой на 60° противовесом Q . Определить, пренебрегая трением на блоке D, вес Q и реакции шарниров A и B, если блок D укреплен на одной вертикали с AD и AD=AC (рис.60).

Ответ: Q =104 Н, X_A =100 Н, Z_A = 173 Н, X_B= 0, Z_B = 200 Н.

Задача 6.

Полка вагона, которая может вращаться вокруг оси AB, удерживается в горизонтальном положении стержнем ED, прикрепленным при помощи шарнира E к вертикальной стене BAE. Вес полки и лежащего на ней груза P =800 Н и приложен в центре полки. Причем AB =150 см, AD = 60 см, AK = BH = 25 см. Длина стержня ED =75 см. Определить усилие S в стержне ED , пренебрегая его весом, и реакции петель K и H (рис. 61).

Ответ: S = 666,7Н, X_K = –666,7 Н, Z_K = –100 Н, X_H=133,3 Н, Z_H = 500 Н.

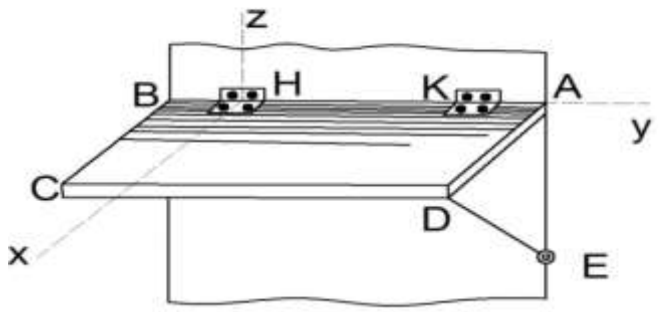


Рис. 61

3.3. Вопросы для самопроверки

1. Сколько уравнений равновесия составляется для пространственной системы сил?

2. Запишите уравнения равновесия для пространственной системы сил.

3. Чему равен момент силы относительно оси?

4. Когда момент сила относительно оси равен нулю?

5. Как изображается реакции подшипника и подпятника?

4. ТРЕНИЕ

Трением называется сила сопротивления, возникающая при перемещении одного тела по поверхности другого. По кинематическим признакам различают трение первого рода – это трение скольжения, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, и трение второго рода – трение качения, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

В теоретической механике рассматривается обычно только "сухое трение" между шероховатыми поверхностями.

4.1. Трение скольжения

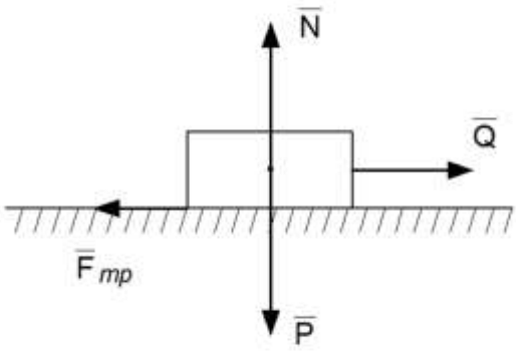


Рис. 62

Сопротивление, возникающее при скольжении соприкасающихся шероховатых тел, называют трением скольжения (рис. 62).

Сила трения скольжения лежит в плоскости, касательной к обеим поверхностям, и направлена в сторону противоположную сдвигающей силе $\bar{Q}$. Простой опыт показывает, что если постепенно увеличивать силу $\bar{Q}$ от нуля, то тело будет оставаться неподвижным до некоторого ее значения. После чего тело придет в движение. Это означает, что сила трения скольжения, которая уравновешивает силу $\bar{Q}$, изменяется при равновесии от нуля до некоторого максимального значения, то есть

$$0 \le F_{mp} \le F_{max}.$$

Знак равенства отвечает предельному случаю равновесия тела. Сила трения, возникающая при покое тела, называется силой трения в покое или силой статического трения.

Кулон опытным путем установил законы, которым подчиняется трение скольжение:

1. Максимальная величина статистического трения прямо пропорциональна величине нормального давления или нормальной реакции, то есть

$$F_{max} = f_0 \cdot N,$$

где f_0 – статический коэффициент трения, который определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность, смазка и др.).

2. Максимальная величина статической силы трения не зависит от величины площади соприкасающихся поверхностей.

При движении тела сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную относительной скорости. При этом

$$F_{m\text{р}} = f \cdot N,$$

где f – динамический коэффициент трения, который несколько меньше статического.

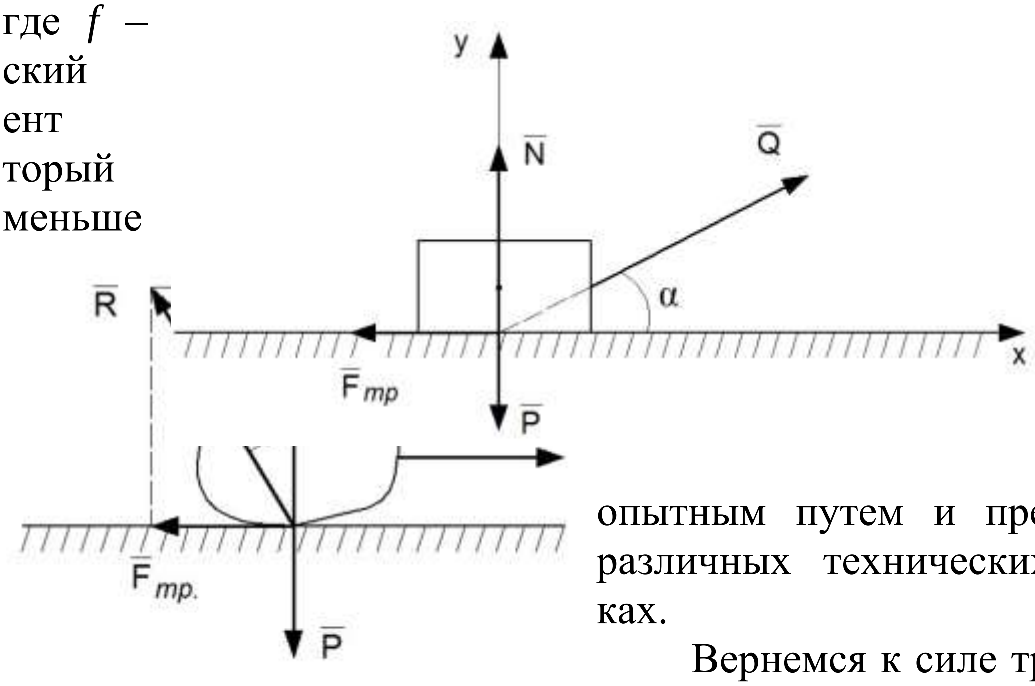


Рис. 63

Коэффициенты трения определяют опытным путем и представлены в различных технических справочниках.

Вернемся к силе трения в покое и установим направление реакции шероховатой поверхности. Полная реакция $\overline{R}$ такой поверхности при наличии трения определяется по величине и направлению диагональю прямоугольника, построенного на нормальной реакции и силе трения:

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{тр}.$$

Полная реакция $\overline{R}$ образует с нормалью к поверхности угол φ (рис. 63). Наибольший угол отклонения реакции поверхности от нормали называют углом трения.

При этом $tg\varphi = \dfrac{F_{max}}{N} = \dfrac{f_0 N}{N} = f_0$.

Задача 1.

Груз весом P = 20 Н лежит на горизонтальной плоскости. Определить, какую силу $\bar{Q}$, направленную под углом $\alpha = 30°$ к этой поверхности, надо приложить к грузу, чтобы сдвинуть его с места, если статический коэффициент трения груза о плоскость равен f_0=0,6.

Рис. 64

Решение.

1. Рассмотрим равновесие груза.

2. Покажем силы, действующие на груз. В случае предельного равновесия груза на него действуют сила тяжести $\overline{\mathrm{P}}$, сдвигающая сила $\bar{Q}$, реакция поверхности $\bar{N}$ и предельная сила трения $\bar{F}_{m\text{р}}$.

3. Укажем на рисунке оси координат и составим уравнения равновесия:

$\sum F_{kx} = 0; \qquad Qcos\alpha - F_{m\text{р}} = 0.$

$\sum F_{ky} = 0; \qquad N + Qsin\alpha - P = 0.$

Из второго уравнения $N = P - Qsin\alpha$, тогда предельная сила трения равна, $F_{m\text{р}} = f_0 N = f_0(P - Qsin\alpha\ )$. Подставим найденное значение $F_{m\text{р}}$ в первое уравнение и определим величину сдвигающей силы Q для предельного равновесия груза.

$$Q = \frac{f_0 P}{cos\alpha + f_0 sin\alpha} = 10{,}29\ \text{Н}.$$

Определив величину сдвигающей силы Q для предельного равновесия, рассчитаем значение предельной силы трения:

$F_{m\text{р}}$=0,6(20 –10,29 sin 30) = 8,91 Н.

Если к грузу приложить силу $Q \leq 10{,}29$ Н, то он останется в покое. При значении силы $Q > 10{,}29$ Н груз начнет двигаться.

Ответ: $Q > 10{,}29$ Н.

Задача 2. Тело весом Р=100 Н удерживается в равновесии силой $\bar{Q}$ на шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью f = 0,6. Сила $\bar{Q}$ действует на тело под углом

$\beta = 15°$ к линии наибольшего ската. Определить значение силы $\bar{Q}$ при равновесии тела на шероховатой наклонной плоскости (рис. 65).

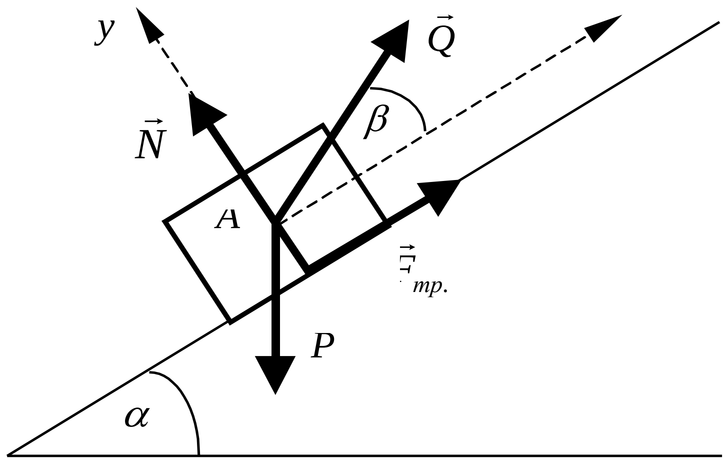


Рис. 65

Решение.

1. Рассмотрим равновесие тела А.

2. Покажем силы, действующие на тело: это силы $\bar{N}, \bar{P}, \bar{Q}$ и сила трения $\bar{F}_{m\text{р}}$. Возможны два случая предельного равновесия тела и два предельных значения силы $\bar{Q}$ в зависимости от направления возможного скольжения тела вверх или вниз по наклонной плоскости. Предположим, что возможное движение тела будет происходить вниз по наклонной плоскости (рис. 65). Тогда сила трения $\bar{F}_{m\text{р}}$ будет направлена противоположно возможному движению, то есть вверх по наклонной плоскости.

3. Укажем на рисунке оси координат и составим уравнения равновесия для этого предельного случая:

$\sum F_{kx} = 0; -P \cdot sin\,45° + F_{\text{тр}} + \text{Q}\cdot cos15° = 0;$

$\sum F_{ky} = 0; \quad N - P \cdot cos45° + Q \cdot sin15 = 0.$

Решим полученные уравнения. Из второго уравнения определяем $N = P \cdot cos45° - Q \cdot sin15°$.

Тогда сила трения

$F_{m\text{р}} = fN = f(P \cdot sin\,45° - \text{Q}\cdot cos15°\,).$

Подставляя найденное значение силы трения в первое уравнение, определим предельное значение силы $\bar{Q}$ при возможном скольжении тела вниз по наклонной плоскости.

$$Q = \frac{Pcos45°(1-f)}{cos15° - fsin15°} = 34{,}87 \text{ Н} \approx 35 \text{ Н}.$$

Таким образом, если сила $Q \leq 35$ Н, то тело будет скользить вниз по наклонной плоскости.

При возможном движении тела вверх по наклонной плоскости направление силы трения изменится на противоположное и уравнение $\sum F_{kx} = 0$ имеет вид $-P \cdot sin\ 45° - F_{mр} + \text{Q}\cdot cos15° = 0$.

Проделав аналогичные вычисления, определим значение силы Q для второго случая предельного равновесия.

$$Q = \frac{Pcos45°(1+f)}{cos15° + fsin15°} \approx 102 \text{ Н}.$$

Таким образом, если значение силы $Q \geq 102$ Н , то тело будет двигаться вверх по наклонной плоскости.

Объединяя оба полученных результата, делаем вывод, что тело остается в покое, если сила Q удовлетворяет условию

$35 \geq Q \geq 102$.

Ответ: $35 \geq Q \geq 102$.

Задача 3.

Лестница АВ веса P = 100 Н установлена на не гладком горизонтальном полу и упирается в гладкую стену. Коэффициент трения лестницы о пол равен f = 0,7. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу,чтобы по ней мог подняться человек весом p = 600 Н доверху (рис. 66).

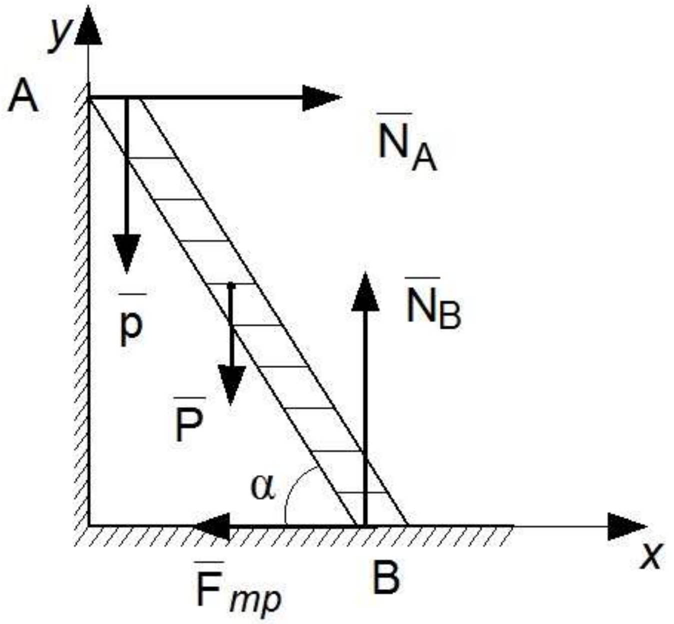


Рис. 66

Решение.

1. Рассмотрим равновесие лестницы вместе со стоящим на ней человеком.

2. Покажем силы действующие на лестницу: это вес лестници $\overline{\text{P}}$, приложенный в ее середине и вес человека $\overline{\text{p}}$, стоящего наверху.

3. Освободим лестницу от связей, а их действие заменим реакциями связей. В точке B приложена реакция пола $\overline{N}_B$, направленная перпендикулярно полу, и сила трения $\overline{F}_{m\text{р}}$, препятствующая скольжению лестницы. В точке A перпендикулярно гладкой стене приложена реакция $\overline{N}_\text{A}$.

4. Составим уравнения равновесия сил, приложенных к лестнице:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad N_A - F_{m\text{р}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -\text{p} - \text{P} + N_\text{B} = 0;$$

$$\sum m_B = 0; \qquad \text{p} \cdot ABcos\alpha + P \cdot \frac{1}{2} ABcos\alpha - N_A \cdot ABsin\alpha = 0.$$

5. Решим полученные уравнения. Максимальная сила трения равна $F_{m\text{р}} = f \cdot N_B$. Из первого уравнения $N_A = F_{m\text{р}} = f \cdot N_B$, из второго уравнения $N_\text{B} = \text{p} + \text{P}$. Тогда $N_A = f \cdot (\text{p} + \text{P})$.

Подставляя это значение N_A в третье уравнение , получим:

$$\text{p} \cdot ABcos\alpha + P \cdot \frac{1}{2} ABcos\alpha - f \cdot (\text{p} + \text{P}) \cdot ABsin\alpha = 0.$$

Сократим все члены этого уравнения на AB:

$$\text{p} \cdot cos\alpha + P \cdot \frac{1}{2} cos\alpha - f \cdot (\text{p} + \text{P}) \cdot sin\alpha = 0.$$

Полученное уравнение разделим на $cos\alpha$:

$2\text{p} + P - 2f \cdot (\text{p} + \text{P}) \cdot tg\alpha = 0$. Отсюда $tg\alpha = \frac{2\text{p}+\text{P}}{2f(\text{p}+\text{P})} = 1{,}32$.

$\alpha = 53°$

Ответ: $\alpha = 53°$.

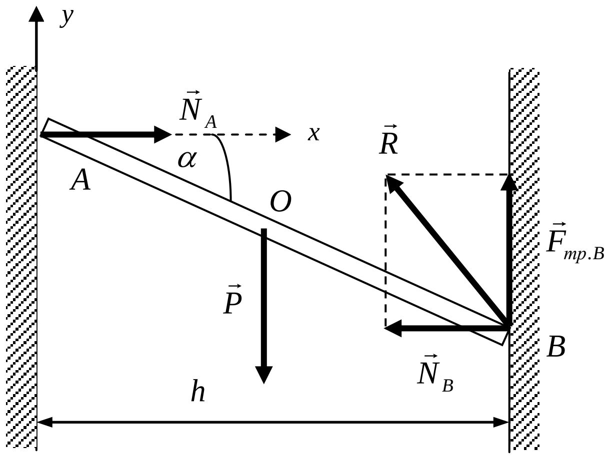


Рис.67

Задача 4.

Однородный стержень, длиною $AB = l$ опирается на гладкую стену в точке А и шероховатую в точке В. Определить коэффициент трения f , при котором возможно равновесие стержня.

Решение. 1.Рассмотрим равновесие стержня.

2. Покажем силы, действующие на стержень: это вес стержня $\overline{\text{P}}$, приложенный в его центре, в точке А перпендикулярно стене приложена реакция $\overline{N}_A$, в точке В перпендикулярно стене приложена реакция $\overline{N}_B$ и сила трения $\bar{F}_{m\text{рВ}}$, препятствующая скольжению стержня .

3. Укажем на рисунке оси координат и составим уравнения равновесия:

$\sum F_{kx} = 0; \qquad N_A - N_B = 0;$

$\sum F_{ky} = 0; \qquad F_{m\text{р}B} - P = 0;$

$\sum m_B = 0; \qquad P \cdot \frac{h}{2} - N_A \cdot l \cdot sin\alpha = 0.$

При равновесии стержня сила трения равна $F_{m\text{р}B} = fN_B$.

Из уравнений равновесия находим:

$N_A = N_B, \;\; F_{m\text{р}B} = P, \;\; N_A = \frac{fPh}{2lsin\alpha}$, где $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}$.

При равновесии стержня значение силы трения удовлетворяет условию $F_{mpB} \leq fN_B$. Тогда $F_{mpB} \leq \frac{fPh}{2lsin\alpha}$, $\quad P \leq \frac{fPh}{2lsin\alpha}$.

Из последнего неравенства определим значение коэффициента трения скольжения, при котором стержень будет находиться в равновесии $\quad f \geq \frac{2\sqrt{l^2-h^2}}{h}$.

Ответ. $f \geq \frac{2\sqrt{l^2-h^2}}{h}$.

Задача 5. На верхней грани прямоугольного бруса B, вес которого 200 Н, находится прямоугольный брус A веса 100Н. Брус B опирается своей нижней гранью на горизонтальную поверхность C, причем коэффициент трения между ними $f_2 = 0{,}2$. Коэффициент трения между брусьями A и B $f_1 = 0{,}5$. На брус A действует сила $P = 60$ Н, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30$. Будет ли брус A двигаться относительно B? Будет ли брус B двигаться относительно плоскости C (рис. 68)?

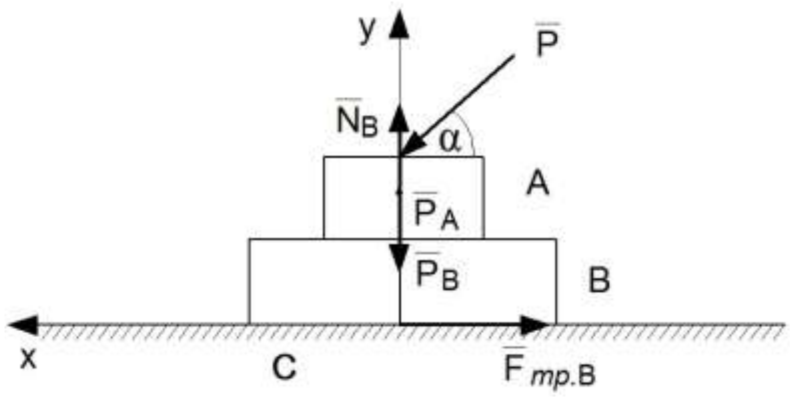


Рис. 68

Решение.

1. Установим, будут ли брусья A и B двигаться относительно поверхности C. На брусья A и B действую силы тяжести $\bar{P}_A$, $\bar{P}_B$, сила $\overline{\mathrm{P}}$, сила трения $\bar{F}_{\text{тр}B}$ и нормальная реакция поверхности C $\bar{N}_B$. Сила $\overline{\mathrm{P}}$ стремится сдвинуть брусья A и B влево, при этом между поверхностью C и брусом B возникает сила трения, максимальное значение которой равно $F_{\text{тр}B} = f_2 N_B$. Для определения силы трения F_B составим уравнения равновесия сил, действующих на брусья A и B (рис. 68):

$\sum F_{kx} = 0$; $P cos 30° - F_{\text{тр}B} = 0$;

$\sum F_{ky} = 0$; $N_B - P_A - P_B - \mathrm{P} \cdot sin 30°$=0.

Из второго уравнения определим N_B=$P_A + P_B +$ $\mathrm{P} sin 30°$=330 Н. Тогда максимальное значение силы трения между поверхностью C и брусом B равно $F_{\text{тр}B} = f_2 N_B = 0{,}2 \cdot 330 = 66$ Н. Сила, сдвигающая брусья влево равна $P cos 30° \approx 52$ Н, что меньше значения силы трения $F_{\text{тр}B} = 66$ Н. Следовательно брусья A и B останутся в покое.

