

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра информационных и автоматизированных
производственных систем

Составитель
Г. А. Алексеева

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

И. В. Чичерин – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных и автоматизированных производственных систем

А. Н. Коротков – доктор технических наук, профессор, председатель учебно-методической комиссии специальности 15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов

Алексеева Галина Алексеевна

Теория автоматического управления: методические указания к практическим занятиям [Электронный ресурс]:]: для обучающихся специальности 15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов всех форм обучения / сост. Г. А. Алексеева; КузГТУ. – Электрон. дан. – Кемерово, 2019. – Систем. требования : Pentium IV; ОЗУ 8 Мб; Windows 95; мышь. – Загл. с экрана.

В данных методических указаниях изложены содержание практических занятий, порядок их выполнения и контрольные вопросы к ним.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	7
1.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	7
1.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	7
1.2.1 Получение передаточной функции по дифференциальному уравнению	7
1.2.2 Структурные схемы систем автоматического управления ..	9
1.2.3 Построение структурной схемы по системе дифференциальных уравнений САУ	11
1.2.4 Построение структурной схемы по функциональной схеме	12
1.2.5 Типовые структуры связей между элементами системы ...	13
1.2.6 Преобразование структурных схем	15
1.3 ПРИМЕРЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ.....	18
1.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	28
1.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	41
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. РАСЧЕТ И ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	61
2.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	61
2.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	61
2.3 ПРИМЕР РАСЧЁТА И ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	66
2.3.1 Постановка задачи	66
2.3.2 Получение выражений для расчёта частотных характеристик.....	66
2.3.3 Построение частотных характеристик	68
2.4 МЕТОДИКА И ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	71
2.4.1 Методика построения ЛАЧХ.....	71
2.4.2 Пример построения ЛАЧХ статической САР.....	72
2.4.3 Пример построения ЛАЧХ астатической САР	74
2.4.4 Пример построения ЛАЧХ САР с нулевыми корнями в числителе передаточной функции.	76
2.5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	78
2.6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	79

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ	80
3.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	80
3.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	80
3.2.1 Виды типовых динамических звеньев	80
3.2.2 Временные характеристики типовых динамических звеньев	85
3.2.3 Частотные характеристики типовых динамических звеньев	87
3.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	88
3.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	90
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. аНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	91
4.1 Цель работы	91
4.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	91
4.2.1 Критерий Гурвица.....	91
4.2.2 Критерий Рауса	92
4.2.3 Критерий Михайлова.....	93
4.2.4 Критерий Найквиста.....	94
4.2.5 Логарифмический критерий	95
4.2.6 Построение области устойчивости САР методом D- разбиения	97
4.2.7 Запасы устойчивости САР	98
4.3 ПРИМЕР АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ САР И ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ	100
4.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	105
4.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	109
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ σ_p	111
5.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	111
5.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	111
5.2.1 Оценка точности САР в установившемся режиме.....	111
5.2.2 Оценка качества регулирования в переходном режиме ...	114
5.2.3 Построение кривых переходного процесса	116
5.3 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ОЦЕНОК КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА	121
5.3.1 Определение коэффициентов ошибок.....	121
5.3.2 Построение кривой переходного процесса методом типовых ТВЧХ	124

5.3.3 Получение разностного уравнения	130
5.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	131
5.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	133
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. КАЧЕСТВО РЕГУЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ	138
6.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	138
6.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	138
6.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	142
6.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	147
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7. КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РЕЗАНИЯ НА ФРЕЗЕРНОМ СТАНКЕ	148
7.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	148
7.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	148
7.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	152
7.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	154
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8. РАСЧЕТ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ ЧПУ	156
8.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	156
8.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	156
8.3 ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ ЧПУ.	159
8.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	165
8.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	167
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	168
9.1 Цель работы	168
9.2 Основные теоретические положения	168
9.2.1 Получение дискретных передаточных функций	171
9.2.2 Получение разностных уравнений	173
9.2.3 Получение разностных уравнений ЦСУ	176
9.3 Примеры получения дискретных передаточных функций и разностных уравнений	177
9.3.1 Получение дискретной передаточной функции табличным методом	177
9.3.2 Получение дискретной передаточной функции подстановкой Тастина	177

9.3.3	Получение разностного уравнения по дифференциальному уравнению	179
9.3.4	Получение разностного уравнения на основе интегродифференциального	180
9.3.5	Получение разностного уравнения по структурной схеме САУ	181
9.3.6	Получение алгоритма моделирования по структурной схеме САУ	182
9.4	ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	184
9.5	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	187
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ		
10.1	Цель работы	189
10.2	Основные теоретические положения	189
10.2.1	Алгебраические критерии	189
10.2.2	Частотные критерии	192
10.3	Примеры определения устойчивости для ДСАУ	195
10.3.1	Определение устойчивости по корням характеристического уравнения	195
10.3.2	Необходимое условие устойчивости	196
10.3.3	Критерий Гурвица	196
10.3.4	Критерий Джури	197
10.3.5	Критерий Михайлова	198
10.3.6	Критерий Найквиста	199
10.4	ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	201
10.5	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	202
ПРИЛОЖЕНИЕ А		203
ПРИЛОЖЕНИЕ Б		220
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ		2
СОДЕРЖАНИЕ		3

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – изучение методов построения математических моделей элементов и систем автоматического управления (САУ) во временной и частотной области и приобретение практических навыков в построении, преобразовании и упрощении структурных схем и в получении математических моделей САУ.

1.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Исчерпывающим математическим описанием элементов и САУ являются дифференциальные уравнения во временной области и передаточные функции в частотной области. В работе рассматриваются только линейные САУ, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для элемента (системы) с одним входом и одним выходом дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = \\ = b_0 v^{(m)}(t) + b_1 v^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} v'(t) + b_m v(t) \end{aligned}, \quad (1.1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – коэффициенты дифференциального уравнения;

$v(t)$ – входная переменная элемента (системы);

$y(t)$ – выходная переменная элемента (системы).

1.2.1 Получение передаточной функции по дифференциальному уравнению

Передаточные функции элементов (САУ) получаются на основе операторного метода, который базируется на преобразовании Лапласа. Преобразование Лапласа задаётся интегралом вида:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (1.2)$$

Интеграл Лапласа (1.2) устанавливает соответствие между функциями действительной переменной t ($x(t)$) и функциями комплексной переменной p ($X(p)$).

$$p = \sigma + j\omega, \quad (1.3)$$

где j – мнимая единица, $j = \sqrt{-1}$;

ω – круговая частота.

Функция $x(t)$ называется оригиналом, а функция $X(p)$ её изображением по Лапласу.

Из основных свойств преобразования Лапласа в работе используются следующие:

– свойство линейности:

$$\text{а) } x(t) = ax_1(t) \rightarrow X(p) = aX_1(p), \quad (1.4)$$

$$\text{б) } x_1(t) \pm x_2(t) \rightarrow X_1(p) \pm X_2(p); \quad (1.5)$$

– свойство дифференцирования оригинала:

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n X(p), \quad (1.6)$$

– свойство интегрирования оригинала:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{X(p)}{p}, \quad (1.7)$$

– теорема запаздывания:

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-p\tau} X(p), \quad (1.8)$$

где τ – время чистого запаздывания.

Передаточной функцией $W(p)$ называется отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях, то есть

$$W(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}, \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) показывает, что передаточная функция САУ является правильной дробно-рациональной функцией, у ко-

торой $m \leq n$. Для отдельных элементов САУ это условие может не выполняться.

Для получения передаточной функции исходное дифференциальное уравнение (1.1) записывается в операторной форме с учётом свойств преобразования Лапласа, т. е. выражение (1.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = \\ = b_0 p^m V(p) + b_1 p^{m-1} V(p) + \dots + b_{m-1} p V(p) + b_m V(p) \end{aligned}, \quad (1.10)$$

После этого изображения переменных выносятся за скобки, т. е.

$$\begin{aligned} Y(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = \\ = V(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \end{aligned}, \quad (1.11)$$

Передаточная функция $W(p)$ (1.9) получается делением полинома правой части в формуле (1.11) на полином левой части.

Получение дифференциального уравнения по передаточной функции $W(p)$ осуществляется в обратной последовательности.

1.2.2 Структурные схемы систем автоматического управления

Структурная схема – это графическое изображение системы, отображающее системы дифференциальных уравнений, описывающих процессы, протекающие в системе. Основными элементами структурной схемы САУ являются динамическое звено, суммирующее звено (сумматор) и узел.

Динамическое звено представляет собой математическую модель элемента системы (или части сложного элемента), которая отображает его динамические свойства, а не физическую сущность происходящих в них процессов. Динамическое звено является звеном однонаправленного действия, т. е. воздействия передаются только в одном направлении от входа к выходу и имеет по одной входной и выходной переменных.

Динамическое звено на структурной схеме изображается в виде прямоугольника (рисунок 1.1), внутри которого записывается передаточная функция. Изображение выходной переменной динамического звена определяется по выражению:

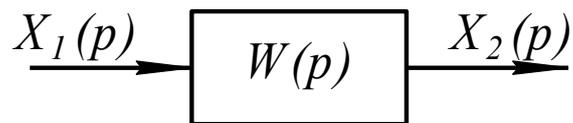
$$X_2(p) = W(p)X_1(p). \quad (1.12)$$


Рисунок 1.1 – Динамическое звено

Сумматор предназначен для суммирования (вычитания) нескольких переменных. Изображается в виде окружности, разделённой на сектора (рисунок 1.2). При этом используются два способа указания знака слагаемых. В первом случае отрицательные слагаемые отмечаются знаком «-» у острия стрелки (рисунок 1.2, а), а во втором закрашивание сектора черным цветом, к которому подходит стрелка (рисунок 1.2, б). В работе рекомендуется использовать второй способ.

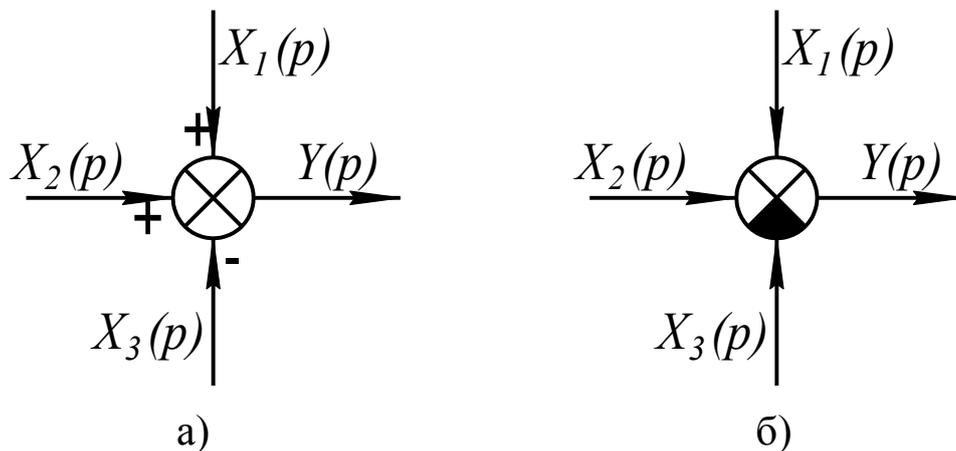


Рисунок 1.2 – Сумматор

Выходная переменная сумматора, представленного на рисунке 1.2 определяется по формуле:

$$Y(p) = X_1(p) + X_2(p) - X_3(p). \quad (1.13)$$

Узел (точка разветвления) изображается на структурной схеме в виде точки (рисунок 1.3). Всем отходящим от узла стрелкам соответствует одна и та же величина.

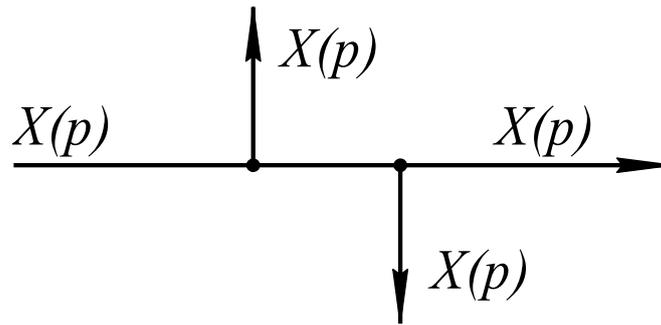


Рисунок 1.3 – Узел

Связи на структурных схемах изображаются стрелками, отходящими от узлов или выходов и подходящими к сумматорам или входам.

Общие правила составления структурных схем:

1. Структурная схема обязательно должна иметь входные и выходные внешние переменные (связи), задаваемые из физических соображений.

1. Каждая входная переменная является независимой функцией и должна иметь только один вход в структурную схему.

3. Выходная переменная может замыкаться внутри структурной схемы и иметь выход в виде ответвления или не замыкаться внутри структурной схемы.

4. Все внутренние связи, определяемые системой должны обязательно иметь входы и выходы.

Структурные схемы получают либо на основе функциональных схем САУ и математических моделей функциональных элементов, либо только из математических моделей (системы дифференциальных уравнений) САУ.

1.2.3 Построение структурной схемы по системе дифференциальных уравнений САУ

Последовательность построения структурной схемы по исходной системе дифференциальных уравнений:

1. Для каждого уравнения системы условно выбираются входные и выходные переменные. Каждое уравнение имеет только одну выходную переменную, а входных может быть и несколько. При выборе входных и выходных переменных уравнения учитываются следующие рекомендации:

- входные переменные системы являются входными во всех уравнениях, где они встречаются;
- выходная переменная системы может быть выходной только в одном уравнении;
- промежуточные переменные могут быть выходными только в одном уравнении;
- в качестве выходной рекомендуется выбирать переменную, имеющую старшую производную.

1. Исходная система дифференциальных уравнений записывается в операторной форме на основе преобразования Лапласа с учётом его свойств.

3. Для каждого уравнения строится его графическое изображение. Построение начинается с изображения сумматора и указания его входных и выходных переменных.

4. Структурная схема системы строится как совокупность графических изображений отдельных уравнений, путём исключения промежуточных переменных.

Пример построения структурной схемы по системе дифференциальных уравнений приведён в разделе 3.

1.2.4 Построение структурной схемы по функциональной схеме

Пример функциональной схемы САУ приведён на рисунке 1.4. На функциональной схеме приводятся математические модели функциональных элементов (усилителей, регуляторов, объектов управления и т.д.) в форме дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

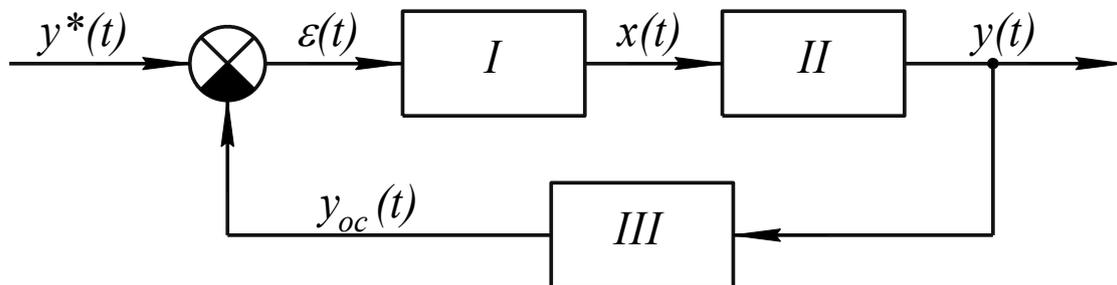


Рисунок 1.4 – Функциональная схема САУ

Для перехода от функциональной к структурной схеме необходимо:

- получить передаточные функции элементов системы на основе и с учётом свойств преобразования Лапласа;
- входные и выходные переменные САУ заменяются их изображениями по Лапласу;
- промежуточные переменные (за редким исключением) не приводятся на структурной схеме.

Структурная схема, соответствующая функциональной схеме на рисунке 1.4 приведена на рисунке 1.5.

Структурные схемы САУ используются для получения математических моделей (передаточных функций) САУ на основе передаточных функций отдельных элементов системы.

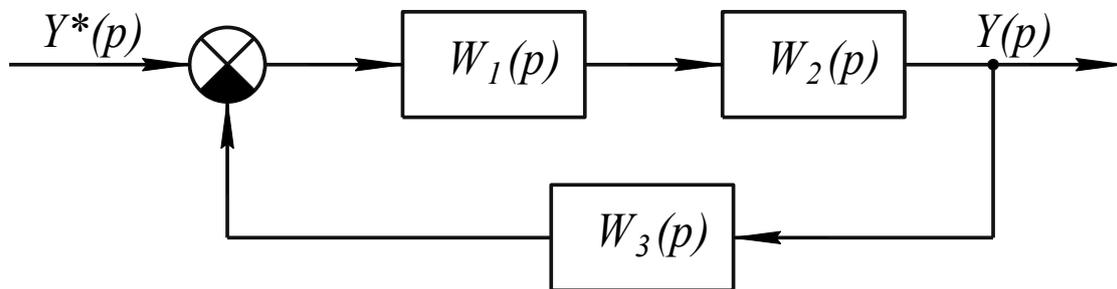


Рисунок 1.5 – Структурная схема САУ

1.2.5 Типовые структуры связей между элементами системы

К типовым структурам связей между элементами САУ относятся последовательное и параллельное соединения, а также соединение с обратной связью.

Последовательное соединение звеньев приведено на рисунке 1.6.

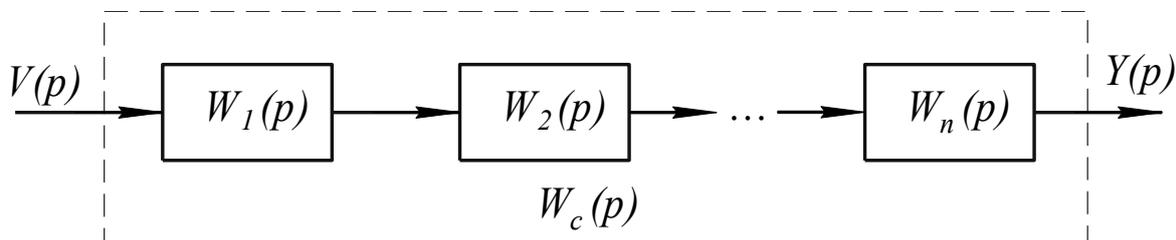


Рисунок 1.6 – Последовательное соединение звеньев

Передаточная функция последовательного соединения звеньев, определяемая по формуле:

$$W_c(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (1.14)$$

Изображение по Лапласу выходной переменной определяется как произведение передаточной функции на изображение по Лапласу входной переменной:

$$Y(p) = W_c(p)V(p). \quad (1.15)$$

Параллельное соединение звеньев приведено на рисунке 1.7, а передаточная функция параллельного соединения звеньев, определяется по формуле 1.16.

$$W_c(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (1.16)$$

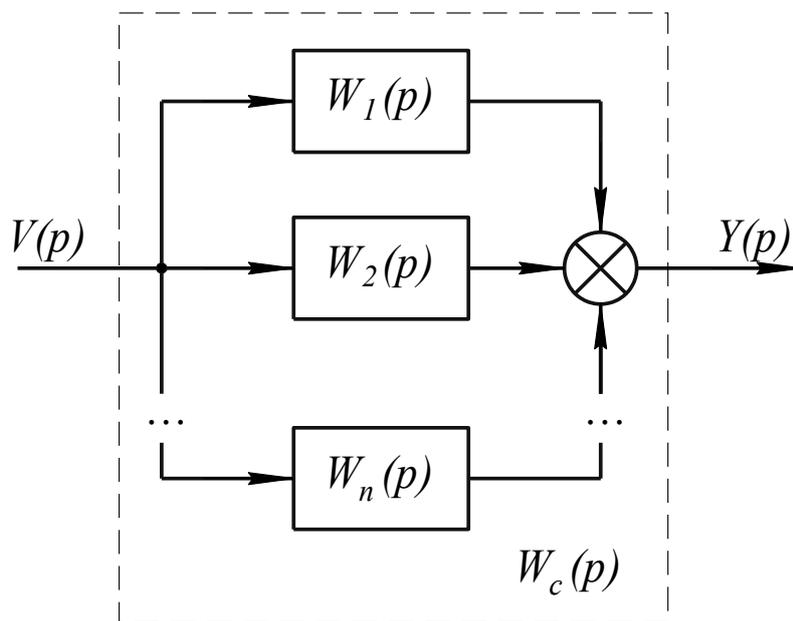


Рисунок 1.7 – Параллельное соединение звеньев

Передаточная функция соединения с положительной обратной связью (рисунок 1.8) определяется по следующей формуле:

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)}{1 - W_{oc}(p)W_p(p)}, \quad (1.17)$$

где $W_p(p)$ – передаточная функция разомкнутой части системы;
 $W_{oc}(p)$ – передаточная функция цепи обратной связи.

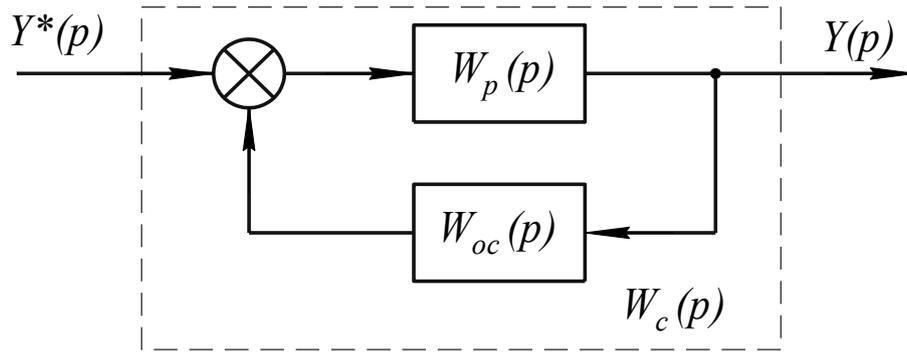


Рисунок 1.8 – Соединение звеньев с положительной обратной связью

Передаточная функция соединения с отрицательной обратной (рисунок 1.9):

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_{oc}(p)W_p(p)}. \quad (1.18)$$

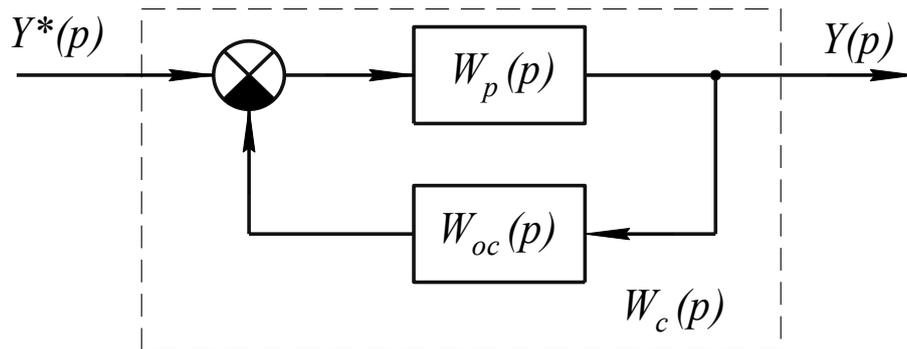


Рисунок 1.9 – Соединение звеньев с отрицательной обратной связью

Типовые соединения звеньев используются для получения передаточных функций САУ. При сложных структурах используются правила эквивалентных преобразований структурных схем с целью их упрощения и сведения к типовым соединениям.

1.2.6 Преобразование структурных схем

Преобразования структурных схем состоят в изменении взаимного расположения элементов схемы (звеньев, узлов, сумматоров) таким образом, чтобы, не изменяя входных и выходных величин преобразуемого участка схемы, изменить (упростить) характер соединения звеньев. При этом полученная структурная схема будет эквивалентна исходной, если в ней указанные вели-

чины будут иметь такую же зависимость от внешних воздействий, как в исходной. Правила эквивалентных преобразований структурных схем приведены в таблице 1.1, где стрелками показано направление переноса.

Правила эквивалентных преобразований структурных схем, приведённые в таблице 1.1, являются основными и достаточными для преобразования любых схем. Аппарат эквивалентных преобразований требует практических навыков при его использовании, так как готовых решений при преобразовании структурных схем не существует.

Таблица 1.1 – Правила эквивалентных преобразований структурных схем

№ по порядку	Преобразование	Структурная схема	
		исходная	эквивалентная
1	Перенос узла через звено		
2	Перенос сумматора через звено		

Продолжение таблицы 1.1

№ по порядку	Преобразования	Структурная схема	
		исходная	эквивалентная
3	Перенос узла через сумматор		
4	Перестановка звеньев		
5	Перестановка узлов		
6	Перестановка сумматоров		

1.3 ПРИМЕРЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Пример 1. Получить передаточную функцию элемента, описываемого интегро-дифференциальным уравнением

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + T_2 \int_0^t y(t) dt = kv(t). \quad (1.19)$$

Решение:

В соответствии со свойством дифференцирования преобразования Лапласа (1.6) имеем, что

$$L \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = p^n X(p),$$

а со свойством интегрирования (1.7)

$$L \left\{ \int_0^t x(t) dt \right\} = \frac{X(p)}{p}.$$

Тогда уравнение (3.1) в операторной форме имеет вид

$$T_1 p Y(p) + T_2 \frac{Y(p)}{p} = kV(p).$$

После преобразования получим следующее уравнение

$$T_1 p^2 Y(p) + T_2 Y(p) = kpV(p)$$

или

$$(T_1 p^2 + T_2) Y(p) = kpV(p).$$

Тогда передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{kp}{T_1 p^2 + T_2}. \quad (1.20)$$

Пример 2. Получить дифференциальное уравнение элемента системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\tau_1 p + \tau_2}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}. \quad (1.21)$$

Решение:

Так как

$$W(p) = \frac{Y(p)}{V(p)},$$

то можно записать, что

$$Y(p) = W(p)V(p) = \frac{\tau_1 p + \tau_2}{T_1 p^2 + T_2 p + 1} V(p). \quad (1.22)$$

Умножим левую и правую часть выражения (3.4) на знаменатель в правой части. В итоге имеем что

$$Y(p)(T_1 p^2 + T_2 p + 1) = V(p)(\tau_1 p + \tau_2).$$

Раскрыв скобки, получим уравнение в операторной форме

$$T_1 p^2 Y(p) + T_2 p Y(p) + Y(p) = \tau_1 p V(p) + \tau_2 V(p). \quad (1.23)$$

Перейдя во временную область с учётом свойства дифференцирования оригинала (1.5) получим следующее дифференциальное уравнение

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \tau_1 \frac{dv(t)}{dt} + \tau_2 v(t). \quad (1.24)$$

Пример 3. Построить структурную схему двигателя постоянного тока с независимым возбуждением при управлении по цепи якоря (рис. 3.1), описываемого системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{я}}(t) &= C_E \omega_{\text{Д}}(t) + R_{\text{я}} i_{\text{я}}(t) + L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}(t)}{dt} \\ M_{\text{Д}}(t) &= M_C(t) + F_C \omega_{\text{Д}}(t) + J \frac{d\omega_{\text{Д}}(t)}{dt} \\ M_{\text{Д}}(t) &= C_M i_{\text{я}}(t) \end{aligned} \right\}, \quad (1.25)$$

где $u_{\text{я}}(t)$ – напряжение, приложенное к цепи якоря;

$i_{\text{я}}(t)$ – ток в цепи якоря;
 $R_{\text{я}}, L_{\text{я}}$ – активное сопротивление и индуктивность цепи якоря;

$C_{\text{Е}}$ – коэффициент Э.Д.С. двигателя;
 $\omega_{\text{д}}(t)$ – угловая скорость вращения ротора двигателя;
 $M_{\text{д}}(t)$ – вращающий момент двигателя;
 $C_{\text{М}}$ – коэффициент момента двигателя;
 $M_{\text{С}}(t)$ – момент сопротивления от сил сухого трения;
 $F_{\text{С}}$ – коэффициент вязкого трения;
 J – момент инерции вращающихся частей.

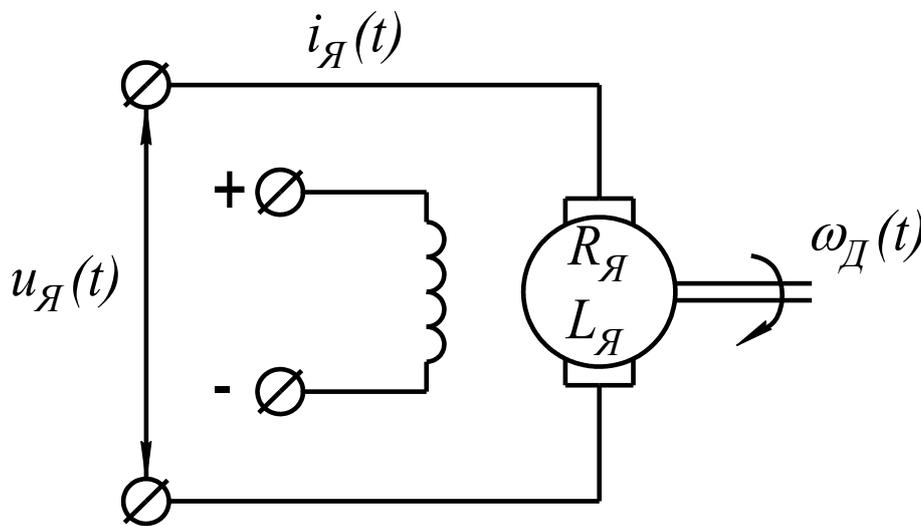


Рисунок 3.1 – Схема двигателя постоянного тока

Решение:

1. Выделим условно входные и выходные переменные в каждом уравнении:

Первое уравнение: Так как старшую производную содержит переменная $i_{\text{я}}(t)$, то она и будет выходной. Входные переменные $u_{\text{я}}(t)$ (входная переменная всей системы) и $\omega_{\text{д}}(t)$.

Второе уравнение: В этом уравнении выходной переменной будет $\omega_{\text{д}}(t)$ (выходная переменная системы), т. к. она не является выходной в первом уравнении. Соответственно входными переменными будут $i_{\text{я}}(t)$ и $M_{\text{С}}(t)$ (вторая входная переменная системы).

1. Запишем уравнения (3.7) в операторной форме:

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{я}}(p) &= C_E \omega_{\text{Д}}(p) + R_{\text{я}} I_{\text{я}}(p) + L_{\text{я}} p I_{\text{я}}(p) \\ C_M I_{\text{я}}(p) &= M_C(p) + F_C \omega_{\text{Д}}(p) + J p \omega_{\text{Д}}(p) \end{aligned} \right\}, \quad (1.26)$$

так как

$$M_{\text{Д}}(p) = C_M I_{\text{я}}(p).$$

3. Разрешим эти уравнения относительно изображений по Лапласу выходных переменных со старшей производной. В итоге имеем:

$$\left. \begin{aligned} L_{\text{я}} p I_{\text{я}}(p) &= U_{\text{я}}(p) - C_E \omega_{\text{Д}}(p) - R_{\text{я}} I_{\text{я}}(p) \\ J p \omega_{\text{Д}}(p) &= C_M I_{\text{я}}(p) - M_C(p) - F_C \omega_{\text{Д}}(p) \end{aligned} \right\}. \quad (1.27)$$

4. Строим графические изображения каждого уравнения, при этом основная входная переменная всегда изображается слева, а выходные переменные справа. Графическое изображение первого уравнения приведено на рисунке 3.2, а второго уравнения на рисунке 3.3.