2. Установим будут ли брус А двигаться относительно бруса В. На брус А действуют силы $\bar{P}_\text{А}$, $\overline{\text{P}}$, сила трения возникающая между брусьями $\bar{F}_{A\text{тр}}$ и нормальная реакция $\bar{N}_\text{А}$. Максимальное значение силы трения равно $F_{\text{тр}A} = f_1 N_\text{А}$.

Для определения силы трения $F_\text{А}$ составим уравнения равновесия сил, действующих на брус В (рис. 69).

$\sum F_{kx} = 0;\ Pcos30° - F_{\text{тр}A} = 0;$

$\sum F_{ky} = 0;\ N_\text{А} - P_A - \text{P} \cdot sin30°=0.$

Из второго уравнения определим

$N_\text{А} = P_A + \text{P} \cdot sin30°=130\text{Н}$, тогда

$F_{\text{тр}A} = f_1 N_\text{А} = 0{,}5 \cdot 130 = 65$ Н.

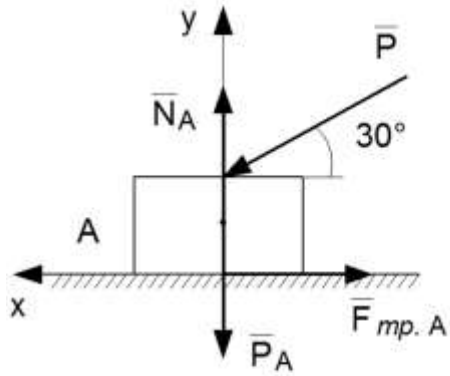


Рис. 69

Сила, которая может сдвинуть брус А относительно бруса В, равна $Pcos30° \approx 52$ Н. Это меньше значения силы трения $F_B = 65$Н. Следовательно брус А не сдвинется относительно В.

Ответ: Брусья А и В останутся в покое.

Задача 6.

К валу приложена пара сил, момент которой равен M = 100 Нм. На валу закреплено тормозное колесо радиуса r=25 см. Найти, с какой силой $\bar{Q}$ надо прижимать к колесу тормозные колодки, чтобы оно оставалось в покое, если коэффициент трения между колесом и колодками равен $f = 0{,}25$.

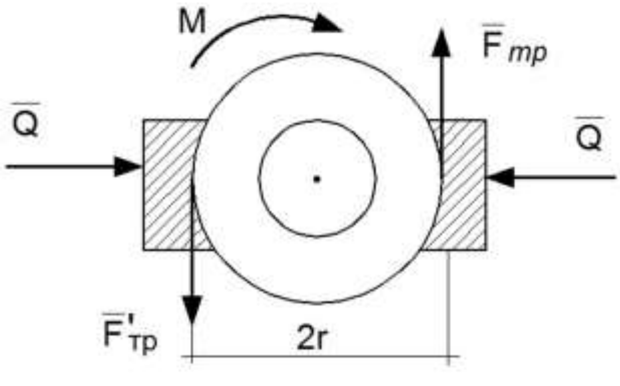


Рис. 70

Решение.

Рассмотрим равновесие вала. К валу приложен вращающий момент М=100 Нм. В месте контакта тормозного колеса и тормозных колодок при воздействии силы $\bar{Q}$ возникает пара сил трения ($\bar{F}_{m\text{р}}$, $\bar{F}'_{m\text{р}}$), препятствующая вращению вала. Момент пары сил трения равен $M_{m\text{р}} = F_{m\text{р}} \cdot 2r$, а максимальное значение силы трения равно $F_{m\text{р}} = f \cdot Q = 0{,}25\, Q$.

Для определения силы Q со ставим уравнение моментов относительно центра вала: $M - F_{m\text{р}} \cdot 2r = 0$.

$M - f \cdot Q \cdot 2r = 0$; $Q = \frac{M}{f \cdot 2r}$; $Q = 800$ Н.

Ответ: $Q = 800$ Н.

4.2.Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

Каким должен быть наименьший вес тела 2, для того чтобы тело 1 весом 200 Н начало скользить по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения равен 0,6 (рис. 71)?.

Задача 2.

Однородный брус АВ опирается в точке А на гладкую стену, а в точке В на негладкий пол. Определить наименьший коэффициент трения скольжения между брусом и полом, при котором брус останется в покое (рис. 72).

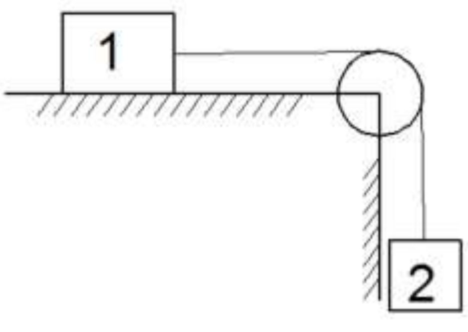


Рис. 71

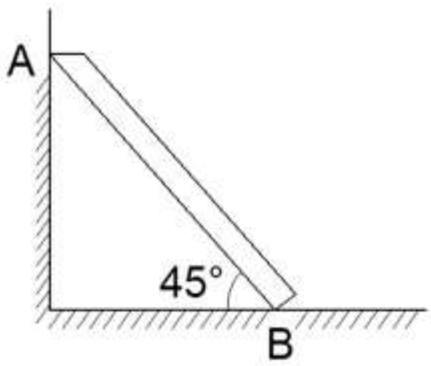


Рис. 72

Задача 3.

Каким должен быть вес тела 1, для того чтобы началось скольжение вверх по наклонной плоскости, если $F = 90$ Н, а коэффициент трения скольжения $f = 0{,}3$ (рис. 73)?

Задача 4.

Каким должен быть наибольший вес тела 2, для того чтобы груз 1 весом 100 Н оставался в покое на наклонной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f = 0{,}3$ (рис. 74)?

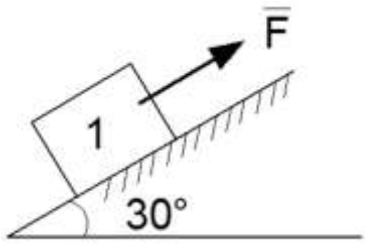


Рис. 73

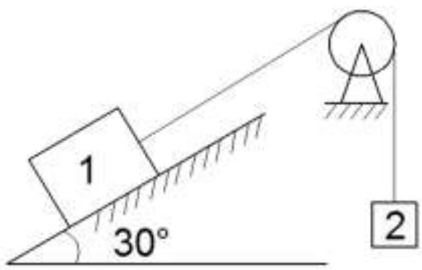


Рис. 74

Задача 5.

Электровоз поднимается по прямолинейному пути, имеющему уклон 0,008, с постоянной скоростью. Вес электровоза 12000 кН. Какова должна быть сила тяги электровоза P, если сопротивление движению равно 0,005 силы давления электровоза на рельсы?

Задача 6.

Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым он надет на круглую стойку CD. Длина втулки b = 2 см. В точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P. Определить, пренебрегая весом стержня AB, расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $f = 0{,}1$ (рис. 75)?

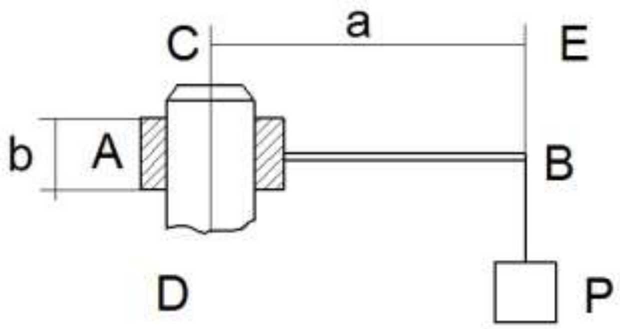


Рис. 75

5.3. Трение качения

Тело, имеющее форму катка, под действием приложенных сил, может катиться по поверхности другого тела. При этом из-за деформации поверхностей этих тел, в месте их соприкосновения, могут возникнуть силы реакции, препятствующие не только скольжению, но и качению. Примерами таких катков являются различные колеса – колеса электровозов, вагонов, автомашин, шарики и ролики в подшипниках.

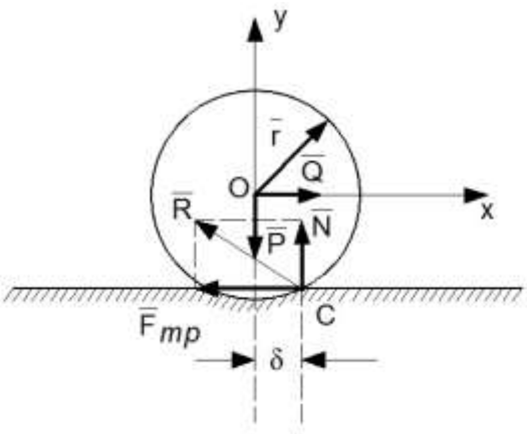


Рис 76

Соприкосновение катка с поверхностью вследствие деформации происходит по некоторой площадке.

При этом точка приложения нормальной реакции поверхности смещается так, что возникает пара сил ($\vec{N}$,$\vec{P}$), называемая парой сопротивления качению (рис. 76).

Величина плеча δ этой пары, зависящая от материала соприкасающихся тел, называется коэффициентом трения качения. Максимальная величина момента пары сил, препятствующей качению $M_{\text{кач}}$, определяется по формуле

$$M_{\text{кач}} = \delta \cdot N,$$

где $\bar{N}$ нормальная реакция плоскости, по которой катится тело.

В дальнейшем момент пары сил, препятствующей качению $M_{\text{кач}}$, будем называть моментом сопротивления качению.

Установим минимальное значение силы $\bar{Q}$, необходимой для качения катка.

Предположим, что каток остается в покое. Тогда выполняются следующие уравнения равновесия:

$\sum F_{kx} = 0; \qquad Q - F_{m\text{р}} = 0;$

$\sum F_{ky} = 0; \qquad -P + N = 0;$

$\sum m_C(F_k) = 0; \qquad -Qr + \delta \cdot N = 0.$

Максимальная сила трения скольжения равна $F_{m\text{р}} = f \cdot N$, тогда при равновесии катка из первого уравнения $Q = fP$.

Из третьего уравнения минимальное значение силы $\bar{Q}$, при котором каток еще остается в покое, равно $Q = \frac{\delta}{r} P$.

При увеличении значения силы $\bar{Q}$, возможны следующие случаи движения катка:

– каток катится без скольжения, это так называемый случай чистого качения;

– каток катится со скольжением.

Рассмотрим все эти три случая:

1. если $\frac{\delta}{r} < f$, то при

а) $Q \leq \frac{\delta}{r} P$ – каток находится в покое;

б) $fP > Q \geq \frac{\delta}{r} P$– каток катится без скольжения;

в) $Q \geq fP$– каток катится со скольжением.

2. если $\frac{\delta}{r} > f$, то при

а) $Q \leq fP$– каток находится в покое;

б) $\frac{\delta}{r} P > Q > fP$– каток скользит, не вращаясь, то есть каток движется поступательно;

в) $Q \geq \frac{\delta}{r} P$– каток катится со скольжением.

Как правило, $\delta / r \ll f$, то для начала качения катка требуется значительно меньшая сила $\bar{Q}$, чем для начала его скольжения. Поэтому по мере увеличения силы $\bar{Q}$ каток сначала начинает катиться, а при дальнейшем ее увеличении к качению добавляется еще и скольжение.

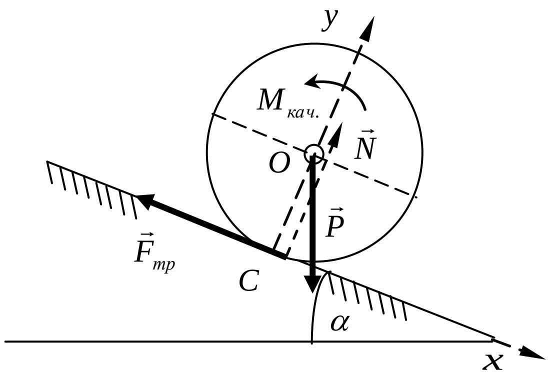


Рис. 77

Задача 1. При каких значениях угла наклона плоскости к горизонту, однородный цилиндрический каток радиуса $R = 0{,}1$ м будет оставаться в покое, катиться без скольжения, катиться со скольжением. Коэффициент трения скольжения между плоскостью и катком $f = 0{,}5$, а коэффициент трения качения $\delta = 0{,}02$ м (рис. 77)?

Решение. На каток действуют силы тяжести $\bar{\mathrm{P}}$, сила трения скольжения $\bar{F}_{тр}$, момент сопротивления качению $M_{кач}$ и нормальная реакция наклонной плоскости $\bar{N}$. Пусть каток остается в покое под действием этих сил, поэтому выполняются уравнения равновесия:

$\sum F_{kx} = 0;$ $\quad Psin\alpha - F_{m\text{р}} = 0;$

$\sum F_{ky} = 0;$ $\quad -Pcos\alpha + N = 0;$

$\sum m_C(F_k) = 0;$ $\quad M_{\text{кач}} - PRsin\alpha = 0.$

Момент сопротивления качению равен $M_{\text{кач}} = \delta \cdot N$.

1. Из второго уравнения $N = Pcos\alpha$, из третьего $M_{\text{кач}} = PRsin\alpha$.

Тогда $\delta Pcos\alpha = PRsin\alpha$, отсюда $tg\alpha = \frac{\delta}{R} = 0{,}2, \alpha \approx 11°$. Следовательно, равновесие сохранится для всех значений угла $\alpha \leq 11°$.

2. Из первого уравнения определим угол наклона плоскости, при котором каток будет катиться без скольжения. Максимальная сила трения скольжения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N = fPcos\alpha,$

$Psin\alpha - fPcos\alpha = 0, tg\alpha = f = 0{,}5\ , \alpha \approx 27°.$

Таким образом, при значении угла $11° < \alpha \leq 27°$ каток будет катиться без скольжения.

3. Если значение угла $\alpha > 27°$, то каток будет катиться со скольжением.

Проверим соответствие полученного решения неравенствам (1) или (2).

По условию задачи $\frac{\delta}{r} = 0{,}2$, а $f = 0{,}5$, то есть выполняется соотношение $\frac{\delta}{r} < f$ (случай 1). При движении по наклонной плоскости сила, под действием которой каток приходит в движение, равна $Q = Psin \propto$.

1. Предельное значение угла при равновесии равно $\alpha = 11°$, $\sin 11° = 0{,}2$, тогда соотношение $Q \leq \frac{\delta}{r}P$, $0{,}2P = 0{,}2P$, $0{,}2 = 0{,}2$ выполняется и, следовательно, каток находится в покое.

2. При выполнении соотношения $fP > Q \geq \frac{\delta}{r}P$, каток катится без скольжения. Проверим, выполняется ли оно при изменении угла α в пределах $11° > \alpha \geq 27°$. Например, $\alpha = 25°$, $sin25° = 0{,}42$, $cos\alpha 25° = 0{,}9$. Тогда $0{,}5P > 0{,}42P \geq 0{,}2P$; $0{,}5 > 0{,}42 \geq 0{,}2$. Второе неравенство из (1) выполняется, следовательно, каток катится без скольжения.

3. Третье неравенство из (1) $Q \geq fP$ должно выполняться при качении катка со скольжением. Пусть $\alpha = 45°$, $sin45° = 0{,}71$. Тогда

$Q = Psin \propto = 0{,}71P$ и $0{,}71P \geq \ 0{,}5P$; $0{,}71 \geq 0{,}5$. Неравенство тоже выполняется, следовательно, каток катится со скольжением.

Ответ: При $\alpha \leq 11°$ каток остается в покое.

При $11° > \alpha \geq 27°$ каток катится без скольжения.

При $\alpha > 27°$, каток катится со скольжением.

Задача 2.

На однородный каток весом 2 кН действует горизонтальная сила $F_2 = 10$ Н и вертикальная $\bar{F}_1$. Каким должен быть наибольший модуль силы F_1, для того чтобы началось качение катка, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}005$ м, радиус $R = 0{,}8$ м, OA=0,4 м (рис. 78)?

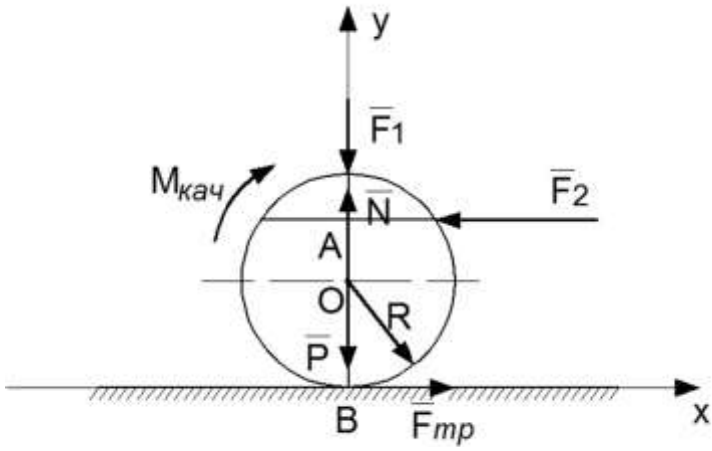


Рис.78

Решение.

На каток действуют активные силы $\bar{P}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$. Под действием силы $\bar{F}_2$, каток может катиться влево. Вследствие деформации катка возникает момент сопротивления качению, минимальное значение которого равно $M_{кач} = \delta \cdot N$. Кроме того на каток действуют реакции поверхности – это нормальная реакция $\bar{N}$ и сила трения скольжения $\bar{F}_{тр}$, приложенная в точке контакта катка и поверхности.

Так как требуется определить наибольший модуль силы $\bar{F}_1$ для того чтобы началось качение катка, то предполагается, что он еще находится в покое.

Составим уравнения равновесия сил, действующих на каток.

$\sum F_{kx} = 0; \qquad F_{тр} - F_2 = 0$;

$\sum F_{ky} = 0; \qquad N - P - F_1 = 0;$

$\sum m_B(F_k) = 0; \quad F_2(R + AO) - M_{кач} = 0.$

Решим составленные уравнения: $N = P + F_1$,

$F_2(R + AO) - \delta N = 0, \;\; F_2(R + AO) - \delta(P + F_1) = 0,$

Следовательно, при равновесии значение модуля силы $\bar{F}_1$ равно

$F_1 = \frac{F_2(R+AO)-\delta P}{\delta} = \frac{10\cdot 1{,}2-0{,}005\cdot 2000}{0{,}005} = 400$ Н.

Если значение модуля силы $\bar{F}_1$ будет больше 400Н, то каток начнет катиться.

Ответ: $F_1 > 400$ Н.

Задача 3. Однородный каток 2 весом 4 кН связан с телом 1 нерастяжимой нитью. Радиус $R = 0{,}5$ м, коэффициент трения качения $\delta = 0{,}005$ м, момент пары сил $M = 50$ Нм. Определить наибольший вес тела 1, при котором оно начинает скользить, если коэффициент трения скольжения для катка и тела $f = 0{,}2$ (рис. 79).

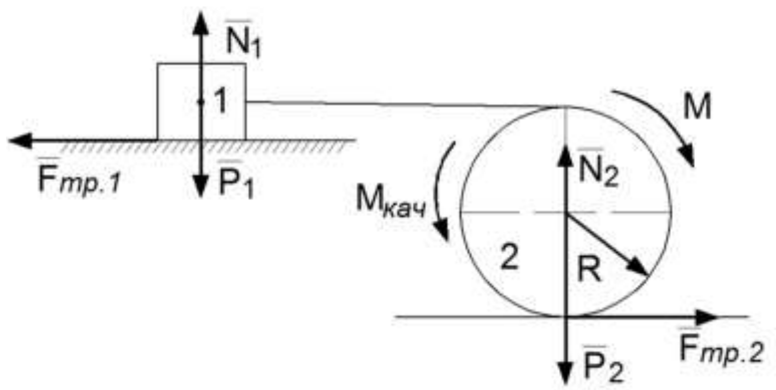


Рис. 79

Решение.

На груз 1 и каток 2 действуют силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, сила трения скольжения между поверхностью и грузом 1 $\bar{F}_{тр1}$, ила трения скольжения между поверхностью и катком 2 $\bar{F}_{тр2}$, нормальные реакции поверхностей $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$. Каток 2 приводится в движение вращающим моментом M = 50 Нм. Вследствие деформации катка возникает момент сопротивления качению, минимальное значение которого равно $M_{кач} = \delta \cdot N_2$. Так как момент сопротивления $M_{кач}$ препятствует качению катка, то его направление противоположно вращающему моменту M.

Силы трения скольжения будут соответственно равны $F_{тр1}= fN_1$, $F_{тр2}= fN_2$.

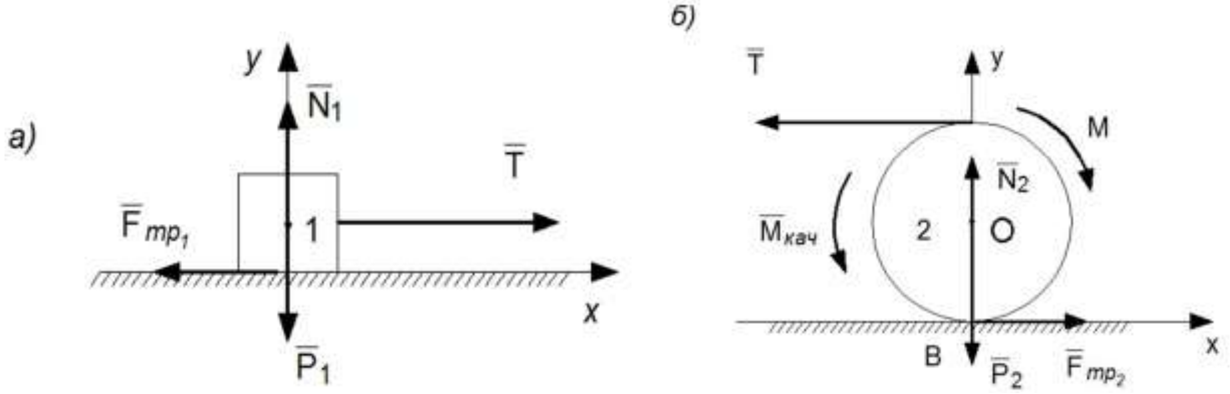


Рис. 80

Так как требуется определить наибольший вес тела 1, при котором начнется его скольжение, то предполагается, что и тело и каток еще находятся в покое. Составим уравнения равновесия для тела 1 и катка 2, отбросив между ними связь – это нить, а ее действие заменим реакцией нити $\overline{T}$.

Уравнения равновесия для тела 1:

1. $\sum F_{kx} = 0$; $T - F_{mp1} = 0$;
2. $\sum F_{ky} = 0$; $N_1 - P_1 = 0$.

Из второго уравнения $N_1 = P_1$, а из первого $T = F_{mp1} = fP_1$.

Для катка 2 выполняются следующие уравнения равновесия:

1. $\sum F_{kx} = 0$; $F_{mp2} - T = 0$;
2. $\sum F_{ky} = 0$; $N_2 - P_2 = 0$;
3. $\sum m_B(F_k) = 0$; $M - M_{кач} - T \cdot 2R = 0$.

Из второго уравнения $N_2 = P_2$. Третье уравнение преобразуем, подставив в него найденные значения сил:

$$M - \delta \cdot P_2. - fP_1 \cdot 2R = 0,\ P_1 = \frac{M - \delta \cdot P_2}{f \cdot 2R} = \frac{50 - 0{,}005 \cdot 4000}{0{,}2 \cdot 2 \cdot 0{,}5} = 150\text{Н}.$$

Ответ: $P_1 = 150$ Н.

Задача 4. Однородный каток 1 весом 10 кН и радиусом 0,5 м связан грузом 3 горизонтальной нерастяжимой нитью, перекинутой через блок 2. Определить вес груза 3, при котором каток будет оставаться в покое или катиться, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}008$ м, а коэффициент трения скольжения между катком и поверхностью $f = 0{,}2$ (рис. 81).

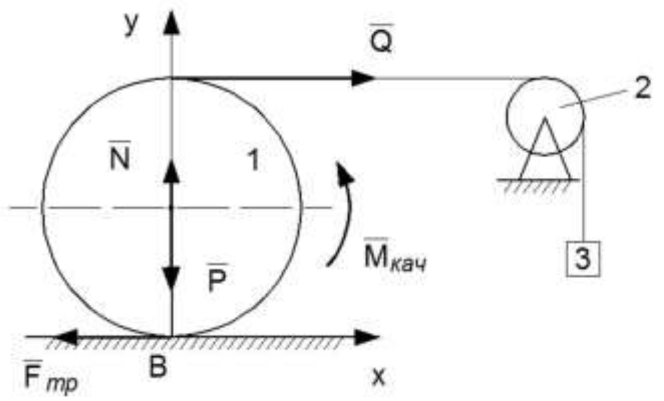


Рис. 81

Решение.

На каток действуют силы тяжести $\overline{\mathrm{P}}$, сила трения скольжения $\bar{F}_{m\text{р}}$, пара сил сопротивления качению с моментом $M_{\text{кач}}$ и нормальная реакция плоскости $\bar{N}$. Каток может катиться под действием груза 3, вес которого равен $\bar{Q}$. Поэтому отбросим мысленно груз 3 и блок 2, а их действие заменим реакцией нити, направленной вдоль нити и численно равной Q.

Предположим, что каток находится в покое, тогда выполняются следующие уравнения равновесия:

1. $\sum F_{kx} = 0;$ $\quad\quad Q - F_{m\text{р}} = 0;$
2. $\sum F_{ky} = 0;$ $\quad\quad N - P = 0;$
3. $\sum m_B(F_k) = 0;$ $\quad Q \cdot 2R - M_{\text{кач}} = 0.$

Из второго уравнения $N = P$. Минимальное значение момента сопротивления качению, при котором каток остается в покое, определяется по формуле $M_{\text{кач}} = \delta \cdot N$, и, следовательно, в данной задаче $M_{\text{кач}} = \delta \cdot P$.

Минимальное значение силы Q, при котором каток остается в покое, определим из третьего уравнения:

$Q \cdot 2R - \delta \cdot P = 0$. Отсюда $Q = \frac{\delta P}{2R} = \frac{0{,}008 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}5}$=0,08 Н. Тогда при значении силы Q ≤0,08 Н каток будет оставаться в покое.

Из первого уравнения определим вес груза 3

$Q = F_{m\text{р}} = f \cdot N = f \cdot P$=2 Н.

Таким образом, если вес груза 3 будет изменяться в пределах $0{,}08 > Q \geq 2$Н, то каток будет катиться без скольжения. При дальнейшем увеличении веса груза 3 $Q > 2$ Н, каток будет катиться со скольжением.

Как показали расчеты, для начала качения катка требуется значительно меньшая сила, чем для начала его скольжения. С точки зрения энергетических затрат этим объясняется преимущество шариковых и роликовых подшипников по сравнению с подшипниками скольжения.

Ответ: при $Q \leq 0{,}08$ Н каток будет оставаться в покое;

при $0{,}08 < Q \leq 2$ Н каток будет катиться без скольжения;

при $Q > 2$ Н каток будет катиться со скольжением.

4.4.Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

К однородному катку, малый радиус которого $r = 0{,}2$ м, подвешен груз 1весом 200 Н и приложена пара сил $M = 57{,}6$ Нм. Определить в килоньютонах наибольший вес катка, при котором он будет катиться влево, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}008$ м (рис. 82).

Задача 2

К однородному катку, радиус которого $R = 0{,}4$ м, приложена пара сил с моментом $M = 210$ Нм. Каким должен быть наибольший вес катка, для того чтобы он мог катиться вверх по наклонной плоскости, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}006$ м (рис. 83)?

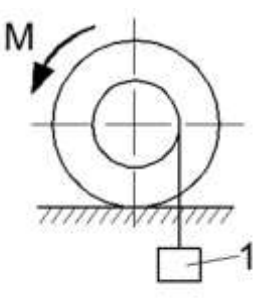


Рис. 82

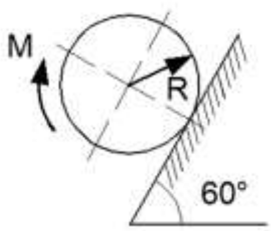


Рис. 83

Задача 3

На конец кабеля намотанного на барабан, действует сила $F = 20$Н. Барабан катиться равномерно по горизонтальной плоскости без скольжения. Определить в килоньютонах вес барабана, если его радиусы $r = 0{,}2$ м и $R = 1$ м. Коэффициент трения качения $\delta = 0{,}01$ м (рис. 84).

Задача 4.

Определить наименьшее значение силы $\bar{F}$, необходимое для качения катка радиуса $R = 0{,}3$ м, если предельный момент трения качения равен 3,46 Нм, угол $\alpha = 30°$ расстояние АО=0,2 м (рис. 85).

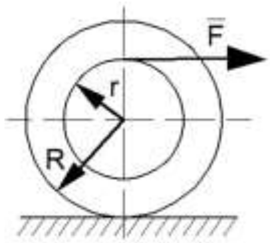


Рис. 84

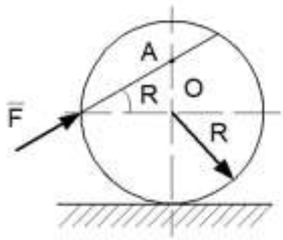


Рис. 85

4.5. Вопросы для самопроверки

1.Что называется трением скольжения?
2.Чему равна предельная сила трения?
3. Как определяется статический коэффициент трения?
4. Сформулируйте законы трения скольжения.
5. Как направлена реакция шероховатой поверхности?
6. Что называется углом трения?
7. Что называется трением качения?
8. В каких единицах измеряется коэффициент трения качения?
9. Как определяется момент пары трения сопротивления качению?

5. Список рекомендуемой литературы.

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 1, Т. 2 : Статика и кинематика; Динамика : учеб. пособие для техн. специальностей вузов / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 736 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=29

2. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике [Электронный ресурс]: учеб. пособие / под ред. В. А. Польмова, Д. Р. Меркина. – Изд. 51-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 448 с.http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2786

3. Диевский, В. А. Теоретическая механика : учеб. пособие [Электронный ресурс] / В. А. Диевский. – 3-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 320 с. : ил. . – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=130. – загл. с экрана.

4. Сборник коротких задач по теоретической механике : учеб. пособие [Электронный ресурс] / под ред. О. Э. Кепе. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 368 с. : ил. – Режим доступа
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=183. – загл. с экрана.

5. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика: учеб. пособие для студентов-заочников / В. А. Хямяляйнен, Р. Ф. Гордиенко, В. И. Иванов.- Томск.: Изд-во Том. ун-та. 2005.- 206с.
http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90337&type=utc

6.Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. – Москва : Высш. шк., 2005. – 406с.

7. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика: учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 672 с.: ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=4551

8. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 2. Динамика: учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 640 с.: ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4552

Раздел 2. КИНЕМАТИКА

Авторы: В. А. Хямяляйнен, А. С. Богатырева, Р. Ф. Гордиенко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Качество и глубина усвоения студентами курса теоретической механики всецело зависит от их систематической работы в семестре по изучению теоретического материала и от полученных ими навыков при решении задач.

Цель настоящей методической разработки – помочь студентам приобрести навыки систематического изучения курса теоретической механики по всему разделу "Кинематика".

Самостоятельная работа студентов, кроме того, должна дополнять и углублять знания, полученные ими на лекции и практических занятиях. Поэтому предполагается, что студент приступает к изучению темы, прослушав данный на лекции материал и имея конспект последней.

Для более эффективной работы по изучению раздела «Кинематика» предлагается следующий план:

1. Проработать конспект лекции.
2. Изучить по учебникам и учебным пособиям теоретический материал, указанный по каждой теме.
3. Дополнить конспект лекции теоретическими положениями, не отраженными или изложенными на лекции частично.
4. Ответить на контрольные вопросы, соответствующие изучаемой теме и представленные в настоящих методических указаниях.
5. Разобрать примеры решения задач, приведенных в указаниях.
6. Решить задачи, предназначенные для самостоятельной работы.
7. Выполнить расчетно-графические работы.

Контроль за самостоятельной работой студентов осуществляется путем устного собеседования, во время проведения коллоквиума и при защите расчетно-графических работ.

ВВЕДЕНИЕ

КИНЕМАТИКА – раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движения материальных тел без учета их масс и сил, действующих на них.

Под механическим движением понимают изменение с течением времени положения данного материального тела или точки в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела или точки с тем телом, относительно которого изучается движение, жестко связывают систему координат, называемую *системой отсчета.*

Пространство в классической механике считается евклидовым, не зависящим от времени и движущихся в нем материальных тел. Время же рассматривается как непрерывно изменяющаяся скалярная величина, одинаковая во всех системах координат, если за начало отсчета выбрано общее для них событие. Евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени приближенно. Однако, как показывает опыт, для механических движений, происходящих со скоростями, намного меньшими, чем скорость света, это приближение дает вполне достаточную для практики точность.

В кинематике рассматриваются две основные задачи:

– установление математических способов задания движения относительно выбранной системы отсчета или установление закона движения;

– определение по заданному закону движения основных кинематических характеристик: траектории, скорости, ускорения и т. п.

Кинематика делится на кинематику материальной точки и кинематику твердого тела. Геометрическое место положений движущейся точки и твердого тела в рассматриваемой системе отсчета называется *траекторией.* Если траектория – прямая линия, то движение точки называется *прямолинейным,* если траектория – кривая линия, то *криволинейным.* Причем вид траектории зависит от выбранной системы отсчета, т.е. одно и то же движение может быть прямолинейным относительно одной системы отсчета и криволинейным относительно другой.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Проработайте конспект лекции по теме «Кинематика точки». Изучите по учебникам 1.1–1.5 [1], 1.1–1.6 [2] и §§ 59,64, 66–68 [5].

1.1. Вопросы для повторения

1. Что изучает кинематика?
2. Что такое момент и промежуток времени?
3. Что называется траекторией точки?
4. Какие существуют способы задания движения точки и в чем заключается каждый из них?
5. Как при координатном способе задания движения точки определяется ее траектория?
6. Чем отличается пройденный путь от дуговой координаты точки?
7. Чему равен и как направлен вектор скорости?
8. Чему равны проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат?
9. Как по проекциям скорости на декартовые оси координат найти ее модуль и направление?
10. Чему равна проекция скорости точки на касательную?
11. Как определяются проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовой системы?
12. Как по проекциям ускорения на декартовые оси координат найти модуль и направление ускорения точки?
13. Чему равны проекции ускорения точки на касательную и на главную нормаль к траектории?
14. Каков механический смысл касательного и нормального ускорений?
15. В каких случаях касательное ускорение точки равно нулю, а в каких нормальное?
16. Как записывается уравнение равномерного и равнопеременного движения точки?
17. Какие из направлений ускорения являются возможными (рис. 1.1)?

AB – траектория точки M, $\bar{a}$ – ускорение точки.

1. В данный момент $V \neq 0$.
2. В данный момент $V = 0$.

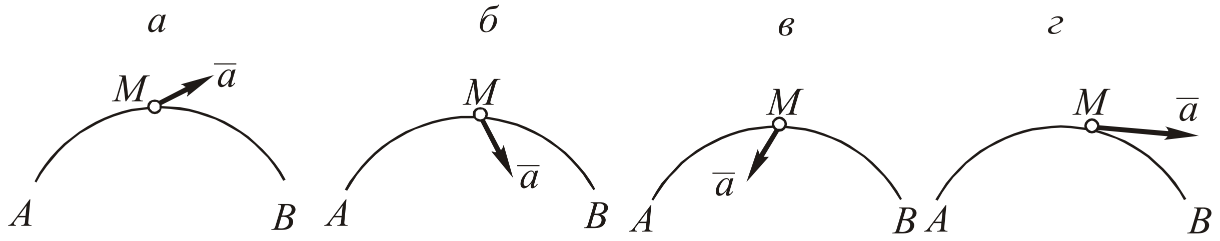
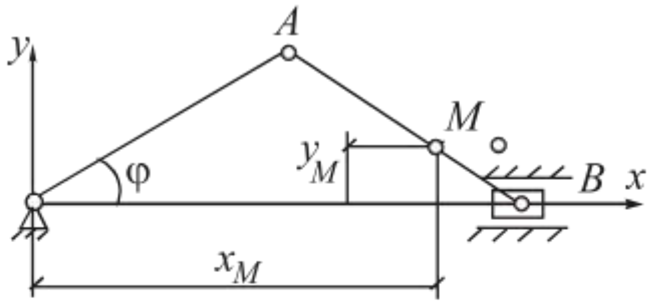


Рис. 1.1

1.2. Примеры решения задач

Пример 1. Найти проекцию точки M шатуна кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.2), если $r = l = 60$ см, $MB = \frac{l}{3}$, $\varphi = 4\pi t$, (t – в с). Найти также скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в тот момент времени, когда $\varphi = 0$.



Решение. Для определения траектории точки и вычисления ее кинематических характеристик определим уравнения движения в координатной форме. Для этого проведем оси координат, взяв начало в точке O, и определим координаты точки M как функцию угла φ. Так как $r = l$, то $\angle AOB = \angle ABO = \varphi$ и, следовательно,

$$x_M = r\cos\varphi + \frac{2}{3}l\cos\varphi = \frac{5}{3}r\cos 4\pi t,$$

$$y_M = \frac{l}{3}\sin\varphi = \frac{r}{3}\sin 4\pi t.$$

Полученные уравнения являются уравнениями движения точки M. Чтобы определить траекторию точки M, исключим из полученных уравнений время t. Для этого разделим первое уравнение на $\frac{5}{3}r$, а второе на $\frac{r}{3}$, затем обе части полученных уравнений возведем в квадрат и сложим:

$$\left(\frac{x}{\frac{5}{3}r}\right)^2=(\cos 4\pi t)^2,\quad \left(\frac{y}{\frac{r}{3}}\right)^2=(\sin 4\pi t)^2,\quad \frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}r\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{3}\right)^2}=1.$$

Это уравнение эллипса. Теперь надо определить, вся ли кривая является траекторией точки. Для этого проанализируем изменение координат при изменении $0\le t\le\infty$. Согласно уравнениям движения $-\frac{5}{3}r\le x_M\le\frac{5}{3}r$, а $-\frac{r}{3}\le y\le\frac{r}{3}$, так как $|\sin 4\pi t|\le 1$, $|\cos 4\pi t|\le 1$, т.е. траекторией точки M является весь эллипс.

Проекции вектора скорости на оси координат:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}=\frac{-20\pi}{3}r\sin 4\pi t,\ V_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}=\frac{4\pi}{3}r\cos 4\pi t;$$

модуль скорости:

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\frac{4\pi}{3}r\sqrt{25\sin^2 4\pi t+\cos^2 4\pi t}=\frac{4}{3}\pi r\sqrt{1+24\sin^2 4\pi t};$$

направляющие косинусы вектора скорости:

$$\cos(\bar{V}\,\hat{,}\,\bar{i})=\frac{V_x}{V}=\frac{-5\sin 4\pi t}{\sqrt{1+24\sin^2 4\pi t}},$$

$$\cos(\bar{V}\,\hat{,}\,\bar{j})=\frac{V_y}{V}=\frac{\cos 4\pi t}{\sqrt{1+24\sin^2 4\pi t}}.$$

Проекции вектора ускорения:

$$a_x=\frac{dV_x}{dt}=\ddot{x}=\frac{-80\pi^2}{3}r\cos 4\pi t;\ a_y=\frac{dV_y}{dt}=\ddot{y}=\frac{-16\pi^2}{3}r\sin 4\pi t;$$

модуль вектора ускорения:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\frac{16\pi^2}{3}r\sqrt{1+24\cos^2 4\pi t};$$

направляющие косинусы вектора ускорения:

$$\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{i}\right)=\frac{a_x}{a}=\frac{-5\cos 4\pi t}{\sqrt{1+24\cos^2 4\pi t}},\ cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{j}\right)=\frac{a_y}{a}=\frac{-\sin 4\pi t}{\sqrt{1+24\cos^2 4\pi t}}.$$

Определим найденные величины в момент, когда $\varphi=0$, т.е. когда $t=\frac{\varphi}{4\pi}=0$.

$$V_x = 0 \qquad V_y = \frac{4\pi}{3} r = 80\pi \text{ см/с}, \quad V = 80\pi \text{ см/с},$$

$$\cos\left(\overline{V} \,\hat{,}\, \overline{i}\right) = 0, \quad \cos\left(\overline{V} \,\hat{,}\, \overline{j}\right) = 1, \text{ т.е. } \left(\overline{V} \,\hat{,}\, \overline{i}\right) = 90^\circ; \quad \left(\overline{V} \,\hat{,}\, \overline{j}\right) = 0^\circ.$$

Аналогично

$$a_x = -1600\pi^2 \text{ см/с}^2, \quad a_y = 0, \quad a = 1600\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

$$\cos\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{i}\right) = -1, \quad \cos\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{j}\right) = 0, \text{ т.е. } \left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{i}\right) = 180^\circ; \quad \left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{j}\right) = 90^\circ.$$

Таким образом, когда φ = 0, т.е. когда кривошип *OA* и шатун *AB* лежат на одной горизонтали, скорость точки *M* направлена по оси *Oy* вверх, а ее ускорение – по оси *Ox* влево. Для определения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где a_n – нормальное ускорение точки, тогда $\rho = \dfrac{V^2}{a_n}$. Нормальное ускорение найдем, используя формулу для полного ускорения точки $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$, откуда $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$, где a_τ – модуль касательного ускорения, *a* – полное ускорение, которое определено выше.

Касательное ускорение $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{dt} = \dfrac{V_x a_x + V_y a_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$.

Подставляя найденные значения, получим

$$a_\tau = \frac{-\frac{20}{3}\pi r \sin 4\pi t\left(-\frac{80}{3}\pi^2 r \cos 4\pi t\right) + \left(\frac{4}{3}\pi r \cos \pi t\right)\left(-\frac{16}{3}\pi^2 r \sin 4\pi t\right)}{\frac{4}{3}\pi r\sqrt{1 + 24\sin^2 4\pi t}} =$$

$$= \frac{64\pi^2 r\left|\sin 4\pi t\right|}{\sqrt{1 + 24\sin^2 4\pi t}}.$$

Тогда

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{80\pi^2}{3\sqrt{1 + 24\sin^2 4\pi t}}.$$

Радиус кривизны траектории точки M равен

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{r}{15}\left(1 + 24\sin^2 4\pi t\right)^{3/2}.$$

Для момента времени $t = 0$ получим $\rho = 4$ см.

Замечание. При частном значении $\varphi = 0$ радиус кривизны можно определить из геометрических соображений. Как было получено выше, при $\varphi = 0$ вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{V}$, т. е.

$$a_n = a = -1600\pi^2 \text{ см/с}^2 \text{ и } \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(180\pi)^2}{1600\pi^2} = 4 \text{ см}.$$

Пример 2. Точка A движется по окружности радиуса 6 см согласно уравнению $s = 3\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ см, (t – в с). Определить скорость и ускорение точки A в момент времени $t_1 = 4$ с.

Решение. В данной задаче движение точки задано естественным способом: известна траектория точки и закон движения по траектории $s = s(t)$. Алгебраическое значение скорости при естественном способе задания движения точки равно $V = \frac{ds}{dt} = 3\pi\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ см/с .

Ускорение точки $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, касательное ускорение

$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -3\frac{\pi^3}{4}\sin\frac{\pi}{2}t$ см/с^2, нормальное $a_\tau = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\left(3\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{2}t\right)^2}{R}$ см/с^2.

Для момента времени $t_1 = 4$ с

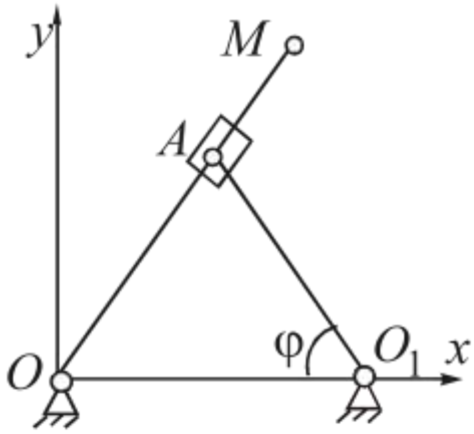
$$V = \frac{3}{2}\pi^2 \text{ см/с}^2;\ a_\tau = 0;\ a = a_n = \frac{3}{8}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Пример 3. Автомобиль, двигаясь равноускоренно по кольцевому участку дороги радиуса 200 м, через 2 мин развил скорость 108 км/ч. Определить скорость автомобиля через минуту после начала движения и его полное ускорение в этот момент.