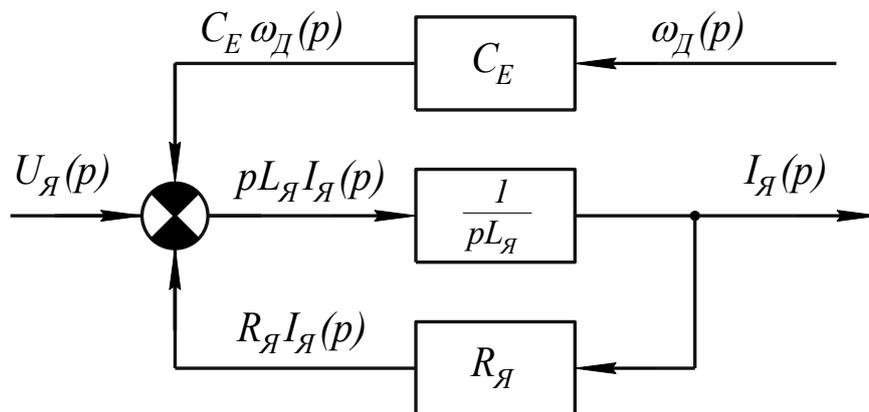


Рисунок 3.2 – Графическое изображение первого уравнения

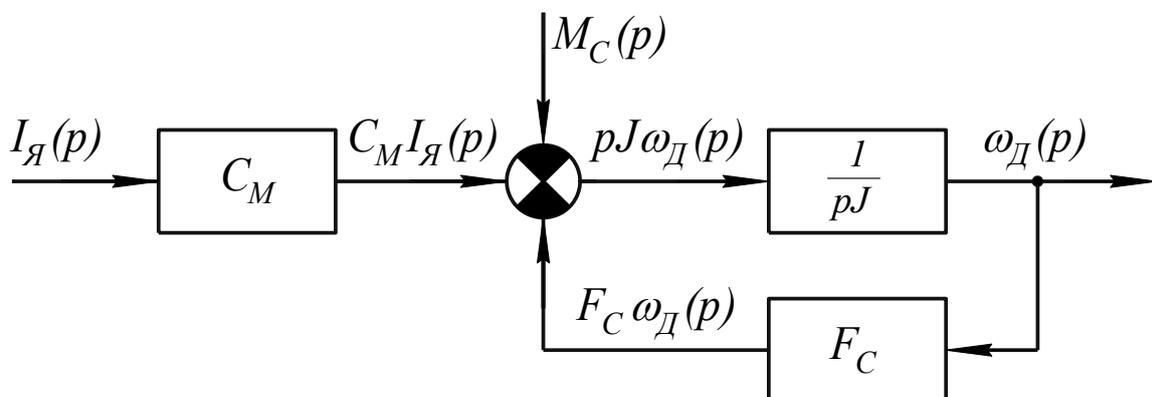


Рисунок 3.3 – Графическое изображение второго уравнения

5. Строим структурную схему системы, исключив промежуточные переменные. Структурная схема данной системы приведена на рисунке 3.4.

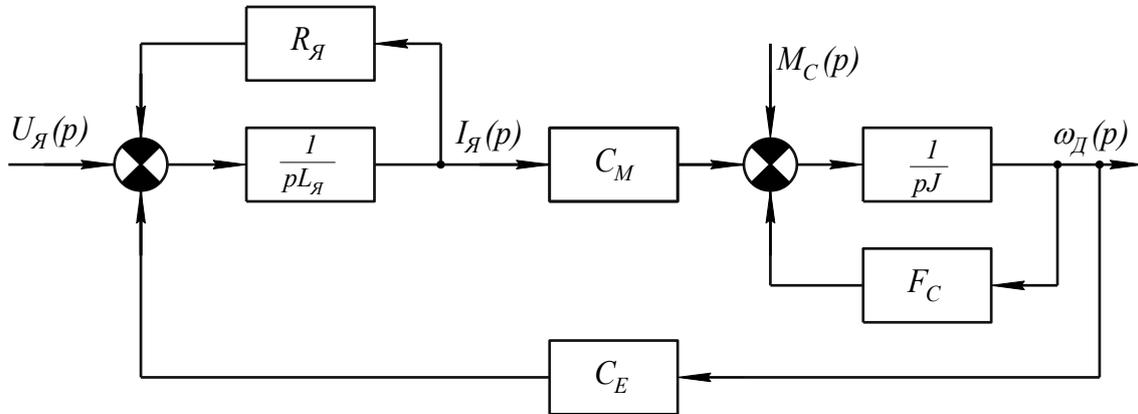


Рисунок 3.4 – Структурная схема двигателя постоянного тока

Пример 4. Построить структурную схему по функциональной схеме, приведённой на рисунке 3.5, где элементы I и II описываются дифференциальными уравнениями:

$$\text{I) } T_1 x_1'(t) + x_1(t) = \tau_1 \varepsilon(t);$$

$$\text{II) } T_2 y''(t) + y(t) = \tau_2 x_2(t).$$

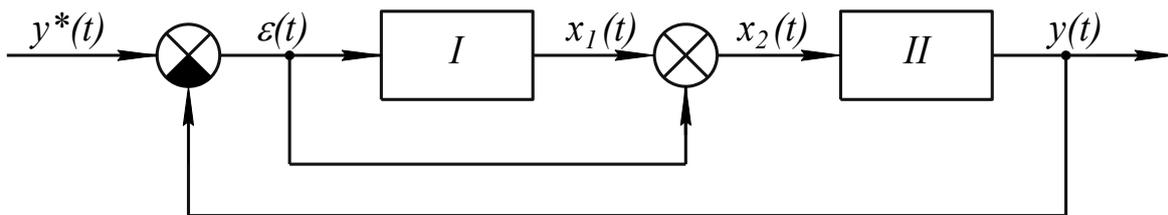


Рисунок 3.5 – Функциональная схема САУ

Решение:

Получим передаточные функции элементов:

Первый элемент:

$$T_1 p X_1(p) + X_1(p) = \tau_1 p \varepsilon(p).$$

$$X_1(p)(T_1 p + 1) = \tau_1 p \varepsilon(p).$$

Отсюда передаточная функция первого элемента

$$W_1(p) = \frac{X_1(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{\tau_1 p}{T_1 p + 1}. \quad (1.28)$$

Второй элемент:

$$T_2 p^2 Y(p) + Y(p) = \tau_2 X_2(p).$$

$$Y(p)(T_2 p^2 + 1) = \tau_2 X_2(p)$$

Тогда передаточная функция второго элемента имеет вид

$$W_2(p) = \frac{Y(p)}{X_2(p)} = \frac{\tau_2}{T_2 p^2 + 1}. \quad (1.29)$$

Структурная схема САУ, полученная по функциональной схеме (рис. 3.5) приведена на рисунке 3.6.

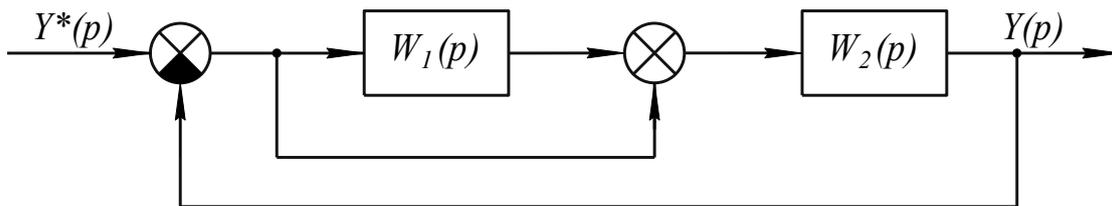


Рисунок 3.6 – Структурная схема САУ

Сопоставляя схемы на рисунках 3.5 и 3.6 делаем вывод, что структуры у них одинаковые, а отличие состоит в математических моделях элементов (дифференциальные уравнения и передаточные функции) и в переменных (оригиналы и их изображения по Лапласу).

Пример 5. Получить передаточную функцию и дифференциальное уравнение САУ, приведённый на рисунке 3.6.

Решение:

Для получения передаточной функции САУ воспользуемся правилами получения передаточных функций для типовых соединений звеньев. Выделим на структурной схеме САУ контур I (рис. 3.7), представляющий собой параллельное соединение, передаточная функция которого, определяется по выражению:

$$W_I(p) = W_1(p) + 1 = \frac{\tau_1 p}{T_1 p + 1} = \frac{\tau_1 p + T_1 p + 1}{T_1 p + 1} = \frac{(\tau_1 + T_1)p + 1}{T_1 p + 1}.$$

И так

$$W_I(p) = \frac{(\tau_1 + T_1)p + 1}{T_1 p + 1}. \quad (1.30)$$

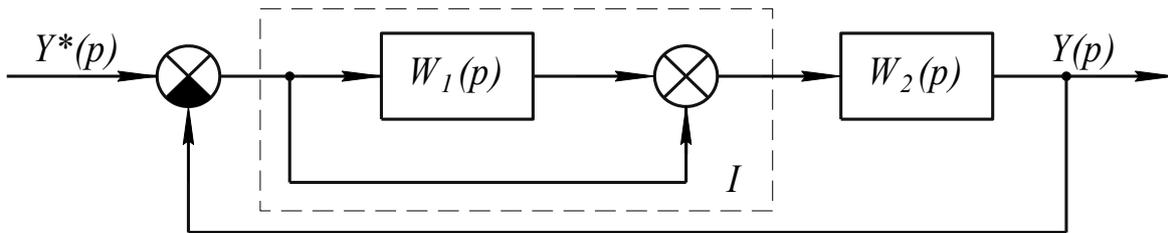


Рисунок 3.7 – Структурная схема САУ с выделенным контуром параллельного соединения.

Тогда структурная схема САУ примет вид, представленный на рисунке 3.8, где контур II представляет собой последовательное соединение с передаточной функцией:

$$W_{II}(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{(\tau_1 + T_1)p + 1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{\tau_2}{T_2 p + 1} = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + T_1 p + 1}$$

Передаточная функция $W_{II}(p)$ называется передаточной функцией разомкнутой части системы и обозначается $W_p(p)$:

$$W_p(p) = W_{II}(p) = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + T_1 p + 1}. \quad (1.31)$$

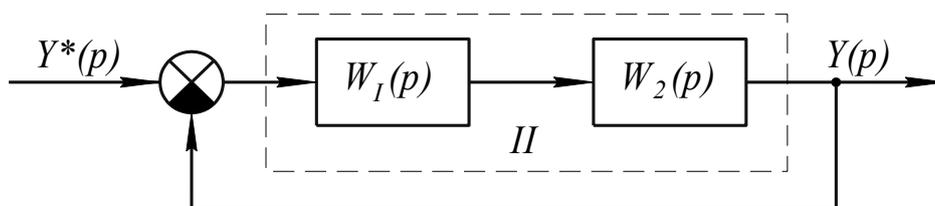


Рисунок 3.8 – Структурная схема САУ с выделенным контуром последовательного соединения

В итоге получена упрощенная структурная схема САУ, приведенная на рисунке 3.9, которая представляет собой типовое соединение с единичной отрицательной обратной связью. Тогда передаточная функция системы в соответствии с выражением (1.18) принимает вид:

$$W_c(z) = \frac{Y(p)}{Y^*(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + 1 \cdot W_p(p)} = \frac{\frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1T_2p^3 + T_2p^2 + T_1p + 1}}{1 + \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1T_2p^3 + T_2p^2 + T_1p + 1}}.$$

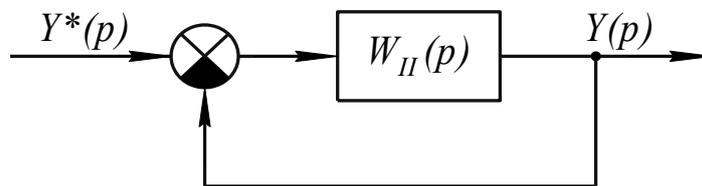


Рисунок 3.9 – Упрощенная структурная схема САУ

После преобразования имеем, что

$$W_c(p) = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1T_2p^3 + T_2p^2 + (\tau_2(\tau_1 + T_1) + T_1)p + 2}. \quad (1.32)$$

Для получения дифференциального уравнения САУ запишем уравнение связи выходной переменной с входной, т. е.

$$Y(p) = W_c(p)Y^*(p). \quad (1.33)$$

Тогда

$$Y(p) = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1T_2p^3 + T_2p^2 + (\tau_2(\tau_1 + T_1) + T_1)p + 2} Y^*(p), \quad (1.34)$$

Умножив левую и правую части выражения (1.34) на знаменатель, получим уравнение САУ в операторной форме

$$\begin{aligned} T_1T_2p^3Y(p) + T_2p^2Y(p) + (\tau_2(\tau_1 + T_1) + T_1)pY(p) + 2Y(p) = \\ = \tau_2(\tau_1 + T_1)pY^*(p) + \tau_2Y^*(p) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Тогда с учётом свойства дифференцирования (1.6) дифференциальное уравнение САУ примет вид:

$$T_1 T_2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (\tau_2 (\tau_1 + T_1) + T_1) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \tau_2 (\tau_1 + T_1) \frac{dy^*(t)}{dt} + \tau_2 y^*(t) \quad (1.36)$$

Пример 6. Получить передаточную функцию САУ с использованием эквивалентных преобразований структурной схемы. Структурная схема САУ приведена на рисунке 3.10.

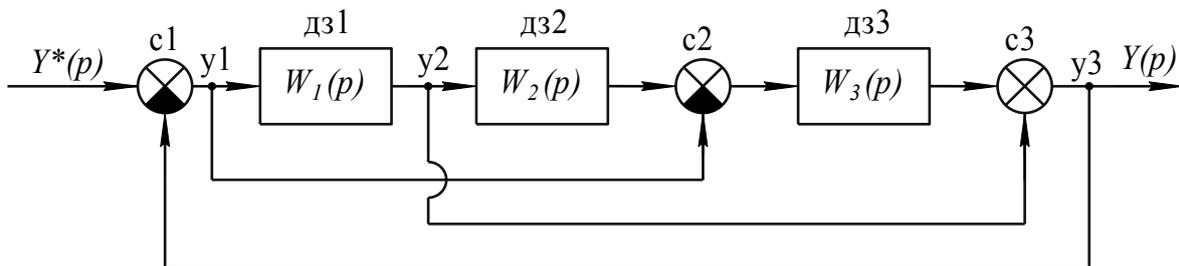


Рисунок 3.10 – Структурная схема САУ с перекрёстными связями

Решение:

Наличие перекрёстных связей не позволяет применить здесь правила нахождения передаточных функций для типовых соединений. Для этого необходимо с помощью эквивалентных преобразований привести схему на рисунке 3.10 к типовым соединениям звеньев.

Перенесём узел y_2 через звено dz_1 против направления движения сигнала. Тогда схема примет вид, представленный на рисунке 3.11.

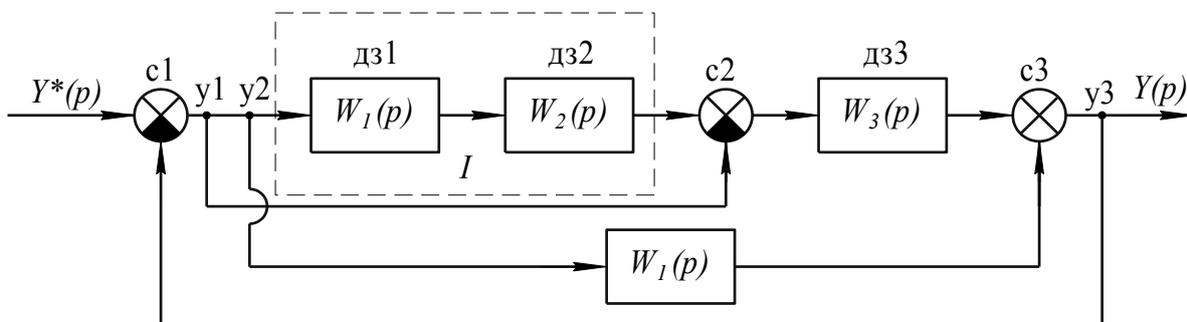


Рисунок 3.11 – Структурная схема САУ после первого этапа преобразования

Полученное последовательное соединение звеньев заменим эквивалентной передаточной функцией

$$W_I(p) = W_1(p)W_2(p). \quad (1.37)$$

Переставив узлы y_1 и y_2 местами получим следующую структурную схему приведенную на рисунке 3.11.

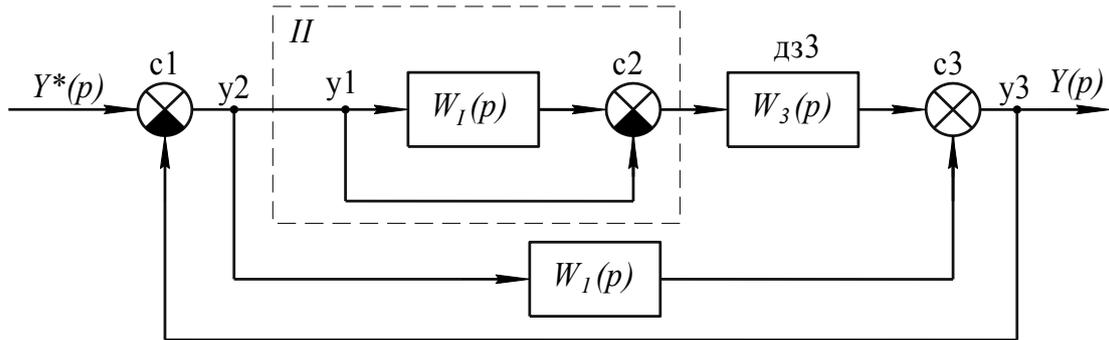


Рисунок 3.12 – Структурная схема САУ после второго этапа преобразования

Заменив выделенный контур, представляющий собой параллельное соединение, эквивалентным звеном $W_{II}(p)$ получим структурную схему на рисунке 3.13.

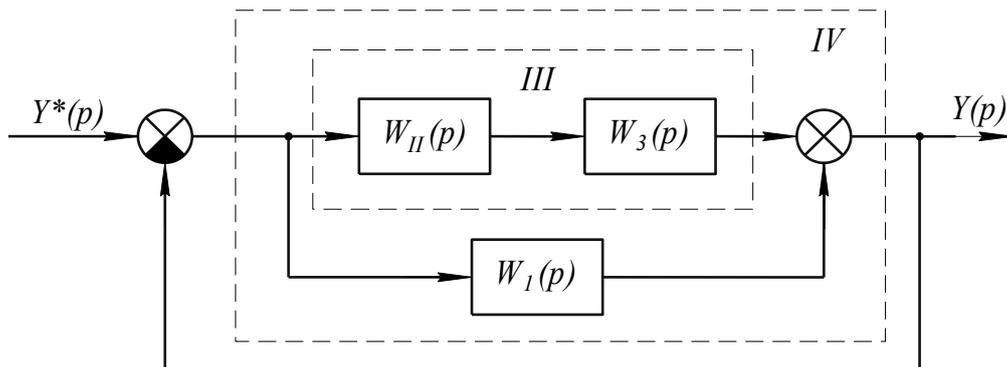


Рисунок 3.13 – Структурная схема САУ после третьего этапа преобразования

$$W_{II}(p) = W_I(p) - 1 = W_1(p)W_2(p) - 1. \quad (1.38)$$

Заменив внутренний контур III эквивалентным звеном (последовательное соединение) получим

$$W_{III}(p) = W_{II}(p)W_3(p) = W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1). \quad (1.39)$$

Второй контур IV (параллельное соединение) заменим звеном с передаточной функцией

$$W_p(p) = W_{III}(p) + W_1(p) = W_1(p) + W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1), \quad (1.40)$$

где $W_p(p)$ – передаточная функция разомкнутой части САУ.

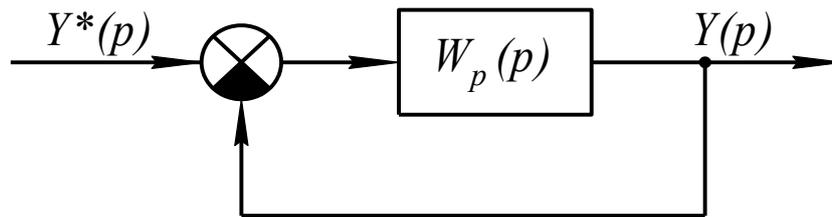


Рисунок 3.14 – Упрощенная структурная схема САУ

Упрощённая структурная схема САУ приведена на рисунке 3.14 и представляет соединение с обратной связью, передаточная функция которого определяется следующим образом:

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{W_1(p) + W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1)}{1 + W_1(p) + W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1)}. \quad (1.41)$$

1.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами получения передаточных функций, построения, преобразования и упрощения структурных схем.

1. Построить структурные схемы системы по заданным системам дифференциальных уравнений, приведённым в таблице 4.1, в соответствии с вариантом, указанным преподавателем.

Таблица 4.1 – Системы дифференциальных уравнений

№ варианта	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	ВХОДНЫЕ	ВЫХОДНЫЕ	
1	$x(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = k_1x(t) - k_2x_{oc1}(t) + k_3x_{oc2}(t); \\ c_1 \frac{dx_{oc1}(t)}{dt} + c_2x_{oc1}(t) = c_3 \frac{dy(t)}{dt}; \\ x_{oc2}(t) = \frac{1}{T} \int_0^t y(t)dt. \end{cases}$
2	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \\ = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t); \\ c_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + c_1 x_1(t) = k_1 \frac{dy(t)}{dt} + k_2 v_1(t); \\ c_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = k_3 \frac{dv_2(t)}{dt} - k_4 v_1(t). \end{cases}$
3	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$\begin{cases} R_1 c_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = c_1 \frac{du_1(t)}{dt}; \\ R_2 c_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = c_2 \frac{du_1(t)}{dt}; \\ c_2 \frac{du_2(t)}{dt} = i_2(t) - R_1 c_2 \frac{di_1(t)}{dt}. \end{cases}$
4	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 v_1(t); \\ c_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - c_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_2 x(t) = k \frac{dv_2(t)}{dt}. \end{cases}$

Продолжение таблицы 4.1

№ вариан-та	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	вход-ные	ВЫХОД-ные	
5	$\omega^*(t)$ $M_H(t)$	$\omega(t)$	$\begin{cases} T_0 \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = k_0 y(t) - k_1 M_H(t); \\ T_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \\ = k_2 (\omega^*(t) - \omega(t)); \\ \frac{dy(t)}{dt} = k_3 x(t). \end{cases}$
6	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_0 x(t) + k_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t); \\ c_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_2 x(t) = \\ = k_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_3 \frac{dv_2(t)}{dt}. \end{cases}$
7	$v(t)$	$y_1(t)$ $y_2(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = b_0 \frac{dv(t)}{dt} + b_1 v(t) + k_1 x(t); \\ c_0 \frac{d^3 y_2(t)}{dt^3} + c_1 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_2 y_2(t) = k_2 v(t); \\ \frac{dx(t)}{dt} = k_3 y_1(t) + k_4 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2}. \end{cases}$
8	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t); \\ b_0 \frac{dx_2(t)}{dt} = k_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + k_3 v_2(t); \\ c_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_4 x_1(t) + k_5 x_2(t). \end{cases}$

Продолжение таблицы 4.1

№ варианта	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	входные	выходные	
9	$v(t)$	$y_1(t)$ $y_2(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + a_1 y_1(t) = k_1 x(t) + b_0 \frac{dv(t)}{dt}; \\ x(t) = k_2 y_1(t) - k_3 y_2(t); \\ c_0 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_1 \frac{dy_2(t)}{dt} = k_4 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 v(t). \end{cases}$
10	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} y(t) = a_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t) + b_0 \frac{dx_2(t)}{dt}; \\ c_0 \frac{d^3 x_1(t)}{dt^3} = k_1 v_1(t); \\ c_1 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - c_2 x_2(t) = k_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + k_3 v_1(t). \end{cases}$
11	$v(t)$	$y_1(t)$ $y_2(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + a_2 y_1(t) = b_0 \frac{dv(t)}{dt}; \\ b_1 v(t) + k y_1(t) = \\ = c_0 \frac{d^4 y_2(t)}{dt^4} + c_1 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_2 y_2(t). \end{cases}$
12	$v(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \\ = k_0 (x(t) - v(t)); \\ b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t) = c_0 \frac{dy(t)}{dt} + c_1 y(t) + \\ + c_2 \frac{dv(t)}{dt} + c_3 v(t). \end{cases}$

Продолжение таблицы 4.1

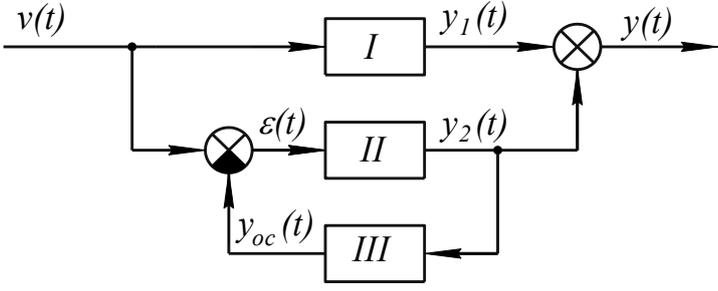
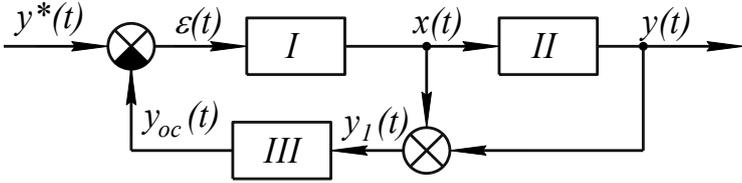
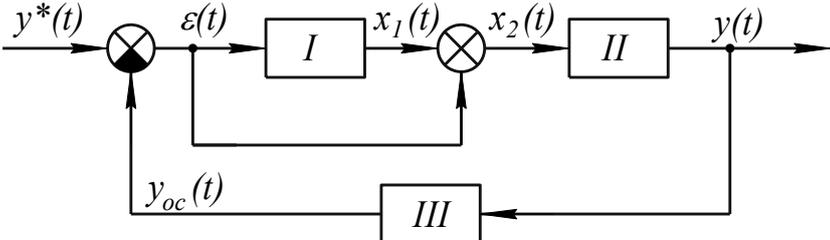
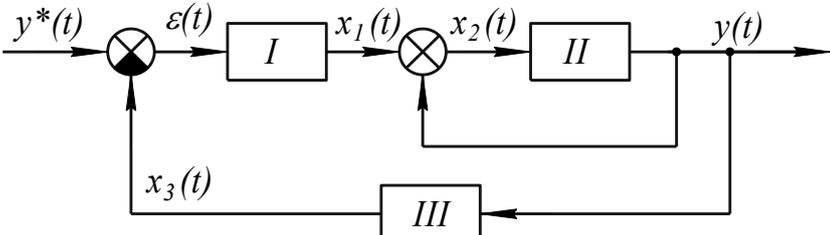
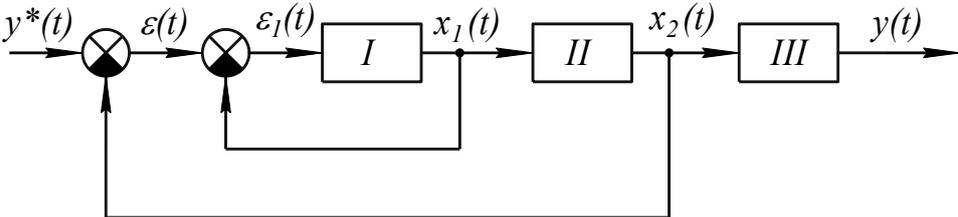
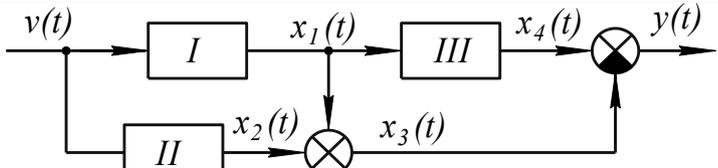
№ варианта	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	входные	выходные	
13	$v_1(t)$ $v_2(t)$ $v_3(t)$	$y(t)$	$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \\ = k_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 x_2(t); \\ b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t) = c_0 \frac{dv_1(t)}{dt} + \\ + c_1 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + c_2 v_2(t); \\ d_0 \frac{dx_2(t)}{dt} + d_1 x_2(t) = \ell_0 \frac{dv_1(t)}{dt} + \\ + \ell_1 \frac{dv_2(t)}{dt} - \ell_2 v_3(t). \end{array} \right.$
14	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\left\{ \begin{array}{l} a_0 y(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t); \\ c_0 \frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 \frac{dy(t)}{dt} + k_2 \frac{dv_1(t)}{dt} + k_3 \frac{dv_2(t)}{dt}; \\ c_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + c_2 x_2(t) = k_4 v_2(t). \end{array} \right.$

3. Построить структурную схему САУ по её функциональной схеме и определить передаточную функцию и дифференциальное уравнение системы по схемам, приведённым в таблице 4.2, дифференциальным уравнениям элементов (таблица 4.3) и значениям коэффициентов (таблица 4.4) в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 4.2 – Функциональные схемы

№ варианта	Функциональные схемы
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Продолжение таблицы 4.2

№ варианта	Функциональные схемы
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Продолжение таблицы 4.2

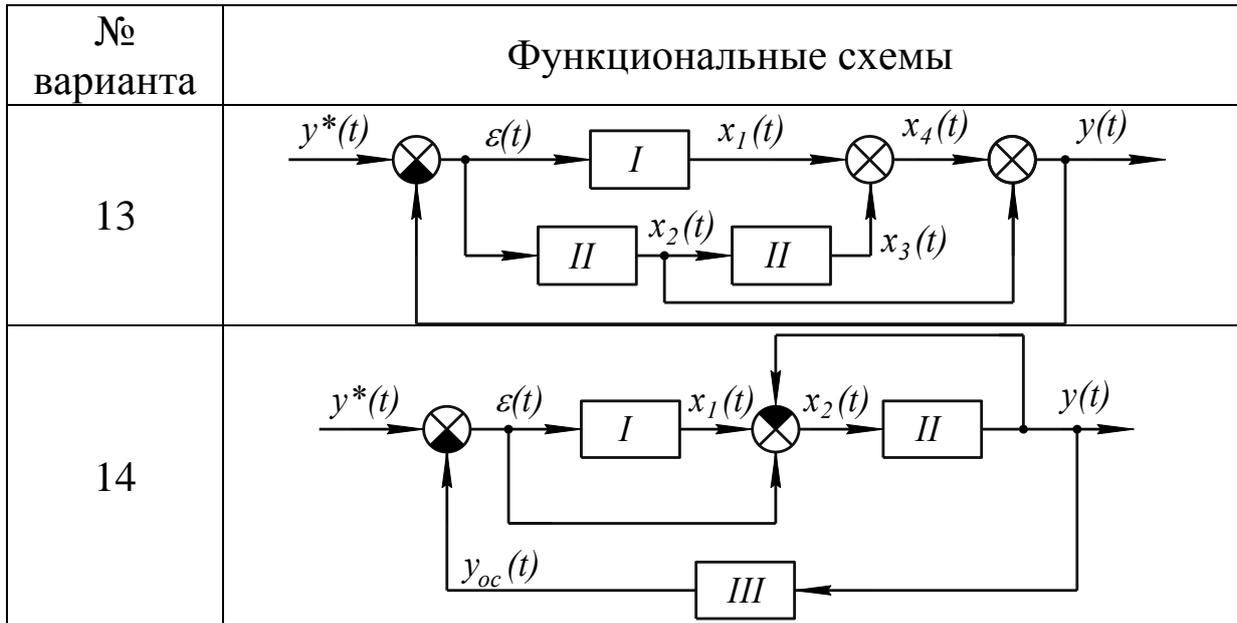


Таблица 4.3 – Дифференциальные уравнения элементов системы

Номер варианта	Дифференциальные уравнения
1	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 x_2''(t) + T_3 x_2'(t) + x_2(t) = k_2 x_1(t);$ $III) \quad T_4 x_3'(t) + x_3(t) = k_3 x_1(t).$
2	$I) \quad T_1 x'(t) + x(t) = k_1 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 y''(t) + y(t) = k_2 x(t);$ $III) \quad T_3 y_{oc}'(t) = k_3 y(t).$
3	$I) \quad T_1 y_1'(t) = k_1 y(t);$ $II) \quad T_2 y_{oc}''(t) + T_3 y_{oc}'(t) = k_2 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $III) \quad T_4 y_2'(t) = k_3 y_{oc}'(t) + y_{oc}(t).$
4	$I) \quad T_1 y'(t) + y(t) = k_1 \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 y_{oc}'(t) = k_2 \varepsilon_1'(t) + \varepsilon_1(t);$ $III) \quad T_3 y_1'(t) + y_1(t) = k_3 y_{oc}'(t).$

Продолжение таблицы 4.3

Номер варианта	Дифференциальные уравнения
5	<p><i>I)</i> $T_1 x_1'(t) = k_1 \varepsilon_1(t);$ <i>II)</i> $T_2 x_2''(t) + T_3 x_2'(t) + x_2(t) = k_2 x_1(t);$ <i>III)</i> $T_4 y'(t) + y(t) = k_3 x_2'(t) + k_4 x_2(t).$</p>
6	<p><i>I)</i> $T_1 x_1''(t) + T_2 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 v(t);$ <i>II)</i> $T_3 x_2'(t) + x_2(t) = k_2 \varepsilon(t);$ <i>III)</i> $T_4 x_3''(t) + x_3(t) = k_3 x_1'(t) + x_1(t).$</p>
7	<p><i>I)</i> $T_1 y_1'(t) + y_1(t) = k_1 v(t);$ <i>II)</i> $T_2 y_2''(t) + T_3 y_2'(t) + y_2(t) = k_2 \varepsilon(t);$ <i>III)</i> $T_4 y_{oc}'(t) = k_3 y_2(t).$</p>
8	<p><i>I)</i> $T_1 x''(t) + T_2 x'(t) = k_1 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ <i>II)</i> $T_3 y(t) = k_2 x'(t) + k_3 x(t);$ <i>III)</i> $T_4 y_{oc}'(t) + y_{oc}(t) = k_4 y_1'(t - \tau).$</p>
9	<p><i>I)</i> $T_1 x_1'(t) = k_1 \varepsilon_1'(t) + \varepsilon(t);$ <i>II)</i> $T_2 y''(t) + T_3 y'(t) + y(t) = k_2 x_2(t - \tau);$ <i>III)</i> $T_4 y_{oc}'(t) + y_{oc}(t) = k_3 y(t).$</p>
10	<p><i>I)</i> $T_1 x_1'(t) + T_2 x_1(t) = k_1 \varepsilon_1'(t);$ <i>II)</i> $T_3 y''(t) + y(t) = k_2 x_2'(t) + k_3 x_2(t);$ <i>III)</i> $T_4 x_3'(t) + x_3(t) = k_4 y(t - \tau).$</p>
11	<p><i>I)</i> $T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 \varepsilon_1'(t) + k_2 \varepsilon_1(t);$ <i>II)</i> $T_2 x_2''(t) + x_2(t) = k_3 x_1'(t) + x_1(t);$ <i>III)</i> $T_3 y'(t) = k_4 x_2'(t) + x_2(t).$</p>

Продолжение таблицы 4.3

Номер варианта	Дифференциальные уравнения
12	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 v_1'(t) + v(t);$ $II) \quad x_2(t) = k_3 v_1'(t) + k_4 v(t);$ $III) \quad T_2 x_4''(t) + T_3 x_4'(t) + x_4(t) = k_2 x_1(t).$
13	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 \varepsilon(t - \tau);$ $II) \quad T_2 x_2'(t) + T_3 x_2(t) = k_2 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $III) \quad T_4 x_3''(t) + x_3(t) = k_3 x_2'(t).$
14	$I) \quad T_1 x_1''(t) + x_1'(t) = k_1 \varepsilon'(t);$ $II) \quad T_2 y'(t) + y(t) = x_2(t - \tau);$ $III) \quad T_3 x'_{oc}(t) = k_2 y'(t) + y(t).$

Таблица 4.4 – Значения коэффициентов дифференциальных уравнений

№ варианта	T_1	T_2	T_3	T_4	k_1	k_2	k_3	k_4	τ
1	2	0,8	1,2	1,5	0,5	1,4	1,2	–	–
2	0,6	1,6	0,8	–	0,9	1,9	1,7	–	–
3	0,7	2,1	1,6	0,4	1,7	1,2	2,0	–	–
4	2,4	0,5	0,9	–	2,5	1,3	1,7	–	–
5	0,8	1,2	1,4	2,1	0,6	1,9	2,6	1,7	–
6	0,8	1,4	0,9	0,2	2,8	1,6	1,1	–	–
7	2,5	1,7	0,4	0,9	1,9	1,8	1,4	–	–
8	0,5	1,8	0,2	2,1	0,3	1,4	1,3	0,8	1,2
9	1,2	0,7	1,9	1,0	2,0	2,5	1,7	–	1,5
10	0,8	1,4	2	2,1	0,9	1,9	1,3	2,4	1,7
11	0,9	0,6	2,4	–	1,4	2,7	2	1,2	–
12	2,4	0,8	2,3	–	0,5	1,4	0,9	2,1	–
13	0,6	1,2	2,1	0,9	1,5	1,8	0,7	–	2,1
14	2,9	0,4	0,5	–	1,3	1,8	–	–	1,9

4. Получить передаточную функцию САУ по структурным схемам, приведённым в табл. 4.5 с использованием эквивалентных преобразований в соответствии с заданным вариантом.