Решение. Запишем закон изменения скорости для равнопеременного движения ($a_\tau - \text{const}$). $V = V_0 + a_\tau t$.

Начальная скорость автомобиля $V_0 = 0$, а в момент времени $t_1 = 2$ мин = 120 с $V_1 = 108$ км/ч = 30 м/с, тогда из закона изменения скорости найдем касательное ускорение $a_\tau = \dfrac{V_1 - V_0}{t_1}$ = 0,25 м/с^2. Т.к. движение равноускоренное, то a_τ = 0,25 м/с^2 в любой момент времени. Определим скорость точки при t_2 = 1 мин = 60 с $V_2 = V_0 + a_\tau t_2 = 0{,}25 \cdot 60 = 15$ м/с. Нормальное ускорение для этого момента $a_n = \dfrac{V_2^2}{\rho} = \dfrac{15^2}{200} = 1{,}125$ м/с^2. Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 1{,}15$ м/с^2.

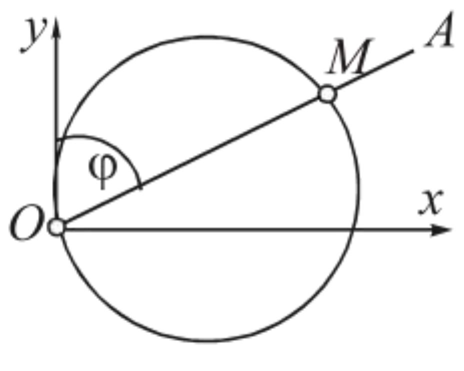
1.3. Задачи для самостоятельного решения



Задача 1.1.

Кулиса *OM* длиной *l* (рис. 1.3) приводится в движение кривошипом O_1A, вращающимся по закону $\varphi = kt^2$. Составить уравнения движения конца кулисы *M*, если $O_1O = OA$, а также найти уравнение траектории этой точки.

Ответ: $x = l \sin \dfrac{kt^2}{2}$; $y = l \cos \dfrac{kt^2}{2}$; $x^2 + y^2 = l^2$.



Задача 1.2.

На проволочной окружности радиуса 10 см (рис. 1.4) надето колечко *M*, через него проходит стержень *OA*, который равномерно вращается вокруг точки *O*, лежащей на той же окружности; угловая скорость такова, что он поворачивается на прямой угол за 5 с. Найти уравнение движения колечка, его скорость и ускорение.

Ответ: $x = R + R\cos 2\varphi,\ y = R\sin 2\varphi$.

Задача 1.3.

Движение точки в плоскости *Oxy* задано следующими уравнениями:

$$x = a\sin t,\ y = 2a\cos 2t,$$

где a – постоянная ($a > 0$); t – время.

Определить траекторию точки и исследовать ее движение.

Ответ: $y = 2a\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)$ при $-a \le x \le a$.

Задача 1.4. Уравнения движения точки в плоскости *Oxy* имеют вид

$x = 2t - t^2,\ y = 4t - 2t^2,$

Определить траекторию точки

Ответ: $y = 2x$.

Задача 1.5. Точка движется согласно уравнениям

$x = 6\sin\frac{\pi}{2}t,\quad y = 8\cos\frac{\pi}{2}t,$ (x, y – в см, t – в с).

Определить траекторию, скорость и ускорение при $t_1 = \frac{1}{2}c$.

Ответ: $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$; V = 11 см/с; a = 17,5 см/с^2.

Задача 1.6. Точка обода маховика в период разгона движется по закону $S = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 4t$ (S – в м, t – в с). Радиус маховика равен 2 м. Найти касательное, нормальное и полное ускорение точки в момент, когда ее скорость равна 8 м/с.

Ответ: $a_\tau = 8$ м/с^2; $a_n = 32$ м/с^2; a = 33 м/с^2.

Задача 1.7. Спускаясь с горы, длина которой 128 м, лыжник движется с постоянным ускорением и за первые 5 с преодолевает расстояние в 50 м. Считая, что начальная скорость $V_0 = 0$, найти время T спуска лыжника с горы, а также его скорость в конце спуска.

Ответ: T = 8 с; V_1 = 32 м/с.

3. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проработайте конспект лекции по теме "Поступательное и вращательное движение твердого тела". Изучите по учебникам 2.2 [1], §78 [3], §73 [5] (для поступательного движения), 2.3 [1], 3.1-3.4[2], §§74–76 [3] (для вращательного движения).

2.1. Вопросы для повторения

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. Могут ли точки тела при его поступательном движении двигаться по эллипсам?
3. Назовите основные свойства поступательного движения твердого тела.
4. Какими уравнениями задается поступательное движение тела?
5. Какое движение твердого тела называется вращательным?
6. Каковы траектории точек тела при вращательном движении?
7. Каким уравнением задается вращение тела вокруг неподвижной оси?
8. Как определяется угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела?
9. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения?
10. Как определяется скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
11. Чему равно ускорение точки, вращающейся вокруг неподвижной оси? Как направлены и чему равны его составляющие?
12. Запишите формулы равномерного и равнопеременного вращательных движений твердого тела.
13. В какой зависимости находятся угловые скорости при передаче вращения от одного твердого тела к другому?

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.1. Угол поворота диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, изменяется согласно уравнению

$$\varphi = kt^3 + \pi t^2 \ (k - \text{const},\ \varphi - \text{в радианах},\ t - \text{в секундах}).$$

Определить угловую скорость и угловое ускорение диска через 4 с после начала движения, если за первые 2 с он сделал $N = 8$ оборотов.

Решение. Так как вращение диска, согласно заданному уравнению, происходит в одном и том же направлении, то $\varphi = 2\pi N = 16\pi$. При t=2c имеем $16\pi = 8k + 4\pi$. Отсюда находим $k = \frac{3\pi}{2}$ 1/с^2.

Тогда уравнение вращательного движения диска имеет вид

$$\varphi = \frac{3\pi t^3}{2} + \pi t^2.$$

Определяем угловую скорость диска

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{9\pi t^2}{2} + 2\pi t$$

и угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} = 9\pi t + 2\pi.$$

В момент времени $t = 4$ с угловая скорость и угловое ускорение

$$\omega = 72\pi + 8\pi = 80\pi \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon = 36\pi + 2\pi = 38\pi \text{ с}^{-2}.$$

Пример 2.2. Гребной винт судна, имеющий угловую скорость $\omega = 20\pi$ с$^{-1}$, останавливается через 20 с после начала движения вследствие сопротивления воды и трения в подшипниках. Считая вращение винта равнопеременным, определить угловое ускорение и число оборотов винта до остановки.

Решение. Так как вращение винта является равнопеременным, то уравнения его движения записываются следующим образом

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При $\varphi_0 = 0$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$

$$0 = \omega_0 + \varepsilon T, \quad \varphi = \omega_0 T + \frac{\varepsilon T^2}{2},$$

где T – время вращения винта до остановки. Отсюда находим

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{T} = -\pi \text{ с}^{-2}, \quad \varphi = -\frac{\omega_0 T}{2} = 200\pi.$$

Так как ω и ε имеют разные знаки, то вращение является равнозамедленным.

До остановки винт сделал $N = \dfrac{\varphi}{2\pi}$ = 100 оборотов.

Пример 2.3.

Груз P подвешен на нерастяжимой нити, намотанной на барабан лебедки (рис. 2.1). Барабан радиусом r = 0,2 м жестко скреплен с шестерней 1 радиуса r_1 = 0,3 м и имеет с ней общую неподвижную ось вращения O_1. Шестерня находится в зацеплении с шестерней 2 радиуса r_2 = 0,15 м, которая приводится во вращение вокруг неподвижной оси O_2 жестко связанной с ней рукояткой O_2A длиной l = 0,25 м. Найти скорость и ускорение конца A рукоятки в момент времени, когда груз P опустился на высоту h = 0,9 м, если он движется по закону $x = 1 + 0{,}4t^2$ (x – в м, t – в с).

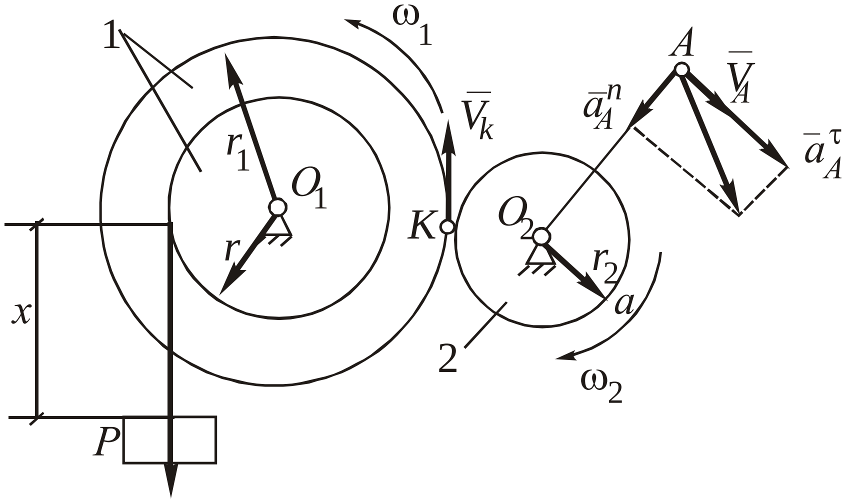


Рис. 2.1

Решение. В начале движения при t = 0 координата груза равна x_0 = 1 м. Когда он опустился на высоту h = 0,9 м, она стала x_1 = 1 + 0,9 = 1,9 м. Зная x_1, найдем время движения груза $x_1 = 1 + 0{,}4\, t_1^2 = 1{,}9$, отсюда t_1 = 1,5 с.

По закону движения груза найдем его скорость. $V = \dfrac{dx}{dt} = 0{,}8t$, вектор $\bar{V}$ направлен вниз ($V > 0$).

Так как нить нерастяжима, то все ее точки имеют скорости, равные скорости груза P. Следовательно, и точки обода барабана имеют ту же скорость. При опускании груза барабан и шестерня 1 вращаются вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1. Скорость точек обода барабана равна $V = \omega_1 r$, откуда $\omega_1 = \dfrac{V}{r} = \dfrac{0{,}8t}{r}$.

Если два тела в процессе движения касаются друг друга и в точке их соприкосновения отсутствует проскальзывание, то точки касания этих тел имеют одинаковые скорости. Поэтому скорости точки K шестерни 1 и 2 равны. При вращении шестерни 1 с угловой скоростью ω_1 шестерня 2 будет вращаться в противоположную сторону вокруг оси O_2 с угловой скоростью ω_2. При этом $V_k = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{0{,}8 r_1}{r \cdot r_2} t.$$

Угловая скорость рукоятки равна угловой скорости шестерни 2 ω_2, поэтому скорость конца рукоятки равна

$$V_A = \omega_2 l = \frac{0{,}8 r_1 l}{r \cdot r_2} t.$$

В момент времени $t_1 = 1{,}5$ с $V_A = 3$ м/с.

Чтобы найти ускорение точки A, надо найти угловое ускорение шестерни 2, а вместе с нею и рукоятки.

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{0{,}8r}{r \cdot r_2} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}5} = 8 \text{ с}^{-2},$$

а полное ускорение точки А равно

$$a_A = \sqrt{a_A^{\tau\,2} + a_A^{n\,2}} = l\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 2\sqrt{1 + 64t^4}.$$

В момент времени $t_1 = 1{,}5$ с это ускорение равно $a_A \approx 36$ м/с^2.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2\pi(t^2 + 10t)$. В момент времени $t = 5$ с найти угловую скорость и полное ускорение точки тела, отстоящей на 0,1 м от оси вращения, а также число оборотов, которое совершило тело.

Ответ: $\omega = 40\pi$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 4\pi$ с$^{-2}$, $V = 4\pi$ м/с, $a = 1579$ м/с^2, $N = 75$ об.

Задача 2.2. Тело начинает вращаться равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 4 с^{-2}$ из состояния покоя. В какой момент времени полное ускорение точки составляет с радиусом угол 45°?

Ответ: $t = \varepsilon^{-1/2}$ с.

Задача 2.3. Ротор турбины имел угловую скорость, соответствующую 3600 об/мин. Вращаясь затем равнозамедленно, он уменьшил вдвое свою угловую скорость за 12 с. Сколько оборотов сделал ротор за это время?

Ответ: 540 об.

Задача 2.4. Точка обода маховика в период разгона движется согласно закона $S = 3t^3 - 9t$ (S – в метрах, t – в секундах). Радиус маховика $R = 3$ м. Найти угловую скорость и угловое ускорение маховика, а также нормальное, касательное и полное ускорение точки обода маховика в тот момент времени, когда скорость этой точки равна $V = 27$ м/с. Сколько оборотов совершил маховик к этому моменту времени.

Ответ: $\omega = 9$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 12$ с$^{-2}$, $a_n = 243$ м/с^2, $a_\tau = 36$ м/с^2, $N = 32$ об.

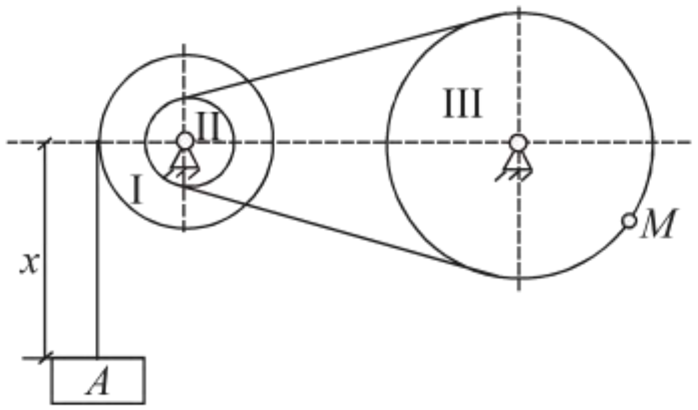
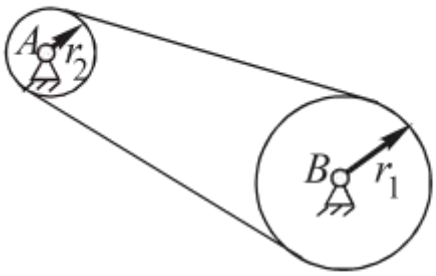


Рис. 2.2

Задача 2.5. Груз A подвешен на нерастяжимом тросе, намотанном на барабан I (рис. 2.2) и движется по закону $x = 20t^3$ (x – в сантиметрах, t – в секундах). С барабаном I жестко связан шкив II, соединенный бесконечным ремнем со шкивом III, $r_1 = 40$ см, $r_2 = 20$ см, $r_3 = 60$ см. Найти скорость и ускорение точки M шкива III в тот момент, когда скорость груза A равна 2,4 м/с.

Ответ: $V = 1{,}2$ м/с, $a = 2{,}68$ м/с^2.

Задача 2.6. Станок со шкивом A приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнем от шкива B электромотора (рис. 2.3); r_1 = 75 см, $r_3 = r_2$ = 30 см; после пуска в ход электромотора его угловое ускорение равно 0,4π с$^{-2}$. Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить через сколько времени угловая скорость станка равна 10π с$^{-1}$.



Ответ: t_1 = 10 с.

3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проработайте конспект лекции по теме «Плоскопараллельное движение твердого тела». Изучите по учебникам 3.1–3.3, 3.5–3.7 [1], 3.1.–3.3 [2], §90 [3], §§ 77–80[5].

3.1. Вопросы для повторения

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?

2. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?

3. На какие движения раскладывается плоскопараллельное движение твердого тела?

4. Зависят ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее вращение от выбора полюса?

5. Как по уравнениям движения найти скорость полюса и угловую скорость вращения?

6. Какие существуют способы определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении твердого тела?

7. Чему равна и как направлена скорость $\overline{V}_{BA}$ в равенстве $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$?

8. Как читается теорема о проекциях скоростей точек тела, на прямую, соединяющую эти точки?

9. Что называется мгновенным центром скоростей и как он определяется в различных случаях?

10. Как с помощью мгновенного центра скоростей определяются скорости точек тела и его угловая скорость?

11. Какое движение называется мгновенно поступательным движением? Где в этом случае находится мгновенный центр скоростей?

12. В чем заключаются свойства плана скоростей?

13. Какие минимальные данные необходимы для определения скорости любой точки тела при его плоскопараллельном движении?

14. Какая точка колеса, катящегося по неподвижной поверхности, имеет наибольшую скорость?

15. Как определить ускорение любой точки тела при его плоскопараллельном движении?

16. Чему равны и как направлены векторы $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ и $\bar{a}_{BA}^{n}$ в равенстве $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau}$?

17. Как определяется угловое ускорение тела при плоскопараллельном движении?

3.2. Примеры решения задач

Пример 3.1. Кривошип OA длиной 20 см кривошипно-ползунного механизма вращается равномерно с угловой скоростью, равной 180 об/мин (рис. 3.1). Длина шатуна AB = 80 см. Ползун B движется в горизонтальных направляющих. Найти скорость средней точки M шатуна в положении, указанном на рисунке.

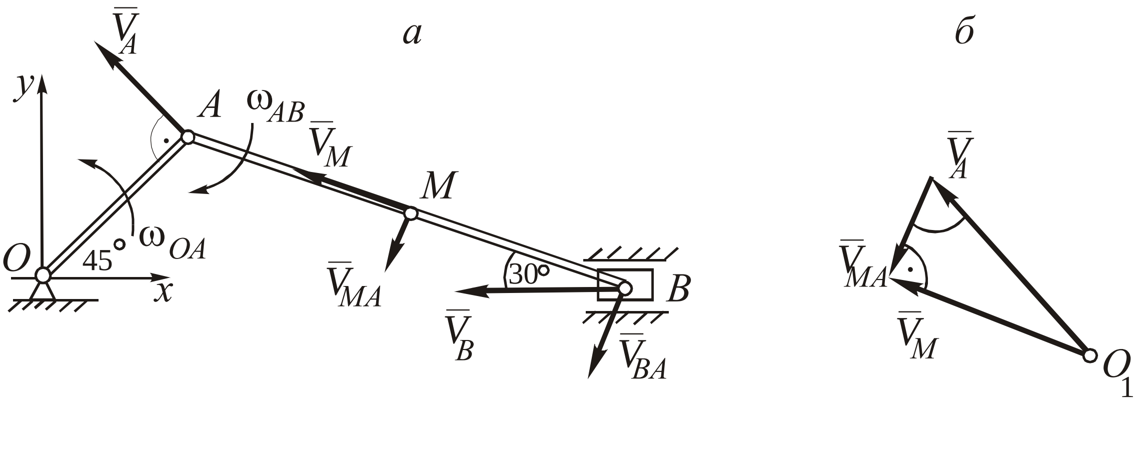


Рис. 3.1

Решение. Механизм состоит из трех звеньев: кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O, ползуна B, совершающего поступательное, прямолинейное движение, и шатуна AB, совершающего плоскопараллельное движение. Скорость точки A кривошипа, которая принадлежит и шатуну AB $\bar{V}_A \perp OA$ равна $V_A = \omega_{OA} OA$. Угловая скорость кривошипа OA равна $\omega_{OA} = \dfrac{\pi n}{30} = 6\pi$ с$^{-1}$, тогда $V_A = 6\pi 20 = 120\pi$ см/с = 3,76 м/с. Скорость точки M неизвестна ни по модулю, ни по направлению. Поэтому сначала найдем скорость точки B, взяв точку A за полюс. Тогда скорость точки B согласно теореме о скоростях точек при плоском движении равна

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \qquad (*)$$

Скорость $\bar{V}_{BA}$ направлена вдоль горизонтальных направляющих, а скорость вращения точки B вокруг A $\bar{V}_{BA} \perp BA$ и численно равна $\bar{V}_{BA} = \omega_{AB} BA$.

Для определения угловой скорости шатуна ω_{AB} равенство (*) спроектируем на ось, перпендикулярную к $\bar{V}_B$, т.е. на ось Oy. Из рис. 3.1, *а* получим

$$0 = V_A \cos 45 - V_{BA} \cos 30,$$

откуда

$$V_{BA} = \frac{V_A \cos 45}{\cos 30} = 3{,}08 \text{ м/с}$$

Угловая скорость шатуна равна

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{BA} = 3{,}85 \text{ с}^{-1}$$

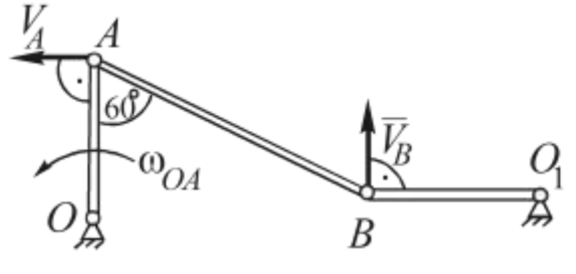
Исходя из направления вектора $\bar{V}_{BA}$ и положения полюса, точки A, заключаем, что шатун вращается по ходу часовой стрелки.

Определив угловую скорость шатуна, переходим к расчету скорости точки M. Принимая точку A за полюс, запишем $\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}$, где $V_{MA} = \omega_{AB} AM = 1{,}54$ м/с и $\bar{V}_{MA}$ направлен перпендикулярно к MA в сторону вращения шатуна. Построив треугольник скоростей (рис. 3.1, *б*), находим сумму векторов $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_{MA}$.

$$\bar{V}_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A V_{MA} \cos 75} = 3{,}98 \text{ м/с}.$$

Пример 3.2.

Кривошип OA длиной l четырехзвенного механизма вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O. Найти скорость точки B в положении механизма, изображенном на рис. 3.2.



Решение.

Механизм состоит из трех подвижных звеньев: кривошипов OA, O_1B и шатуна AB. Кривошипы вращаются вокруг неподвижных осей O и O_1 соответственно, а шатун AB совершает плоскопараллельное движение, и для определения скорости его точки B надо знать скорость какой-либо другой его точки. Очевидно, что такой точкой является точка A. $V_A = \omega_{OA} OA = \omega l$. Вектор $\overline{V}_A$ перпендикулярен к OA и направлен в сторону вращения кривошипа.

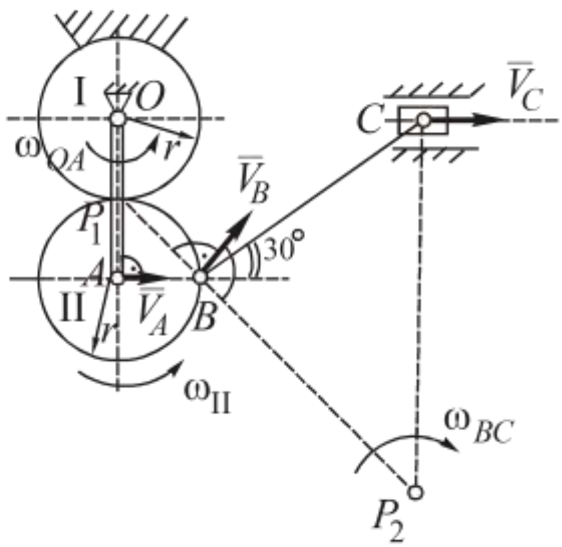
Точка B принадлежит кривошипу O_1B, и поэтому вектор ее скорости перпендикулярен O_1B, т.е. $\overline{V}_B \perp O_1B$.

Применяем теорему о проекциях скоростей двух точек тела при плоскопараллельном движении на прямую, соединяющую эти точки. В соответствии с этой теоремой имеем

$$V_A \cos 30 = V_B \cos 60, \text{ т.е. } V_B = \frac{V_A \cos 30}{\cos 60} = V_A tg 60 = \omega l \sqrt{2}.$$

Пример 3.3.

В механизме, изображенном на рис. 3.3, кривошип OA = 30 см вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω_{OA}= 0,5 с$^{-1}$. Зубчатое колесо II катится без скольжения по неподвижному колесу I и приводит в движение связанный с ним шатун BC = 50 см. Найти угловую скорость шатуна и скорость точек B и C в тот момент, когда радиус AB перпендикулярен к OA и составляет с шатуном BC угол 30°.



Решение.

В данном механизме колесо I неподвижно, кривошип ОА вращается вокруг неподвижной оси, ползун C движется поступательно и прямолинейно, колесо II и шатун BC совершают плоскопараллельное движение.

Так как колесо II катится без скольжения по неподвижному колесу I, то точка их касания P_1 является мгновенным центром скоростей колеса II. Исходя из движения кривошипа OA определим скорость точки A, принадлежащей и кривошипу, и колесу II:

Кривошип вращается против часовой стрелки и скорость точки A $\bar{V}_A \perp OA$ и направлена в сторону его вращения.

Зная положение мгновенного центра скоростей колеса II и скорость точки A, найдем скорость точки B:

$$\frac{V_A}{AP_1} = \frac{V_B}{BP_1}, \quad V_B = \frac{V_A BP_1}{AP_1} = \frac{V_A r\sqrt{2}}{r} = V_A\sqrt{2} = 21{,}2 \text{ см/с.}$$

Вектор $\bar{V}_B$ направлен перпендикулярно BP_1 в сторону вращения колеса II, скорость ползуна C направлена по горизонтали. Восстанавливая перпендикуляры к $\bar{V}_B$ и $\bar{V}_C$, находим мгновенный центр скоростей шатуна P_2. Из ΔBCP_2 находим $BP_2 = \dfrac{BC\sin 60}{\sin 45} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 61{,}2$ см, $CP_2 = \dfrac{BC\sin 75}{\sin 45} = 68$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_2} = \dfrac{30}{50\sqrt{3}} = 0{,}346 \text{ с}^{-1}$. Вращение шатуна происходит по ходу часовой стрелки. Далее определяем скорость ползуна C $V_C = \omega_{BC} CP_2 = 23{,}6$ см/с.

Вектор скорости $\bar{V}_C$ направлен в сторону вращения шатуна BC, вправо.

Пример 3.4. Найти ускорение точки B, угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB, а также угловое ускорение кривошипа BC четырехзвенного механизма в положении, указанном на рис. 3.4. Кривошип OA длиной 0,4 м вращается равномерно с угловой скоростью ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, длина шатуна AB = 0,8 м.

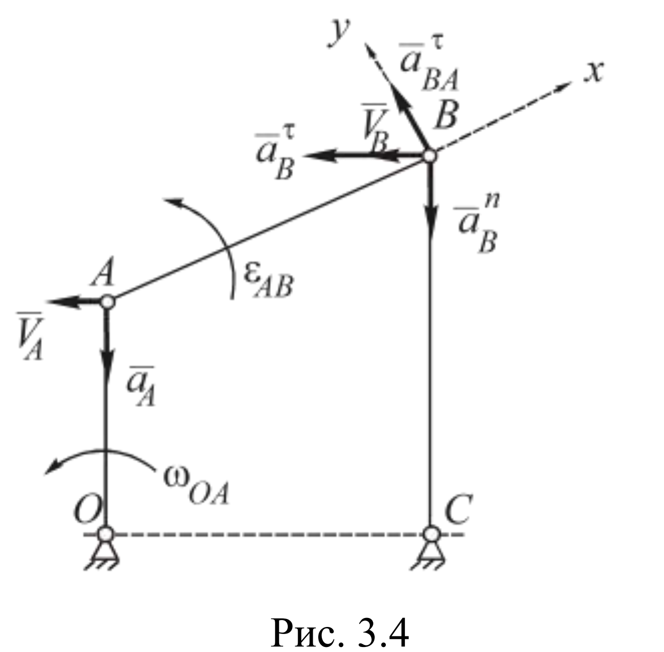


Рис. 3.4

Решение. Шатун AB совершает плоское движение, поэтому прежде, чем определять скорость и ускорение точки B шатуна, определим эти величины для точки A, которую в дальнейшем выберем за полюс. Точка A движется по окружности радиуса OA, вектор скорости $\overline{V}_A$ перпендикулярен AO, а его численное значение равно $V_A = \omega_{OA} OA = 2$ м/с, а т.к. $\omega_{OA} = \text{const}$,

то $a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 10$ м/с^2.

Точка B также движется по окружности радиусом BC и ее скорость $\overline{V}_B$ перпендикулярна к BC, а ускорение точки B состоит из двух составляющих: $\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau$.

Проведя перпенди-куляры к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, находим, что в данном положении механизма его мгновенный центр скоростей находится в бесконечности, т. е. шатун совершает мгновенно поступательное движение и его угловая скорость $\omega_{OA} = 0$, поэтому

$\overline{V}_B = \overline{V}_A$ $V_A = V_B = 2$ м/с.

По теореме об ускорениях точек при плоском движении твердого тела ускорение точки B равно

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau, \qquad (*)$$

где a_A = 10 м/с^2; $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 0$; $a_B^n = \dfrac{V_B^2}{BC} = \dfrac{4}{0{,}8} =$ 5 м/с^2; вектор $\overline{a}_B^n$ направлен к точке C, $\overline{a}_B^\tau$ перпендикулярно к BC, $\overline{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярно к AB.

Для определения $\overline{a}_B^\tau$ и $\overline{a}_{BA}^\tau$ равенство (*) спроецируем на оси Bx и By:

$$-a_B^n \cos 60 - a_B^\tau \cos 30 = -a_A \cos 60,$$

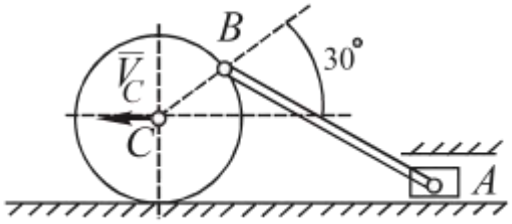
$$-a_B^n \cos 30 - a_B^\tau \cos 60 = -a_A \cos 30 + a_{BA}^\tau.$$

Из этих уравнений получаем a_B^τ = 2,89 м/с^2; a_{BA}^τ =5,78 м/с^2; $a_B = \sqrt{a_B^{n^2} + a_B^{\tau^2}} = 5{,}77$ м/с^2; $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a_{BA}^\tau}{BA} = 7{,}22$ с$^{-2}$; $\varepsilon_{BC} = \dfrac{a_B^\tau}{BC} = 3{,}61$ с$^{-2}$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1.

Колесо радиусом R = 0,2 м катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. Скорость центра колеса постоянна и равна V_C = 0,8 м/с. В точке B к колесу прикреплен шатун AB = 0,6 м, второй конец которого шарнирно связан с ползуном, скользящим в горизонтальном пазу на поверхности рельса (рис. 3.5). Найти угловые скорости колеса и шатуна, а также скорости точек A и B в изображенном на рисунке положении механизма.



Ответ: ω_k = 4 $с^{-1}$, ω_{AB} = 4/3 $с^{-1}$, V_B = 1,38 м/с, V_A = 1,68 м/с.

Задача 3.2. Подъем трубы производится при помощи талевого ступенчатого барабана A (рис. 3.6), вал которого делает 10 об/мин. Найти скорость подъема трубы, если r = 5 см, R = 15 см и участки тросов BE и DC можно считать вертикальными.

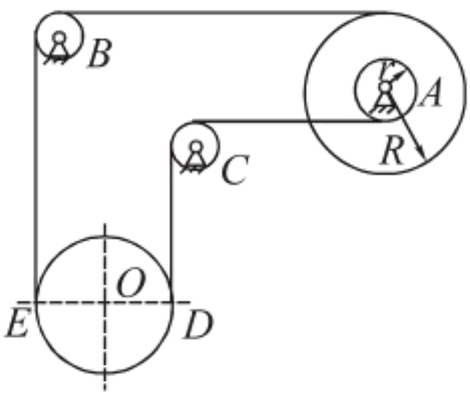


Рис. 3.6

Ответ: V_0 = 5,24 см/с.

Задача 3.3. С ползу-ном B линейки эллипсо-графа BC шарнирно соединен шатун AB криво-шипно-ползунного меха-низма (рис. 3.7). Ползун C движется вниз со скоростью $V_C = \sqrt{3}$ м/с, BC = AB = 1 м, OA = 0,5 м. Найти скорости точек B и A, а также угловые скорости линейки BC, шатуна AB и кривошипа OA в положении механизма, изображенном на рисунке.

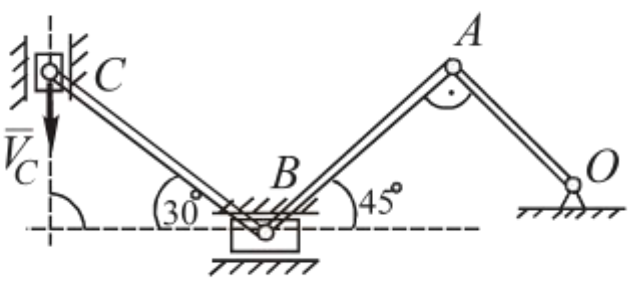


Рис. 3.7

Ответ: V_B = 1 м/с, $V_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ м/с, ω_{BC} = 2 $с^{-1}$, ω_{AB} = 0,7 $с^{-1}$, ω_{OA} = 1,41 $с^{-1}$.

Задача 3.4.

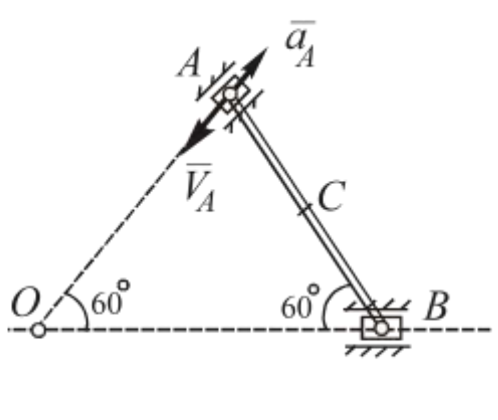


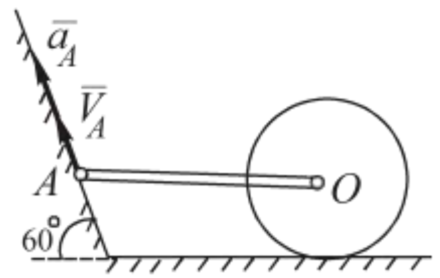
Рис. 3.8

Ползуны A и B, соединенные стержнем длиною AB = 2 м, движутся вдоль направляющих, образующих между собою угол 60° (рис. 3.8). Найти ускорение ползуна B и середины C стержня в момент когда $OA = OB$, если известно, что в этот момент времени ползун A движется со скоростью $V_A = \sqrt{3}$ м/с и ускорением a_A = 2 м/с^2.

Ответ: a_B = 11 м/с^2, a_C = 5,07 м/с^2.

Задача 3.5.

Конец A стержня OA, соединенного с центром колеса, катящегося по горизонтальному пути без скольжения, движется по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 60°. В тот момент, когда стержень горизонтален, V_A = 2 м/с^2, $a_A = 2\sqrt{2}$ м/с^2 (рис. 3.9). Длина стержня AO = 2 м, радиус колеса R = 0,5 м. Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также скорость и ускорение центра O колеса.



Ответ: ω_k = 1,15 с$^{-1}$, V_0 = 1 м/с, ε_k = 1,8с$^{-2}$, a_0 = 4,77 м/с^2.

4. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Проработайте конспект лекции по теме "Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки". Изучите по учебникам 4.1, 4.5 [1], 4.1, 4.2 [2].

4.1. Вопросы для повторения

1. Какими параметрами определяется положение твердого тела, одна из точек которого неподвижна?
2. Как формулируется теорема Эйлера?
3. Что называется мгновенной осью вращения?
4. Как определяется угловая скорость и угловое ускорение?
5. Как направлен вектор угловой скорости тела при сферическом движении?
6. Почему направления углового ускорения и угловой скорости

при движении твердого тела с одной неподвижной точкой не совпадают?

7. Как определяется скорость точки при сферическом движении?

8. Как определяются и как называются составляющие ускорения точки тела при сферическом движении?

4.2. Примеры решения задач

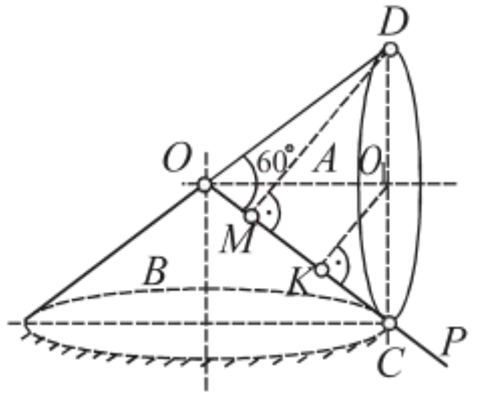


Рис. 4.1

Пример 4.1.

Конус A обегает без скольжения 120 раз в минуту неподвижный конус B (рис. 4.1). Высота конуса OO_1 = 10 см. Определить мгновенную угловую скорость конуса A и скорость его точки D.

Решение.

При заданных значениях углов ось OO_1 конуса A движется в горизонтальной плоскости, а точка O_1 описывает окружность радиусом OO_1 = 10 см. Конус A обегает 120 раз в минуту неподвижный конус B, так что скорость точки O_1 равна

$$V_{O_1} = 2\pi OO_1 \frac{120}{60} = 40\pi \text{ см/с.}$$

Так как движение конуса A происходит без скольжения по неподвижному конусу B, то мгновенной осью вращения конуса A является прямая OC. Мгновенная угловая скорость конуса A равна $\omega = \dfrac{V_{O_1}}{OO_1} = \dfrac{40\pi}{OO_1 \sin 30} = 8\pi \text{ с}^{-1}$, а скорость точки D конуса A равна $V_D = \omega .\, DM = 80\pi$ см/с.

Пример 4.2. Коническая шестеренка с углом при вершине $2\alpha = 60°$ и радиусом основания r = 20 см катится по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения (рис. 4.2). Скорость центра основания V_C = 60 см/с. Определить угловую скорость шестеренки, ее угловое ускорение и скорости точек A и B.

Решение. Движение катящейся шестеренки является сферическим, т.к. вершина O остается неподвижной. Это движение в каждый момент времени является вращательным вокруг мгновенной оси вращения. Мгновенная ось вращения шестеренки OP совпадает с образующей OA, т.к. все ее точки лежат в неподвижной плоскости.

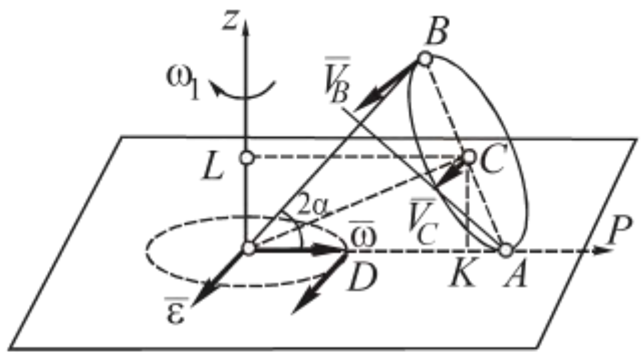


Рис. 4.2

Модуль угловой скорости вращения вокруг мгновенной оси определим по заданной скорости точки C.

$$V_C = \omega CK,$$

где CK – расстояние точки C до мгновенной оси вращения.

$CK = CA\sin 60 = \mathrm{r}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} = 17{,}3$ см. Тогда $\omega = \dfrac{V_C}{CK} = 3{,}46\ \text{с}^{-1}$.

Направлен вектор $\overline{\omega}$ по мгновенной оси вращения в ту сторону, откуда видно, что шестерня вращается против часовой стрелки. Направление вращения определяется вектором скорости точки с $\overline{V}_C$.

Вектор углового ускорения направлен по касательной к годографу вектора $\overline{\omega}$. При качении шестеренки по горизонтальной плоскости вектор $\overline{\omega}$ перемещается в этой плоскости, вращаясь вокруг оси Oz. Так как его модуль не меняется, то конец вектора описывает окружность, лежащую в горизонтальной плоскости. Угловая скорость вращения вокруг оси Oz ω_1 определяется как угловая скорость вращения шестеренки вокруг оси Oz. Эту скорость определим также по заданной скорости точки C.

$$V_C = \omega_1 CL,$$

где $CL = OC\cos 30 = OA\cos 30\cdot\cos 30 = 2r\cos^2 30 = 30$ см.

Тогда $\omega_1 = \dfrac{V_C}{CL} = 2\ \text{с}^{-1}$.

Угловое ускорение ε шестеренки определим как вращательную скорость точки, радиус вращения которой равен ω, вращающуюся вокруг оси O_2 с угловой скоростью ω_1.

$$\varepsilon = \omega_1\omega = 2\cdot 3{,}46 = 6{,}92\ \text{с}^{-2}.$$

Вектор $\bar{\varepsilon}$ лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к вектору ω.

Скорость точки A, лежащей на мгновенной оси вращения, равна нулю, т. е. $V_A = 0$.

Скорость точки B определим как вращательную вокруг мгновенной оси:

$$V_B = \omega BK_1, \quad BK_1 = 2CK = 2\cdot 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ см},$$

$$V_B = 2\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3} = 120 \text{ см/с} \left(\frac{V_B}{V_C} = \frac{BK_1}{CK} = 2\right).$$

4.3. Задачи для самостоятельного решения

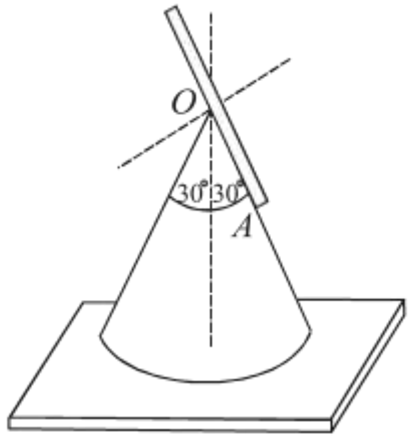


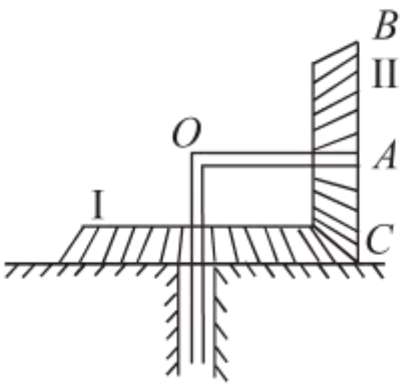
Рис. 4.3

Задача 4.1. Диск OA радиуса $R = 4\sqrt{3}$ см, вращаясь вокруг неподвижной точки O, обкатывает неподвижный конус с углом при вершине, равным 60° (рис. 4.3). Найти угловую скорость вращения диска вокруг его оси симметрии, если ускорение точки A диска по модулю постоянно и равно 48 см/с^2.

Ответ: $\omega = 2$ с$^{-1}$.

Задача 4.2. Коническая шестерня II, находящаяся в зацеплении с неподвижной шестерней, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся с угловой скоростью 90 об/мин вокруг вертикальной оси (рис. 4.4). $OA = AC = 5$ см. Определить скорости точек B и C, концов вертикального диаметра.

Ответ: $V_C = 0$; $V_B = 30$ см/с.



Задача 4.3. Волчок вращается вокруг неподвижной точки согласно уравнениям: $\varphi = 6t$, $\psi = \frac{\pi}{2} - t$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ (t – в секундах). Найти угловую скорость и угловое ускорение волчка.

Ответ: $\omega = \sqrt{31}$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 3\sqrt{2}$ с$^{-2}$.

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

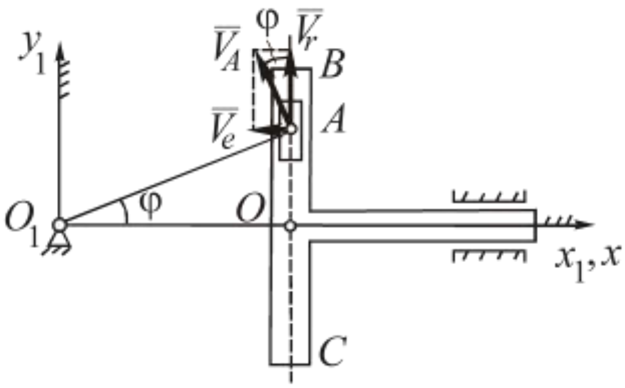
Проработайте конспект лекции по теме "Сложное движение точки". Изучите по учебникам 5.2–5.4 [1], 5.1–5. [2] и §§ 111–114 [3].