5. Оформить и защитить отчёт по лабораторной работе.

Таблица 4.5 – Структурная схема САУ

№ варианта	Структурные схемы
1	
2	
3	
4	

Продолжение таблицы 4.5

№ варианта	Структурные схемы
5	
6	
7	
8	
9	

Продолжение таблицы 4.5

№ варианта	Структурные схемы
10	
11	
12	
13	
14	

1.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте понятие передаточной функции.
1. Что представляют собой структурные схемы САУ?
3. Что такое динамическое звено?
4. Назовите общие правила составления структурных схем.
5. Назовите рекомендации, используемые при выборе входных и выходных переменных отдельных уравнений при построении структурных схем.
6. Как определяется передаточная функция для соединения с обратной связью?
7. Для чего используются эквивалентные преобразования структурных схем?
8. Приведите эквивалентные схемы при переносе узла через динамическое звено.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

2.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – приобретение студентами практических навыков по описанию и моделированию одномерных и многомерных объектов и систем методом переменных состояния.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математическая модель объекта в переменных состояния состоит из двух уравнений:

- уравнения состояния;
- уравнения выхода (наблюдения).

Уравнение состояния линейного многомерного объекта в виде векторного дифференциального уравнения в форме Коши имеет вид

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{B} \cdot \bar{u}(t) + \bar{z}(t), \quad (2.1)$$

где $\bar{x}(t) = [x_i(t)]_{n \times 1}$ – вектор состояния; $\bar{u}(t) = [u_j(t)]_{m \times 1}$ – вектор управления; $\bar{z}(t) = [z_l(t)]_{n \times 1}$ – вектор возмущений, действующих на входе объекта; $\bar{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, $\bar{B} = [b_{ij}]_{n \times m}$ – матрицы постоянных коэффициентов, определяемых параметрами объекта управления.

Векторному дифференциальному уравнению (2.1) эквивалентна система n скалярных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(t) + z_i(t), \quad (2.2)$$

где $i = \overline{1, n}$.

Уравнение выхода в векторной форме имеет вид:

$$\bar{y}(t) = \bar{C} \bar{x}(t) + \bar{D} \bar{u}(t) + \bar{g}(t), \quad (2.3)$$

где $\bar{y}(t) = [y_i(t)]_{l \times 1}$ – вектор-столбец выходных переменных объекта; $\bar{g}(t) = [g_i(t)]_{l \times 1}$ – вектор возмущений, действующих на выходе объекта; $\bar{D} = [d_{ij}]_{l \times m}$ – матрица постоянных коэффициентов, характеризую-

ющих безинерционное влияние управляющих воздействий на выход объекта; $\bar{C} = [c_{ij}]_{l \times n}$ – матрица наблюдения.

Векторному уравнению (2.3) эквивалентна система l скалярных уравнений вида:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij} u_j(t) + g_i(t), \quad (2.4)$$

где $i = \overline{1, l}$.

При описании одномерного объекта с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (2.5)$$

методом переменных состояний имеет место следующая система дифференциальных уравнений состояния:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, n-1} \\ \dot{x}_n(t) &= -\frac{1}{a_0} (a_1 x_n(t) + \dots + a_{n-1} x_2(t) + a_n x_1(t)) + \frac{1}{a_0} u(t) \end{aligned} \right\}, \quad (2.6)$$

а уравнение выхода имеет вид:

$$y(t) = b_0 x_{m+1}(t) + b_1 x_m(t) + \dots + b_{m-1} x_2(t) + b_m x_1(t). \quad (2.7)$$

Векторные уравнения (2.1) и (2.3) адекватно описывают одномерный объект, если $m < n$, а матрицы имеют вид:

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{array} \right|_{n \times n} \end{array};$$

$$\bar{B} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ a_0 \end{array} \right|_{n \times 1} \end{array}; \quad \bar{C}^T = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} b_m \\ b_{m-1} \\ \dots \\ b_1 \\ b_0 \end{array} \right|_{(m+1) \times 1} \end{array}; \quad \bar{D} = \bar{D}.$$

3. ПРИМЕРЫ ОПИСАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

3.1. Описание одномерного объекта методом переменных состояния

Пусть одномерный объект управления описывается передаточной функцией вида

$$W_0(p) = \frac{0,5p+1}{(2p+1)(0,2p+1)(0,1p+1)^2}. \quad (3.1)$$

Требуется получить уравнение состояния и выхода одномерного объекта с передаточной функцией (3.1).

В соответствии с определением передаточной функции объекта управления можно записать:

$$W_0(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{0,5p+1}{(2p+1)(0,2p+1)(0,1p+1)^2}. \quad (3.2)$$

После преобразования и приведения подобных можно записать

$$Y(p)(0,004p^4 + 0,102p^3 + 0,82p^2 + 2,4p + 1) = U(p)(0,5p + 1). \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) запишем в следующем виде

$$\frac{Y(p)}{0,5p+1} = \frac{U(p)}{0,004p^4 + 0,102p^3 + 0,82p^2 + 2,4p + 1}. \quad (3.4)$$

Введем вспомогательную переменную $x_1(t)$. Тогда можно записать:

$$X_1(p) = \frac{U(p)}{0,004p^4 + 0,102p^3 + 0,82p^2 + 2,4p + 1}; \quad (3.5)$$

$$X_1(p) = \frac{Y(p)}{0,5p+1}. \quad (3.6)$$

Запишем уравнение (3.5) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, введя следующие переменные состояния

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \dot{x}_1(t); \\ x_3(t) &= \ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t); \\ x_4(t) &= \dddot{x}_1(t) = \ddot{x}_2(t) = \dot{x}_3(t) \end{aligned} \right\}. \quad (3.7)$$

Выразим $\dot{x}_4(t)$ из уравнения (3.5) используя обозначения (3.7).

Уравнение (3.5) в операторной форме имеет вид:

$$0,004p^4 X_1(p) + 0,102p^3 X_1(p) + 0,82p^2 X_1(p) + 2,4p X_1(p) + X_1(p) = U(p) \quad (3.8)$$

Тогда можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$0,004x_1^{(4)}(t) + 0,102x_1^{(3)}(t) + 0,82\ddot{x}_1(t) + 2,4\dot{x}_1(t) + x_1(t) = u(t). \quad (3.9)$$

Подставив выражение (3.7) в уравнение (3.9) имеем

$$0,004\dot{x}_4(t) + 0,102x_4(t) + 0,82x_3(t) + 2,4x_2(t) + x_1(t) = u(t). \quad (3.10)$$

В итоге имеем следующее уравнение состояния:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t), \quad i = \overline{1,3}; \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{0,004}(u(t) - x_1(t) - 2,4x_2(t) - 0,82x_3(t) - 0,102x_4(t)) \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

Уравнение выхода получаем подставкой выражений (3.7) в уравнение (3.6), которое в итоге примет вид:

$$y(t) = 0,5x_2(t) + x_1(t). \quad (3.12)$$

В матричном виде уравнение состояния примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -250 & -600 & -212,5 & -25,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} u(t), \quad (3.13)$$

а уравнение выхода

$$y(t) = (0,5 \quad 1) \times \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Модель одномерного объекта с передаточной функцией (3.1) в переменных состояния представлена графически на рис. 3.1, где блоки $\frac{1}{p}$ - интеграторы.

Переменные состояния, определяемые выражениями (3.7) называют фазовыми.

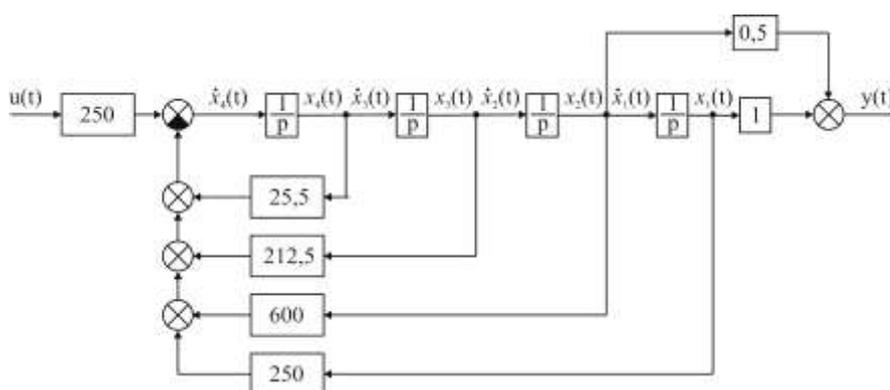


Рис. 3.1. Модель объекта с передаточной функцией (3.1) в переменных состояния

3.2. Описание многомерного объекта методом фазовых переменных состояния.

Пусть двумерный объект, приведенный на рис. 3.2,

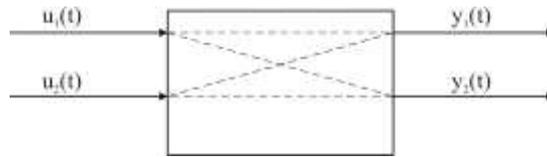


Рис. 3.2. Двумерный объект

описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$2y_1'(t) + y_1(t) = 0,5u_1'(t) + u_1(t); \quad (3.15)$$

$$0,8y_2''(t) + 1,2y_2'(t) + y_2(t) = 1,4u_2(t); \quad (3.16)$$

$$1,5y_1'(t) + y_1(t) = 1,2u_2(t); \quad (3.17)$$

$$0,6y_2''(t) + y_2'(t) + 1,5y_2(t) = 0,9u_1'(t) + u_1(t). \quad (3.18)$$

Требуется получить модель двумерного объекта в переменных состояния по методике, описанной в разделе (3.1) для одномерного объекта.

Запишем уравнение (3.15) в операторной форме

$$2pY_1(p) + Y_1(p) = 0,5pU_1(p) + U_1(p). \quad (3.19)$$

Введем переменную состояния $x_1(t)$ на основе выражения (3.19) следующим образом:

$$\frac{Y_1(p)}{0,5p+1} = \frac{U_1(p)}{2p+1} = X_1(p) \quad (3.20)$$

Тогда можно записать:

$$2pX_1(p) + X_1(p) = U_1(p)$$

или

$$2\dot{x}_1(t) + x_1(t) = u_1(t).$$

Отсюда

$$\dot{x}_1(t) = -0,5x_1(t) + 0,5u_1(t). \quad (3.21)$$

Для записи уравнения выхода введем переменную состояния:

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t). \quad (3.22)$$

Тогда уравнение выхода примет вид:

$$y_1(t) = 0,5x_2(t) + x_1(t). \quad (3.23)$$

Запишем уравнение (3.16) в операторной форме:

$$0,8p^2Y_2(p) + 1,2pY_2(p) + Y_2(p) = 1,4U_2(p) \quad (3.24)$$

Введем переменную состояния $x_3(t)$, т.е.

$$\frac{Y_2(p)}{1,4} = \frac{U_2(p)}{0,8p^2 + 1,2p + 1} = X_3(p). \quad (3.25)$$

Тогда имеем:

$$0,8\ddot{x}_3(t) + 1,2\dot{x}_3(t) + x_3(t) = u_2(t) \quad (3.26)$$

Введем переменную состояния

$$x_4(t) = \dot{x}_3(t). \quad (3.27)$$

Тогда уравнение (3.26) примет вид:

$$0,8\dot{x}_4(t) + 1,2x_4(t) + x_3(t) = u_2(t) \quad (3.28)$$

Отсюда получим, что:

$$\dot{x}_4(t) = -1,5x_4(t) - 1,25x_3(t) + 1,25u_2(t), \quad (3.29)$$

а уравнение выхода будет иметь вид:

$$y_2(t) = 1,4x_3(t). \quad (3.30)$$

Запишем уравнение (3.17) в операторной форме:

$$1,5pY_1(p) + Y_1(p) = 1,2U_2(p) \quad (3.31)$$

Введем переменную состояния $x_5(t)$, т.е.

$$\frac{Y_1(p)}{1,2} = \frac{U_2(p)}{1,5p + 1} = X_5(p). \quad (3.32)$$

Тогда имеем, что

$$1,5\dot{x}_5(t) + x_5(t) = u_2(t). \quad (3.33)$$

Откуда:

$$\dot{x}_5(t) = -0,67x_5(t) + 0,67u_2(t), \quad (3.34)$$

а уравнение выхода примет вид:

$$y_1(t) = 1,2x_5(t). \quad (3.35)$$

Запишем уравнение (3.18) в операторной форме

$$0,64p^2Y_2(p) + pY_2(p) + 1,6Y_2(p) = 0,9pU_1(p) + U_1(p). \quad (3.36)$$

Введем переменную состояния $x_6(t)$, т.е.

$$\frac{U_1(p)}{0,64p^2 + p + 1,6} = \frac{Y_2(p)}{0,9p + 1} = X_6(p). \quad (3.37)$$

Тогда имеем, что

$$0,64\ddot{x}_6(t) + \dot{x}_6(t) + 1,6x_6(t) = u_1(t). \quad (3.38)$$

Введем переменную состояния:

$$x_7(t) = \dot{x}_6(t). \quad (3.39)$$

Тогда уравнение (3.38) примет вид:

$$0,64\dot{x}_7(t) + x_7(t) + 1,6x_6(t) = u_1(t) \quad (3.40)$$

Откуда:

$$\dot{x}_7(t) = -1,56x_7(t) - 2,5x_6(t) + 1,56u_1(t), \quad (3.41)$$

а уравнение выхода примет вид:

$$y_2(t) = 0,9x_7(t) + x_6(t). \quad (3.42)$$

На основе уравнений (3.21), (3.22), (3.27), (3.29), (3.34), (3.39) и (3.41) запишем систему дифференциальных уравнений состояния двумерного объекта:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0,5x_1(t) + 0,5u_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= 0; \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= -1,5x_4(t) - 1,25x_3(t) + 1,25u_2(t); \\ \dot{x}_5(t) &= -0,67x_5(t) + 0,67u_2(t); \\ \dot{x}_6(t) &= x_7(t); \\ \dot{x}_7(t) &= -1,56x_7(t) - 2,5x_6(t) + 1,56u_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

которая в матричном виде примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \\ \dot{x}_7(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,25 & -1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5 & -1,56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1,25 \\ 0 & 0,67 \\ 0 & 0 \\ 1,56 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Система уравнений выхода для двумерного объекта на основе выражений (3.23), (3.30), (3.35), (3.42) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= 0,5x_2(t) + x_1(t); \\ y_2(t) &= 1,4x_3(t); \\ y_1(t) &= 1,2x_5(t); \\ y_2(t) &= 0,9x_7(t) + x_6(t) \end{aligned} \right\}. \quad (3.45)$$

В матричном виде уравнения (3.45) запишутся в виде:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 & 0 & 0 & 1 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Модель двумерного объекта в фазовых переменных состояния определяемого уравнениями (3.15)÷(3.18) представлена на рис. 3.3.

Достоинством метода описания многомерного объекта на основе фазовых переменных состояния является простота, а недостатком – избыточное число переменных состояния.

3.3. Описание многомерного объекта методом переменных состояния при линейной комбинации входных и выходных переменных.

Пусть двумерный объект на рис. 3.2 описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$2y_1'(t) + y_1(t) = 2u_1'(t) + u_1(t); \quad (3.47)$$

$$y_1'(t) = 4u_2'(t) + 3u_2(t); \quad (3.48)$$

$$4y_2'(t) + y_2(t) = 2u_2(t); \quad (3.49)$$

$$3y_2''(t) + 2y_2'(t) + y_2(t) = 5u_1'(t) + 2u_1(t). \quad (3.50)$$

Переходя к операторной форме вместо дифференциальных уравнений (3.47)÷(3.50) можно получить дифференциальные уравнения для каждой выходной переменной. В итоге имеем, что

$$3y_1'(t) + y_1(t) = 2u_1'(t) + u_1(t) + 4u_2'(t) + 3u_2(t); \quad (3.51)$$

$$3y_2''(t) + 6y_2'(t) + 2y_2(t) = 5u_1'(t) + 2u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.52)$$

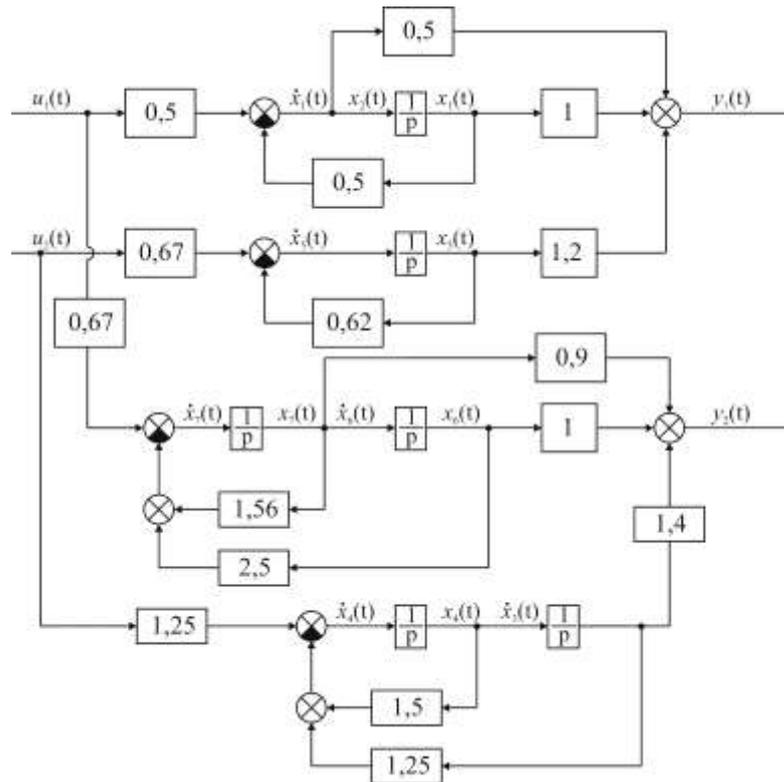


Рис. 3.3. Модель двумерного объекта в фазовых переменных состояния

Перенесем слагаемые с производными входных переменных влево. В итоге получим:

$$(3y_1'(t) - 2u_1'(t) - 4u_2'(t)) + y_1(t) = u_1(t) + 3u_2(t); \quad (3.53)$$

$$(3y_2''(t) + 6y_2'(t) - 5u_1'(t)) + 2y_2(t) = 2u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.54)$$

Преобразуем уравнения (3.53) и (3.54) к следующему виду:

$$3(y_1(t) - 0,67u_1(t) - 1,33u_2(t))' + y_1(t) = u_1(t) + 3u_2(t); \quad (3.55)$$

$$3(y_2'(t) - 2y_2(t) - 1,67u_1(t))' + 2y_2(t) = 2u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.56)$$

Введем переменные состояния:

$$x_1(t) = y_1(t) - 0,67u_1(t) - 1,33u_2(t); \quad (3.57)$$

$$x_2(t) = y_2(t); \quad (3.58)$$

$$x_3(t) = y_2'(t) - 2y_2(t) - 1,67u_1(t). \quad (3.59)$$

В этом случае дифференциальные уравнения (3.55) и (3.56) примут вид:

$$3x_1'(t) + y_1(t) = u_1(t) + 3u_2(t); \quad (3.60)$$

$$3x_3'(t) + 2x_2(t) = 2u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.61)$$

Из уравнения (3.57) имеем, что

$$y_1(t) = x_1(t) + 0,67u_1(t) + 1,33u_2(t). \quad (3.62)$$

Подставив выражение (3.62) в (3.60) получим:

$$3x_1'(t) + x_1(t) + 0,67u_1(t) + 1,33u_2(t) = u_1(t) + 3u_2(t).$$

После преобразования имеем:

$$3x_1'(t) + x_1(t) = 0,33u_1(t) + 1,67u_2(t). \quad (3.63)$$

Откуда

$$x_1'(t) = -0,33x_1(t) + 0,11u_1(t) + 0,56u_2(t). \quad (3.64)$$

На основе уравнений (3.58) и (3.59) можно записать:

$$y_2'(t) = x_2'(t) = x_3(t) + 2x_2(t) + 1,67u_1(t). \quad (3.65)$$

На основе (3.61) получаем уравнение вида:

$$x_3'(t) = -0,67x_2(t) + 0,67u_1(t) + 0,67u_2(t). \quad (3.66)$$

В итоге уравнения состояния имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= -0,33x_1(t) + 0,11u_1(t) + 0,56u_2(t); \\ x_2'(t) &= x_3(t) + 2x_2(t) + 1,67u_1(t); \\ x_3'(t) &= -0,67x_2(t) + 0,67u_1(t) + 0,67u_2(t). \end{aligned} \right\}, \quad (3.67)$$

Которые в матричном виде запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -0,67 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,11 & 0,56 \\ 1,67 & 0 \\ 0,67 & 0,67 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Уравнения выхода имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + 0,67u_1(t) + 1,33u_2(t); \\ y_2(t) &= x_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Уравнения в матричном виде имеют вид:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,67 & 1,33 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Модель двумерного объекта в переменных состояния, полученная на основе линейной комбинации входных и выходных переменных приведена на рис. 3.4.

Достоинством данного метода является минимальное число переменных состояния. В тоже время усложняются уравнения выхода, где входными переменными наряду с переменными состояния являются и управляющие воздействия.

Особенностью рассмотренного объекта является наличие всех производных входных и выходных переменных, начиная с нулевой. Рассмотрим пример, где отсутствуют некоторые производные выходных и входных переменных.

Пусть дифференциальные уравнения двумерного объекта, разрешенные относительно выходных переменных имеют вид:

$$y_1''(t) + y_1'(t) = 0,9u_1(t) + 2u_2(t); \quad (3.71)$$

$$1,5y_2'''(t) + 2y_2''(t) + 0,1y_2(t) = 0,2u_1'(t) + 2,4u_2(t). \quad (3.72)$$

Особенность построения модели в переменных состояния для таких объектов состоит в том, что нет общей методики выбора переменных состояния, необходимо каждый раз использовать тот или иной подход.

Обозначив

$$x_1(t) = y_1(t). \quad (3.73)$$

уравнение (3.63) примет вид:

$$x_1''(t) + 0,2x_1'(t) = 0,9u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.74)$$

или можно записать, что

$$(x_1'(t) + 0,2x_1(t))' = 0,9u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.75)$$

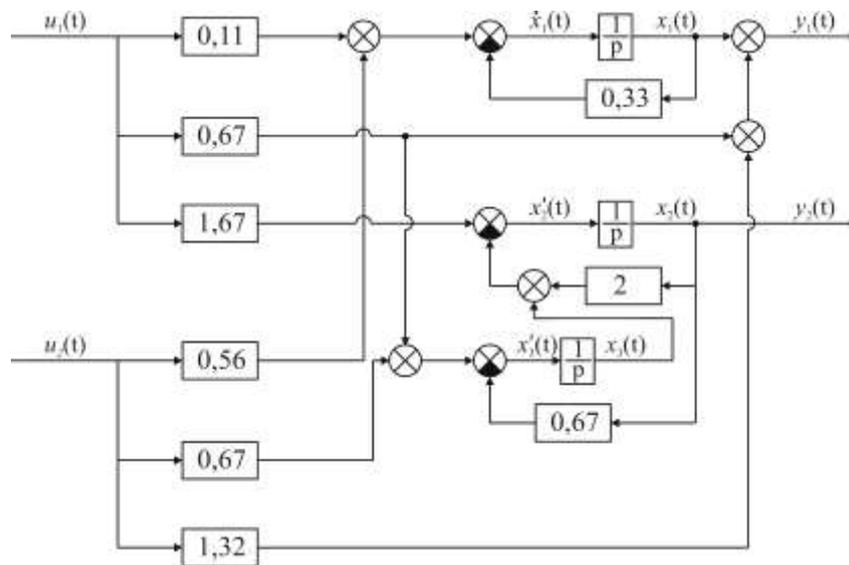


Рис. 3.4. Модель двумерного объекта I в переменных состояния.

Обозначив через

$$x_2(t) = x_1'(t) + 0,2x_1(t) \quad (3.76)$$

имеем, что

$$x_1'(t) = -0,2x_1(t) + x_2(t) \quad (3.77)$$

Подставив выражение (3.71) в (3.75) получим, что

$$x_2'(t) = 0,9u_1(t) + 2u_2(t). \quad (3.78)$$

Обозначив

$$x_3(t) = y_2(t) \quad (3.79)$$

уравнение (3.72) можно записать в виде

$$1,5x_3'''(t) + 2x_3''(t) + 0,1x_3(t) = 0,2u_1'(t) + 2,4u_2(t). \quad (3.80)$$

Обозначив:

$$x_4(t) = x_3'(t) \quad (3.81)$$

уравнение (3.80) примет вид:

$$1,5x_4''(t) + 2x_4'(t) + 0,1x_3(t) = 0,2u_1'(t) + 2,4u_2(t) \quad (3.82)$$

или его можно записать так:

$$(1,5x_4'(t) + 2x_4(t) - 0,2u_1(t))' + 0,1x_3(t) = 2,4u_2(t). \quad (3.83)$$

Введем переменную состояния

$$x_5(t) = 1,5x_4'(t) + 2x_4(t) - 0,2u_1(t). \quad (3.84)$$

Отсюда

$$x_4'(t) = 0,67x_5(t) - 1,33x_4(t) + 0,13u_1(t). \quad (3.85)$$

Подставив выражение (3.84) в (3.83) имеем, что

$$x_5'(t) + 0,1x_3(t) = 2,4u_2(t). \quad (3.86)$$

Откуда

$$x_5'(t) = -0,1x_3(t) + 2,4u_2(t). \quad (3.87)$$

Таким образом, система уравнений состояния примет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= -0,2x_1(t) + x_2(t); \\ x_2'(t) &= 0,9u_1(t) + 2u_2(t); \\ x_3'(t) &= x_4(t); \\ x_4'(t) &= 0,67x_5(t) - 1,33x_4(t) + 0,13u_1(t); \\ x_5'(t) &= -0,1x_3(t) + 2,4u_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.88)$$

которая в матричном виде примет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \\ x_5'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,33 & 0,67 \\ 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,9 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0,13 & 0 \\ 0 & 2,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Уравнения выхода имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_3(t) \end{aligned} \right\}. \quad (3.90)$$

Модель двумерного объекта, определяемого уравнениями (3.71) и (3.72) в переменных состояния, полученная на основе линейной комбинации входных и выходных переменных приведена на рис. 3.5.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами получения моделей одномерных и многомерных объектов и систем методом переменных состояния.
2. Получить модель одномерного объекта, описываемого передаточной функцией

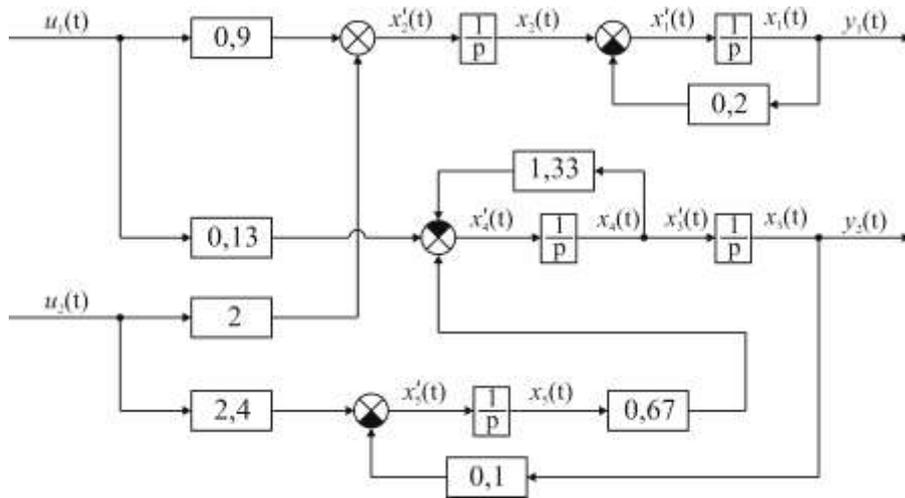


Рис. 3.5. Модель двумерного объекта 2 в переменных состояния.

$$W_0(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}, \quad (4.1)$$

коэффициенты которой приведены в табл. 4.1, выбираемые в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 4.1. – Коэффициенты передаточной функции

Номер варианта	Коэффициенты								
	b_0	b_1	b_2	b_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	0	0	0,3	0	0,64	5,66	22,5	11,4	1
2	0	1,2	1,0	1,0	0,9	1,74	3,82	5,4	0
3	1,2	0,3	0	1,2	0,05	3,8	4,1	2,4	1,2
4	0	2	4	3	1	2	2,1	3,2	1
5	0,5	0,4	0	0	2,3	1,2	0,8	3,1	0
6	0	0,4	0,25	0,13	0,5	0,4	3	2	1
7	1,1	1,4	0,3	0,2	0,4	2,1	0	0	0

Продолжение таблицы 4.1

Номер варианта	Коэффициенты								
	b_0	b_1	b_2	b_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
8	0	0,4	0	1,2	0,3	0,4	2,1	4,0	0
9	0,7	0,4	0	0	1,2	1,8	3,2	1,4	1
10	0	0,2	0,4	5,0	2,0	3,1	1,2	3,1	1
11	1,2	2,1	0,4	0	1,7	2,8	0	0	0
12	1,2	3,5	0	0	1,2	4,1	5,0	2,4	1
13	0	0	1,3	4,1	1,0	3,3	4,4	1,6	0
14	0	2,5	4,9	1,3	2,1	0,6	0	4,3	0
15	0,6	0	3,7	0	3,2	0,2	1,9	2,2	2,1
16	0	4,1	5,2	0,1	1,4	1,5	3,8	0	0
17	2,4	3,8	0	0	1,6	0,1	0,9	2,4	1,0
18	1,1	1,2	0,7	2,3	2,2	3,3	1,7	0	0
19	0	2,1	4,9	0	0,4	0,9	3,2	4,1	1,2
20	3,1	4,6	1,3	0,4	0,8	1,6	0	0	3,1

Записать полученную модель в виде системы дифференциальных уравнений и в матричном виде, а также привести модель объекта графически.