5.1. Вопросы для повторения

1. Что называется абсолютным, относительным и переносным движением тела?
2. Что называется относительной и абсолютной скоростью точки, относительным и абсолютным ускорением?
3. Дайте определение переносной скорости точки и ее переносного ускорения.
4. В чем заключается теорема сложения скоростей?
5. Как определяется абсолютное ускорение точки?
6. Чему равно ускорение Кориолиса? Чему равен его модуль? В каком случае ускорение Кориолиса равно нулю?
7. Как направлен вектор ускорения Кориолиса?
8. Как определяется модуль абсолютного ускорения?

5.2. Примеры решения задач

Пример 5.1. Кривошип OA длиной 12 см вращается по закону $\varphi = \dfrac{\pi}{3} t^2$ (t – в секундах) и приводит в возвратно-поступательное движение кулису BC (рис. 5.1). Определить скорость кулисы в момент времени t = 5 с.



Решение. Свяжем подвижную систему координат Oxy с кулисой. Тогда переносным движением точки A является движение кулисы, а относительным движением этой точки является ее движение вместе с камнем относительно кулисы. Тогда движение точки A относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$ является абсолютным движением. Согласно теореме сложения скоростей

$$\overline{V}_{a_A} = \overline{V}_{e_A} + \overline{V}_{r_A}.$$

Абсолютная скорость точки A равна

$$V_{a_A} = \omega O_1 A,$$

где ω – угловая скорость кривошипа O_1A

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{3}2t \ \text{с}^{-1} \text{ и при } t = 5 \text{ с} \quad \omega = \frac{10}{3}\pi \ \text{с}^{-1}.$$

Тогда $V_{a_A} = \frac{10}{3}\pi \cdot 12 = 40\pi,$ см/с. Вектор абсолютной скорости $\overline{V}_{OA}$ направлен перпендикулярно кривошипу O_1A.

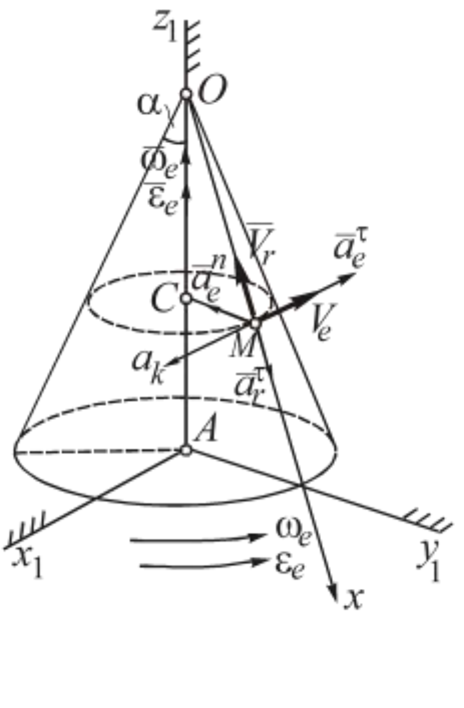
Из параллелограмма скоростей (рис. 5.1) имеем

$$V_{e_A} = V_{a_A} \sin\varphi = 40\pi \sin\varphi$$

и при $t = 5$ с $\quad V_e = V_{e_A} \sin\frac{\pi}{3}t^2 = 40\pi \sin\frac{2}{3}\pi = 40\pi\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\pi\sqrt{3}$ см/с.

Так как кулиса движется поступательно, то достаточно определить скорость любой ее точки. Таким образом, скорость кулисы равна $V_k = 20\pi\sqrt{3}$ см/с.

Пример 5.2. Точка M движется по образующей кругового конуса (рис. 5.2) так, что расстояние $OM = S = 12 - 8t + 2t^2$ (S – в сантиметрах, t – в секундах). Конус вращается вокруг своей оси OA по закону $\varphi = t^2$ (φ – в радианах, t – в секундах). Угол при вершине конуса $\alpha = 30°$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.



Решение.

Свяжем подвижную систему координат Ox с конусом (рис. 5.2), тогда переносным движением точки A является вращение конуса вокруг оси Az_1 по закону $\varphi = t^2$. Угловая скорость этого вращения $\omega_e = \dot{\varphi} = 2t \ \text{с}^{-1}$ при $t_1 = 1$ с, $\omega_e = 2 \ \text{с}^{-1}$, а угловое ускорение $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 2 \ \text{с}^{-2}$. Так как ω_e и ε_e положительны, то векторы $\overline{\omega}_e$ и

$\bar{\varepsilon}_e$ направлены в сторону положительного направления оси Az_1.

Относительным движением точки M является ее прямолинейное движение по образующей конуса по закону $OM = S = 12 - 8t + 2t^2$, причем в указанный момент времени $t_1 = 1$ с точка M находится на расстоянии $OM = 6$ см от вершины конуса. Согласно теореме о сложении скоростей абсолютная скорость точки M равна $\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r$.

Переносная скорость $\bar{V}_e$ – это скорость точки конуса, с которой в данный момент времени совпадает точка M, а так как конус вращается вокруг оси Az_1, то

$$V_e = \omega_e MC = \omega_e OM \sin\alpha = 2t(12 - 8t + 2t^2)\sin 30.$$

При $t = 1$ с $V_e = 6$ см/с. Вектор $\bar{V}_e$ перпендикулярен радиусу MC и направлен в сторону вращения конуса.

Относительная скорость точки M $\bar{V}_r$ направлена по образующей конуса и численно равна $V_r = \dot{S} = -8 + 4t$.

При $t = 1$ с $V_r = -4$ см/с. Поскольку модуль скорости $V_r < 0$, то вектор $\bar{V}_r$ направлен в сторону уменьшения координаты S, т.е. к вершине конуса.

Относительная и переносная скорость взаимно перпендикулярны, поэтому модуль абсолютной скорости равен

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 7{,}2 \text{ см/с}.$$

Согласно теореме о сложении ускорений, абсолютное ускорение точки M равно

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_k. \qquad (*)$$

Переносное ускорение $\bar{a}_e$ точки M равно ускорению той точки конуса, с которой в данный момент совпадает точка M; следовательно, оно определяется как ускорение при вращении конуса вокруг оси Az_1, т.е.

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau,$$

где $a_e^n = \omega_e^2 MC = 12$ см/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_e MC = 6$ см/с^2. Вектор $\bar{a}_e^n$ направлен к оси вращения вдоль MC, а вектор $\bar{a}_e^r$ перпендикулярен радиусу MC и направлен в сторону переносного углового ускорения.

Так как относительное движение точки является прямолинейным, то $\bar{a}_r^n = 0$ и относительное ускорение точки M равно только касательному, т.е.

$$a_r = a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 4 \text{ см/с}^2.$$

Так как $a_r > 0$, а $V_r < 0$, то вектор $\bar{a}_r$ направлен в сторону, противоположную относительной скорости.

Ускорение Кориолиса $\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \cdot \bar{V}_r$ перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$, т. е. плоскости y_1Az_1, и направлено в ту сторону, откуда поворот вектора $\bar{\omega}_e$ к $\bar{V}_r$ видим происходящим против хода часовой стрелки, т. е. направление вектора $\bar{a}_k$ совпадает с положительным направлением оси Ax_1. Численно ускорение Кориолиса равно

$$a_k = 2|\bar{\omega}_e||\bar{V}_r|\sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r) = 2 \cdot 2 \cdot 4 \sin 30 = 8 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютно ускорения найдем по его проекциям на оси $Ax_1y_1z_1$, для этого равенство (*) спроектируем на эти оси:

$$a_{a_x} = -a_e^{\tau} + a_k = 2 \text{ см/с}^2,$$

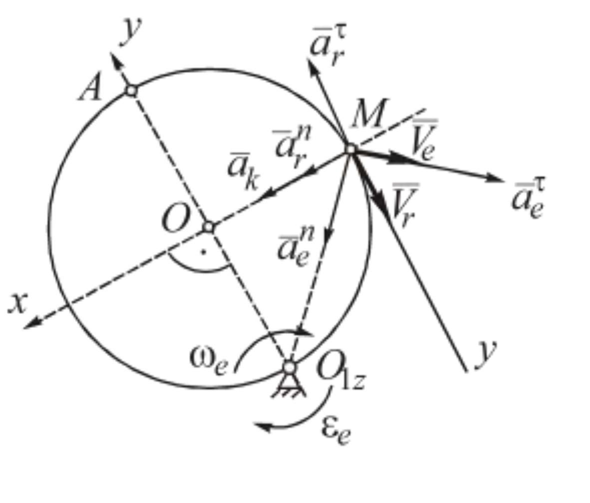
$$a_{a_y} = -a_e^{n} + a_r \cos 60 = -10 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{a_z} = -a_r \cos 30 = -2\sqrt{3} \text{ см/с}^2,$$

Модуль абсолютного ускорения точки M равен

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2 + a_{a_z}^2} = 10{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Пример 5.3. Эксцентрик, представляющий собой круглый диск радиуса R = 0,2 м, вращается с угловой скоростью $\omega = 2t$, с$^{-1}$ вокруг оси O_{1z}, проходящей через край диска, перпендикулярно к плоскости диска. По окружности диска скользит штифт M, закон движения штифта $\overset{\cup}{AM} = S = 0{,}2\pi \sin \frac{\pi}{6} t$ (рис. 5.3). В момент времени t = 1 с найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение штифта M.



Решение. Подвижную систему координат Oxy свяжем с диском. Тогда переносным движением штифта является вращение диска вокруг оси O_{1z} с угловой скоростью $\omega_e = 2t$ с$^{-1}$, а относительным – движение штифта M по окружности радиуса R = 0,2 м с центром в точке O. Определим положение точки M на относительной траектории (на ободе диска) в указанный момент времени t_1.

$$AM = S_1 = 0{,}2\pi \sin\frac{\pi}{6}t = 0{,}2\pi\frac{1}{2} = 0{,}1\pi \text{ м.}$$

Следовательно, в этот момент времени $\angle AOM = \dfrac{S_1}{R} = \dfrac{\pi}{2} = 90°$.

Абсолютная скорость точки M: $\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r$.

Численное значение переносной скорости равно

$$V_e = \omega_e O_1 M,\ O_1M = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2},\ V_e = 2tR\sqrt{2} \text{ м/с,}$$

а при t_1 = 1 с V_e = 0,56 м/с.

Вектор переносной скорости направлен перпендикулярно O_1M. Относительная скорость:

$$V_r = \dot{S} = 0{,}2\pi\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t, \text{ при } t_1 = 1 \text{ с } V_r = 0{,}28 \text{ м/с.}$$

Вектор относительной скорости $\overline{V}_r$ направлен перпендикулярно OM.

Модуль абсолютной скорости штифта M с учетом направлений ее составляющих (рис. 5.3) равен

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_rV_e\cos 45} = 0{,}84 \text{ м/с.}$$

Абсолютное ускорение определим по теореме об ускорениях точки в сложном движении:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_k. \qquad (**)$$

Величина переносного нормального ускорения:

$$a_e^n = \omega_e^2 O_1M = 1{,}13 \text{ м/с}^2.$$

Величина переносного касательного ускорения:

$$a_e^\tau = \varepsilon_e O_1M, \text{ где } \varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 2 \text{ с}^{-2},\ a_e^\tau 0{,}56 \text{ м/с}^2.$$

Модуль относительного нормального ускорения:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{dt} = 0{,}39 \text{ м/с}^2.$$

Величина относительного касательного ускорения:

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = -0{,}2\frac{\pi}{36}\sin\frac{\pi}{6}t = -0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что вектор a_r^τ направлен в сторону, противоположную вектору $\bar{V}_r$.

Численно значение ускорения Кориолиса:

$$a_k = 2|\bar{\omega}_e||\bar{\varepsilon}_e|\sin\left(\bar{\omega}_e \hat{,} \bar{V}_r\right) = 2\cdot 2\cdot 0{,}28\sin 90 = 1{,}12 \text{ м/с}^2.$$

Направления всех векторов составляющих ускорений показаны на рис. 5.3.

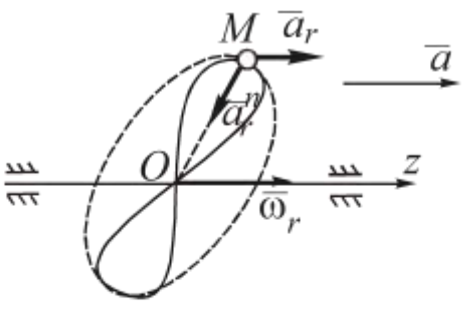
Для определения численного значения абсолютного ускорения равенство (**) спроецируем на оси x и y:

$$a_{a_x} = a_r^n + a_k + a_e^n\cos 45 - a_e^\tau\cos 45 = 1{,}9 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{a_y} = -a_r^\tau + a_e^n\cos 45 + a_e^\tau\cos 45 = -1{,}1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2} = \sqrt{(1{,}9)^2 + (1{,}1)^2} = 2{,}19 \text{ м/с}^2.$$

Пример 5.4. В вагоне, движущемся по прямолинейному пути с ускорением a = 4 м/с^2, стоит вентилятор, лопасти которого совершают 600 об/мин. Определить абсолютное ускорение точки вентилятора, отстоящей от оси вращения на расстоянии h = 0,08 м, если ось вентилятора параллельна движению вагона (рис. 5.4).



Решение. Абсолютное движение точки M лопасти вентилятора является сложным. Точка M вместе с лопастью вращается вокруг своей оси, и движется вместе с вагоном с ускорением равным a = 4 м/с^2. Свяжем подвижную систему координат с вагоном, тогда переносным движением точки M является ее поступательное движение вместе с вагоном, а вращение вместе с лопастью вентилятора – относительным.

Для определения абсолютного ускорения применяем теорему о сложении ускорений:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

Так как поезд движется поступательно и прямолинейно, то ускорения всех точек поезда одинаковые и равны a = 4 м/с^2 поэтому $a_e = a$ = 4 м/с^2 и направлено по движению поезда.

Относительное ускорение точки M вентилятора определим как ускорение точки вращающегося тела:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau,\ a_r^n = \omega_e^2 R,\ a_r^\tau = \varepsilon_e R,$$

где ω_e – угловая скорость вентилятора, ε_e – угловое ускорение, $R = h$ = 0,08 м.

$$\omega_e = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 600}{30} = 20\pi\ \text{с}^{-1};\ \varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0;\ a_r^n = (20\pi)^2 0{,}08 = 315{,}5\ \text{м/с}^2$$

и направлено по радиусу к оси вращения вентилятора.

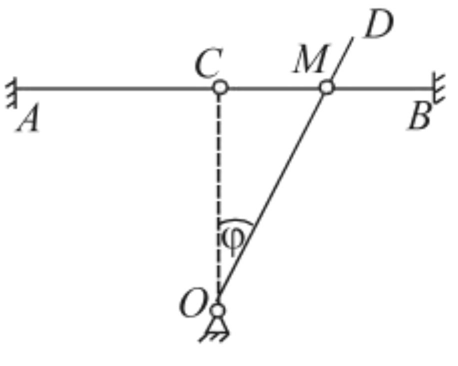
Ускорение Кориолиса равно нулю, т.к. переносное движение точки M является поступательным.

Векторы $\bar{a}_e$ и $\bar{a}_r^n$ взаимно перпендикулярны (рис. 5.4) , поэтому

$$a_a = \sqrt{(a_e)^2 + \left(a_r^n\right)^2} = 316\ \text{м/с}^2.$$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1. Колечко M соединяет неподвижный стержень AB и стержень OD (рис. 5.5), вращающийся вокруг точки O по закону $\varphi = \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t$. Определить абсолютную скорость колечка M в момент времени t_1 = 1 с, если CO = 54 см.



Ответ: $V_a = 2\pi^2\sqrt{3}$ см/с.

Задача 5.2. Диск радиуса r = 20 см равномерно вращается в своей плоскости с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{5}$ с$^{-1}$ вокруг точки O, лежащей на его ободе. По ободу диска в направлении, противоположном его вращению, движется точка M по закону $OM = S = 2\pi t^2$ см. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t = 10 с.

Ответ: π^2 см/с^2.

Задача 5.3. Точка M движется по закону $OM = S = 4\pi t$ см по ободу диска радиусом 8 см, который вращается согласно уравнению $\varphi = \pi t$ вокруг оси, направленной по касательной в точке O к ободу диска. Найти абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 2$ с.

Ответ: $a_a = 18\pi^2$ см/с^2.

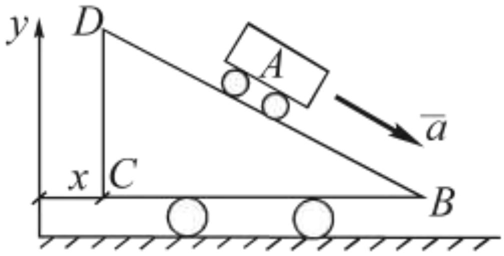


Рис. 5.6

Задача 5.4. Тележка A спускается с ускорением $a = 18$ см/с^2 вдоль наклонной грани призмы BCD, движущейся вправо по закону $x = 6t^2$ (x – в сантиметрах, t – в секундах) (рис. 5.6). Определить абсолютное ускорение тележки, если $BC = 160$ см, $CD = 120$ см.

Ответ: $a_a = 28{,}5$ см/с^2.

Задача 5.5. Цилиндр радиуса 6 см вращается вокруг своей оси, имея в данный момент угловую скорость $\omega = 2$ с$^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 8$ с$^{-2}$. Вдоль образующей цилиндра движется точка M со скоростью $V = 4$ см/с и ускорением $a = 48$ см/с^2. Определить абсолютное ускорение точки M.

Ответ: 72 см/с^2.

6. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проработайте конспект лекции по теме "Сложное движение твердого тела". Изучите по учебникам 6.1-6.3 [1], 6.1 [2] и § 92–94 [4].

6.1. Вопросы для повторения

1. Каким по виду является движение твердого тела, состоящее из нескольких поступательных движений?
2. Каким по виду является результирующее движение при сложении вращательных движений?
3. Как определяется угловая скорость тела, вращающегося вокруг параллельных осей в одну и разные стороны?
4. Что называется парой вращений?
5. Как определяется по величине и направлению скорость любой точки тела, вращающегося вокруг параллельных осей с одинаковыми

по модулю угловыми скоростями и направленными в противоположные стороны?

6. Каким по виду является движение твердого тела, вращающегося вокруг пересекающихся осей? Чему равна его угловая скорость?

6.2. Примеры решения задач

Пример 6.1. Механизм (рис. 6.1) состоит из двух зубчатых колес I и II радиусов r_1 и r_2 и водила OO_1, вращающегося с угловой скоростью ω. Колесо I неподвижно, колесо II свободно надето на палец O_1 водила. Найти абсолютную угловую скорость ω_2 колеса II и его угловую скорость относительно водила.

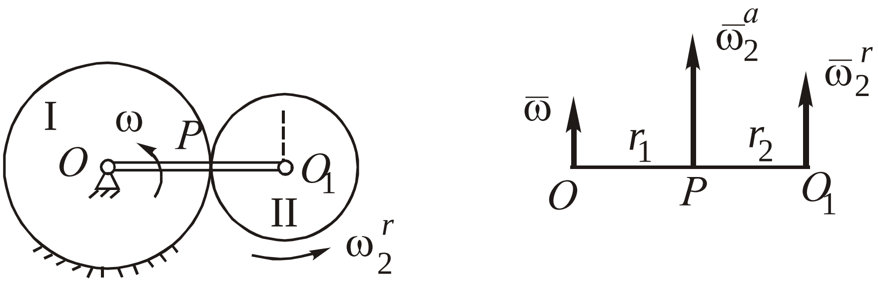


Рис. 6.1

Решение. Точка P колеса II в данный момент неподвижна, т. к. является точкой сцепления с неподвижным колесом I. Эта точка является мгновенным центром скоростей колеса II; иначе говоря, через точку P проходит мгновенная ось вращения колеса II.

Вращение водила является переносным движением для колеса II. Тогда $\omega_2^a = \omega_2^e + \omega_2^r$ или $\omega_2^a = \omega + \omega_2^r$. Кроме того $\dfrac{\omega}{\omega_2^r} = \dfrac{r_2}{r_1}$, откуда

$$\omega_2^r = \omega\frac{r_1}{r_2}, \text{ а } \omega_2 = \omega + \omega_2^r = \omega + \omega\frac{r_1}{r_2} = \omega\frac{(r_2 + r_1)}{r_2}.$$

Пример 6.2. Редуктор скорости состоит из трех зубчатых колес: I, II, III – радиусов r_1, r_2 и r_3 и водила OO' (рис. 6.2).

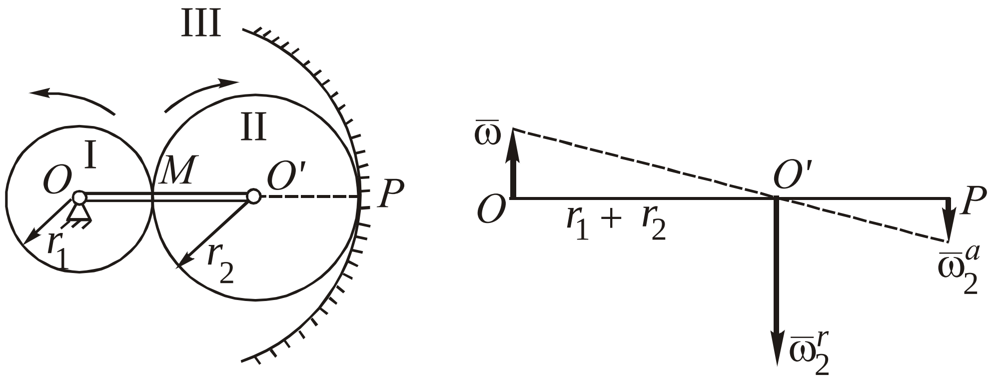


Рис. 6.2

Колесо I вращается вокруг неподвижной оси O, колесо II свободно насажено на водило OO' и сцепляется с колесом I и неподвижным колесом III. Какова должна быть угловая скорость ω вращения водила, чтобы колесо I вращалось с угловой скоростью ω_1? Чему равна при этом угловая скорость ω_2^r колеса II в его относительном движении по отношению к колесу I?

Решение. Точка P – мгновенный центр скоростей колеса II, иначе говоря, через точку P проходит мгновенная ось вращения колеса II. Так как составляющие вращательных движений вокруг параллельных осей направлены в разные стороны, то абсолютная угловая скорость колеса II $\omega_2^a = -\omega_2^e + \omega_2^r$ или $\omega_2^a = -\omega_2^r - \omega$. Кроме того $\dfrac{\omega}{\omega_2^r} = \dfrac{r_2}{r_1 + 2r_2}$. Тогда $\omega_2^r = \dfrac{r_1 + 2r_2}{r_2}\omega$ и $\omega_2^a = \dfrac{r_1 + 2r_2}{r_2}\omega - \omega = \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\omega.$

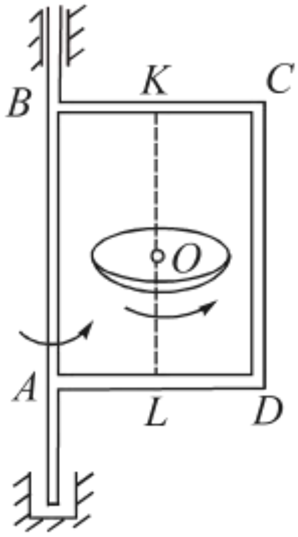
Скорость точки M сцепления колес I и II равна $V_M = 2r_2\omega_2^a = 2(r_1 + r_2)\omega.$

С другой стороны $V_M = r_1\omega_1$, ω_1 – угловая скорость колеса I. Тогда $2(r_1 + r_2)\omega = r_1\omega_1$, откуда угловая скорость водила ω равна $\omega = \dfrac{r_1}{2(r_1 + r_2)}\omega_1.$

Окончательно угловая скорость ω_2^r колеса II в его относительном движении по отношению к колесу I определится следующим образом

$$\omega_2^r = \frac{(r_1 + 2r_2)}{r_2}\omega = \frac{(r_1 + 2r_2)r_1}{2r_2(r_1 + r_2)}\omega_1.$$

6.3. Задачи для самостоятельного решения



Задача 6.1. Диск радиуса 4 см (рис. 6.3) вращается в своей плоскости вокруг оси *KL* с угловой скоростью π $с^{-1}$, а рама *ABCD* вращается в том же направлении с угловой скоростью 1,5 π $с^{-1}$. *AL* = *LK* = 5 см. Определить угловую скорость абсолютного движения диска.

Ответ: $\omega_a = 2{,}5\ с^{-1}$.

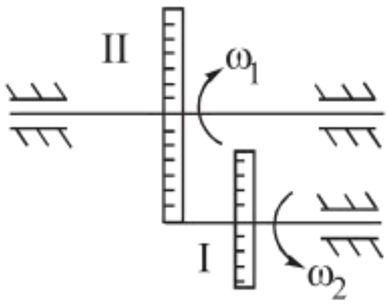


Рис. 6.4

Задача 6.2. Диск I, ось которого прикреплена к ободу диска II, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью 4 π $с^{-1}$ (рис. 6.4). Диск II вращается в противоположном направлении с угловой скоростью π $с^{-1}$. Радиус диска I равен 10 см, а диска II – 15 см. Определить угловую скорость абсолютного движения диска I.

Ответ: $\omega_a = 3\pi\ с^{-1}$.

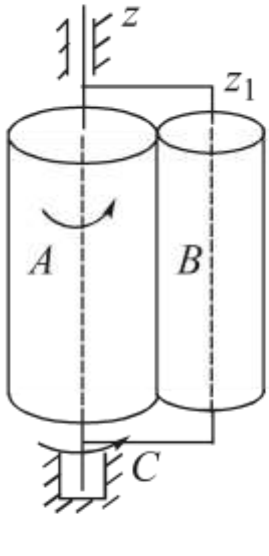


Рис. 6.5

Задача 6.3. Угловые скорости цилиндра *A* радиуса 12 см и рамы *C* равны 7π $с^{-1}$ и 4π $с^{-1}$ соответственно (рис. 6.5). Цилиндр *A* и рама *C* сообщают движение цилиндру *B* радиуса 9 см. Доказать, что при одинаковых направлениях вращения рамы и цилиндра и отсутствии проскальзывания цилиндр *B* движется поступательно. Найти скорость этого движения.

Ответ: *V* = 84 π см/с.

Основная учебная литература

1. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник [Электронный ресурс] / Н. Н. Никитин. – 8 изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 720 с. : ил. Режим доступа:
http://e.lanbook.com/books/element.php?p11cid=25&p11id=1807
http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90337&type=utchposob:common

2. Хямяляйнен, В. А. Кинематика: учеб. пособие / В. А. Хямяляйнен, А. С. Богатырева, Р. Ф. Гордиенко. – Кемерово, 2009.– 72 с.

3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Москва: Интеграл-Пресс, 2006. – 597 с

Дополнительная учебная литература

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика: учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 11-е изд., стер. – Санкт-Петербург.: Лань, 2010. – 672 с.: ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=84. – загл. с экрана.

5. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. – Москва : Высш. шк., 2005. – 416 с.

6. Хямяляйнен, В. А. Сборник задач по теоретической механике / В. А. Хямяляйнен, А. С. Богатырева, Р. Ф. Гордиенко; КузГТУ. – 3-е изд., доп. и перераб. – Кемерово, 2013. – 83 с.
http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90996&type=utchposob:common

Раздел 3. ДИНАМИКА

Авторы: А. И. Шиканов Р. Ф. Гордиенко К. Л. Дудко

Введение

Динамический анализ механизмов имеет своей целью изучение методов определения сил, действующих на его звенья во время движения, и взаимосвязи этих сил с движением и массами звеньев.

Вопрос определения сил, действующих на звенья механизма или на их отдельные части, имеет большое практическое значение. Это позволяет решить ряд важных вопросов, связанных, например, с проблемой уменьшения динамических нагрузок в опорных подшипниках, с оптимизацией режимов движения механизма, с явлением колебаний в механизмах, с задачей о соударении звеньев механизма, с определением потребной мощности для работы механизма, с определением трения и износа в кинетических парах и т.д.

Динамическому изучению работы механизма предшествует его кинематический анализ, проводящийся на основе учета только структуры механизма и геометрических соотношений между размерами его звеньев.

В настоящих методических указаниях излагаются способы определения движущих сил, приложенных к ведущему звену кривошипно- шатунного механизма, на основе принципа Даламбера и теоремы об изменении кинетической энергии системы.

1. Динамический анализ кривошипно-шатунного механизма

Несмотря на разницу в функциональном назначении механизмов отдельных видов, в их строении, кинематике и динамике много общего. Например, механизмы поршневых двигателей автомобилей, тракторов, прессов, приводов сельскохозяйственных машин имеют в своей основе один и тот же кривошипно-шатунный механизм. В качестве примера на рис. 1, а показан механизм поршневого двигателя, а на рис. 1, б – его кинематическая схема. Механизм представляет совокупность двух кривошипно-шатунных механизмов, состоящих из соответственно кривошипов 2 и 6, шатунов 3 и 7 и ползунов (поршней) 4 и 8. стойка 1 и звено 5 являются связующими звеньями этих двух механизмов.

Силовой расчет механизмов может быть произведен самыми разнообразными методами. Особенно широкое применение получил кинетостатический метод, основанный на составлении уравнений равновесия твердых тел.

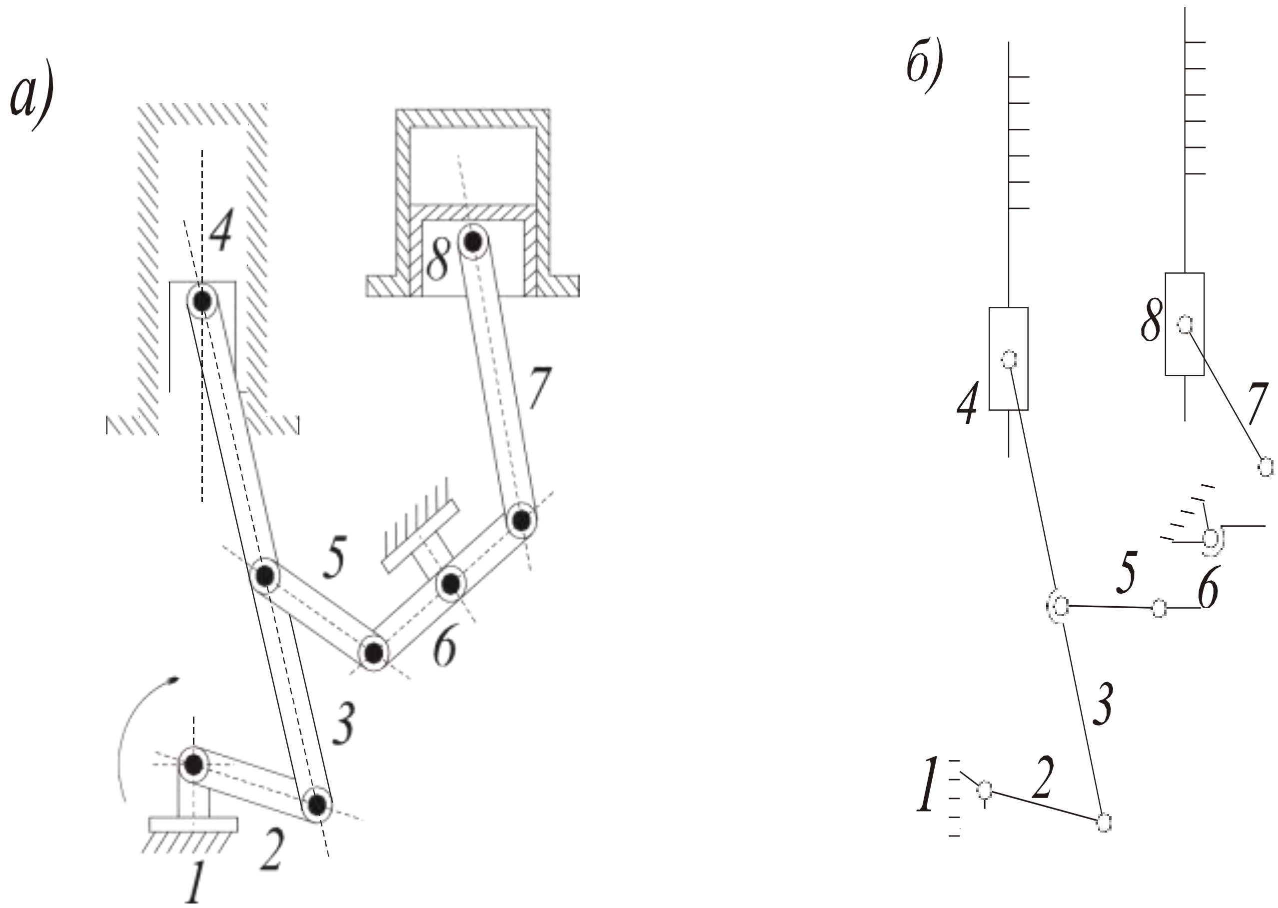


Рис. 1.

Сущность этого метода определяется принципом Даламбера, который в применении к механизмам формулируется следующим образом: если ко всем внешним действующим на звено механизма силам присоединить силы инерции, то под действием всех этих сил звено можно рассматривать находящимся в равновесии.

Силой инерции материальной точки называется вектор, направленный противоположно ускорению точки и равный произведению этого ускорения на её массу, то есть $\vec{F}^{u} = -m\vec{a}$, где m – масса точки, $\vec{a}$ – ее ускорение.

В общем случае все силы инерции звена ab (рис. 2, а), совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, могут сведены к силе инерции, приложенной в центре масс c звена, и к паре сил инерции, момент которой равен $\vec{M}^{u}$.

При этом $\vec{F}^{u} = -m\vec{a}$, где m – масса звена au, $\vec{a}_C$ – ускорение его центра масс, а $\vec{M}^{u} = -I_C\vec{\varepsilon}$, где I_C – момент инерции звена au относительно оси, проходящей через центр масс c и перпендикулярной к плоскости движения звена, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение звена.

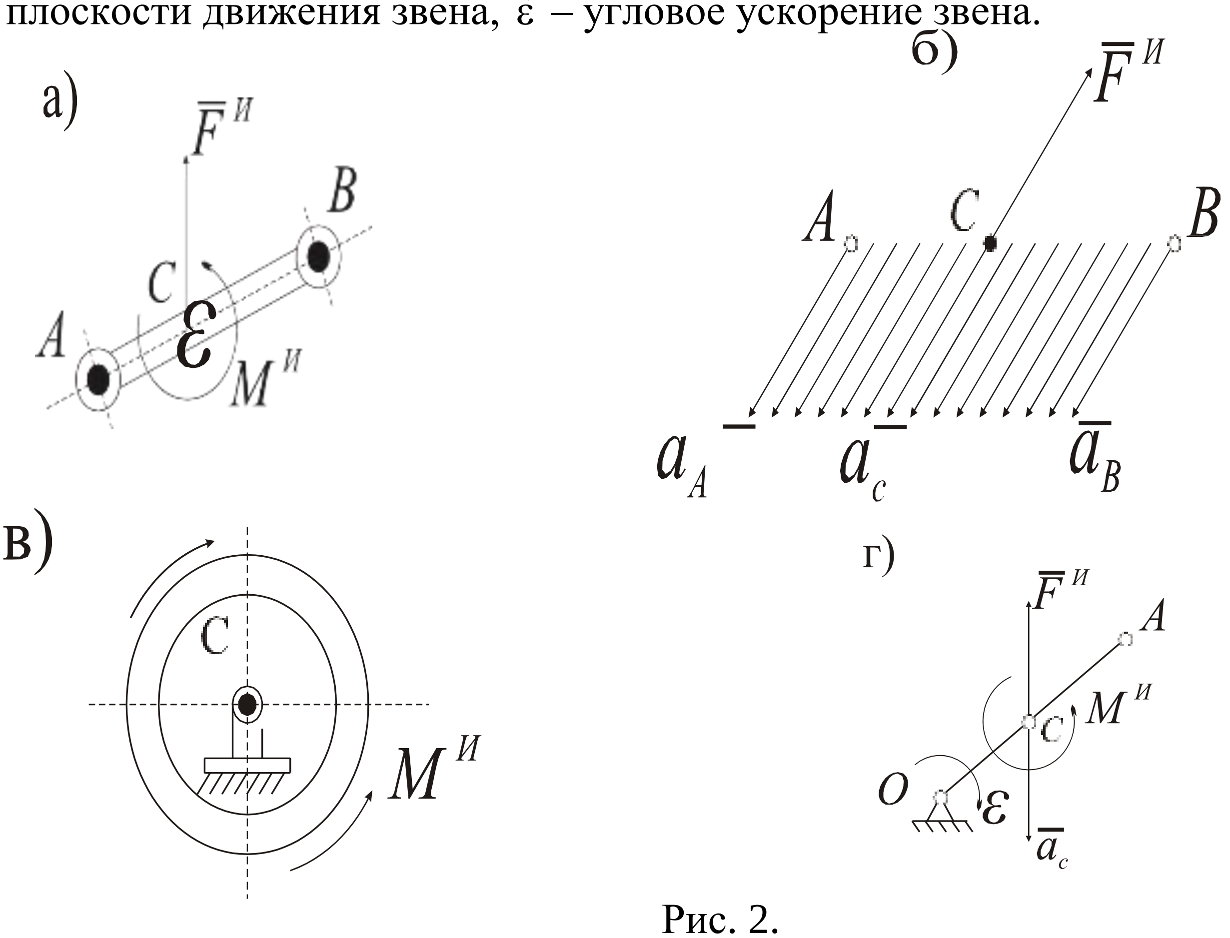


Рис. 2.

Если звено движется поступательно (рис. 2, б), то угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ **=0**. Все силы инерции звена сведутся к одной результирующей силе $\vec{F}^{u} = -m\vec{a}_C$, приложенной в центре масс *с* звена и направленной противоположно ускорению $\vec{a}_C$.

Если звено находится только во вращательном движении вокруг оси, проходящей через его центр масс, то $\vec{a}_C$**=0**, а силы инерции составят пару с моментом $\vec{M}^{u} = -I_C\vec{\varepsilon}$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы формулируется следующим образом: изменение кинетической энергии системы при ее движении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил системы на всем ее перемещении.

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i ,$$

где *т* – кинетическая энергия системы в конце ее перемещения; $т_0$ – кинетическая энергия системы в начале ее движения; $\sum A_k^e$ – сумма работ внешних сил системы; $\sum A_k^i$ – сумма работ внутренних сил системы.

Так как механизм состоит из звеньев, которые считаются абсолютно твердыми телами, то $\sum A_k^i$ **= 0**.

Определение скоростей и ускорений различных точек механизма может быть проведено методом планов скоростей и ускорений.

Планом скоростей называется диаграмма, на которой от некоторого центра отложены векторы скоростей точек тела.
Скорость любой точки тела можно определить по формуле

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + \vec{U}_{BA},$$

где $\vec{U}_A$ – скорость выбранного полюса *a*; $\vec{U}_{BA}$ – скорость точки *b* во вращательном движении тела вокруг полюса *a*.

Следовательно, отрезки, соединяющие концы векторов на плане скоростей, перпендикулярны отрезкам, соединяющим соответствующие точки тела, и по модулю пропорциональны этим отрезкам: фигуры, обозначенные на плане скоростей и в сечении тела одинаковыми буквами, будут при этом подобны и повернуты одна относительно другой на 90°.

Планом ускорений называется диаграмма, на которой от некоторого центра отложены вектора ускорений точек тела.

Ускорение любой точки тела можно определить по формуле

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение выбранного полюса a; $\vec{a}_{BA}$ – ускорение точки $в$ тела во вращательном движении вокруг выбранного полюса a.

При этом $\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_A^n} + \overrightarrow{a_A^\tau}$, $\overrightarrow{a_{BA}} = \overrightarrow{a_{BA}^n} + \overrightarrow{a_{BA}^\tau}$ $\quad \overrightarrow{a_A^n} \perp \overrightarrow{a_A^\tau}$,

$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A^n} + \overrightarrow{a_A^\tau} + \overrightarrow{a_{BA}^n} + \overrightarrow{a_{BA}^\tau}$

Поэтому $\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau$

То есть, в общем случае любой вектор ускорения может быть представлен как сумма четырех векторов.

Порядок построения планов скоростей и ускорений проиллюстрируем на примере механизма, изображенного на рис. 3, а в выбранном масштабе. Так как известная угловая скорость кривошипа o_1a, то вычисляем скорость точки a: $V_A = \omega_{O_1A} O_1A$.

Вектор $\vec{V}_A \perp O_1A$ и направлен в сторону вращения кривошипа.

Из произвольно выбранной точки o строим в выбранном масштабе вектор $\vec{O}_a = \vec{V}_A$. для определения скорости точки $в$ через точку o проведем прямую, параллельную скорости $\vec{V}_B$, через точку a – прямую, перпендикулярную к ab. получаем точку b; отрезок $\vec{O}_b$ и, пользуясь масштабом скоростей, находим v_b.

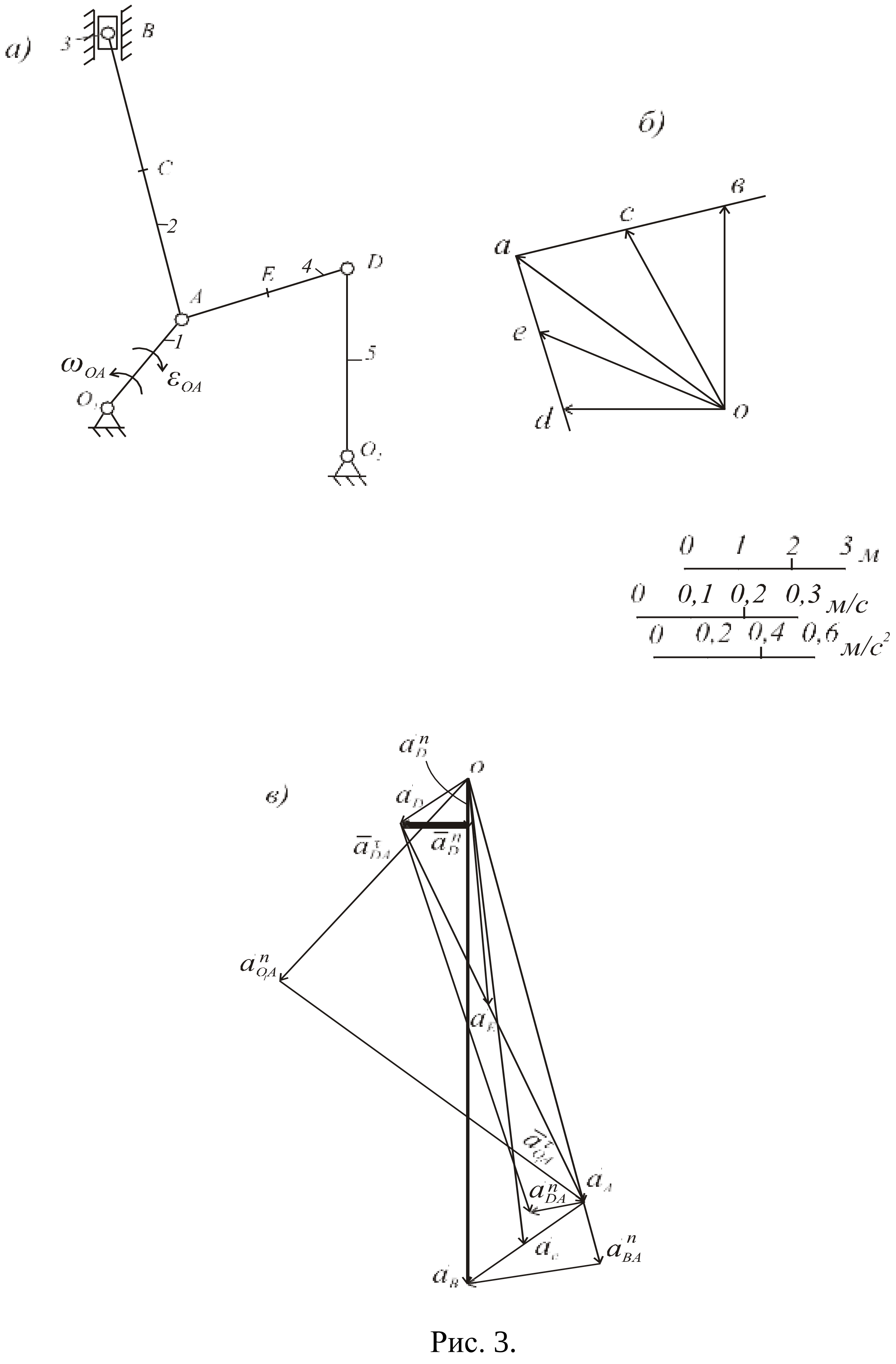

а)
3
B
C
2
E
4
D
A
1
5
ω_{OA}
ε_{OA}
O_1
O_2
б)
в
c
a
e
o
d
0 1 2 3 м
0 0,1 0,2 0,3 м/с
0 0,2 0,4 0,6 м/с²
в)
a_D^n
o
a_D
$\bar{a}_{DA}^{\tau}$
$\bar{a}_D^n$
$a_{O_1A}^n$
a_E
$\bar{a}_{OA}^{\tau}$
a_A
a_{DA}^n
a_C
a_{BA}^n
a_B

Рис. 3.