3. Получить модель двумерного объекта, описанного системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{10}y_1''(t) + a_{11}y_1'(t) + a_{12}y_1(t) &= b_{10}u_1'(t) + b_{11}u_1(t); \\ a_{20}y_2''(t) + a_{21}y_2'(t) + a_{22}y_2(t) &= b_{20}u_1'(t) + b_{21}u_1(t); \\ a_{30}y_1''(t) + a_{31}y_1'(t) + a_{32}y_1(t) &= b_{30}u_2'(t) + b_{31}u_2(t); \\ a_{40}y_2''(t) + a_{41}y_2'(t) + a_{42}y_2(t) &= b_{40}u_2'(t) + b_{41}u_2(t); \end{aligned} \right\}, \quad (4.2)$$

коэффициенты которой приведены в табл. 4.2 и 4.3, выбираемые в соответствии с заданным вариантом методом фазовых переменных состояния. Привести полученную модель в виде системы уравнений, в матричном виде и графически.

Таблица 4.2 – Коэффициенты первых двух дифференциальных уравнений (4.2)

Номер варианта	Коэффициенты									
	a_{10}	a_{11}	a_{12}	b_{10}	b_{11}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	b_{20}	b_{21}
1	1,0	0,6	0	0,9	1	2	1,2	1	0	1,4
2	0	1	2,5	0,6	1	1	2,1	0	0	1,7
3	0,7	2,4	1	1,2	0,1	1,2	0,5	0	0	1,8
4	1,0	0	0,8	0,5	0,9	0,9	1,3	0,5	0,2	1
5	0,2	1,5	0,6	1,5	1	0,2	0	3	0,5	1,3
6	0,9	0,7	0	1,7	0,3	0,1	1	2,7	0,8	2
7	1,5	1,2	2,4	2	0	0,5	1,5	0	0,5	2,2
8	0,8	0	1	2,1	1,5	0,4	1,2	2,5	0	0,9
9	1,3	1	0,7	1,7	1	0,3	1,5	2	0,9	1
10	0	1,3	2,3	1	0,4	1,2	1,2	1,8	1	1,7
11	1,9	1,5	1,1	1	0	1,5	2,7	0	1,5	1,3
12	1,0	0,1	0,9	0,2	1	0	1,3	3,1	0,5	2,5
13	0,5	1,0	1,2	0,5	1,6	0,4	0	2,4	1,3	1
14	0,3	2,2	1	0,3	2	0	1,2	2,5	0	0,9
15	0,2	1,3	2,5	2	1	0,5	1	0	0,6	0,5
16	1,0	0	1,3	0,9	0,3	0,9	1,5	3	0,8	1
17	0	1,6	1,9	1	0,7	3	1,5	2,1	1	0,7
18	0,9	2,4	0	2	0	2	1,5	0	1	0,8
19	0,4	3,2	0,9	1,2	0,4	1,9	0,4	0	3	2,1
20	1,7	0,5	1,2	1	0,7	0,7	1,3	0,2	0	1,4

4. Получить модель двумерного объекта, описанного системой дифференциальных уравнений (4.2) в соответствии с заданным вариантом в переменных состояния при линейной комбинации входных и выходных переменных. Привести полученную модель в виде системы уравнений, в матричном виде и графически.
5. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

Таблица 4.3 – Коэффициенты последних двух дифференциальных уравнений (4.2)

Номер варианта	Коэффициенты									
	a_{30}	a_{31}	a_{32}	b_{30}	b_{31}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	b_{40}	b_{41}
1	1,5	1,8	1	1,9	1	0	0,4	1	2,5	2,1
2	0	1,6	0	0	2	0,5	1,4	1	1,3	1
3	0	2,7	0,5	0	1,7	1,3	0,4	1	0,7	1
4	1	1,2	1	1	1,7	1	0	0,9	1,3	2
5	0	1	0,9	2,3	1,9	1	1	3,5	0	2,5
6	1	0,9	2,6	0,5	2	0,5	0	2	0,5	1,5
7	0,4	0,5	2,5	0,4	2,5	1,5	1	2,5	0	1,6
8	0,3	1,4	0	0,5	1,8	1	0,5	2,2	0,4	2,6
9	1	0	1,5	0	1,5	1,5	0,6	0	1	2,2
10	1,7	1,3	1,4	1,3	1,3	1,6	0	1	0,3	1
11	1	0	0,6	0	2,7	1	1,5	3,4	0,9	1,5
12	0,9	0,5	1	1,2	1,9	0	1	0,8	0	1,7
13	1	0,7	1,5	0	1	1,4	0	1	1	3,2
14	1	1	2,5	1,5	2,5	0	1	2,5	1,7	0,9
15	2	0,2	1,6	0	2	1,5	1	0	0,7	1
16	2,4	1,7	1,3	1,5	2,4	1	0	3,5	0	1,8
17	1,1	3,2	0,7	1,2	0,9	0	0,4	3,2	1,5	2,1
18	0	2,3	0	0	3	0,9	2,3	1,2	1,7	0,6
19	0	3,4	0,9	0	1,2	1,9	0,1	1,9	0,9	1,5
20	1,1	3,4	2,0	1,3	0,8	2	0	1	1,2	2,3

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В виде каких уравнений представляется модель объекта в пространстве состояний?
2. Какие переменные состояния называются фазовыми?
3. Что представляют собой матрицы \bar{A} и \bar{B} в уравнении состояния?
4. Что отражает матрица наблюдения в уравнении выхода?
5. В каком случае, при описании одномерного объекта переменные состояния нельзя выразить, как фазовые?
6. Достоинства и недостатки описания многомерного объекта фазовыми переменными состояниями.
7. Достоинства и недостатки описания многомерного объекта переменными состояниями на основе линейной комбинации входных и выходных переменных.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. РАСЧЕТ И ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

3.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – изучение частотных характеристик систем автоматического управления (САУ) и её элементов и приобретение практических навыков в построении частотных и логарифмических частотных характеристик.

3.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Частотные характеристики описывают передаточные свойства САУ и её элементов в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Зная частотные характеристики элемента или системы, можно определить их реакцию на гармонические воздействия различных частот.

Частотные характеристики широко используются в теории и практике автоматического управления, что обусловлено следующими причинами:

- реально встречающиеся воздействия, как правило, могут быть представлены в виде суммы гармоник различных частот на основе преобразования Фурье;
- в установившемся режиме гармонические сигналы передаются линейными системами без искажения;
- не возникает затруднений в экспериментальном исследовании поведения систем при гармонических входных воздействиях.

Рассмотрим физическую сущность и разновидности частотных характеристик.

Пусть на вход линейного элемента в момент времени $t=0$ подано гармоническое воздействие $g(t)$ (рис. 2.1) определённой частоты ω , то есть

$$g(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (2.1)$$

где A – амплитуда гармонического воздействия;

φ – фаза гармонического воздействия;

ω – частота гармонического воздействия, $\omega=2\pi/T$, где T – период гармонического воздействия.

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса, элемент войдёт в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина $y(t)$ будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω , но с другими амплитудой B и фазой ψ (рис. 2.1), т. е.

$$y(t) = B \sin(\omega \cdot t + \psi), \quad (2.2)$$

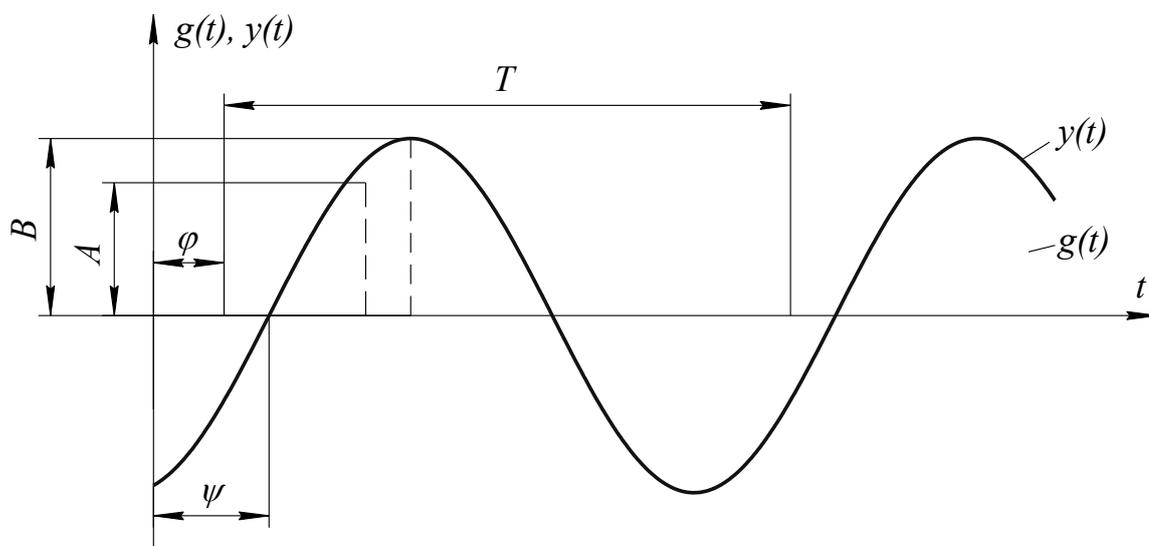


Рисунок 2.1 – Входное и выходное гармонические воздействия

Повторяя такой эксперимент при фиксированной амплитуде A для различных значений частоты ω (от 0 до $+\infty$), можно установить, что амплитуда B и фазовый сдвиг $\Delta\varphi = \psi - \varphi$ выходной величины зависят от частоты входного воздействия. Следовательно зависимости амплитуды B и фазы φ от частоты ω могут служить характеристиками динамических свойств элементов (системы).

Изменение амплитуды B и фазы φ определяется не только изменениями частоты, но и характеристиками рассматриваемого элемента (видом дифференциального уравнения и его параметрами), а амплитуда ещё и амплитудой входного воздействия A .

Зависимость отношения амплитуд B/A выходного и входного сигналов от частоты называется амплитудной частотной функцией $A(\omega)$, а её график при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$

называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). АЧХ показывает как элемент или система пропускают сигналы различной частоты. Причём оценка пропускания осуществляется по соотношению амплитуд B/A . АЧХ имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входного воздействия.

Зависимость фазового сдвига $\Delta\varphi = \psi - \varphi$ между выходным и входным сигналами от частоты называется фазовой частотной функцией $\varphi(\omega)$, а её график фазово-частотной характеристикой (ФЧХ). ФЧХ показывает какое отставание или опережение по фазе создаёт элемент при различных частотах.

Обобщением понятий $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ является амплитудно-фазовая частотная функция (частотная передаточная функция) $W(j\omega)$, которая характеризует изменение амплитуды и фазы выходной величины системы в установившемся режиме при приложении на вход гармонического воздействия. График частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ получается с помощью преобразования Фурье, являющегося частным случаем преобразования Лапласа при $p = j\omega$, то есть

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.3)$$

На практике $W(j\omega)$ получают путём замены в передаточной функции:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (2.4)$$

p на $j\omega$. В итоге имеем, что:

$$W(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} j\omega + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n}, \quad (2.5)$$

которая является функцией комплексной переменной, модуль которой является амплитудной частотной функцией $A(\omega)$, а аргумент – фазовой частотной функцией $\varphi(\omega)$.

АФЧХ представляется на комплексной плоскости. Пример АФЧХ приведен на рисунке 2.2. Он показывает, что АФЧХ представляет собой годограф, определяющий геометрическое место точек для вектора с модулем $A(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.

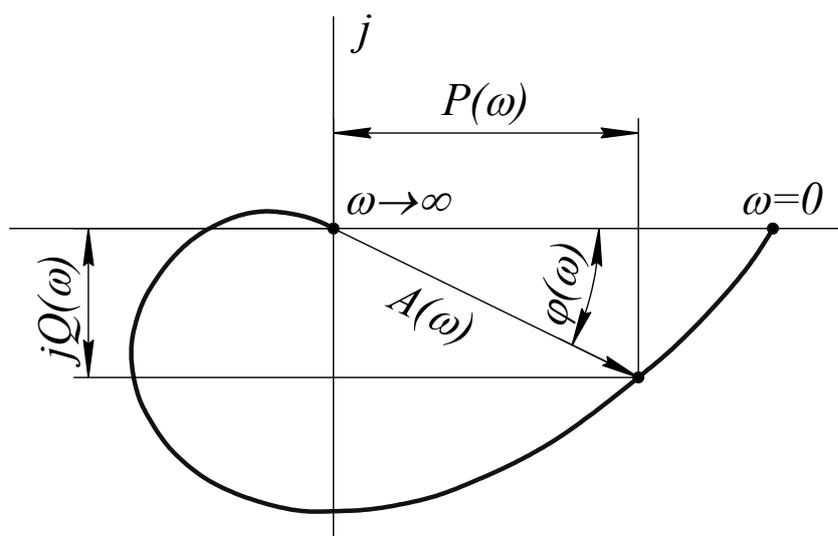


Рисунок 2.2 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика

В соответствии с формулой Эйлера можно записать:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.6)$$

где $P(\omega)$ – вещественная частотная функция;

$Q(\omega)$ – мнимая частотная функция.

График функции $P(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ), а график функции $Q(\omega)$ – мнимой частотной характеристикой (МЧХ).

На основе выражения (2.6) и графика на рисунке 2.2 можно записать:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (2.7)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \quad (2.8)$$

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad (2.9)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (2.10)$$

Основным достоинством частотных характеристик является то, что они без решения дифференциальных уравнений позволяют судить о поведении системы: оценивать устойчивость САУ; определять показатели качества; рассчитывать средства коррекции систем для получения заданных показателей качества.

При практических расчетах САУ удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называются логарифмическими. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближённо заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Эти отрезки в большинстве случаев удаётся построить без громоздких вычислений при помощи некоторых простых правил. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений звеньев, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик берут декаду. Декада – интервал частот, заключённый между произвольным значением частоты ω и его десятикратным увеличением 10ω . Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

На практике обычно используют:

- логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ);
- логарифмическую фазо-частотную характеристику (ЛФЧХ).

ЛАЧХ называется кривая, соответствующая двадцати десятичным логарифмам модуля АФЧХ системы, построенная в десятичном логарифмическом масштабе частот, то есть

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (2.11)$$

Её ординаты измеряются в логарифмических единицах – децибелах (дБ) или белах (Б). Если мощность одного сигнала больше (меньше) мощности другого сигнала в 10 раз, то они отличаются по мощности на 1 Бел.

При построении ЛФЧХ логарифмический масштаб применяется только для оси частот.

3.3 ПРИМЕР РАСЧЁТА И ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

3.3.1 Постановка задачи

Дана передаточная функция САУ

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (3.1)$$

где k – коэффициент передачи, $k = 10$;

T_1, T_2, T_3 – постоянные времени, $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 3$.

Требуется построить следующие частотные характеристики: АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ.

3.3.2 Получение выражений для расчёта частотных характеристик

Раскроем скобки в передаточной функции (3.1)

$$W(p) = \frac{kT_1 p + k}{T_2 T_3 p^2 + (T_2 + T_3)p + 1}. \quad (3.2)$$

Подставим в выражение (3.2) значения коэффициентов k_1, T_1, T_2, T_3

$$W(p) = \frac{10p + 10}{6p^2 + 5p + 1}. \quad (3.3)$$

Получим частотную передаточную функцию $W(j\omega)$, заменив в выражении (3.3) p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{10j\omega + 10}{6(j\omega)^2 + 5j\omega + 1}$$

или

$$W(j\omega) = \frac{10 + j10\omega}{1 - 6\omega^2 + j5\omega}. \quad (3.4)$$

Получим выражения для расчёта ВЧХ $P(\omega)$ и МЧХ $Q(\omega)$. Для этого необходимо освободиться от мнимой единицы в знаменателе. Так как $(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$, то, умножив числитель и знаменатель выражения (3.4) на комплексно-сопряжённый знаменатель, освободимся от мнимости в знаменателе:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{10 + j10\omega}{1 - 6\omega^2 + j5\omega} \cdot \frac{1 - 6\omega^2 - j5\omega}{1 - 6\omega^2 - j5\omega} = \\ &= \frac{10 - 60\omega^2 + 50\omega^2 - j50\omega + j10\omega - j60\omega^3}{(1 - 6\omega^2)^2 + 25\omega^2} = \\ &= \frac{10 - 10\omega^2 - j(60\omega^3 + 40\omega)}{1 + 13\omega^2 + 36\omega^4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

После небольших преобразований выражение (3.5) можно записать в следующем виде:

$$W(j\omega) = \frac{10 - 10\omega^2}{1 + 13\omega^2 + 36\omega^4} + j \frac{-\omega(60\omega^2 + 40)}{1 + 13\omega^2 + 36\omega^4}. \quad (3.6)$$

На основе (3.6) имеем, что

$$P(\omega) = \frac{10 - 10\omega^2}{1 + 13\omega^2 + 36\omega^4}, \quad (3.7)$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega(60\omega^2 + 40)}{1 + 13\omega^2 + 36\omega^4}. \quad (3.8)$$

АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ определяются на основе $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ по выражениям (2.7) и (2.8).

3.3.3 Построение частотных характеристик

1. Построение частотных характеристик начинается с частоты $\omega = 0$. При $\omega = 0$:

$$P(\omega)=10; Q(\omega)=0; A(\omega) = 10; \varphi(\omega)= 0.$$

2. Заканчивается построение частотных характеристик при частоте $\omega = \infty$, при которой $P(\omega)= 0; Q(\omega)=0$, так как раскрыв неопределённость вида ∞/∞ в выражениях (3.7) и (3.8) по правилу Лопиталья, получаем знаменатель равным ∞ .

3. Определяются точки пересечения АФЧХ с мнимой осью. Для этого приравняем $P(\omega)$ к нулю:

$$10 - 10\omega^2 = 0, \text{ то есть } \omega=1.$$

Итак при частоте $\omega=1$ АФЧХ пересекает мнимую ось.

4. Определяются точки пересечения АФЧХ с вещественной осью, то есть приравнивается к нулю $Q(\omega)$:

$$-\omega(60\omega^2 + 40) = 0;$$

$$Q(\omega) = 0, \text{ если } \omega=0;$$

$$Q(\omega) = 0, \text{ если } -60\omega^2 - 40 = 0.$$

Решив последнее уравнение относительно ω , получаем, что $\omega = \sqrt{-\frac{40}{60}}$, то есть получаются чисто мнимые корни. Отсюда делаем вывод, что АФЧХ только начинается на вещественной оси при $\omega=0$ и заканчивается на ней при $\omega = \infty$.

5. Определяются значения частотных характеристик в интервалах: $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Значения частотных характеристик для частотного интервала приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Значение частотных характеристик в интервале

ω	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9
$P(\omega)$	10	8,73	6,09	3,7	2,01	1,15	0,32	0,05
$Q(\omega)$	0	-3,08	-5,38	-5,53	-4,96	-4,23	-3,03	-2,27
$A(\omega)$	10	9,44	8,13	6,65	5,35	4,38	3,05	2,27
$\varphi(\omega)$	0°	$-24,8^\circ$	$-41,4^\circ$	$-56,2^\circ$	$-67,9^\circ$	$-74,5^\circ$	-84°	$-88,7^\circ$
ω	1	1,5	2	3	5	10	20	∞
$P(\omega)$	0	-0,06	-0,05	-0,03	-0,01	-0,003	-0,0001	0
$Q(\omega)$	-2	-1,24	-0,89	-0,57	-0,34	-0,1	-0,08	0
$A(\omega)$	2	1,24	0,89	0,57	0,34	0,17	0,08	0
$\varphi(\omega)$	-90°	$-92,7^\circ$	$-93,2^\circ$	-95°	$-97,8^\circ$	$-98,5^\circ$	$-99,5^\circ$	-180°

АФЧХ приведена на рисунке 3.1; АЧХ и ВЧХ – на рисунке 3.2; МЧХ – на рисунке 3.3; ФЧХ – на рисунке 3.4.

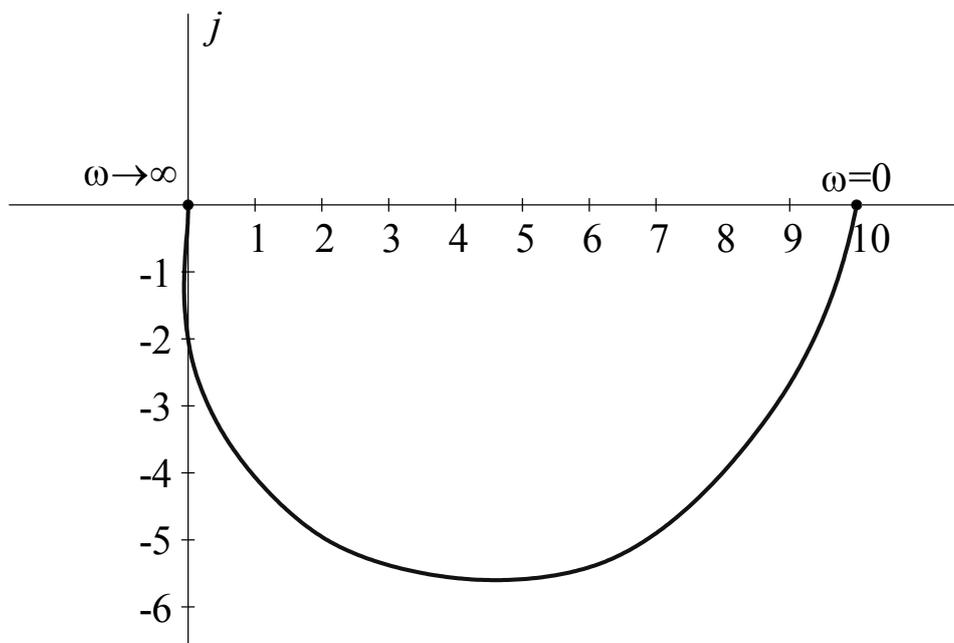


Рисунок 3.1 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)

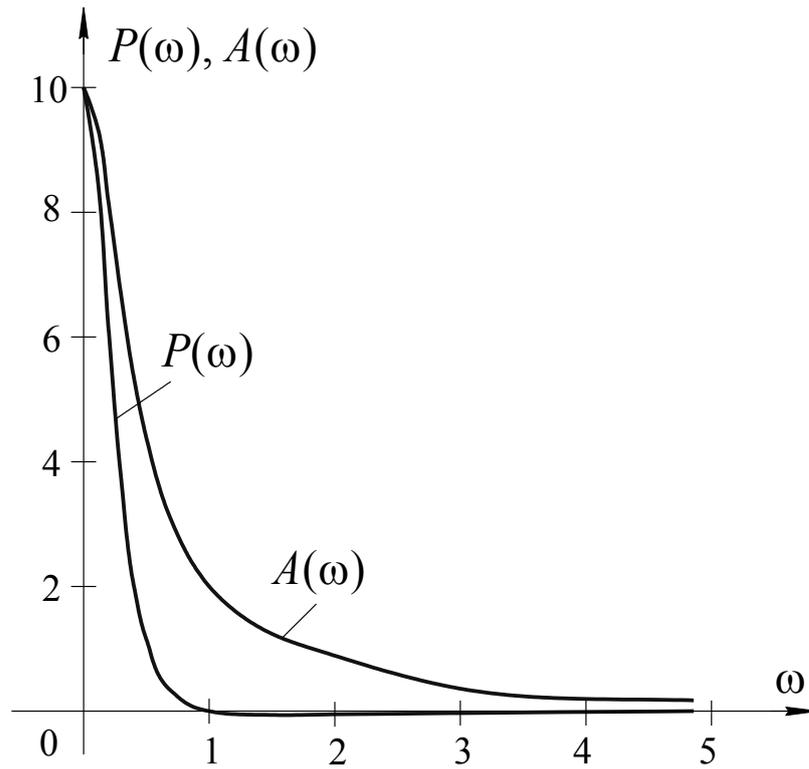


Рисунок 3.2 – Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) и амплитудная частотная характеристика (АЧХ)

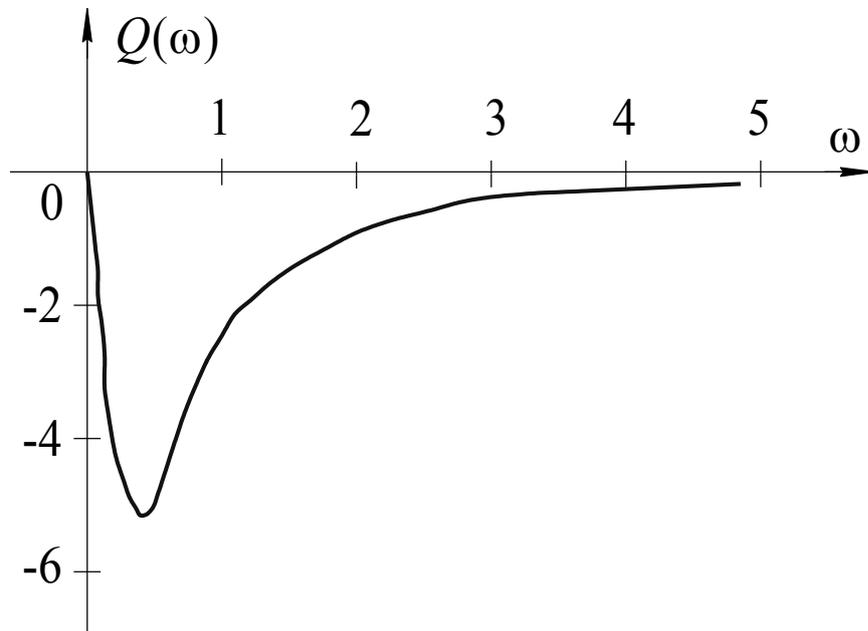


Рисунок 3.3 – Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

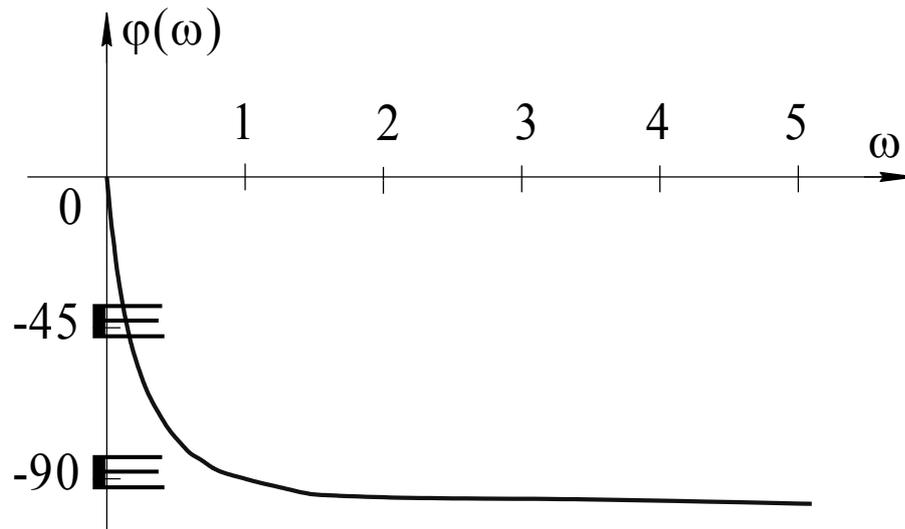


Рисунок 3.4 – Фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

3.4 МЕТОДИКА И ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

3.4.1 Методика построения ЛАЧХ

1. Определяются сопрягающие частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}; \quad \dots; \quad \omega_n = \frac{1}{T_n}. \quad (4.1)$$

Полученные значения откладываются на оси частот в логарифмическом масштабе ($\lg \omega_1, \lg \omega_2, \dots, \lg \omega_n$).

2. На начальном интервале частот $\omega_i < \omega_1$ наклон ЛАЧХ зависит от вида системы:

– если система статическая, то в интервале частот $\omega_i < \omega_1$ откладывается горизонтальная прямая проходящая на расстоянии $20 \lg k$ дБ от логарифмической оси частот;

– если система астатическая (полином в знаменателе передаточной функции $W(p)$ имеет нулевые корни), то в интервале частот $\omega_i < \omega_1$ проводится прямая с отрицательным наклоном -20ν дБ/дек, где ν – степень астатизма системы (число нулевых корней знаменателя передаточной функции), через точку с координатами $(\lg 1, 20 \lg k)$, т. е. $(0, 20 \lg k)$;

– если система с нулевыми нулями (полином в числителе передаточной функции $W(p)$ имеет нулевые корни), то в интервале частот $\omega_i < \omega_1$ проводится прямая с положительным наклоном $+20\lambda$ дБ/дек, где λ – число нулевых корней числителя передаточной функции, через точку с координатами $(\lg(1/k), 0)$.

3. После каждой сопрягающей частоты $\omega_2, \dots, \omega_n$ наклон ЛАЧХ $L(\omega)$ меняется в зависимости от того, какому звену принадлежит сопрягающая частота. В итоге получается асимптотическая ЛАЧХ в виде ломаной прямой.

4. При необходимости более точного построения точки ЛАЧХ в окрестностях точек излома корректируются значения $L(\omega)$ с использованием специальных таблиц поправок, приведённых в [1-5].

Примечание: ЛФЧХ строится так же, как и ЧХ, но при этом используется логарифмический масштаб частот.

3.4.2 Пример построения ЛАЧХ статической САР

Дана передаточная функция статической системы:

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (4.2)$$

где $k = 10$; $T_1 = 0,1$; $T_2 = 0,5$; $T_3 = 0,05$.

Построить асимптотическую ЛАЧХ для статической системы.

Для построения ЛАЧХ воспользуемся формой представления комплексного числа в соответствии с формулой Эйлера:

$$a + jb = ce^{j\varphi}, \quad (4.3)$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Найдём частотную передаточную функцию:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + jT_1\omega)}{(1 + jT_2\omega)(1 + jT_3\omega)} \quad (4.4)$$

или с учётом (4.3)

$$W(j\omega) = \frac{k\sqrt{1+T_1^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_1}}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_2} \sqrt{1+T_3^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_3}}. \quad (4.5)$$

Тогда модуль частотной передаточной функции

$$|W(j\omega)| = \frac{k\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2} \sqrt{1+T_3^2\omega^2}}. \quad (4.6)$$

Отсюда имеем, что

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1+T_1^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1+T_2^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1+T_3^2\omega^2}. \quad (4.7)$$

Определим сопрягающие частоты:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10, \lg \omega_1 = 1; \\ \omega_2 &= \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,5} = 2, \lg \omega_2 \approx 0,3; \\ \omega_3 &= \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,05} = 20, \lg \omega_3 \approx 1,3. \end{aligned}$$

Отложим значения частот на оси частот в логарифмическом масштабе, как показано на рисунке 4.1.

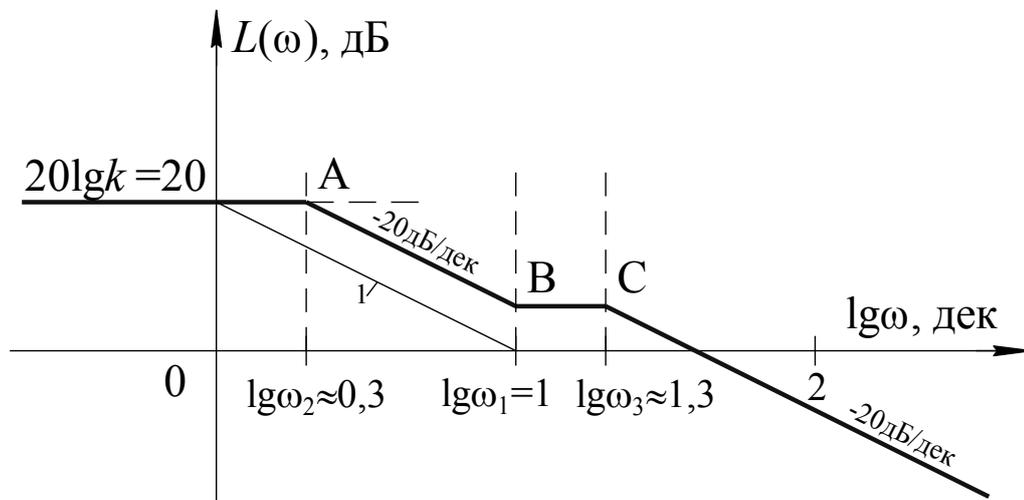


Рисунок 4.1 – Пример ЛАЧХ статической САУ

Так как система статическая, то в интервале частот $\omega < \omega_2$ проводится горизонтальная прямая на расстоянии $20 \lg k$ дБ от логарифмической оси частот

$$20 \lg k = 20 \lg 10 = 20 \text{ дБ} \quad (4.8)$$

до пересечения с ординатой, проходящей через частоту ω_2 (точка А).

Так как частота ω_2 принадлежит звену с отрицательным наклоном, то из точки А проводится прямая с наклоном -20 дБ/дек до пересечения с ординатой через частоту ω_1 (точка В). Наклон -20 дБ/дек получается при соединении точек с координатами $(0, 20 \lg k)$ и $(1, 0)$ на рисунке 4.1 линия 1.

Частота ω_1 принадлежит звену с положительным наклоном 20 дБ/дек, поэтому в интервале частот от ω_1 до ω_3 получим горизонтальную прямую (отрезок ВС).

Частота ω_3 принадлежит звену с отрицательным наклоном -20 дБ/дек, поэтому $L(\omega)$ дальше пойдёт под наклоном 20 дБ/дек из точки С.

3.4.3 Пример построения ЛАЧХ астатической САР

Дана передаточная функция астатической системы:

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)^2}{p(T_2 p + 1)}, \quad (4.9)$$

где $k=10$; $T_1=0,05$; $T_2=0,5$.

Построить ЛАЧХ для астатической системы первого порядка.

Примечание: Формально степень астатизма САР определяется степенью переменной p в знаменателе передаточной функции. Так как в примере p в первой степени, значит рассматриваемая САР имеет астатизм первого порядка.

Аналогично предыдущему примеру найдём $W(j\omega)$ и $|W(j\omega)|$.

$$W(j\omega) = \frac{k(1+jT_1\omega)^2}{j\omega(1+jT_2\omega)} = \frac{k\left(\sqrt{1+T_1^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_1}\right)^2}{\omega \cdot e^{j90} \sqrt{1+T_2^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_2}}. \quad (4.10)$$

Отсюда

$$|W(j\omega)| = \frac{k\left(\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\right)^2}{\omega\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}. \quad (4.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega) = \\ &= 20 \lg k - 20 \lg \omega + 40 \lg \sqrt{1+T_1^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1+T_2^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Определим сопрягающие частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,05} = 20, \lg \omega_1 \approx 1,3;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,5} = 2, \lg \omega_2 \approx 0,3.$$

Отложим их на оси частот в логарифмическом масштабе, как показано на рисунке 4.2.

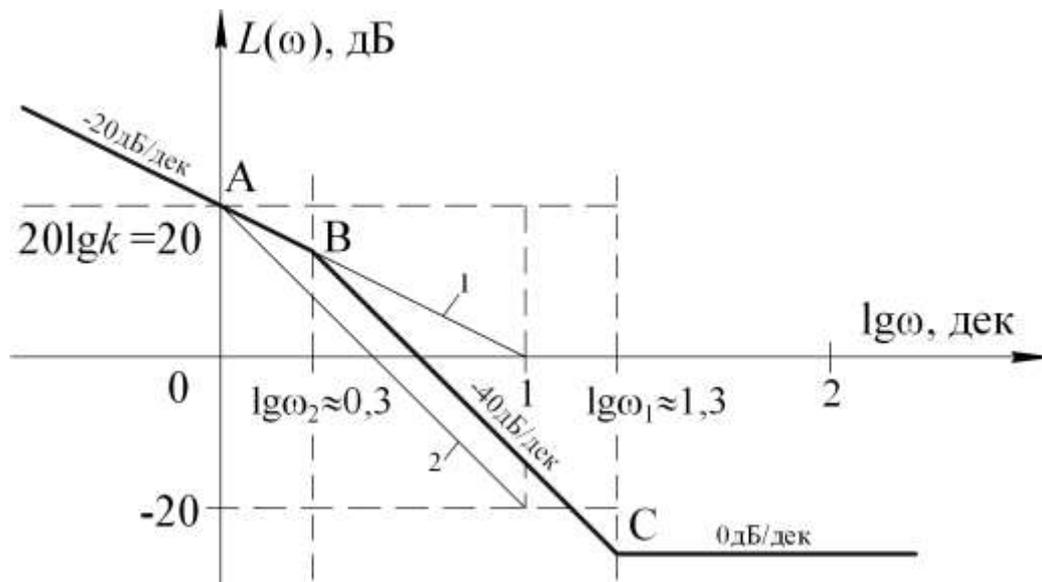


Рисунок 4.2 – Пример ЛАЧХ для астатической САР

На участке частот $\omega < \omega_2$ проводим прямую с наклоном – 20 дБ/дек через точку с координатами $(0; 20\lg k)$. Масштаб наклона – 20 дБ/дек показан линией 1, так как $20\lg k = 20\lg \omega$, а значит $\lg \omega = \lg k = \lg 10 = 1$.

На участке частот $(\omega_1; \omega_2)$ проводится прямая с наклоном – 40 дБ/дек, так как звено с частотой имеет отрицательный наклон – 20 дБ/дек. Масштаб наклона – 40 дБ/дек показан линией 2.

На участке частот $(\omega_2; \infty)$ $L(\omega)$ имеет наклон – 20 дБ/дек, так как звено с частотой ω_2 имеет положительный наклон +20 дБ/дек.

3.4.4 Пример построения ЛАЧХ САР с нулевыми корнями в числителе передаточной функции.

Дана передаточная функция:

$$W(p) = \frac{kp}{(T_1p+1)(T_2p+1)}, \quad (4.13)$$

где $k=10$; $T_1=0,05$; $T_2=0,5$.

Найдём $W(j\omega)$ и $|W(j\omega)|$.

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)} = \frac{k \cdot \omega \cdot e^{j\arctg(\infty)}}{\sqrt{1+\omega^2T_1^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_1} \sqrt{1+\omega^2T_2^2} \cdot e^{j\arctg\omega T_2}}. \quad (4.14)$$

Отсюда

$$|W(j\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{1+\omega^2T_1^2} \sqrt{1+\omega^2T_2^2}}; \quad (4.15)$$

Тогда

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (4.16)$$

Определим сопрягающие частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0.5} = 2; \lg \omega_1 = 0,3;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0.05} = 20; \lg \omega_2 = 1,3;$$

и отложим их на оси частот в логарифмическом масштабе (рис. 4.3).

На участке частот $\omega < \omega_1$ проводим прямую с наклоном +20 дБ/дек через точку с координатами (-1;0) до ординаты ω_1 (точка А). Эти координаты находим исходя из уравнения:

$$20 \lg k + 20 \lg \omega = 0; \text{ или } 20 \lg k = -20 \lg \omega = 0,$$

отсюда $\lg \omega = -\lg k = \lg \frac{1}{k}$.

Так как $k=10$, то имеем $\lg \omega = -1$.

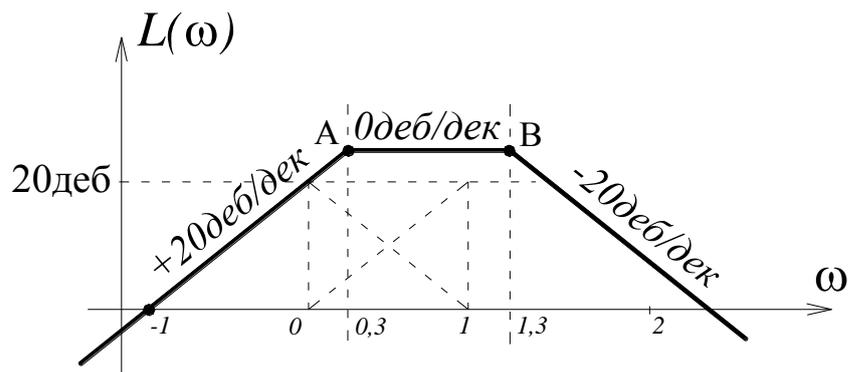


Рисунок 4.3 – Пример ЛАЧХ для САР с нулевыми корнями уравнения в числителе ($\lambda = 1$)

На участке $(\omega; \omega_1)$ проводим прямую с нулевым наклоном (отрезок АВ), т. к. звено с частотой ω_1 имеет положительный наклон +20 дБ/дек.

На участке $(\omega_2; \infty)$ $L(\omega)$ имеет наклон -20 дБ/дек, т. к. звено с частотой ω_2 имеет отрицательный наклон -20 дБ/дек.

3.5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с частотными характеристиками САУ и её звеньев и методикой их построения.

2. Построить амплитудно-фазовую частотную характеристику по передаточным функциям, приведённым в табл. 5.1 и значениям их параметров из табл. 5.2 в соответствии с вариантом, заданным преподавателем.

Таблица 5.1 – Передаточные функции

Номер передаточной функции	Передаточная функция
I	$W_1(p) = \frac{k(1+T_1p)^\ell}{(1+T_2p)^m(1+T_3p)}$
II	$W_2(p) = \frac{k(1+T_1p)^\ell}{p(1+T_2p)(1+T_3p)}$
III	$W_3(p) = \frac{kp(1+T_1p)}{(1+T_2p)^m(1+T_3p)}$
IV	$W_4(p) = \frac{k(1+T_1p)}{(1+T_2p)^m(1+T_3p)^n}$

3. Построить одну из частотных характеристик (АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ) в соответствии с вариантом, заданным преподавателем.

4. Ознакомиться с логарифмическими частотными характеристиками и методикой их построения.

5. Построить ЛАЧХ в соответствии с заданным преподавателем вариантом по данным, приведённым в табл. 5.1 и 5.2.

Таблица 5.2 – Параметры передаточной функции

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Номер $W(p)$	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Тип ЧХ	АЧХ	ФЧХ	ВЧХ	МЧХ	АЧХ	ФЧХ	ВЧХ	МЧХ	АЧХ	ФЧХ	ВЧХ	МЧХ
k	10	5	2	4	1,5	2	2,5	3	0,2	0,4	0,6	0,8
T_1	1	0,1	0,2	0,5	0,5	0,1	0,5	0,1	1	2	2,4	5
T_2	2	1	0,1	1	2	1	5	0,2	0,5	0,4	3	2
T_3	5	2	4	2	2	1	0,3	3	0,5	0,4	0,3	2
ℓ	1	2	-	-	2	1	-	-	2	2	-	-
m	2	-	2	2	1	-	2	1	2	-	1	1
n	-	-	-	1	-	-	-	2	-	-	-	2

6. Оформить и защитить отчёт по лабораторной работе.

3.6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём достоинство частотных характеристик?
2. Что характеризует фазовая частотная характеристика?
3. Как получается частотная передаточная функция?
4. В чём состоит достоинство логарифмических частотных характеристик?
5. Как получается модуль частотной передаточной функции при построении ЛАЧХ?
6. Что такое декада?
7. В чём особенность построения ЛФЧХ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

4.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – изучение типовых динамических звеньев, их временных и частотных характеристик и приобретение практических навыков по получению характеристик типовых динамических звеньев и исследованию влияния их параметров на вид характеристик.

4.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

4.2.1 Виды типовых динамических звеньев

При решении задач анализа и синтеза систем автоматического управления (САУ) широко используется операторный метод [1], базирующийся на преобразовании Лапласа. Это позволяет представить САУ с точки зрения происходящих в них переходных (динамических) процессов как совокупность взаимодействующих между собой динамических звеньев.

Динамическое звено – это математическая модель элемента системы (или части сложного элемента), которая отображает лишь его динамические свойства, а не физическую сущность, происходящих в нем процессов. У каждого динамического звена могут быть только одна входная и одна выходная переменные. Поэтому многомерные элементы системы, то есть элементы с несколькими входными и выходными переменными разделяют на соответствующее число динамических звеньев. Основным свойством динамического звена является свойство однонаправленности, то есть выходная переменная динамического звена не оказывает на него какого-либо влияния.

Элементы САУ различные по физической природе, конструктивному исполнению, принципу действия и другим характеристикам, но описываемые линейными дифференциальными уравнениями одного и того же вида имеют одинаковые передаточные функции, то есть являются одинаковыми (однотипными) динамическими звеньями.

Для облегчения (упрощения) решения задач анализа и синтеза САУ сложные динамические звенья разбиваются на более простые, так называемые типовые динамические звенья (ТДЗ), которые описываются линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. ТДЗ могут быть как составными частями звеньев САУ, так и самостоятельными звеньями системы, поэтому знание их характеристик существенно облегчает анализ и синтез таких систем.

ТДЗ, в общем случае [2, 3], описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка вида:

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 x'(t) + b_1 x(t), \quad (2.1)$$

или соответствующей передаточной функцией

$$W(p) = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (2.2)$$

где a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 – постоянные коэффициенты дифференциального уравнения (параметры передаточной функции);

$x(t), y(t)$ – соответственно, входная и выходная переменные ТДЗ;

t – непрерывное время;

p – оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$.

При обращении в нуль тех или иных коэффициентов дифференциального уравнения (2.1) изменяется как вид дифференциального уравнения, так и вид передаточной функции (2.2), что отражает изменение динамических свойств звена. Если $a_2 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, то ТДЗ обладают статизмом, то есть однозначной связью между выходной и входной переменными в установившемся режиме. ТДЗ, у которых $a_2 \neq 0, a_1 \neq 0, a_0 \neq 0$, обладают инерционностью.

Перечень ТДЗ, их условные обозначения и значения коэффициентов приведены в таблице 2.1, где k – коэффициент передачи звена; T, T_1, T_2 – постоянные времени; ξ – коэффициент демпфирования (затухания). Так как в настоящее время нет установившегося мнения о количестве и перечне ТДЗ, то в таблице 2.1

приведены только те звенья, которые наиболее часто встречаются в литературе.

Пользуясь таблицей 2.1, можно без труда записать дифференциальное уравнение и передаточную функцию для любого ТДЗ. В качестве примера рассмотрим колебательное и реальное дифференцирующие звенья.

Колебательное звено имеет следующие значения коэффициентов:

$$a_0=T^2; a_1=T_1=2\xi T; a_2=1; b_0=0; b_1=k.$$

Тогда в соответствии с выражениями (2.1) и (2.2) можно записать

$$T^2 y''(t) + 2\xi T y'(t) + y(t) = kx(t), \quad (2.3)$$

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (2.4)$$

Таблица 2.1 – Типовые динамические звенья и коэффициенты их дифференциальных уравнений

№	Условное обозначение	Наименование звена	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	Примечание
1	УЗ	Безинерционное (усилительное, пропорциональное)	0	0	1	0	k	
2	АЗІ	Апериодическое (инерционное) первого порядка	0	T	1	0	k	
3	АЗІІ	Апериодическое второго порядка	T_2^2	T_1	1	0	k	$T_1 \geq 2T_2$
4	КБЗ	Колебательное	T^2	T_1	1	0	k	$T_1=2\xi T;$ $0<\xi<1$
5	КНЗ	Консервативное (идеальное колебательное)	T^2	0	1	0	k	

Продолжение таблицы 2.1

№	Условное обозначение	Наименование звена	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	Примечание
6	ИИЗ	Идеальное интегрирующее	0	1	0	0	k	
7	РИЗ	Реальное интегрирующее	T	1	0	0	k	
8	ИЗ	Изодромное (пропорционально-интегрирующее)	0	1	0	k_1	k	$k_1=kT$
9	ИДЗ	Идеальное дифференцирующее	0	0	1	k	0	
10	РДЗ	Реальное дифференцирующее	0	T	1	k	0	
11	ФЗ	Форсирующее	0	0	1	k_1	k	$k_1=kT$

Реальное дифференцирующее звено имеет следующие значения коэффициентов:

$$a_0=0; a_1=T; a_2=1; b_0=k; b_1=0.$$

Тогда можно записать:

$$Ty'(t) + y(t) = kx'(t); \quad (2.5)$$

$$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}. \quad (2.6)$$

Типовые динамические звенья, приведенные в таблице 2.1, делятся на три класса:

- *позиционные звенья* (усилительное, апериодическое первого и второго порядков, колебательное, консервативное);
- *интегрирующие звенья* (идеальное и реальное интегрирующие, изодромное);
- *дифференцирующие звенья* (идеальное и реальное дифференцирующие, форсирующее).

Позиционные звенья (кроме консервативного) характеризуются тем, что в каждом из них при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной переменной. Отношение установившегося значения выходной величины к входной величине определяется коэффициентом передачи k . Наличие и продолжительность переходного процесса определяется постоянной времени T (чем больше T , тем больше длится переходный процесс). Особенность консервативного звена состоит в том, что оно характеризуется незатухающими колебаниями на выходе при постоянном воздействии на входе.

Интегрирующие звенья характеризуются тем, что при постоянном входном воздействии выходная переменная $y(t)$ неограниченно возрастает. В этих звеньях коэффициент передачи k характеризует скорость этого роста.

Дифференцирующие звенья реагируют только на изменение входной переменной. Форсирующее звено сочетает в себе свойства позиционных и дифференцирующих звеньев.

Важное место среди ТДЗ занимает звено чистого запаздывания. Это звено передаёт входное воздействие с входа на выход без искажения формы. Однако все мгновенные значения входного воздействия выходная переменная принимает с некоторым отставанием (запаздыванием).

Звено чистого запаздывания (ЗЧЗ) описывается уравнением

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (2.7)$$

где τ – время запаздывания.

Уравнение (2.7) не является дифференциальным, а относится к классу особых уравнений со смещённым (запаздывающим) аргументом. Передаточная функция звена чистого запаздывания не является дробно-рациональной функцией и определяется следующей формулой:

$$W(p) = e^{-\tau p}. \quad (2.8)$$

ТДЗ можно разделить на звенья, которые поддаются дальнейшему расчленению, и звенья, которые не поддаются дальнейшему расчленению. Последние звенья называются элементарными ТДЗ и к ним относятся: усилительное, апериодическое перво-

го порядка, колебательное (консервативное), идеальное интегрирующее и идеальное дифференцирующее звенья, а также звено чистого запаздывания. Остальные ТДЗ можно получить из элементарных звеньев. Например, апериодическое звено второго порядка можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка, реальное интегрирующее звено – как последовательное соединение идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка.

4.2.2 Временные характеристики типовых динамических звеньев

Временными характеристиками ТДЗ называются графики решения их дифференциальных уравнений при некоторых стандартных (типовых) воздействиях. В качестве стандартных воздействий в основном рассматриваются:

– единичное ступенчатое воздействие (единичная ступенчатая функция) $1(t)$, то есть:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

График единичного ступенчатого воздействия представлен на рисунке 2.1.

– единичное импульсное воздействие $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Воздействие $\delta(t)$ представляет собой импульс бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности (рис. 2.2).

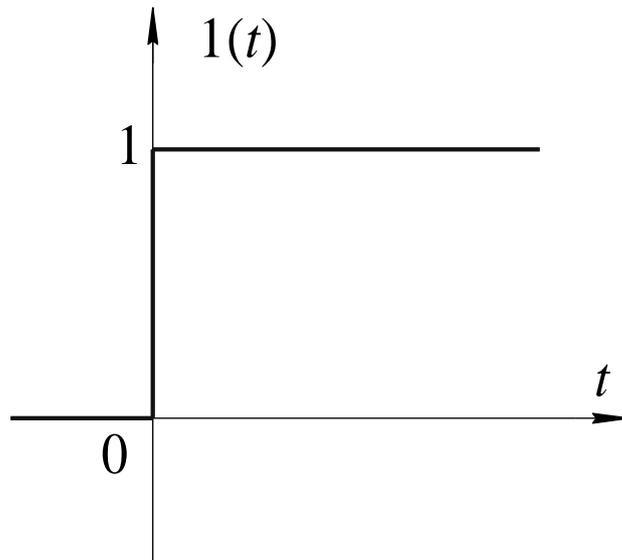


Рисунок 2.1 – График единичного ступенчатого воздействия

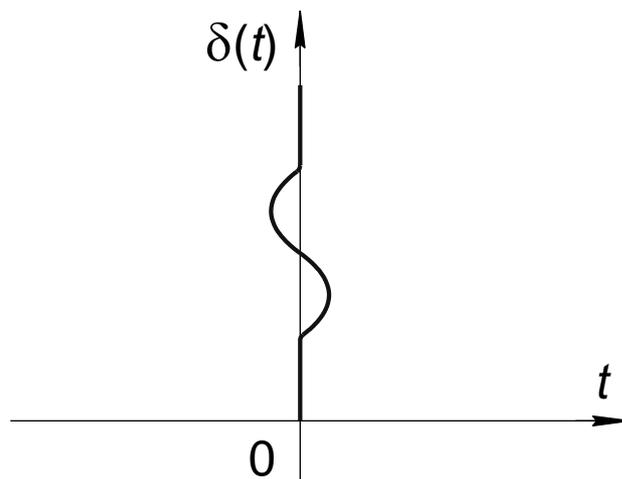


Рисунок 2.2 – График единичного импульсного воздействия

В качестве временных характеристик рассматриваются:

- переходная функция $h(t)$, характеризующая переходный процесс, вызванный единичным ступенчатым воздействием при нулевых начальных условиях;
- весовая (импульсная переходная) функция $\omega(t)$, характеризующая переходный процесс, вызванный единичным импульсным воздействием при нулевых начальных условиях.

Временные характеристики ТДЗ приведены в приложении (таблица А.1).

4.2.3 Частотные характеристики типовых динамических звеньев

Частотные характеристики описывают переходные свойства ТДЗ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешними гармоническими колебаниями.

Основными частотными характеристиками ТДЗ являются:

– амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), график частотной передаточной функции:

$$W(j\omega) = \frac{b_0 j\omega + b_1}{a_0 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_2} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.11)$$

где j – мнимая единица;

$P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика;

$Q(\omega)$ – мнимая частотная характеристика;

$A(\omega)$ – амплитудная частотная характеристика;

$\varphi(\omega)$ – фазовая частотная характеристика;

– вещественная частотная характеристика (ВЧХ) $P(\omega)$:

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (2.12)$$

– мнимая частотная характеристика (МЧХ) $Q(\omega)$:

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega); \quad (2.13)$$

– амплитудная частотная характеристика (АЧХ) $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad (2.14)$$

– фазовая частотная характеристика (ФЧХ) $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (2.15)$$

При синтезе САУ широко используются логарифмические характеристики:

– логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega); \quad (2.16)$$

– логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ), которая представляет собой фазовую частотную характеристику $\varphi(\omega)$, построенную в логарифмическом масштабе частот.

В приложении (таблица А.2) приведены выражения для нахождения частотных характеристик ТДЗ и графики АФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ.

4.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с типовыми динамическими звеньями, их дифференциальными уравнениями, передаточными функциями, а также временными и частотными характеристиками.

2. В соответствии с заданным вариантом найти дифференциальное уравнение и передаточную функцию ТДЗ, пользуясь таблицей 2.1. Исходные данные приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Варианты заданий к п. 2

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Тип ТДЗ	УЗ	ИИЗ	ИДЗ	ЗЧЗ	АЗІ	КНЗ	РИЗ	РДЗ	АЗП	КБЗ	ИЗ	ФЗ
k	2	1,8	0,5	1	0,4	0,8	1,4	0,2	1,1	1	1,4	0,4
T	-	-	-	-	5	1,4	2,2	0,4	-	2	1,8	0,3
T_1	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-
T_2	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-
ξ, τ	-	-	-	5	-	-	-	-	-	0,5	-	-

3. Исследовать влияние постоянных времени T или T_2 на вид временных характеристик в соответствии с данными, приведёнными в таблице 3.2, и построить их графики. Количество итера-

ций во всех вариантах взять равным 5. Временные характеристики ТДЗ приведены в приложении А (таблица А.1).

Таблица 3.2 – Варианты задания к п. 3

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Тип ТДЗ	РИЗ	КБЗ	АЗІ	АЗІІ	ІЗ	РИЗ	КБЗ	КНЗ	РДЗ	АЗІ	АЗІІ	КНЗ
Вид временной характеристики	$h(t)$	$\omega(t)$	$h(t)$	$h(t)$	$h(t)$	$\omega(t)$	$h(t)$	$\omega(t)$	$h(t)$	$\omega(t)$	$\omega(t)$	$h(t)$
k	1,4	0,8	1,8	1,3	2	1,1	1,2	0,7	0,4	1,1	1	1,2
T_{\min} ($T_{2\min}$)	2	1	3	1,4	1,1	2	2	1,5	0,8	5	2	1
ΔT	0,2	0,3	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	0,7	0,1	0,5	0,2	0,3
T_1, ξ	-	0,6	-	4	-	-	0,4	-	-	-	5	-

4. Построить логарифмические частотные характеристики ЛАЧХ и ЛФЧХ в соответствии с заданным вариантом. Данные, приведены в таблице 3.3. Частотные характеристики ТДЗ приведены в приложении А (таблица А.2).

Таблица 3.3 – Варианты задания к п. 4

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Тип ТДЗ	КБЗ	АЗІ	ІЗ	РИЗ	КНЗ	ФЗ	РДЗ	АЗІІ	ІЗ	ФЗ	РДЗ	РИЗ
k	10	20	30	5	5	8	10	20	5	8	5	8
T	10	100	100	10	100	10	10	-	10	100	20	100
T_1	-	-	-	-	-	-	-	200	-	-	-	-
T_2	-	-	-	-	-	-	-	10	-	-	-	-
ξ	0,4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

5. Оформить и защитить отчёт по лабораторной работе.

4.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое динамическое звено?
2. Что такое типовое динамическое звено?
3. Чем отличается консервативное звено от других позиционных звеньев?
4. В чём состоит различие между идеальным и реальным дифференцирующими звеньями?
5. В чём состоит особенность звена чистого запаздывания?
6. Какие типовые динамические звенья являются элементарными?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

5.1 Цель работы

Цель работы – изучение критериев устойчивости и приобретение практических навыков по их использованию при анализе устойчивости линейных систем автоматического регулирования (САР), а также в построении областей устойчивости в плоскости одного параметра.

5.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Критерии устойчивости – это правила исследования устойчивости САР без непосредственного решения дифференциального уравнения. Из критериев устойчивости в работе рассматриваются алгебраические критерии Гурвица и Рауса, частотные критерии Михайлова и Найквиста, а также логарифмический критерий.

5.2.1 Критерий Гурвица

САР устойчива по критерию Гурвица, если при положительности коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (2.1)$$

все n определителей Гурвица, составленные по определённой схеме, положительны. Если хотя бы один из определителей Гурвица отрицательный, то система неустойчива.

Матрица, по которой определяются все n определителей Гурвица, имеет вид

$$\begin{array}{cccccc}
 \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & & \Delta_n \\
 \left| \begin{array}{cccccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_n
 \end{array} \right. & & & & & (2.2)
 \end{array}$$

Итак, для устойчивости САР необходимо, чтобы:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = |a_1| > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; \\
 \Delta_{n-1} > 0; \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

5.2.2 Критерий Рауса

САР устойчива по критерию Рауса, если положительны коэффициенты первого столбца таблицы Рауса (таблица 2.1), включая a_0 и a_1 , где элементы столбцов, начиная с третьей строки, определяются по формуле:

$$C_{i,k} = C_{i-2,k+1} - r_i \cdot C_{i-1,k+1}, \quad (2.4)$$

где i – порядковый номер строки в таблице Рауса, $i = \overline{3, n+1}$;

k – порядковый номер столбца таблицы Рауса, $k = 1, 2, \dots$;

r_i – вспомогательные коэффициенты.

Вспомогательные коэффициенты определяются следующим образом

$$r_i = \frac{C_{i-2,1}}{C_{i-1,1}}. \quad (2.5)$$

Таблица 2.1 – Таблица Рауса

r_i	Номер строки	Номер столбца			
		1	2	3	...
–	1	$C_{11} = a_0$	$C_{12} = a_2$	$C_{13} = a_4$...
–	2	$C_{21} = a_1$	$C_{22} = a_3$	$C_{23} = a_5$...
r_3	3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...
...
r_i	i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	...
...
r_n	$n + 1$	$C_{n-1,1}$

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то САР неустойчива.

5.2.3 Критерий Михайлова

Критерий Михайлова основан на рассмотрении характеристического уравнения САР, в котором вместо p используется $j\omega$. В этом случае имеем функцию комплексной переменной вида

$$F(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.6)$$

где

$$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots;$$

$$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 \dots$$

Система устойчива по критерию Михайлова, если при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ годограф Михайлова повернется в положительном направлении (против часовой стрелки), начиная с вещественной положительной полуоси, на число квадрантов, равное порядку характеристического уравнения, то есть на угол $n\pi/2$, при этом, нигде не обращаясь в нуль.

Если годограф Михайлова проходит через начало координат, то САР находится на границе устойчивости.

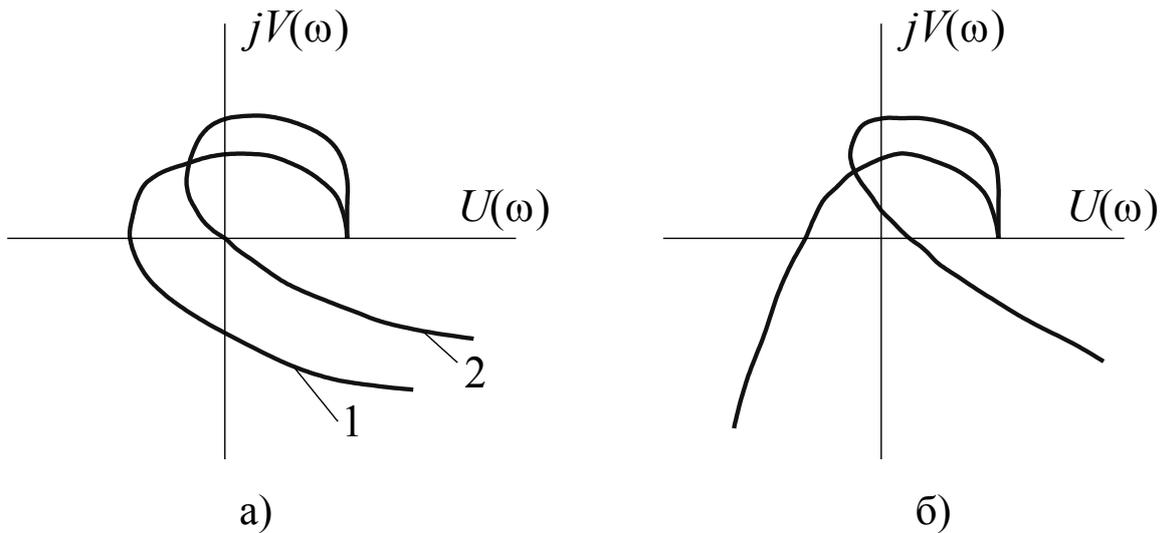


Рисунок 2.1 – Годографы Михайлова

САР неустойчива по критерию Михайлова, если годограф проходит n квадрантов непоследовательно или проходит меньшее число квадрантов. На рисунке 2.1, *а* приведены годографы Михайлова для устойчивой САР (кривая 1), для САР на границе устойчивости (кривая 2), а на рисунке 2.1, *б* для неустойчивой САР при $n = 4$.