Для определения скорости точки C делим отрезок ab плана скоростей в отношении $ac/cb = ac/cb$. отрезок O_C изображает вектор скорости точки C. Аналогично строятся векторы скоростей точек d и e.

Для построения плана ускорений также произвольно выберем точку O. Так как известны ω_{O_1A} и ε_{O_1A}, то вычисляем $a_A^n = \omega^2{}_{O_1A} O_{1A}$. Из точки O откладываем в масштабе вектор $\vec{a}_A^n$, направленный к центру вращения, а из конца вектора $\vec{a}_A^n$ перпендикулярно ему строим вектор $\vec{a}_A^\tau$, направленный в соответствии С. Вектор, проведенный из точки O в конце вектора $\vec{a}_A^\tau$, равен ускорению точки a.

Вектор ускорения точки b строим в соответствии с равенством $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$. Вычисляем $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB$ (ω_{ab} определяем из плана скоростей: $\omega_{ab} = ab/ab$). Строим вектор $\vec{a}_{BA}^n$, откладывая его из конца вектора $\vec{a}_A$ в направлении от точки b к точке a. Так как $\vec{a}_{BA}^\tau \perp \vec{a}_{BA}^n$, то из конца вектора $\vec{a}_{BA}^n$ перпендикулярно ему проводим линию. Из точки O проводим вторую линию, параллельную прямой, вдоль которой движется ползун *в*. точка пересечения этих линий определит вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ и $\vec{a}_{BA}^n$.

Так как $\vec{a}_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB\,AB}$, то $\varepsilon_{AB} = \vec{a}_{BA}^\tau / AB$.

Поделив отрезок, соединяющий концы векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ в отношении *ас/вс*, получим точку, определяющую конец вектора $\vec{a}_C$.

Ускорение точки d строим в соответствии с равенствами:

$$\overrightarrow{a_D} = \overrightarrow{a_{DA}^n} + \overrightarrow{a_{DA}^\tau} + \overrightarrow{a_A}$$

$$\overrightarrow{a_D} = \overrightarrow{a_D^n} + \overrightarrow{a_D^\tau}$$

Вычисляем $a_D^n = \omega_{O_2D}^2 O_2D$ и $a_{DA}^n = \omega_{AD}^2 AD$ (ω_{O_2D} и ω_{AD} определяем из плана скоростей как отношения od/o_2d и ad/ad).

Из конца вектора $\vec{a}_A$ строим вектор $\vec{a}_{DA}^n$, проведя его параллельно da. Через конец вектора $\vec{a}_{DA}^n$ проводим прямую перпендикулярно к da.

Откладываем от точки O вектор $\vec{a}_D^n$, направив его к центру O. Из конца вектора $\vec{a}_D^n$ проводим перпендикулярно ему линию. Точка пересечения построенных линий определит концы векторов $\vec{a}^{\tau}_{DA}$, $\vec{a}^{\tau}_{D}$ и $\vec{a}_D$.

Измерив в масштабе ускорений построенные вектора, определяем их модули.

Ускорение точки *е* определяется аналогично ускорению точки *С*.

2. Задание

Для механизмов, изображенных на рис.4. определить: 1. Вращающий момент *м*, приложенный к кривошипу o_1a; 2. угол ψ, на который повернулся кривошип o_1a с момента начала движения механизма; 3. какой момент сопротивления ($м_c$) или силу (f_c) следует приложить к звену 5, чтобы уравновесить механизм. Все механизмы находятся в горизонтальной плоскости. Данные для проведения расчетов приведены в табл. 1 и 2.

3. Пример выполнения задания

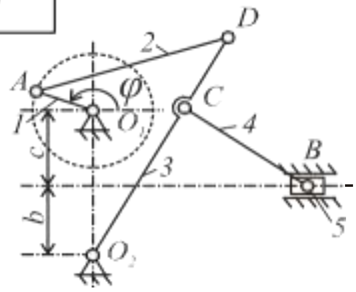
Дано:

$\omega_{OA} = 2{,}5\ c^{-1}$;	$\varepsilon_{OA} = 8\ c^{-2}$;	$m_{OA} = 0{,}2$ *кг*;	$AC = CB$;
$m_F = 0{,}2$ *кг*;	$OA = 0{,}2$ *м*;	$AB = 0{,}35$ *м*;	$EF = 0{,}3$ *м*.
$CD = 0{,}2$ *м*;	$DO_1 = 0{,}2$ *м*;	$O_1E = 0{,}2$ *м*;	
$h_1 = 0{,}6$ *м*;	$h_2 = 0{,}2$ *м*;	$m_B = 0{,}4$ *кг*;	

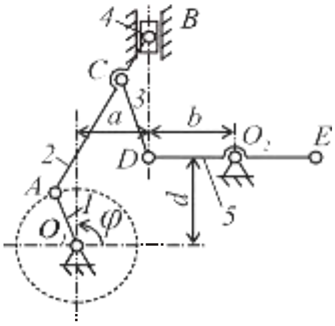
Решение:

1. Проводим кинематический расчет звеньев механизма (рис.5. а) в заданном положении путем построения плана скоростей (рис.5. б) и плана ускорений (рис. 6, а).
2. Прикладываем к механизму все заданные силы и силы инерции (рис. 6, б). При этом силы инерции звена *ОА* приводим к его центру масс. Тогда

1, 11, 21

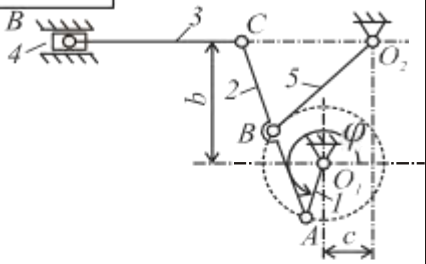


2, 12, 22

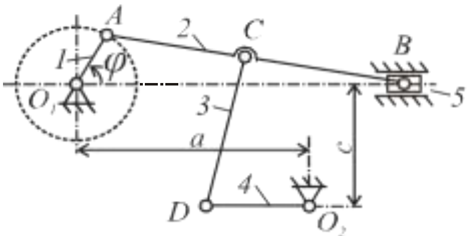


M

3, 13, 23

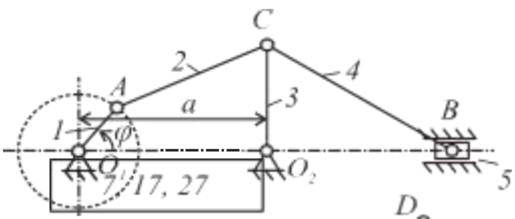


4, 14, 24

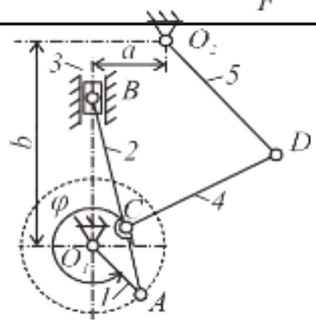


F

5, 15, 25

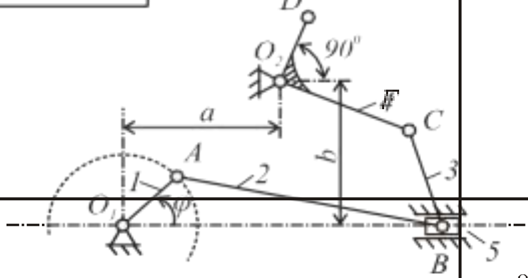


6, 16, 26

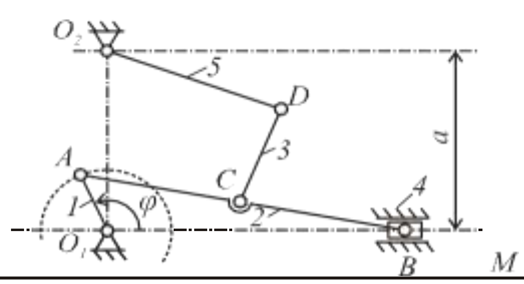


M

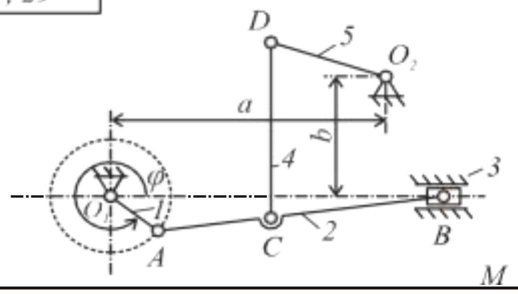
7, 17, 27



8, 18, 28



9, 19, 29



10, 20, 30

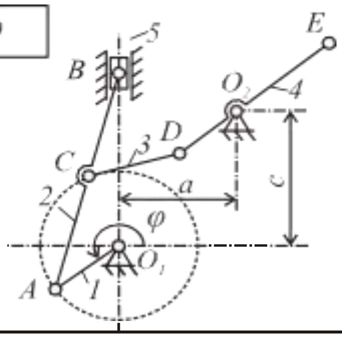


Рис. 4.

Таблица 1

Номер варианта	*φ, град*	ω_{O_1A}*, рад/с*	ε_{O_1A}*, рад/с*^{2}	m_{O_1A}*, кг*	Масса ползуна *B, кг*
1	155	2,0	2,5	1,5	0,5
2	125	4,0	8,0	3,0	1,2
3	250	3,5	0,5	2,0	0,8
4	20	1,5	1,2	2,5	1,3
5	50	10,0	3,5	5,5	2,4
6	315	4,8	2,2	1,4	0,5
7	40	4,5	1,8	2,7	0,9
8	115	1,8	2,0	4,0	1,5
9	325	2,5	2,5	2,2	0,8
10	215	3,0	5,5	11,0	5,5
11	90	7,5	4,2	6,5	3,2
12	75	5,5	3,4	5,0	2,2
13	270	1,0	0,5	2,5	1,3
14	75	2,3	1,4	0,5	0,2
15	95	12,5	4,5	0,8	0,4
16	300	6,6	2,4	1,9	1,2
17	105	2,1	4,2	5,0	1,5
18	75	3,4	2,7	4,5	2,1
19	265	5,5	5,5	1,1	0,3
20	180	6,0	7,5	4,4	1,5
21	180	3,5	2,0	2,5	1,1
22	190	2,4	3,2	8,5	4,0
23	90	2,2	2,0	3,5	0,8
24	100	10,0	6,6	4,7	2,7
25	0	4,0	3,0	2,5	1,0
26	250	3,3	2,9	3,4	0,8
27	15	1,5	0,9	8,0	4,5
28	135	9,0	10,0	1,8	0,9
29	90	1,2	0,5	6,5	1,5
30	285	4,7	3,2	2,8	1,1

ТАБЛИЦА 2

Номер варианта	Расстояние, *см*					Длина звеньев, *см*							
	a	b	c	d	e	O_1A	O_2B	O_2D	AB	BC	CD	CE	DE
1,11,21	-	15	23	-	-	15	65	-	51	22	38	-	-
2,12,22	19	19	-	22	-	12	-	19	55	19	23	-	38
3,13,23	-	31	11	-	-	16	34	-	25	25	42	-	-
4,14,24	55	-	25	-	-	15	-	24	70	35	33	-	-
5,15,25	50	-	-	-	-	14	29	-	45	54	-	-	-
6,16,26	17	54	-	-	-	15	-	40	50	35	40	-	-
7,17,27	42	39	-	-	-	20	-	20	71	30	-	-	-
8,18,28	46	-	-	-	-	15	-	45	78	39	26	-	-
9,19,29	72	36	-	-	-	15	-	30	76	46	50	-	-
10,20,30	30	-	35	-	-	19	-	19	59	29	24	-	48

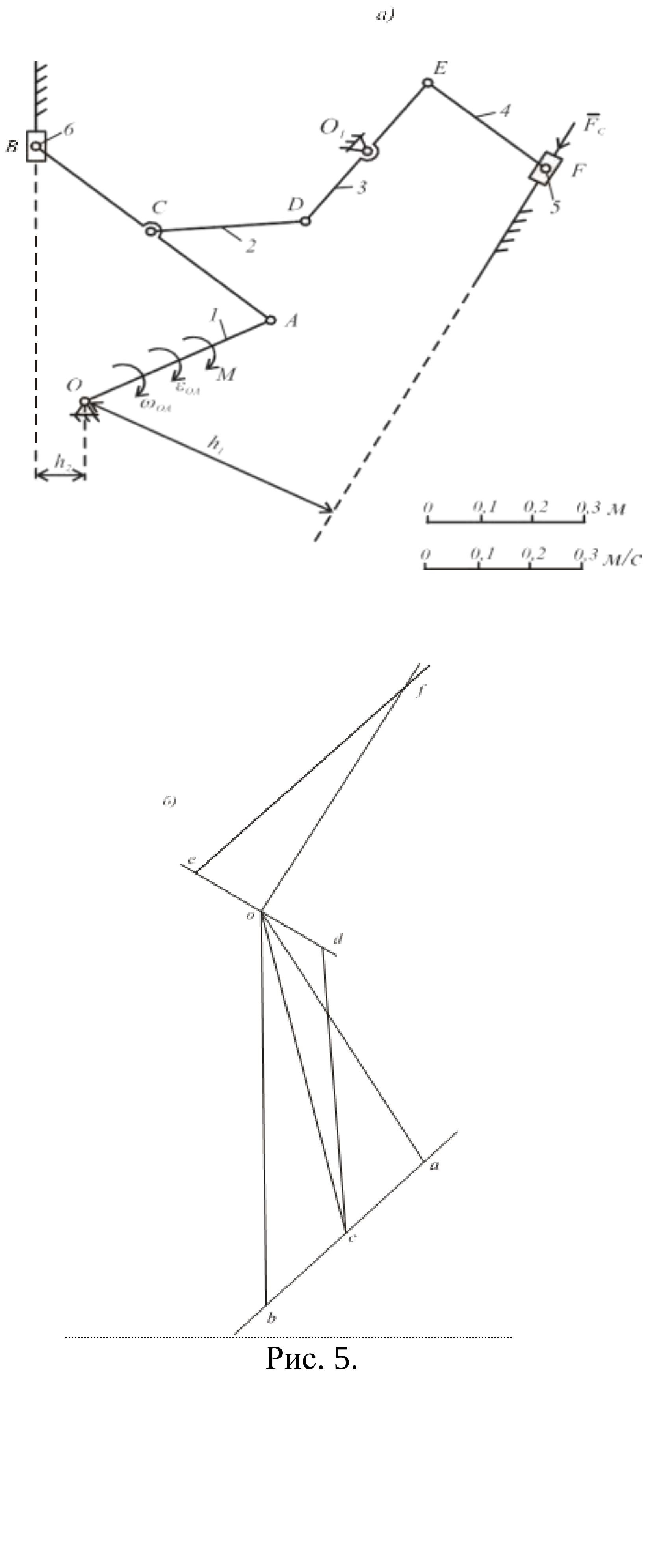

а)
E
4
$\overline{F}_c$
O_1
B
6
F
3
5
C
D
2
1
A
M
O
ε_{OA}
ω_{OA}
h_1
h_2
0 0,1 0,2 0,3 м
0 0,1 0,2 0,3 м/с
f
б)
e
o
d
a
c
b

Рис. 5.

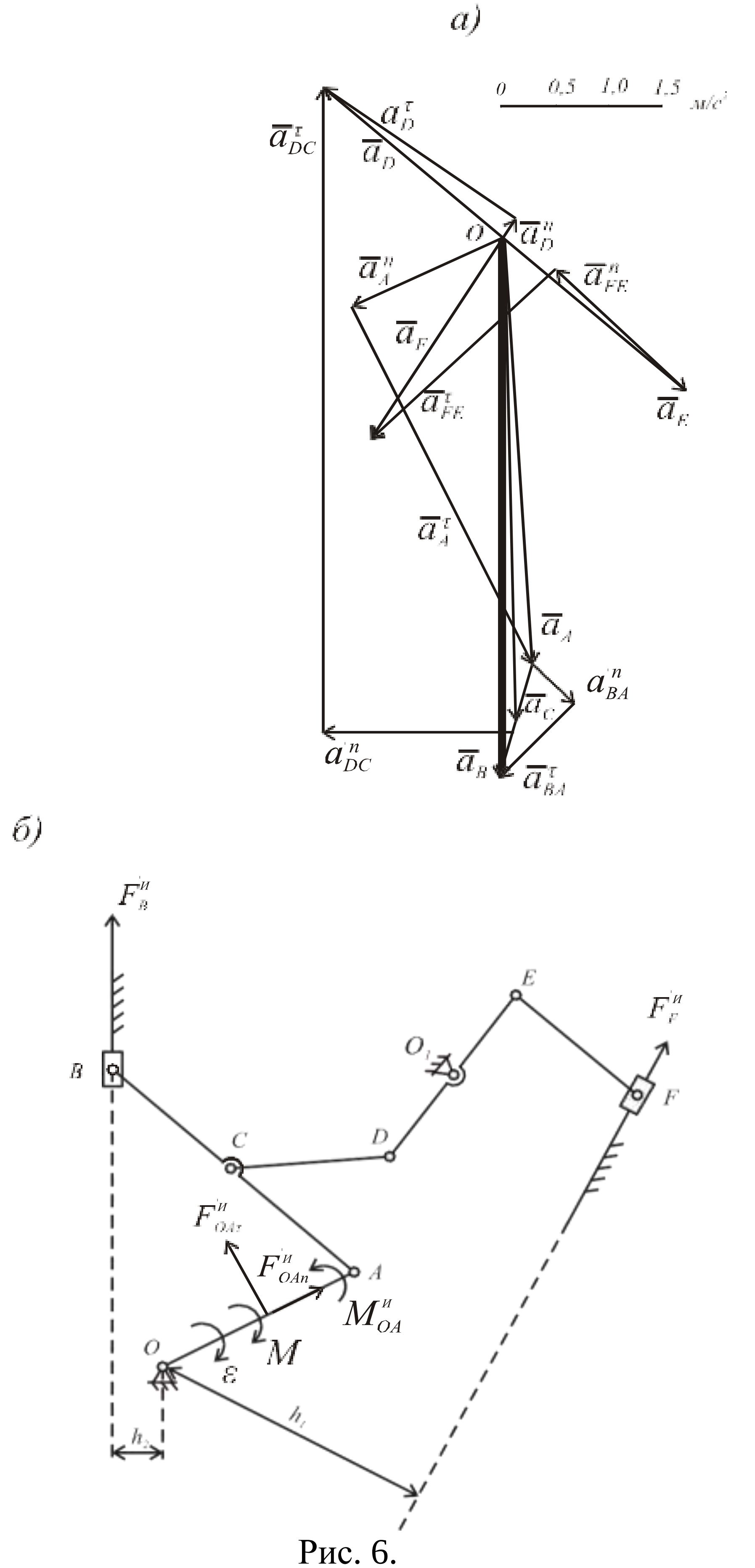


Рис. 6.

$$M_{OA}^{и} = I_c \varepsilon_{OA} = m_{OA}(OA)^2\, \varepsilon_{OД}/12;$$
$$F_{DA\tau}^{и} = m_{OA}\varepsilon_{OA}\, OA/2;$$
$$F_{OAn}^{и} = m_{OA}\omega_{OA}^2\, OA/2.$$

Силы инерции ползунов B и F:

$$F_B^{и} = m_B a_B;$$
$$F_F^{и} = m_F a_F.$$

Ускорения A_B И A_F определяем из плана ускорений.

В соответствии с принципом Даламбера составим уравнение моментов всех сил относительно точки O:

$$-M + M_{OA}^{и} + F_B^{и} h_2 - F_F^{и} h_1 = 0$$

Отсюда находим вращающий момент M:

$$M = M_{OA}^{и} + F_B^{и} h_2 - F_F^{и} h_1 = m_{OA}(OA)^2\, \varepsilon_{OA}/12 + m_B a_B h_2 - m_F a_F h_1 = 0{,}19\ \ Нм.$$

3. Для нахождения угла поворота звена OA применим теорему об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Так как в начальном положении механизм находился в покое, то $T_0 = 0$. Для системы, состоящей из абсолютно твердых тел. $\sum A_k^e$ =0.

Кинетическая энергия механизма

$$T = T_{OA} + T_B + T_F,$$

где $T_{OA} = I_O\, \omega_{OA}^2/2 = m_{OA}(OA)^2\, \omega_{OA}^2/6\ \ T_B = m_B V_B^2/2$.

Скорости V_B и V_F определяем из плана скоростей.

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то силы тяжести работу не совершают. Поэтому $\sum A_k^e = M_\psi$.

Получаем

$$m_{OA}(OA)^2\,\omega_{OA}^2/6 + m_B\,V_B^2/2 + m_F\,V_F^2/2 = M_\psi$$

Отсюда

$$\psi = (m_{OA}(OA)^2\omega_{OA}^2 + 3\cdot m_B V_B^2 + 3\cdot m_F V_F^2)/6\cdot M = 0{,}12\,рад.$$

4. Для определения силы сопротивления $\overrightarrow{F_c}$, приложенной к звену 5, сообщим механизму возможное перемещение, повернув звено 1 (кривошип *OA*) на угол δφ, тогда звено 5 (поршень *F*) получит возможное перемещение δS_5 ($\delta S_5 > 0$).

Уравнение возможных работ сил, действующих на механизм, имеет вид:

$$M\omega_1 - F_c\cdot V_5 = 0,$$

где $\omega_1 = V_A/OA$;

Из плана скоростей $oa = V_A = 5$ *м/с*, $of = V_5 = 4{,}5$ *м/с*. Тогда

$$F_c = M\cdot oa/OA\cdot of = 1{,}05\ Н.$$