5.2.4 Критерий Найквиста

Особенность критерия Найквиста состоит в том, что он оценивает устойчивость САР по амплитудно-фазовой частотной характеристике её разомкнутой части, называемой годографом Найквиста.

Если разомкнутая часть САР устойчива или находится на границе устойчивости, то для её устойчивости необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ не охватывал точку с координатами $[-1, j0]$. На рисунке 2.2, *а* приведены годографы Найквиста для устойчивой разомкнутой части САР (1 – САР устойчива; 2 – САР на границе устойчивости; 3 – САР неустойчива), а на рисунке 2.2, *б*, когда разомкнутая часть САР находится на границе устойчивости (1 – при наличии одного нулевого корня; 2 – при наличии пары чисто мнимых корней).

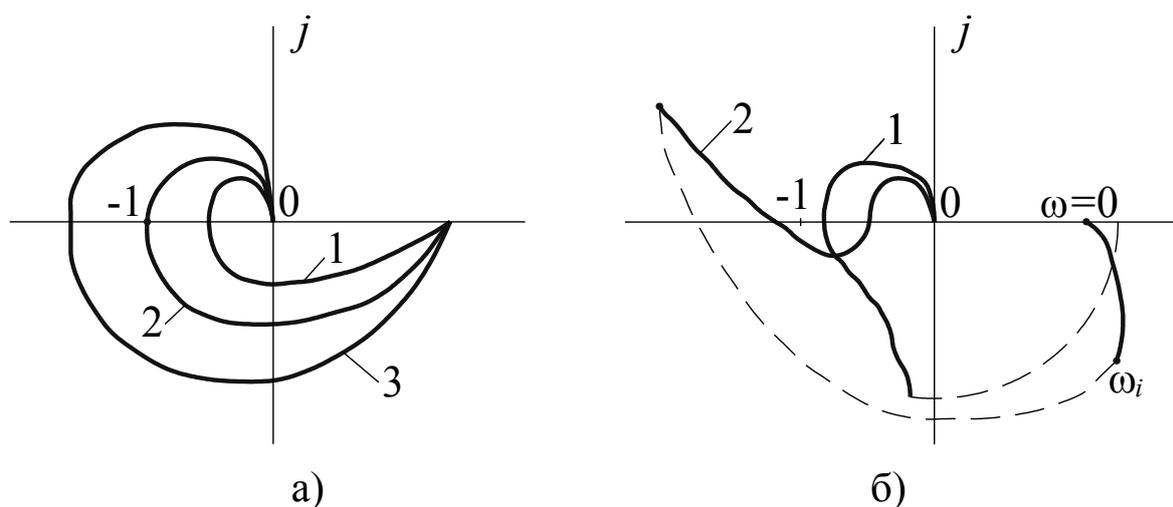


Рисунок 2.2 – Годографы Найквиста

Если разомкнутая часть САР неустойчива, то для её устойчивости необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ годограф Найквиста охватывал точку $[-1, j0]$ $l/2$ раз в положительном направлении (против часовой стрелки), где l – число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

5.2.5 Логарифмический критерий

Логарифмический критерий – это критерий Найквиста, оценивающий устойчивость САР по логарифмическим частотным характеристикам её разомкнутой части.

Если разомкнутая часть САР устойчива, то для устойчивости САР необходимо и достаточно, чтобы число переходов логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) через линию -180° при положительных значениях логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) было чётным (в частном случае равным 0). Пересечение ЛФЧХ линии -180° снизу вверх считается положительным, а сверху вниз – отрицательным. На рисунке 2.3 показаны наиболее характерные ЛФЧХ (1 – САР устойчива; 2 – САР на границе устойчивости; 3 – САР неустойчива).

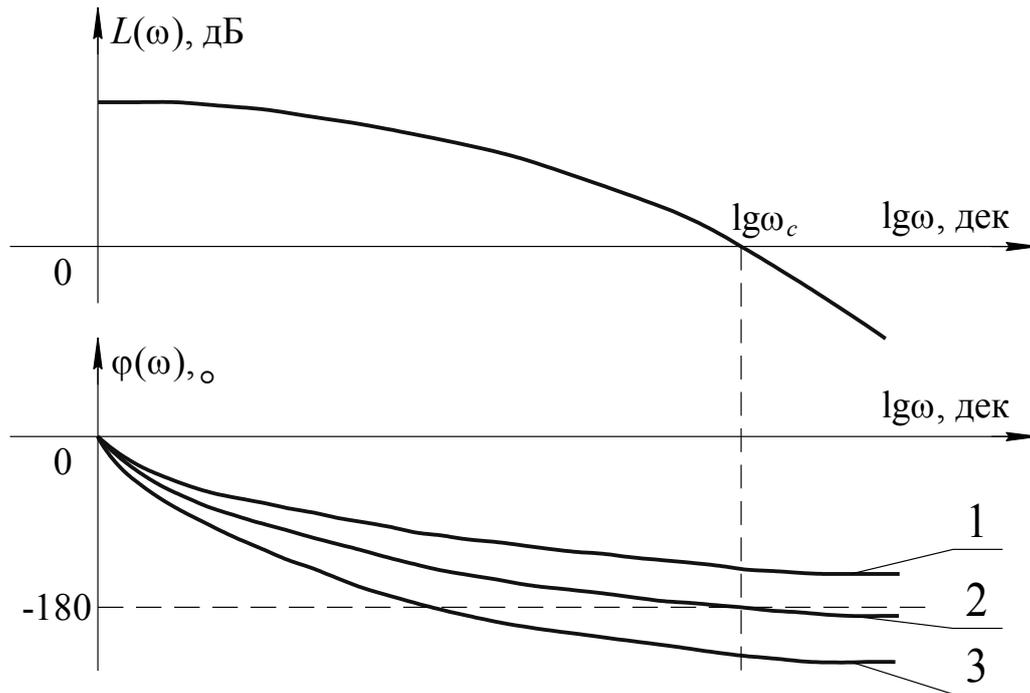


Рисунок 2.3 – Логарифмические частотные характеристики при устойчивой разомкнутой части САР

Если разомкнутая часть САР неустойчива, то для устойчивости САР необходимо и достаточно, чтобы при положительных значениях ЛАЧХ разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ через линии -180° ; $-3 \cdot 180^\circ$; $-5 \cdot 180^\circ$; ... равнялась $l/2$, где l – число корней с положительной вещественной частью. На рисунке 2.4 показаны ЛАЧХ и ЛФЧХ при неустойчивой разомкнутой части САР, когда САР устойчива, т. к. $l = 2$, а $l/2 = 1$.

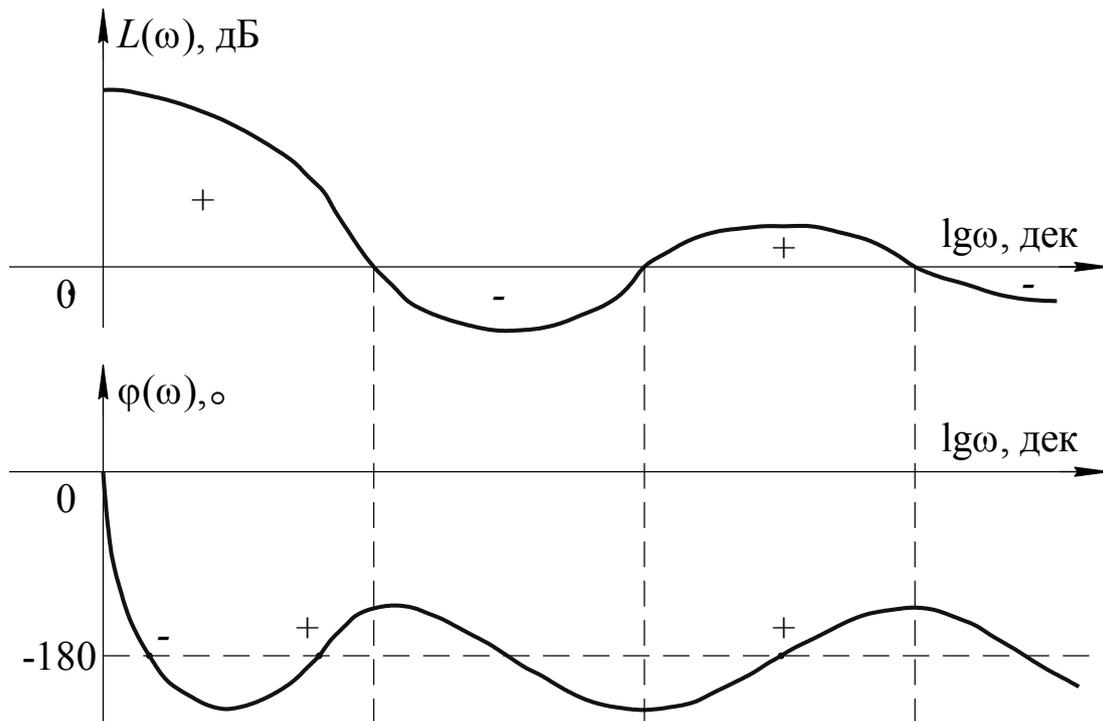


Рисунок 2.4 – Логарифмические частотные характеристики при неустойчивой разомкнутой части САР

5.2.6 Построение области устойчивости САР методом D-разбиения

Областью устойчивости САР называется область в пространстве варьируемых параметров, каждой точке которой соответствуют только левые корни характеристического уравнения. Поверхность, ограничивающая область устойчивости, называется границей области устойчивости.

Для построения области устойчивости в работе рассматривается метод D-разбиения в плоскости одного параметра. D-разбиение – это процесс построения в пространстве параметров областей с различным распределением корней. Линии, разграничивающие эти области, называются кривыми D-разбиения.

Если варьируемым параметром является коэффициент k , то характеристическое уравнение записывается в виде

$$F(p) = kA(p) + Z(p) = 0, \quad (2.7)$$

где $A(p)$, $Z(p)$ – степенные полиномы от p .

Заменив в выражении (2.7) p на $j\omega$ и выразив из уравнения параметр k , имеем, что

$$k = -\frac{Z(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (2.8)$$

Изменяя частоту ω в выражении (8) от $-\infty$ до $+\infty$, строится кривая D-разбиения, приведённая на рисунке 2.5, где n – число корней характеристического уравнения. Так как $U(\omega)$ чётная функция, то достаточно построить кривую D-разбиения при изменении частоты от 0 до $+\infty$, а на участке от $-\infty$ до 0 кривая строится как зеркальное отображение первой. Штриховка наносится на кривую D-разбиения слева при увеличении частоты.

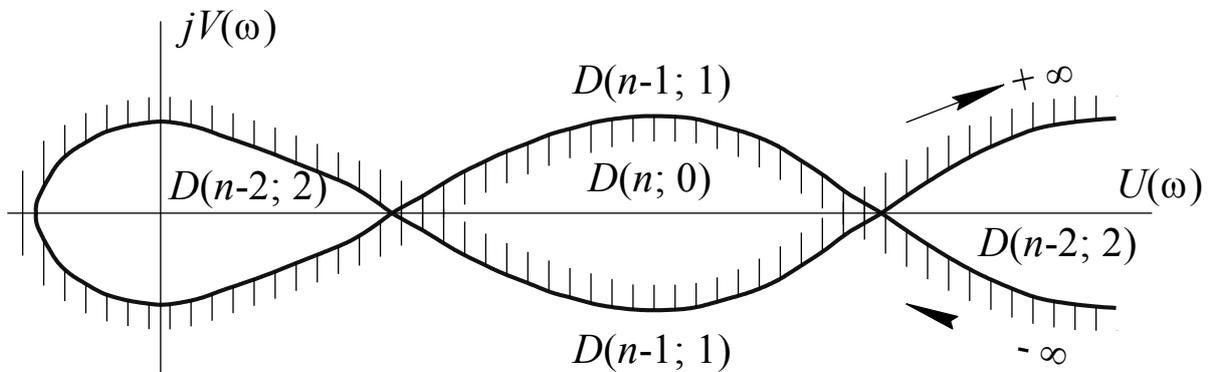


Рисунок 2.5 – Кривая D-разбиения

Область, внутри которой направлена штриховка (на рисунке 2.5 область $D(n; 0)$), может быть областью устойчивости. Чтобы удостовериться в этом, внутри данной области берётся произвольная точка на вещественной оси и проверяется САР на устойчивость по любому из рассмотренных выше критериев. Если требования устойчивости выполняются, то выделенная область является областью устойчивости.

5.2.7 Запасы устойчивости САР

В работе рассматриваются вопросы определения запасов устойчивости САР по амплитуде и фазе с использованием критерия Найквиста и логарифмического критерия.

Запас устойчивости по амплитуде – это минимальный отрезок действительной оси h , характеризующий расстояние между критической точкой $(-1, j0)$ и ближайшей точкой пересечения годографа Найквиста вещественной осью (рисунок 2.6).

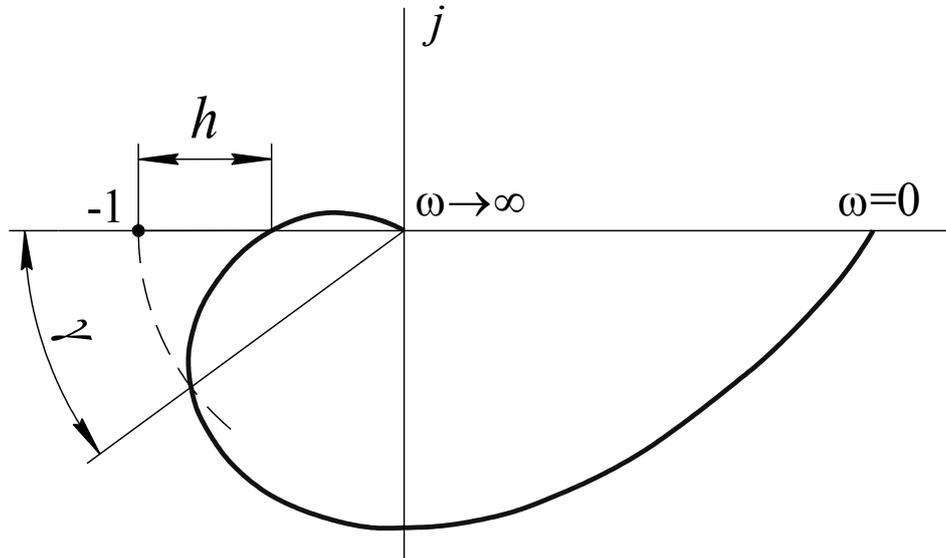


Рисунок 2.6 – Запасы устойчивости САР по критерию Найквиста

Запас устойчивости по фазе γ – это минимальный угол, образуемый радиусом, проходящим через точку пересечения годографа Найквиста с окружностью единичного радиуса с центром в начале координат и вещественной отрицательной полуосью (рисунок 2.6).

Определение запасов устойчивости по логарифмическому критерию показано на рисунке 2.7.

Запас устойчивости по амплитуде характеризует отрезок $l = 20 \lg h$ при том значении частоты, при котором ЛФЧХ $\varphi(\omega) = -180^\circ$. Запасу устойчивости по фазе γ соответствует угол между ЛФЧХ и линией -180° при частоте среза ω_c .

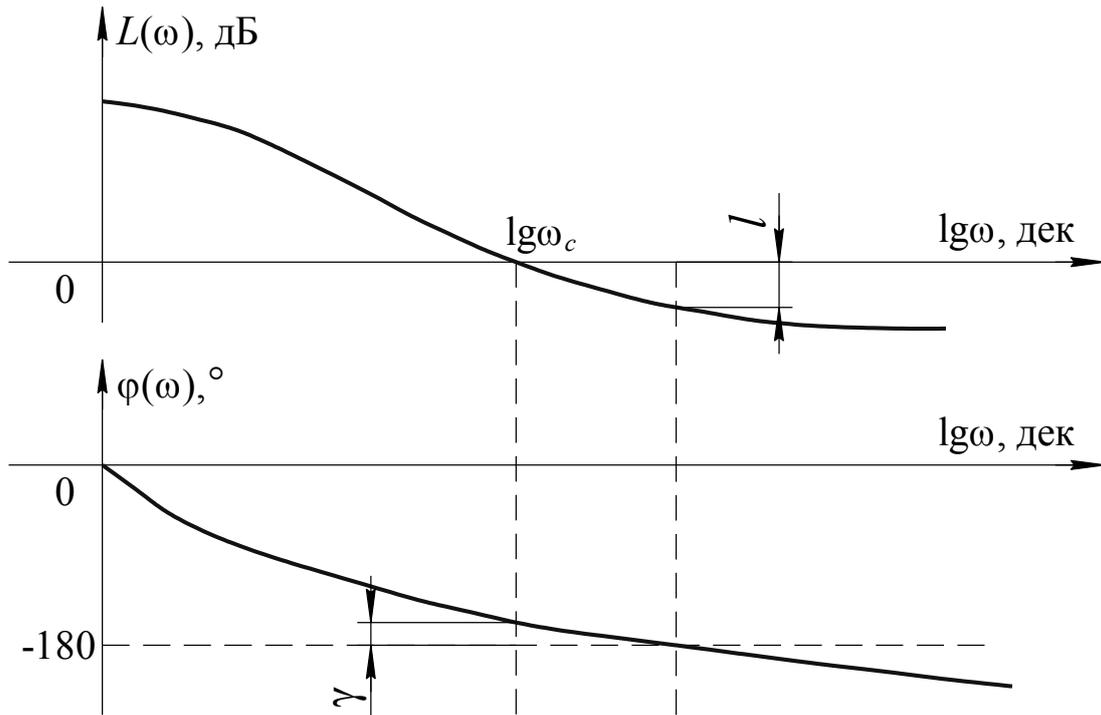


Рисунок 2.7 – Запасы устойчивости САР по логарифмическому критерию

5.3 ПРИМЕР АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ САР И ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Проанализируем устойчивость САР, структурная схема которой приведена на рисунке 3.1,

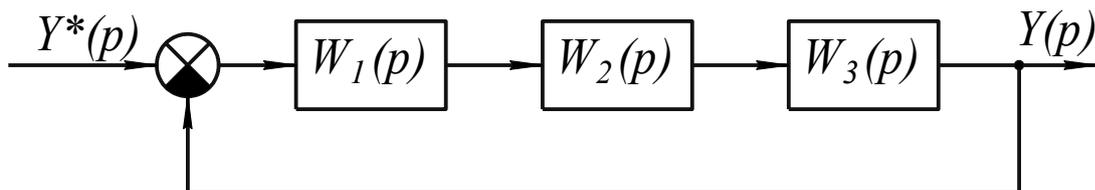


Рисунок 3.1 – Структурная схема САР

где

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1};$$

$$k_1 = 1,9; \quad k_2 = 2,6; \quad k_3 = 5,3;$$

$$T_1 = 0,9; \quad T_2 = 1,8; \quad T_3 = 0,5.$$

Передаточная функция САР в соответствии со структурной схемой на рисунке 3.1 имеет вид

$$W_c(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} = \frac{k_1k_2k_3}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1) + k_1k_2k_3}. \quad (3.1)$$

После подстановки выражений передаточных функций и значений их коэффициентов получим, что

$$W_c(p) = \frac{26,182}{0,81p^3 + 2,97p^2 + 3,2p + 27,182}. \quad (3.2)$$

Для оценки устойчивости САР воспользуемся критерием Найквиста. В этом случае требуется найти передаточную функцию разомкнутой части САР:

$$W_p(p) = \frac{k_1}{T_1p + 1} \cdot \frac{k_2}{T_2p + 1} \cdot \frac{k_3}{T_3p + 1} = \frac{26,182}{0,81p^3 + 2,91p^2 + 3,2p + 1}. \quad (3.3)$$

Тогда частотная передаточная функция

$$W_p(j\omega) = \frac{26,182}{-j0,81\omega^3 - 2,97\omega^2 + j3,2\omega + 1}. \quad (3.4)$$

Выделим вещественную и мнимую части, умножив на комплексно-сопряженный знаменатель. После преобразования имеем, что

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \frac{26,182 - 77,761\omega^2}{0,656\omega^6 + 3,637\omega^4 + 4,3\omega^2 + 1} \\ Q(\omega) &= \frac{-83,782\omega + 21,207\omega^3}{0,656\omega^6 + 3,637\omega^4 + 4,3\omega^2 + 1} \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Построим годограф Найквиста, то есть АФЧХ разомкнутой части САР. Для этого найдём точки пересечения годографа Найквиста с вещественной и мнимой осями:

$$P(\omega) = 0, \text{ если } 26,182 - 77,761\omega^2 = 0.$$

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{26,128}{77,761}} \approx \pm 0,58, \text{ то есть } \omega_1 = 0,58.$$

$$Q(\omega) = 0, \text{ если } \omega(21,207\omega^2 - 83,782) = 0$$

$$1) \omega_2 = 0;$$

$$2) \omega_3 = \pm \sqrt{\frac{83,782}{21,207}} \approx \pm 1,98, \omega_3 = 1,988.$$

Результаты расчёта точек годографа Найквиста приведены в таблице 3.1, а годограф Найквиста на рисунке 3.2, который показывает, что САР неустойчива, так как годограф Найквиста охватывает точку $(-1, j0)$.

Таблица 3.1 – Данные для построения годографа Найквиста

ω	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,58
$P(\omega)$	26,18	24,35	19,59	13,54	7,70	2,92	0
$Q(\omega)$	0	-8,01	-14,08	-17,34	-18,03	-16,97	-15,42
ω	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,998	$+\infty$
$P(\omega)$	-0,59	-2,94	-4,36	-5,10	-5,38	-2,44	0
$Q(\omega)$	-14,98	-12,66	-10,38	-8,31	-6,52	0	0

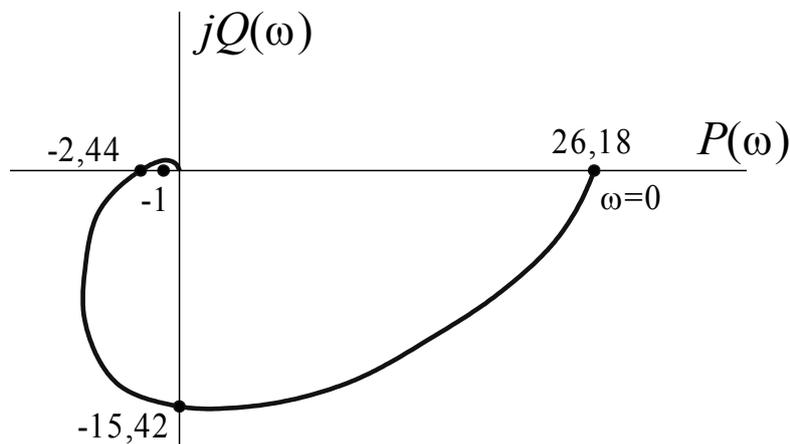


Рисунок 3.2 – Годограф Найквиста

Для коррекции устойчивости САР построим на основе D-разбиения область устойчивости в области параметра k_1 . При построении области устойчивости используется характеристическое уравнение САР (знаменатель передаточной функции САР см. формулу 3.1):

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k_1 k_2 k_3 = 0. \quad (3.6)$$

После преобразования и подстановки коэффициентов (кроме k_1) характеристическое уравнение принимает вид

$$0,81p^3 + 2,97p^2 + 3,2p + 13,78k_1 + 1 = 0. \quad (3.7)$$

Отсюда

$$k_1 = -0,059p^3 - 0,216p^2 - 0,232p - 0,073. \quad (3.8)$$

Заменив p на $j\omega$, имеем, что

$$k_1 = 0,059\omega^3 + 0,216\omega^2 - j0,232\omega - 0,073.$$

Тогда вещественная и мнимая части примут вид

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= 0,216\omega^2 - 0,073 \\ V(\omega) &= 0,059\omega^3 - 0,232\omega \end{aligned} \right\}. \quad (3.9)$$

Для построения кривой D-разбиения найдём её точки пересечения с вещественной и мнимой частями:

$$U(\omega) = 0, \text{ если } 0,216\omega^2 - 0,073 = 0.$$

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{0,073}{0,210}} \approx \pm 0,581, \text{ то есть } \omega_1 = 0,581.$$

$$V(\omega) = 0, \text{ если } \omega(0,059\omega^2 - 0,232) = 0$$

$$1) \quad \omega_2 = 0;$$

$$2) \quad \omega_3 = \pm \sqrt{\frac{0,232}{0,059}} \approx \pm 1,983, \text{ то есть } \omega_3 = 1,983.$$

Результаты расчёта точек кривой D-разбиения приведены в таблице 3.2, а кривая D-разбиения на рисунке 3.3.

Таблица 3.2 – Значения для построения кривой D-разбиения

ω	0	0,4	0,581	0,8	1,983	5	10	$+\infty$
$U(\omega)$	-0,073	-0,038	0	0,065	0,776	5,327	21,527	$+\infty$
$V(\omega)$	0	-0,089	-0,123	-0,155	0	6,215	56,68	$+\infty$

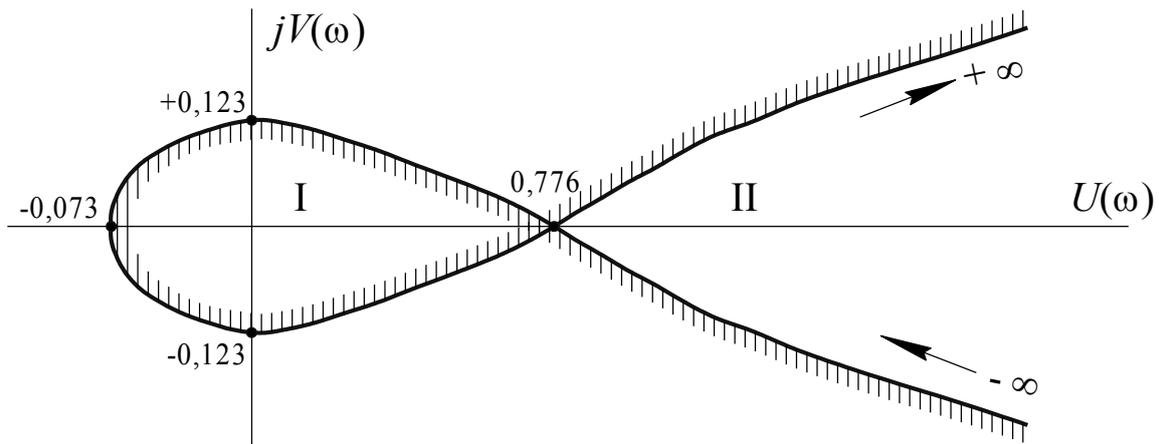


Рисунок 3.3 – Кривая D-разбиения

Кривая D-разбиения показывает, что область I может быть областью устойчивости. Для этого возьмём значение k_1 внутри интервала $(0; 0,776)$. Проверим устойчивость САР по критерию Гурвица при $k_1 = 0,5$.

В этом случае характеристическое уравнение примет вид

$$0,81p^3 + 2,97p^2 + 3,2p + 7,89 = 0.$$

Тогда матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2,97 & 7,89 & 0 \\ 0,81 & 3,2 & 0 \\ 0 & 2,97 & 7,89 \end{vmatrix}.$$

Отсюда:

$$\Delta_1 = |a_1| = 2,97 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2,97 & 7,89 \\ 0,81 & 3,2 \end{vmatrix} = 3,1131 > 0.$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot 7,89 \approx 24,56 > 0.$$

Так как все определители Гурвица являются положительными, то САР устойчива.

5.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с критериями устойчивости, методикой построения области устойчивости на основе D-разбиения и способами определения запасов устойчивости САР по амплитуде и фазе.

2. Оценить устойчивость САР по критерию устойчивости в соответствии с выполняемым вариантом из таблицы 4.1. Структурные схемы САР приведены в таблице 4.2, их передаточные функции в таблице 4.3, а значения коэффициентов передаточных функций в таблице 4.4.

3. Построить область устойчивости в плоскости заданного параметра из таблицы 4.1. Если исходная САР устойчива, то в области устойчивости необходимо показать соответствующее значение варьируемого параметра. Если исходная САР неустойчива, то в области устойчивости выбирается значение варьируемого параметра, при котором САР будет устойчива.

4. Оценить устойчивость САР по критерию Найквиста и определить запасы устойчивости по амплитуде и фазе.

5. Оценить устойчивость САР по логарифмическому критерию и определить запасы устойчивости по амплитуде и фазе. Сравнить запасы устойчивости, полученные по критерию Найквиста и по логарифмическому критерию.

6. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

Таблица 4.1 – Критерии устойчивости и варьируемые параметры

Номер варианта	Критерии устойчивости			Варьируемый параметр
	Гурвица	Рауса	Михайлова	
1	–	–	+	k_2
2	+	–	–	k_3
3	–	+	–	k_1
4	–	–	+	k_1
5	+	–	–	T_2
6	–	–	+	T_3

Продолжение таблицы 4.1

Номер варианта	Критерии устойчивости			Варьируемый параметр
	Гурвица	Рауса	Михайлова	
7	–	+	–	k_3
8	+	–	–	k_1
9	–	+	–	k_3
10	–	–	+	k_2
11	+	–	–	T_1
12	–	–	+	k_3
13	+	–	–	T_2
14	–	–	+	k_2
15	–	+	–	T_3
16	–	+	–	k_3

Таблица 4.2 – Структурные схемы САР

Номер САР	Структурные схемы САР
I	
II	

Продолжение таблицы 4.2

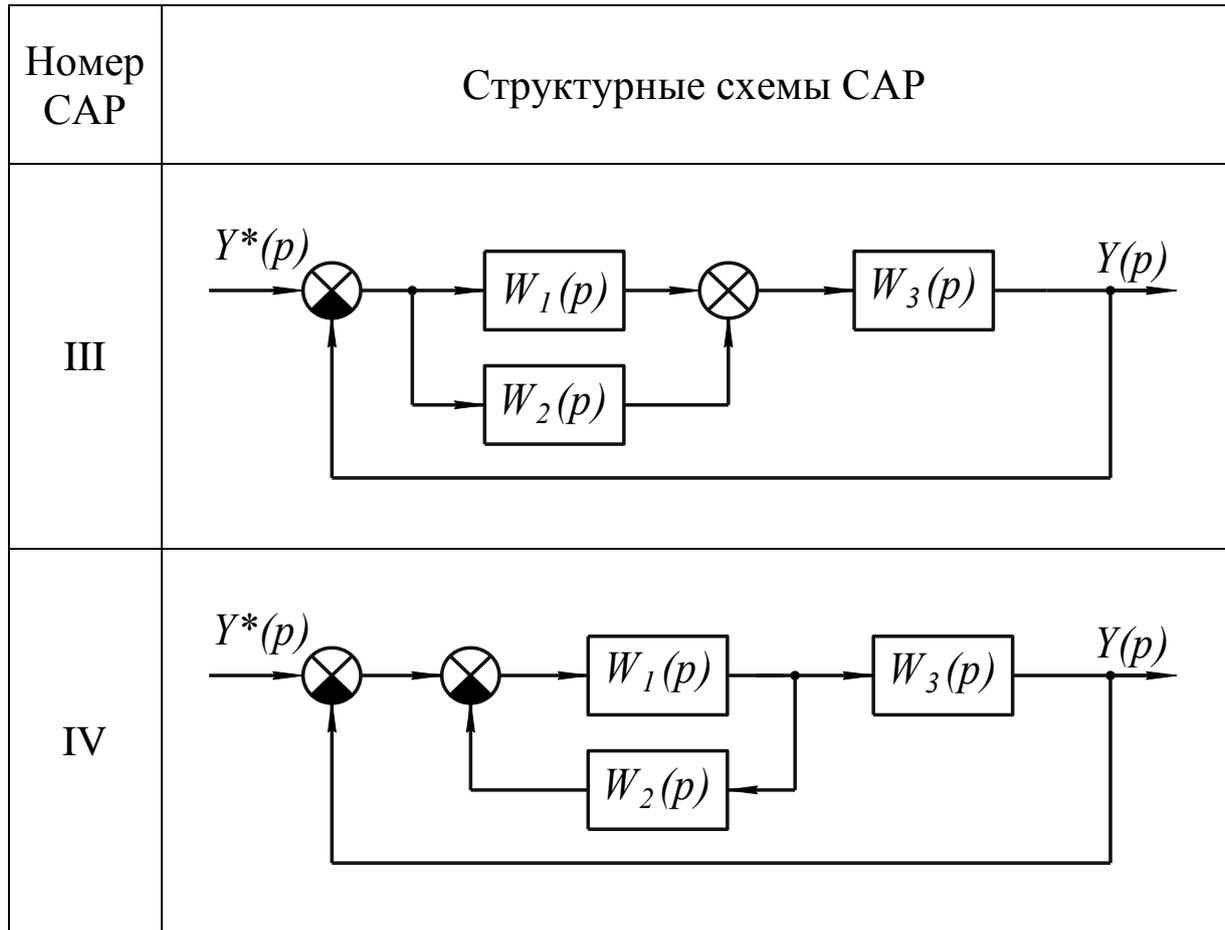


Таблица 4.3 – Передаточные функции САР

Номер варианта	Номер САР	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$
1	I	$\frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_1}{T_3 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_4 p + 1}$
2	II	$\frac{k_1}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1}$	k_3
3	III	$\frac{k_1}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_3}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$
4	IV	$\frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}$	k_2	$\frac{k_3}{p(T_3 p + 1)}$

Продолжение таблицы 4.3

Номер варианта	Номер САР	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$
5	I	$\frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}$	$\frac{1}{T_2 p}$	k_2
6	II	$\frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_1}{T_3 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_4 p}$
7	III	$\frac{k_1}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_3}{p(T_3 p + 1)}$
8	IV	$\frac{k_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$\frac{1}{T_3 p}$	$\frac{k_2}{T_4 p + 1}$
9	I	$\frac{k_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$\frac{k_2}{T_3 p}$	$\frac{k_3}{p(T_4 p + 1)}$
10	II	$\frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	k_3
11	III	$\frac{k_1}{T_1 p + 1}$	$\frac{1}{T_2 p}$	$\frac{k_2}{T_3 p + 1}$
12	IV	$\frac{k_1}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_3}{T_3 p}$
13	I	$\frac{k_1 p}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_3}{T_3 p + 1}$
14	II	$\frac{k_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$\frac{k_2}{T_3 p + 1}$	k_3
15	III	$\frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1}$	$\frac{k_2}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_3}{T_3 p + 1}$
16	IV	$\frac{k_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	k_2	$\frac{k_3}{T_3^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1}$

Таблица 4.4 – Значения параметров передаточных функций

Номер варианта	k_1	k_2	k_3	T_1	T_2	T_3	T_4	ξ
1	1,2	2	–	1,5	2	2,4	3,2	–
2	2	1,8	0,9	1,8	1,2	–	–	0,7
3	2,1	1,4	3,1	1,9	0,4	1,2	2,5	–
4	2,5	0,85	3,2	1,6	–	2,8	–	0,6
5	2,2	1,4	–	5	1,4	–	–	0,5
6	1,2	1,5	–	1,8	2,5	4	2,1	–
7	1,8	3	2	6	2,8	1,5	–	–
8	1,2	2,5	–	1,5	2,5	0,8	2,6	–
9	1,1	0,4	2,5	1,1	2,4	1,5	0,9	–
10	2,5	1,8	0,95	5	2	4,5	–	0,65
11	0,5	1,9	–	8	2	5	–	–
12	0,7	3,1	0,5	3,2	4	2,1	–	–
13	0,8	2,8	4,1	1,4	5	3,2	–	–
14	1,9	1,6	0,9	1,8	3,9	2	–	–
15	1,4	2,3	3,2	2,5	2,8	1,4	–	0,55
16	4,1	0,9	2,4	1,2	3,2	2,1	–	0,6

5.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Преимущества и недостатки алгебраических и частотных критериев устойчивости.
2. Сформулируйте условия устойчивости САР по Ляпунову.
3. Какими могут быть корни характеристического уравнения?
4. Какие задачи решаются при анализе устойчивости САР?
5. Укажите основное достоинство критерия Рауса по сравнению с критерием Гурвица.
6. Укажите основное отличие критерия Найквиста от других критериев.
7. Сформулируйте критерий Найквиста с учетом правил пе-

реходов.

8. Назовите основное достоинство логарифмического критерия по сравнению с критерием Найквиста.

9. Укажите причины необходимости проектирования САР с требуемым запасом устойчивости.

10. На что влияет запас устойчивости по фазе?

11. С какой целью выделяется область устойчивости САР?

12. Что представляют собой кривые D-разбиения?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ САР

6.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – изучение оценок качества регулирования в установившемся и в переходном режимах систем автоматического регулирования (САР) и способов их расчета по кривым переходного процесса.

6.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Под качеством регулирования понимается способность САР поддерживать заданный закон регулирования с определенной точностью. При оценке качества регулирования решаются две задачи:

- оценка точности регулирования в установившемся режиме;
- оценка качества регулирования в переходном режиме.

6.2.1 Оценка точности САР в установившемся режиме

Точность САР в установившемся режиме зависит от статизма САР. В статистических САР регулятор поддерживает постоянное значение выходной переменной $y(t)$ с некоторой ошибкой. В установившемся режиме эта ошибка регулирования называется статистической (установившейся) ошибкой, определяемой по выражению

$$\Delta_{ст} = \left| y^*(t_0) - y(\infty) \right|, \quad (2.1)$$

где $y^*(t_0)$ – требуемое (желаемое) значение выходной (регулируемой) переменной;

$y(\infty)$ – установившееся значение выходной переменной;

t_0 – момент времени изменения задающего воздействия.

Кривые переходного процесса статической САР, при ступенчатом изменении задающего воздействия приведены на рисунке 2.1, где кривые 1, 3 показывают наличие статической

ошибки. Причем для кривой 1 $y(\infty) = y^*(t_0) + \Delta_{ст}$, а для кривой 3 $y(\infty) = y^*(t_0) - \Delta_{ст}$, кривая 2 показывает отсутствие статической ошибки, так как $y(\infty) = y^*(t_0)$.

В астатических САР $\Delta_{ст} = 0$.

При произвольном задающем воздействии ошибка регулирования в установившемся режиме представляет собой медленно изменяющуюся во времени функцию $\Delta y_0(t)$, которую можно представить в виде следующего ряда:

$$\Delta y_0(t) = C_0 y^*(t) + \frac{C_1}{1!} \frac{dy^*(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 y^*(t)}{dt^2} + \dots, \quad (2.2)$$

где C_0, C_1, C_2, \dots – коэффициенты ошибок по задающему воздействию.

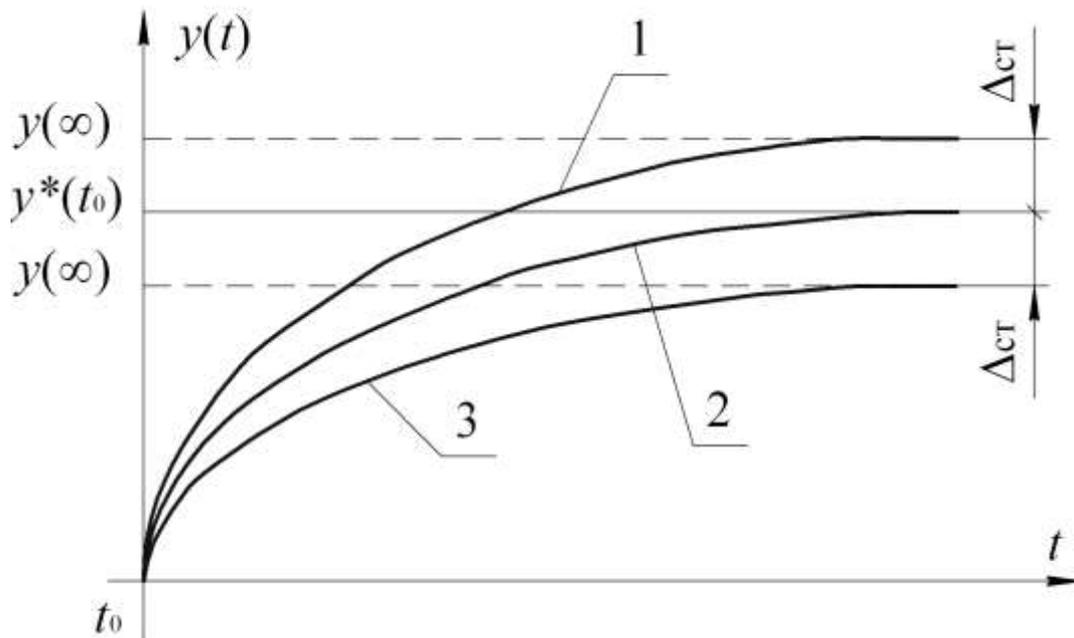


Рисунок 2.1 – Кривые переходного процесса

Для определения коэффициентов ошибок используется передаточная функция ошибки по задающему воздействию:

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)}, \quad (2.3)$$

где $W_p(p)$ – передаточная функция разомкнутой части САР. Коэффициенты ошибок определяются выражениями:

$$C_0 = [W_\varepsilon(p)]_{p=0},$$

$$C_1 = \left[\frac{dW_\varepsilon(p)}{dp} \right]_{p=0},$$

$$C_2 = \left[\frac{d^2W_\varepsilon(p)}{dp^2} \right]_{p=0}.$$
(2.4)

Коэффициент C_0 называется коэффициентом статической ошибки, который в статических САР определяется по выражению

$$C_0 = \frac{1}{1+k_p},$$
(2.5)

где k_p – коэффициент передачи разомкнутой части САР.

В астатических САР коэффициент статической ошибки равен 0, то есть $C_0 = 0$.

Коэффициент C_1 называется коэффициентом скоростной ошибки и в астатических САР первого порядка

$$C_1 = \frac{1}{k_v},$$
(2.6)

где k_v – коэффициент передачи разомкнутой части САР по скорости.

Коэффициент C_2 называется коэффициентом ошибки от ускорения, который в астатических САР второго порядка определяется по выражению

$$C_2 = \frac{1}{k_a},$$
(2.7)

где k_a – коэффициент передачи разомкнутой части САР по ускорению.

Коэффициенты ошибок C_0 , C_1 , C_2 характеризуются тем, что при увеличении коэффициента передачи разомкнутой части САР независимо от структуры и типа САР они уменьшаются.

6.2.2 Оценка качества регулирования в переходном режиме

Точность работы САР в переходном режиме определяется динамической ошибкой

$$\Delta y(t) = y^*(t_0) - y(t), \quad (2.8)$$

то есть ее величиной и длительностью существования. Величина и длительность отклонения $\Delta y(t)$ определяются характером переходного процесса, который зависит от свойств системы и места приложения внешнего воздействия.

В работе рассматриваются только прямые оценки качества регулирования, определяемые непосредственно по кривым переходного процесса. Основные прямые оценки качества регулирования приведены на рисунке 2.2.

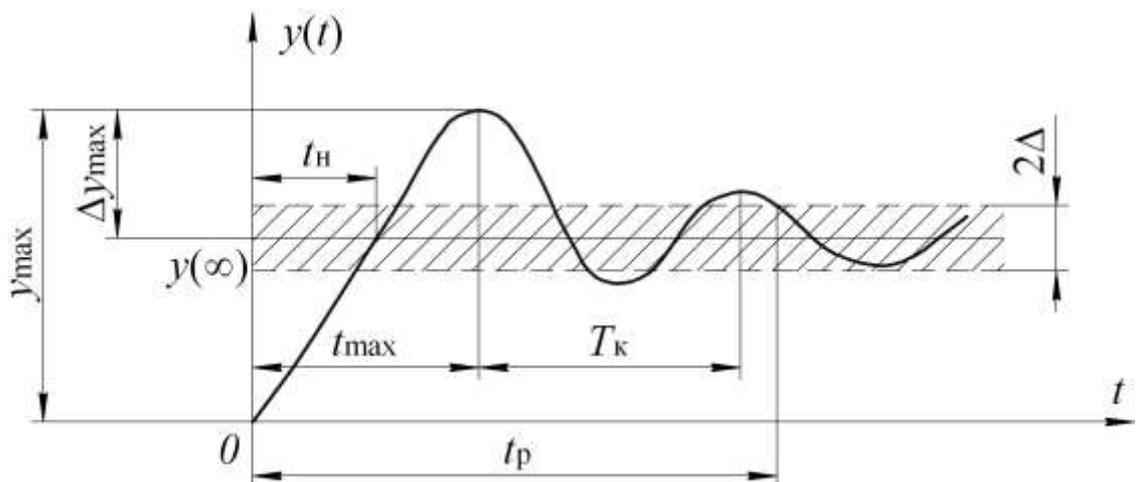


Рисунок 2.2 – График переходного процесса

К основным оценкам качества регулирования относятся:

- время регулирования t_p ;
- перерегулирование σ ;
- число колебаний N ;
- частота колебаний ω_k .

Время регулирования t_p – это минимальное время, по истечении которого регулируемая переменная будет оставаться близкой к установившемуся значению $y(\infty)$ с заданной точностью Δ .

На практике обычно принимается равной 5% от установившегося значения, то есть

$$\Delta = 0,05y(\infty). \quad (2.9)$$

Перерегулирование σ – это отклонение первого максимального отклонения Δy_{\max} от установившегося значения к этому установившемуся значению в процентах, то есть

$$\sigma = \frac{\Delta y_{\max}}{y(\infty)} 100\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} 100\%. \quad (2.10)$$

На практике в большинстве случаев качество регулирования считается приемлемым, если $\sigma = (10 \div 30)\%$.

При заданных σ и t_p переходная характеристика не должна выходить из области допустимых отклонений, приведенных на рисунке 2.3.

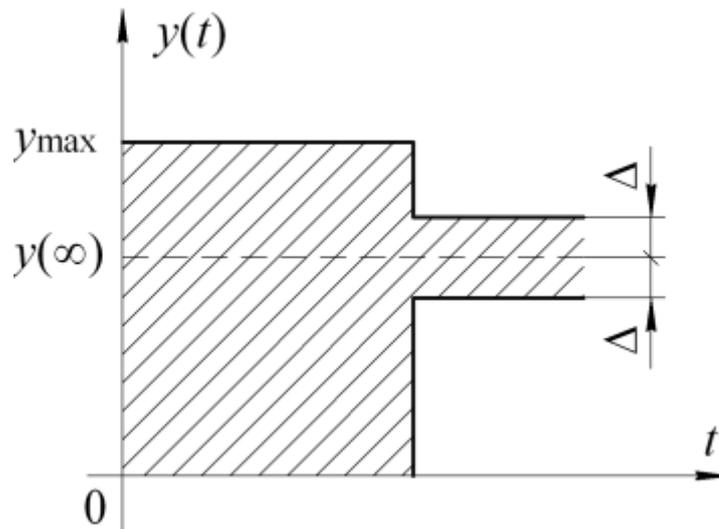


Рисунок 2.3 – Область допустимых отклонений

Число колебаний регулируемой переменной $y(t)$ за время регулирования t_p

$$N = \frac{t_p}{T_k}, \quad (2.11)$$

где T_k – период колебаний для колебательных переходных процессов.

На практике обычно принимается $N \leq 2$.

Частота колебаний

$$\omega_K = \frac{2\pi}{T_K}. \quad (2.12)$$

Дополнительными прямыми оценками качества регулирования являются:

- время нарастания переходного процесса t_H ;
- время достижения первого максимума t_{\max} .

6.2.3 Построение кривых переходного процесса

Для расчета прямых оценок качества регулирования необходимо уметь строить кривые переходного процесса. В работе для этого используются два метода:

- приближенный метод трапецеидальных вещественных частотных характеристик (ТВЧХ);
- метод разностных уравнений.

6.2.3.1 Метод трапецеидальных вещественных частотных характеристик (ТВЧХ)

Типовая ТВЧХ, приведенная на рисунке 2.4, определяется тремя параметрами:

- r_0 – высота трапеции;
- ω_d – интервал равномерного пропускания частот;
- ω_n – общий интервал пропускания частот.

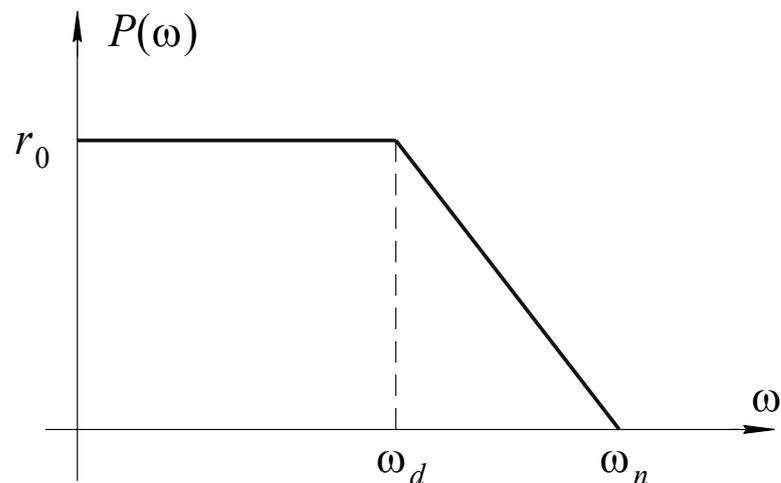


Рисунок 2.4 – Типовая трапецеидальная вещественная частотная характеристика

Если $r_0 = 1$, $\omega_n = 1$, то типовая ТВЧХ называется единичной. Единичной типовой ТВЧХ соответствует переходный процесс $h_1(t)$, значения которого приведены в таблице приложения А для каждого значения коэффициента наклона

$$H = \frac{\omega_d}{\omega_n}. \quad (2.13)$$

Величина коэффициента наклона H характеризует наклон типовой ТВЧХ. Переход от переходного процесса $h_1(t)$ к реальному переходному процессу $h(t)$ осуществляется по выражениям:

$$h(t) = r_0 \cdot h_1(t); \quad t = \frac{t_{\text{таб}}}{\omega_n}, \quad (2.14)$$

где t – реальное время.

Кривая на основе типовых ТВЧХ строится следующим образом:

1. По заданной передаточной функции САР строится вещественная частотная характеристика $P(\omega)$, приведенная на рисунке 2.5.

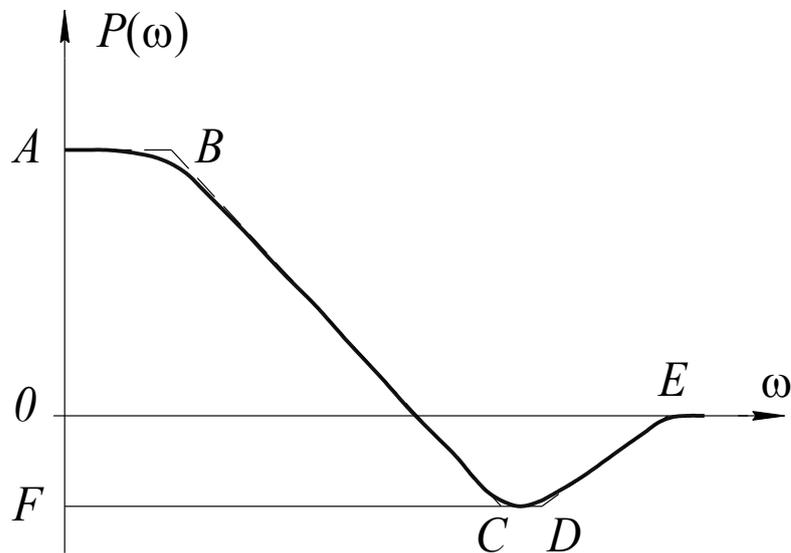


Рисунок 2.5 – Вещественная частотная характеристика

2. Вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ разбивается на типовые ТВЧХ. Для этого $P(\omega)$ заменяется мало отличающейся от нее ломаной кривой, состоящей из сопрягающих друг с другом прямолинейных отрезков (на рисунке 2.5 ломаная кривая

$ABCDE$). Через точки сопряжения (на рисунке 2.5 точки B, C, D) проводятся прямые, параллельные оси частот. Таким образом, $P(\omega)$ заменяется определенным числом ТВЧХ:

$$P(\omega) \approx \sum_{i=1}^n P_i(\omega). \quad (2.15)$$

На рисунке 2.5 $P(\omega)$ заменена двумя ТВЧХ: $ABCF$ и $FDE0$.

3. Для каждой трапеции определяются ее параметры: r_i, H_i и ω_{ni} . Если трапеция направлена вниз (на рисунке 2.5 трапеция $FDE0$), то r_i берется со знаком минус.

4. По таблице А.1 в приложении А в зависимости от H_i для каждой ТВЧХ находятся значения, соответствующие кривой переходного процесса $h_{1i}(t)$.

5. По выражениям (2.14) определяются значения для реальных кривых переходного процесса $h_i(t)$, на основе которых строятся их графики (рисунок 2.6).

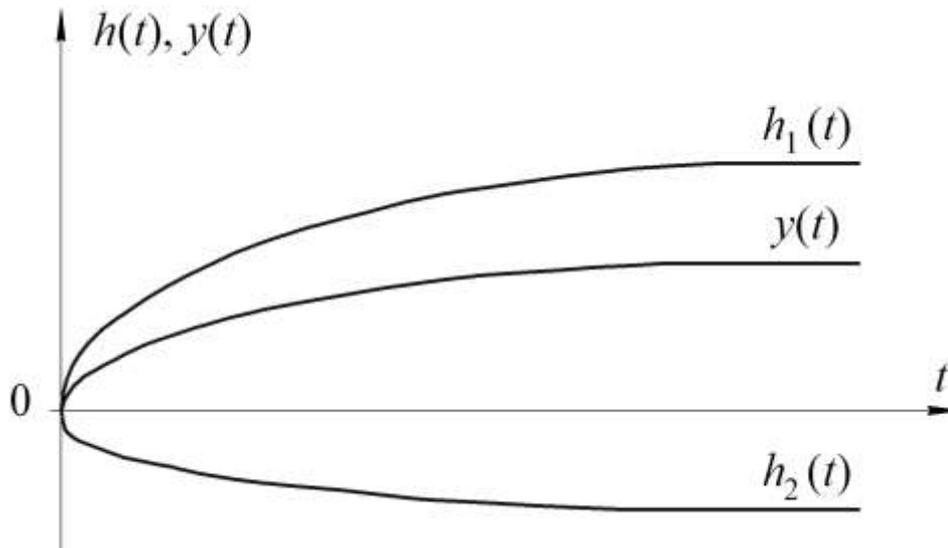


Рисунок 2.6 – Реальная кривая и кривые типовых переходных процессов

6. Значения кривых типовых переходных процессов складываются с учетом их знаков, и в итоге получается реальная кривая переходного процесса $y(t)$.

6.2.3.2 Метод разностных уравнений

Построение кривых переходного процесса на основе разностных уравнений требует:

- получения разностного уравнения на основе заданного дифференциального уравнения;
- выбора шага дискретизации Δt для обеспечения требуемой точности.

Разностные уравнения получаются путем замены в дифференциальных уравнениях дифференциалов левыми разностями на основе выражений:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \Delta x(i) = \frac{x(i) - x(i-1)}{\Delta t}, \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x'(t) - x'(t - \Delta t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - 2x(t - \Delta t) + x(t - 2\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \\ \rightarrow \Delta^2 x(i) &= \frac{\Delta x(i) - \Delta x(i-1)}{\Delta t} = \frac{x(i) - 2x(i-1) + x(i-2)}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где Δt – шаг дискретизации;

i – аналог дискретного времени, представляющий собой целочисленное значение, характеризующее номер дискретного времени $t_i = i \Delta t$ при равномерной дискретизации.

Линейное разностное уравнение n -го порядка обычно записывается в виде рекуррентной формулы вида

$$\begin{aligned} y(i) &= \alpha_1 y(i-1) + \alpha_2 y(i-2) + \dots + \alpha_n y(i-n) + \\ &+ \beta_0 v(i) + \beta_1 v(i-1) + \dots + \beta_m v(i-m), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где α_i ($i = 1 \dots n$) и β_j ($j = 0 \dots m$) – коэффициенты разностного уравнения, определяемые через коэффициенты дифференциального уравнения и шаг дискретизации Δt ;
 $y(i)$, $y(i-1)$, ..., $y(i-n)$ – значения выходной переменной системы;

$v(i), v(i - 1), \dots, v(i - m)$ – значения входной переменной системы.

Кривая переходного процесса по разностному уравнению строится следующим образом:

1. Получается разностное уравнение на основе заданного дифференциального уравнения.

2. Задается начальный шаг дискретизации Δt_0 . При этом ориентируются на значения постоянных времени T_1, T_2, \dots, T_n . Зачастую Δt_0 принимается равной $0,5T_{\min}$.

3. Формируются дискретные значения входного воздействия путем дискретизации его известного аналогового выражения, то есть

$$v(i) = v(i \cdot \Delta t), \quad (2.18)$$

где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

4. Рассчитываются значения кривой переходного процесса по полученному разностному уравнению с учетом дискретных значений входного воздействия.

5. Оценивается точность аппроксимации при выбранном шаге дискретизации Δt_0 . При этом кривая переходного процесса $y(t)$ заменяется отрезками прямых линий (рисунок 2.7). Точность аппроксимации определяется по выражению

$$E(j) = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{y(i) - y(i-1)}{2} \Delta t_j, \quad (2.19)$$

где j – номер итерации (этапа) выбора шага дискретизации;

n_j – число значений кривой переходного процесса, рассчитываемых по разностному уравнению, которое зависит как от величины шага дискретизации, так и от длительности переходного процесса.

При начальном шаге дискретизации определяется величина $E(0)$.

Изменяется шаг дискретизации (обычно в меньшую сторону) в зависимости от типа переходного процесса и значений параметров на величину $(0,1 \div 0,5)\Delta t_0$ и повторяются этапы 3–5. И так до тех пор, пока шаг дискретизации не будет удовлетворять условию

$$\frac{E(j) - E(j-1)}{E(j)} \cdot 100 \leq 5\%. \quad (2.20)$$

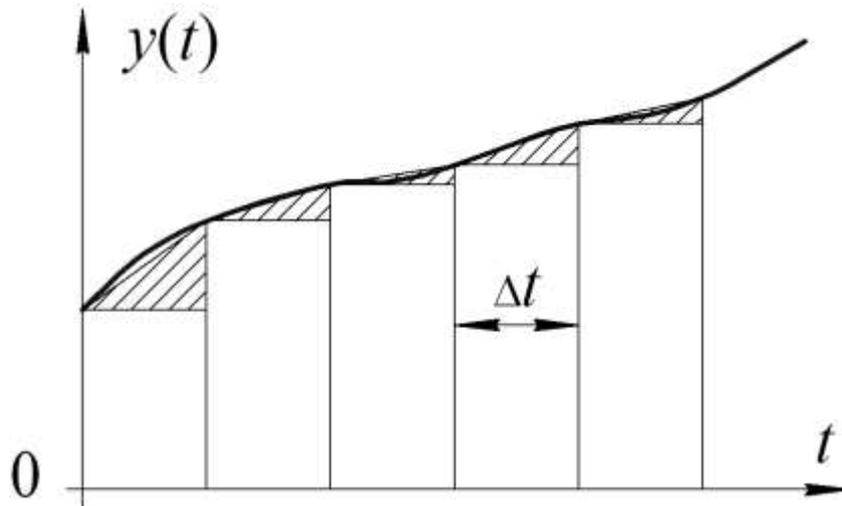


Рисунок 2.7 – Схема расчета ошибки аппроксимации

При этом необходимо учитывать, что с уменьшением Δt увеличивается число рассчитываемых значений кривой переходного процесса. Если на первой итерации оказалось, что относительная ошибка аппроксимации (2.20) намного меньше 5%, то Δt можно наоборот увеличить.

б. Строится результирующая кривая переходного процесса для выбранного шага дискретизации.

6.3 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ОЦЕНОК КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

6.3.1 Определение коэффициентов ошибок

Структурная схема САР приведена на рисунке 3.1, где

$$W_p(p) = \frac{10}{5p^2 + 3p + 1}. \quad (3.1)$$

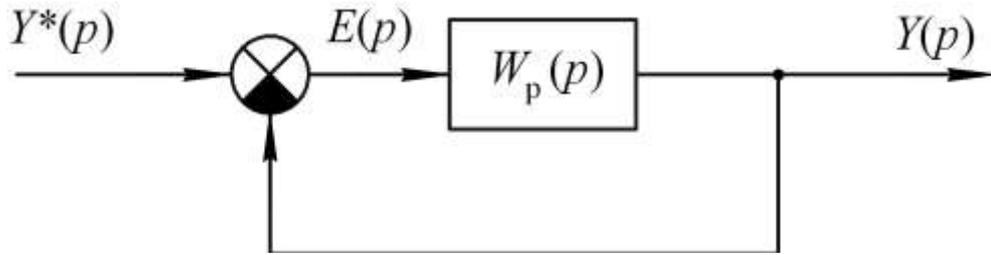


Рисунок 3.1 – Структурная схема САР

Требуется определить:

– коэффициенты статической ошибки C_0 , скоростной ошибки C_1 и ошибки от ускорения C_2 .

Для нахождения указанных коэффициентов необходимо найти передаточную функцию ошибки по выражению (2.3), то есть

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{5p^2 + 3p + 1}} = \frac{5p^2 + 3p + 1}{5p^2 + 3p + 11}.$$

Итак,

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{5p^2 + 3p + 1}{5p^2 + 3p + 11},$$

на основе выражений (2.4) имеем, что

$$C_0 = [W_{\varepsilon}(p)]_{p=0} = \frac{1}{11} = 0,09$$

Для нахождения C_1 необходимо найти первую производную от $W_{\varepsilon}(p)$ по правилу:

$$W'_{\varepsilon}(p) = \frac{B'(p)A(p) - A'(p)B(p)}{(A(p))^2}, \quad (3.2)$$

где $B(p)$ – полином в числителе передаточной функции;
 $A(p)$ – полином в знаменателе.

Тогда

$$W'_\varepsilon(p) = \frac{(10p+3)(5p^2+3p+11) - (10p+3)(5p^2+3p+1)}{(5p^2+3p+11)^2} =$$

$$= \frac{10(10p+3)}{(5p^2+3p+11)^2}$$

Итак

$$W'_\varepsilon(p) = \frac{100p+30}{(5p^2+3p+11)^2}. \quad (3.3)$$

Тогда

$$C_1 = [W'_\varepsilon(p)]_{p=0} = \frac{3}{11^2} = \frac{3}{121} = 0,25.$$

Вторая производная от передаточной функции ошибки

$$W''_\varepsilon(p) = \frac{100 \cdot (5p^2+3p+11)^2 - (100p+30) \cdot (5p^2+3p+11) \cdot 2 \cdot (10p+3)}{(5p^2+3p+11)^4} =$$

$$= \frac{(5p^2+3p+11) \cdot (500p^2+300p+1100-1000p^2-900p-180)}{(5p^2+3p+11)^4} =$$

$$= \frac{(5p^2+3p+11) \cdot (-500p^2-600p+920)}{(5p^2+3p+11)^4}$$

Отсюда

$$C_2 = [W''_\varepsilon(p)]_{p=0} = \frac{11 \cdot 920}{11^4} = \frac{920}{11^3} = 0,69.$$

Итак

$$C_0 = 0,09; \quad C_1 = 0,25; \quad C_2 = 0,69.$$

Тогда

$$\Delta y(t) = 0,09 y^*(t) + 0,25 \frac{dy^*(t)}{dt} + 0,35 \frac{d^2 y^*(t)}{dt^2}.$$

6.3.2 Построение кривой переходного процесса методом типовых ТВЧХ

Пусть передаточная функция САР имеет вид

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (3.4)$$

где $k = 2$ – коэффициент передачи;

$T_1 = 1$; $T_2 = 2$; $T_3 = 4$ – постоянные времени.

Требуется:

– построить кривую переходного процесса методом типовых ТВЧХ;

– определить прямые оценки качества регулирования.

Раскроем скобки в выражении (3.4) и подставим значения k , T_1 , T_2 , T_3 :

$$W(p) = \frac{kT_1 p + k}{T_2 T_3 p^2 + (T_2 + T_3)p + 1} = \frac{2p + 2}{8p^2 + 6p + 1}. \quad (3.5)$$

Получим выражение для расчета вещественной частотной характеристики $P(\omega)$, заменив в (3.5) p на $j\omega$

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{2 + j2\omega}{(1 - 8\omega^2) + j6\omega} = \frac{2 + j2\omega}{(1 - 8\omega^2) + j6\omega} \cdot \frac{(1 - 8\omega^2) - j6\omega}{(1 - 8\omega^2) - j6\omega} = \\ &= \frac{2 - 16\omega^2 - j12\omega + j2\omega - j16\omega^3 + 12\omega^2}{(1 - 8\omega^2)^2 + 36\omega^2} \end{aligned}$$

Отсюда

$$P(\omega) = \frac{2 - 4\omega^2}{1 + 20\omega^2 + 64\omega^4}.$$

Результаты расчета $P(\omega)$ приведены в таблице 3.1, а ее график на рисунке 3.2.

Таблица 3.1 – Значения $P(\omega)$

ω	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	$+\infty$
$P(\omega)$	2	1,01	0,97	0,49	0,23	0,1	0,03	0	-0,01	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	0

Аппроксимируем кривую $P(\omega)$ прямолинейными отрезками. В итоге получаем три типовые ТВЧХ, характеристики которых приведены в таблице 3.2, а сами ТВЧХ приведены на рисунке 3.3.

Таблица 3.2 – Характеристики ТВЧХ

Трапеция	r_i	ω_{di}	ω_{ni}	H_i
I	1,5	0,15	0,3	0,5
II	0,4	0,3	0,5	0,6
III	0,12	0,5	0,8	0,625

В таблицах 3.3, 3.4, 3.5 соответственно приведены значения для переходных процессов единичных ТВЧХ, взятых при заданных значениях наклонов H_i из таблицы приложения А, а также значения реальных кривых переходных процессов, полученных для каждой ТВЧХ по выражениям (2.14).

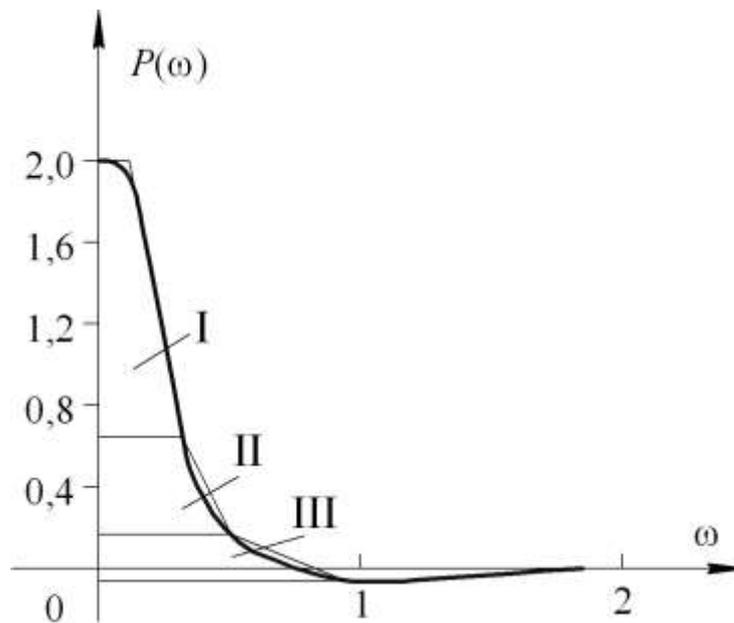


Рисунок 3.2 – Вещественная частотная характеристика

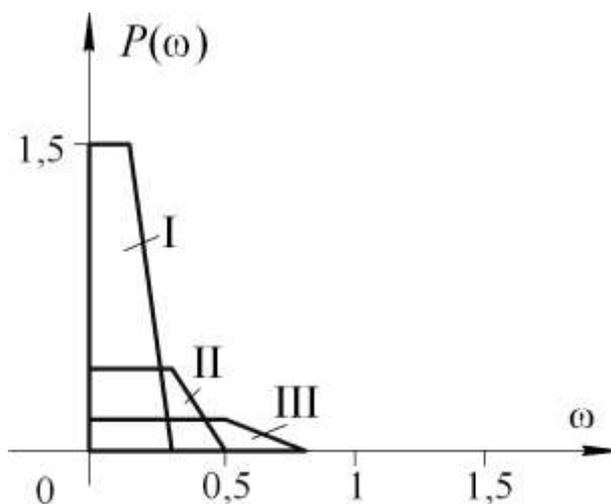


Рисунок 3.3 – ТВЧХ

Таблица 3.3 – Значения переходного процесса для ТВЧХ I

$t_{\text{табл}}$	$h_{11}(t)$	t	$h_1(t)$
0,0	0,00	0,0	0,00
0,5	0,240	1,7	0,36
1,0	0,461	3,3	0,69
1,5	0,665	5,0	1,00
2,0	0,831	6,7	1,25
2,5	0,967	8,3	1,45
3,0	1,061	10,0	1,59
3,5	1,115	11,7	1,67
4,0	1,141	13,3	1,71
4,5	1,138	15,0	1,71
5,0	1,117	16,7	1,68
5,5	1,090	18,3	1,64
6,0	1,051	20,0	1,58
6,5	1,018	21,7	1,53
7,0	0,992	23,3	1,49
7,5	0,974	25,0	1,46
8,0	0,966	26,7	1,45
8,5	0,964	28,3	1,45
9,0	0,968	30,0	1,45
9,5	0,975	31,7	1,46
10,0	0,982	33,3	1,47
10,5	0,988	35,0	1,48

Продолжение таблицы 3.3

$t_{\text{табл}}$	$h_{11}(t)$	t	$h_1(t)$
11,0	0,993	36,7	1,49
11,5	0,996	38,3	1,49
12,0	0,997	40,0	1,50

Таблица 3.4 – Значения переходного процесса для ТВЧХ II

$t_{\text{табл}}$	$h_{12}(t)$	t	$h_2(t)$
0,0	0,000	0	0,00
0,5	0,255	1	0,10
1,0	0,490	2	0,20
1,5	0,706	3	0,28
2,0	0,878	4	0,35
2,5	1,010	5	0,40
3,0	1,100	6	0,44
3,5	1,145	7	0,46
4,0	1,158	8	0,46
4,5	1,141	9	0,46
5,0	1,107	10	0,44
5,5	1,064	11	0,43
6,0	1,020	12	0,41
6,5	0,982	13	0,39
7,0	0,957	14	0,38
7,5	0,944	15	0,38
8,0	0,941	16	0,38
8,5	0,948	17	0,38
9,0	0,961	18	0,38
9,5	0,977	19	0,39
10,0	0,993	20	0,40
10,5	1,005	21	0,40
11,0	1,014	22	0,41
11,5	1,017	23	0,41
12,0	1,018	24	0,41
12,5	1,015	25	0,41
13,0	1,012	26	0,40
13,5	1,008	27	0,40

Таблица 3.5 – Значения переходного процесса ТВЧХ Ш

$t_{\text{табл}}$	$h_{13}(t)$	t	$h_3(t)$
0	0	0	0
0,5	0,259	0,625	0,03
1,0	0,505	1,250	0,06
1,5	0,722	1,875	0,09
2,0	0,899	2,500	0,11
2,5	1,030	3,125	0,12
3,0	1,116	3,750	0,13
3,5	1,158	4,375	0,14
4,0	1,162	5,000	0,14
4,5	1,138	5,625	0,14
5,0	1,097	6,250	0,13
5,5	1,050	6,875	0,13
6,0	1,001	7,500	0,12
6,5	0,965	8,125	0,12
7,0	0,941	8,750	0,11
7,5	0,931	9,375	0,11
8,0	0,934	10,000	0,11
8,5	0,948	10,625	0,11
9,0	0,967	11,250	0,12
9,5	0,987	11,875	0,12
10,0	1,006	12,500	0,12

По данным, приведенным в таблицах 3.3, 3.4, 3.5 строим переходные процессы $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$, которые приведены на рисунке 3.4.

Строим реальную кривую переходного процесса $y(t)$ путем графического суммирования переходных процессов $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ (рисунок 3.4).

Определяем прямые оценки качества регулирования:

- время регулирования $t_p = 18,75$ с;
- время нарастания переходного процесса $t_H = 8,5$ с;
- время достижения первого максимума $t_{\max} = 12,5$ с;
- перерегулирование

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% = \frac{2,22 - 2,02}{2,02} \cdot 100\% = 9,9\%,$$

где $y(\infty) = h_1(\infty) + h_2(\infty) + h_3(\infty) = 1,5 + 0,4 + 0,12 = 2,02$.

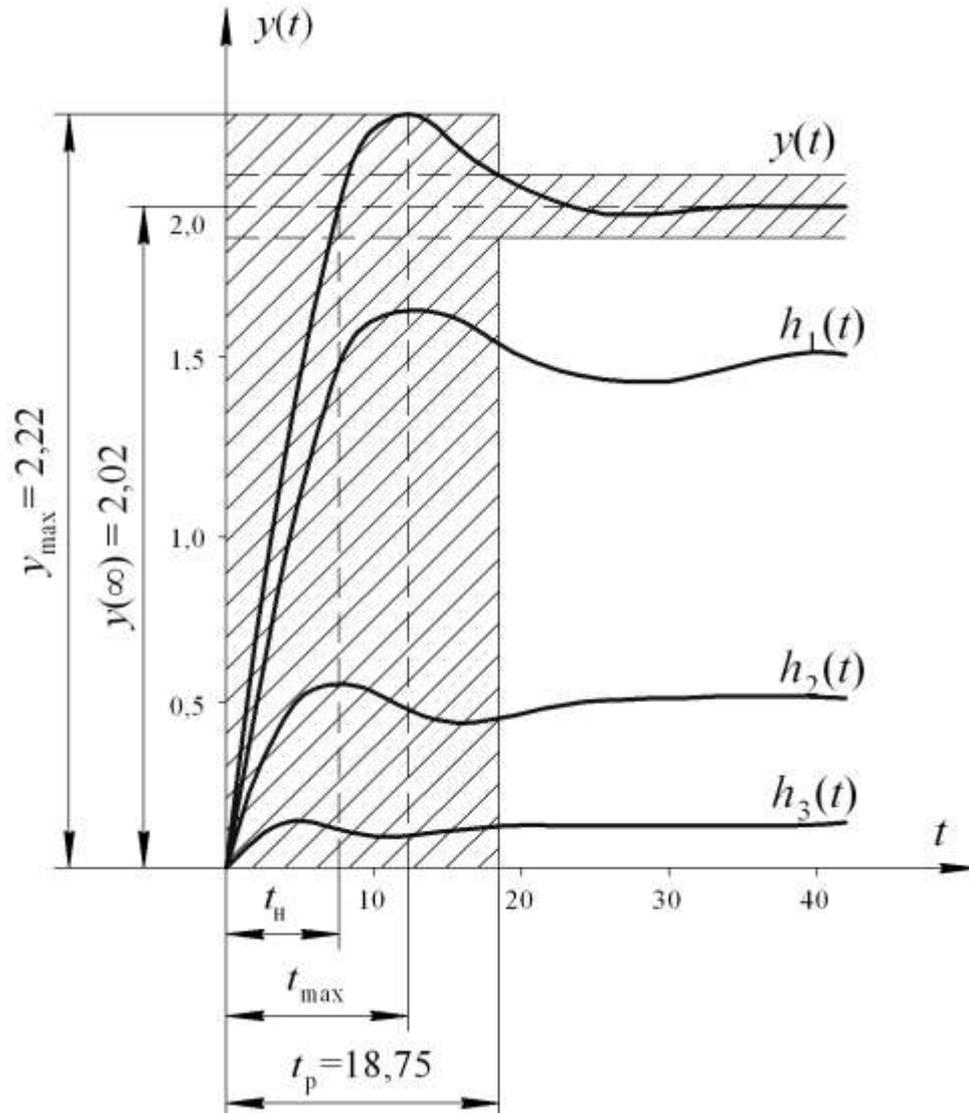


Рисунок 3.4 – Кривая переходного процесса и оценки качества регулирования

Так как переходной процесс не является колебательным, то число колебаний $N = 0$.

Полученная область допустимых отклонений выделена на рисунке 3.4 штриховкой.

6.3.3 Получение разностного уравнения

Пусть передаточная функция системы имеет вид:

$$W_c(p) = \frac{kp(T_1p + 1)}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1}.$$

Требуется получить разностное уравнение системы.

Изображение выходного сигнала

$$Y(p) = W_c(p)Y^*(p) = \frac{kp(T_1p + 1)}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1} Y^*(p).$$

Умножим левую и правую часть на характеристический полином и раскроем скобки:

$$T_2^2 p^2 Y(p) + 2\xi T_2 p Y(p) + Y(p) = kT_1 p^2 Y^*(p) + kp Y^*(p).$$

Тогда дифференциальное уравнение системы имеет вид:

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kT_1 \frac{d^2 y^*(t)}{dt^2} + k \frac{dy^*(t)}{dt}.$$

Заменим первую и вторую производную левыми разностями. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} T_2^2 \frac{y(i) - 2y(i-1) + y(i-2)}{\Delta t^2} + 2\xi T_2 \frac{y(i) - y(i-1)}{\Delta t} + y(i) = \\ = kT_1 \frac{y^*(i) - 2y^*(i-1) + y^*(i-2)}{\Delta t^2} + k \frac{y^*(i) - y^*(i-1)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Умножим левую и правую часть уравнения на Δt^2 и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} (T_2^2 + 2\xi T_2 \Delta t + \Delta t^2)y(i) - (2T_2^2 + 2\xi T_2 \Delta t)y(i-1) + T_2^2 y(i-2) = \\ = (kT_1 + k\Delta t)y^*(i) - (2kT_1 + k\Delta t)y^*(i-1) + kT_1 y^*(i-2) \end{aligned}$$

Отсюда разностное уравнение имеет вид:

$$y(i) = \alpha_1 y(i-1) + \alpha_2 y(i-2) + \beta_0 y^*(i) + \beta_1 y^*(i-1) + \beta_2 y^*(i-2),$$

где $\alpha_1 = \frac{2T_2^2 + 2\xi T_2 \Delta t}{\Delta}$;

$$\alpha_2 = -\frac{T_2^2}{\Delta};$$

$$\beta_0 = \frac{k(T_1 + \Delta t)}{\Delta};$$

$$\beta_1 = -\frac{k(2T_1 + \Delta t)}{\Delta};$$

$$\beta_2 = \frac{kT_1}{\Delta};$$

$$\Delta = T_2^2 + 2\xi T_2 \Delta t + \Delta t^2.$$

6.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с оценками качества регулирования и методами построения кривых переходного процесса.

2. Определить коэффициенты ошибок C_0 , C_1 , C_2 САР по заданным передаточным функциям разомкнутой части, приведенным в таблице 4.1 и значениям их параметров из таблицы 4.2, в соответствии с вариантом, заданным преподавателем. Структурная схема системы приведена на рисунке 4.1.

Таблица 4.1 – Передаточные функции разомкнутой части САР

Номер передаточной функции $W_p(p)$	Передаточная функция $W_p(p)$
I	$W_p(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}$
II	$W_p(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$
III	$W_p(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)^2}$
IV	$W_p(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p^2(T_2 p + 1)}$

Продолжение таблицы 4.1

Номер передаточной функции $W_p(p)$	Передаточная функция $W_p(p)$
V	$W_p(p) = \frac{k(T_1 p + 1)^2}{T_2 p + 1}$
VI	$W_p(p) = \frac{k}{p^2(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$

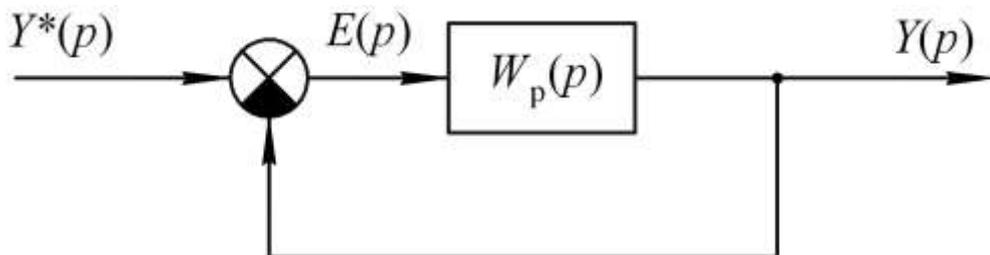


Рисунок 4.1 – Структурная схема САР

Таблица 4.2 – Значения параметров передаточной функции

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
№ $W_p(p)$	I	II	III	IV	V	VI	I	II	III	IV	V	VI	I	II	III	IV	V	VI
k	10	5	6	4	2	4	5	3	2	4	10	5	8	2	4	2	6	2
T_1	0,5	1	0,4	0,8	0,2	0,5	0,8	0,5	1	0,2	1	0,2	0,2	0,4	0,2	0,7	0,8	0,6
T_2	1	0,1	0,8	0,5	0,8	0,9	0,2	0,2	0,2	0,4	0,1	0,4	0,4	0,9	0,6	1	0,5	0,3

3. Построить кривую переходного процесса методом типовых ТВЧХ в соответствии с вариантом, заданным преподавателем, определить прямые оценки качества регулирования и построить область допустимых отклонений.

4. Построить кривые переходного процесса методом разностных уравнений в соответствии с вариантом, заданным преподавателем.

5. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

6.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая ошибка называется статической?
2. Как влияет коэффициент передачи разомкнутой части системы на коэффициенты ошибок?
3. Какие оценки качества регулирования называются прямыми?
4. Что характеризует время регулирования t_p ?
5. Достоинства и недостатки метода типовых ТВЧХ.
6. От чего зависит выбор шага дискретизации при построении кривой переходного процесса?
7. Что характеризует область допустимых отклонений?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДА МАНИПУЛЯТОРА

7.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – изучить динамику линеаризованных приводов манипуляторов, промоделировать электропривод манипулятора с двигателем постоянного тока с независимым возбуждением с обратной связью по скорости вала двигателя и исследовать качество работы привода.

7.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Структурная схема линеаризованного привода манипулятора приведена на рисунке 1, где $k_{ук}$, $k_{дк}$ – соответственно коэффициенты передачи усилителя и двигателя; $A_{ук}(p)$, $B_{дк}(p)$ – операторные многочлены, характеризующие инерционности усилителя и двигателя; $V_k(p)$ – управляющие воздействия от системы управления роботом (задающие воздействия); $\omega_{дк}(p)$ – угловая скорость вращения ротора двигателя; $\omega_k(p)$ – угловая скорость перемещения объекта управления (k -го механизма робота); $J_{дк}$ – момент инерции вращающихся частей двигателя; $i_{рк}$ – передаточное число редуктора ($i_{рк} > 1$).

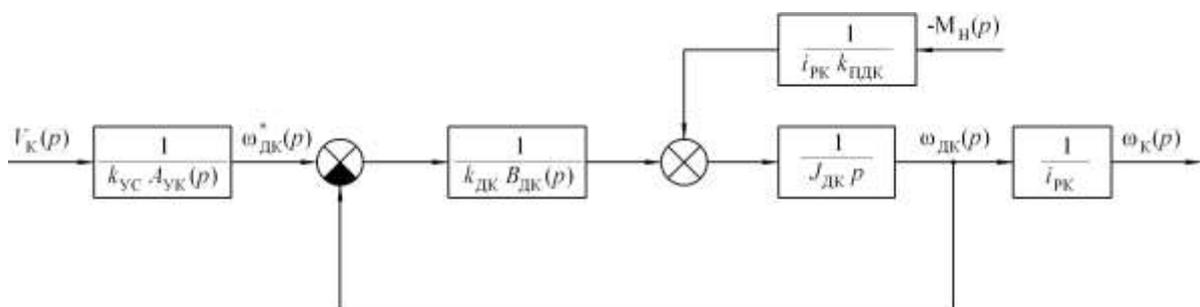


Рисунок 1 – Структурная схема линеаризованного привода
манипулятора

$$K_{\text{ПДК}} = \begin{cases} 1/\eta_{\text{к}}, & \text{если } M_{\text{н}}(t)\omega_{\text{к}}(t) < 0 \\ \eta_{\text{к}}, & \text{если } M_{\text{н}}(t)\omega_{\text{к}}(t) > 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где $\eta_{\text{к}}$ – коэффициент полезного действия редуктора;
 $M_{\text{н}}(p)$ – создаваемый нагрузкой суммарный момент.

В лабораторной работе рассматривается электропривод с двигателем постоянного тока с независимым возбуждением с обратной связью по скорости $\omega_{\text{дк}}(t)$ от вала двигателя с электронным усилителем.

В этом случае:

$$A_{\text{ук}}(p) = 1; \quad B_{\text{дк}}(p) = T_{\text{д}}p + 1,$$

где $T_{\text{д}}$ – постоянная времени двигателя.

Для данного привода структурная схема приведена на рисунке 2, где

$$k_1 = \frac{1}{k_{\text{ук}}}; \quad k_2 = \frac{1}{k_{\text{дк}}}; \quad k_3 = \frac{1}{J_{\text{дк}}}; \quad k_4 = \frac{1}{i_{\text{рк}}K_{\text{ПДК}}}; \quad k_5 = \frac{1}{i_{\text{рк}}}$$

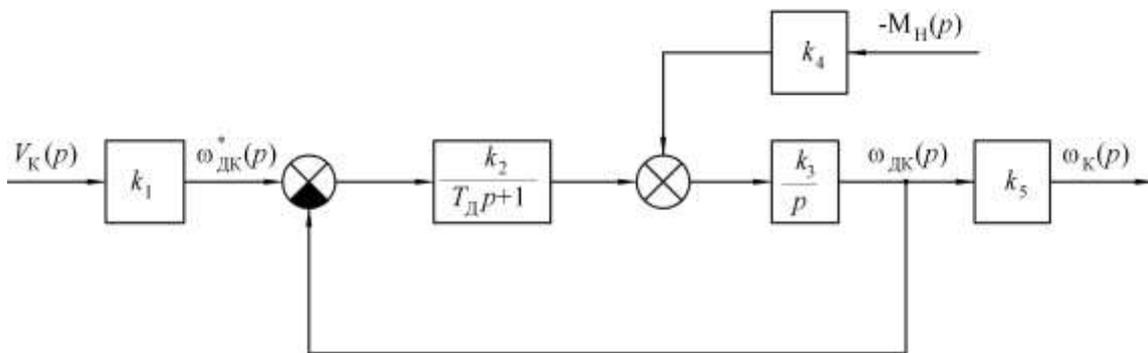


Рисунок 2 – Структурная схема электропривода манипулятора с двигателем постоянного тока с независимым возбуждением

В этом случае уравнение замкнутой системы привода имеет вид

$$\omega_{\text{к}}(p) = W_3(p)V_{\text{к}}(p) + G_{\text{н}}(p)M_{\text{н}}(p), \quad (2)$$

где $W_3(p)$ – передаточная функция по воздействию $V_{\text{к}}(p)$;

$G_H(p)$ – передаточная функция по воздействию $M_H(p)$.

7.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить работу привода манипулятора по структурной схеме, приведённой на рисунке 1.

2. Определить интервал изменения коэффициента передачи системы $k_1k_2k_3$, обеспечивающий устойчивую работу привода, пользуясь критерием устойчивости Михайлова. Данные, соответствующие вариантам лабораторной работы приведены в таблице 1.

3. Оценить качество работы привода по прямым оценкам качества регулирования по данным из таблицы 1.

4. Оформить и защитить отчёт по лабораторной работе.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер варианта	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	T_D
1	0,5	0,6	0,2	0,4	0,42	5
2	0,52	0,46	0,2	0,4	0,4	4
3	0,6	0,5	0,25	0,35	0,4	8
4	0,55	0,55	0,25	0,387	0,41	6
5	0,45	0,7	0,2	0,35	0,39	4
6	0,48	0,6	0,22	0,36	0,41	5
7	0,5	0,65	0,24	0,4	0,45	7
8	0,4	0,5	0,25	0,28	0,35	5
9	0,3	0,55	0,3	0,35	0,38	6
10	0,35	0,4	0,28	0,4	0,42	8
11	0,56	0,45	0,32	0,38	0,41	7
12	0,64	0,5	0,35	0,32	0,37	4

7.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие типовые динамические звенья входят в структурную схему линеаризованного привода манипулятора?

2. Каким образом определяются угловая скорость перемещения объекта управления?
3. Как определяется интервал изменения коэффициента передачи системы?
4. Какие оценки качества регулирования называются прямыми?
5. Назовите основные прямые оценки качества регулирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8. КАЧЕСТВО РЕГУЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

8.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – приобретение студентами практических навыков по анализу и моделированию влияния динамических характеристик приводов и видов обрабатываемых поверхностей с точки зрения перемещения приводов на точность отработки управляющих воздействий.

8.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Динамические возможности электроприводов должны обеспечивать не только отработку высоких скоростей и ускорений, но и удовлетворять определенным требованиям по характеру протекания переходных процессов. **Наиболее благоприятным является апериодический закон изменения выходной координаты систем программного управления станками (систем ЧПУ).** При таком режиме исключаются раскрытия в механических узлах, ударные перегрузки, а также влияние гистерезиса характеристик. При позиционировании апериодический характер движения всегда обеспечивает подход к заданной координате с одной стороны. В то же время апериодический характер движения механизмов подачи (приводов) обуславливает отставание действительного положения любого перемещения рабочего органа станка от заданного движения. В результате чего возникают скоростная или контурная ошибки отработки приводами управляющих воздействий, что является недостатком апериодического характера движения выходной координаты.

В лабораторной работе приводы аппроксимированы апериодическими звеньями первого порядка, т. е.

$$W_{np}(p) = \frac{1}{T_{np}p + 1}, \quad (2.1)$$

где T_{np} – постоянная времени привода, определяемая по формуле

$$T_{np} = \frac{1}{k_v}, \quad (2.2)$$

где k_v – добротность привода.

В лабораторной работе рассматриваются три вида обрабатываемых поверхностей с точки зрения движения приводов.

1. Обрабатываемая поверхность параллельна оси OX .

В режиме движения с постоянной скоростью система программного управления станком вырабатывает управляющие воздействия вида

$$u_x(t) = u(t) = vt, \quad (2.3)$$

где v – скорость изменения выходной координаты. На выходе привода выходная переменная

$$x(t) = v \left(t - T_{np} + T_{np} e^{-t/T_{np}} \right). \quad (2.4)$$

В установившемся режиме выходная координата

$$x_y(t) = v(t - T_{np}). \quad (2.5)$$

Тогда величина отставания (скоростная ошибка)

$$\Delta x_c = u_x(t) - x_y(t) = vT_{np}. \quad (2.6)$$

Схема появления скоростной ошибки приведена на рис. 2.1, где $\tau_{пр}$ – время запаздывания

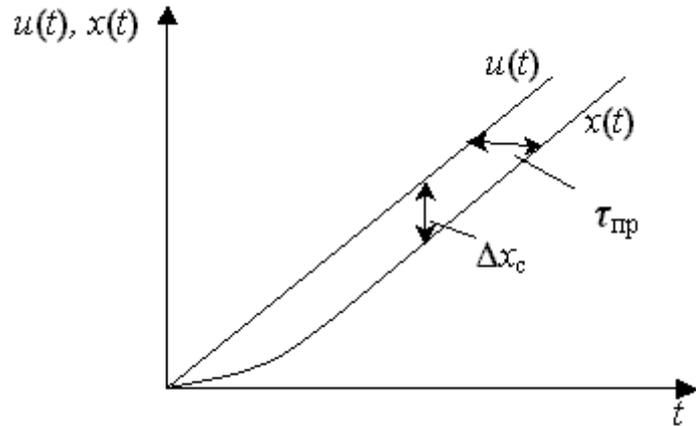


Рисунок 2.1 – Схема появления скоростной ошибки

2. Обрабатываемая поверхность находится под углом α к оси OX . И представлена на рис. 2.2, где l – длина поверхности.

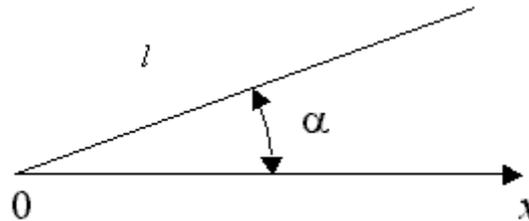


Рисунок 2.2. – Прямолинейная поверхность обработки под углом к оси OX

В этом случае на приводы по осям OX и OY вырабатываются управляющие воздействия вида

$$u_x(t) = vt \cos \alpha; \quad (2.7)$$

$$u_y(t) = vt \sin \alpha.$$

Выходные переменные приводов по осям OX и OY изменяются по выражениям, аналогичным (2.4), а скоростные ошибки по каждой координате аналогично выражению (2.6). Тогда в установившемся режиме движения действительная траектория определяется параметрическими уравнениями

$$x_y(t) = v \cos \alpha (t - T_{np} + T_{np} e^{-t/T_{np}}) \quad (2.8)$$

$$y_y(t) = v \sin \alpha (t - T_{np} + T_{np} e^{-t/T_{np}})$$

где T_{np_x} , T_{np_y} – постоянные времени приводов по осям OX и OY .

Контурная ошибка Δk определяется расстоянием между фактической и заданной траекториями, представляющими собой отрезки параллельных прямых в установившемся режиме. Тогда

$$\Delta k = \frac{v}{2} |T_{np_x} - T_{np_y}| \sin 2\alpha. \quad (2.9)$$

3. Обрабатываемая поверхность является окружностью.

При обработке окружности система программного управления вырабатывает управляющие воздействия вида:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= R \cos \omega t; \\ u_y(t) &= R \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где R – радиус обрабатываемой окружности; $\omega = v/R$ – угловая скорость движения рабочей точки.

Координаты на выходе привода описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= R \frac{\cos \omega t + \omega T_{np_x} \sin \omega t}{T_{np_x}^2 \omega^2 + 1} - \frac{R}{T_{np_x}^2 \omega^2 + 1} e^{-t/T_{np_x}}; \\ y(t) &= R \frac{\sin \omega t - \omega T_{np_y} \cos \omega t}{T_{np_y}^2 \omega^2 + 1} - \frac{R \omega T_{np_y}}{T_{np_y}^2 \omega^2 + 1} e^{-t/T_{np_y}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если $T_{np_x} \neq T_{np_y}$ – то обрабатываемая поверхность является эллипсом, а если $T_{np_x} = T_{np_y} = T_{np}$ – то окружностью.

В установившемся режиме полученная траектория описывается параметрическими уравнениями вида

$$x_y(t) = \frac{R}{\sqrt{T_{np}^2 \omega^2 + 1}} \cos(\omega t - \varphi); \quad (2.12)$$

$$y_y(t) = \frac{R}{\sqrt{T_{np}^2 \omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = \text{arctg } \omega T_{np}$.

Полученная траектория является окружностью радиуса

$$R' = \frac{R}{\sqrt{T_{np}^2 \omega^2 + 1}}. \quad (2.13.)$$

Тогда контурная ошибка

$$\Delta k = R - R' = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{T_{np}^2 \omega^2 + 1}} \right). \quad (2.14)$$

8.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с теорией возникновения скоростной и контурной ошибок при обработке приводами различных видов обрабатываемых поверхностей.

2. Построить кривые изменения управляющего воздействия $u_x(t)$ (2.3) и выходной координаты $x(t)$ (2.4) при обработке поверхности, параллельной оси OX , а также график изменения ошибки $\Delta x(t)$ по данным из табл. 3.1. в соответствии с заданным вариантом в одних осях координат.

Таблица 3.1

Исходные данные для пункта 2

Номер варианта	Добротность k_v , c^{-1}	Скорость v , мм/с	Длина l , мм
1	10	20	80
2	15	30	75
3	20	40	120
4	25	35	70
5	30	40	100
6	35	25	75
7	40	50	75
8	20	25	60
9	25	35	90
10	35	30	90
11	40	40	100
12	15	60	150
13	30	25	45
14	45	45	80
15	20	60	120
16	40	40	80
17	35	25	100
18	20	30	80
19	45	30	60
20	15	40	65
21	35	60	85
22	40	50	120
23	20	30	45
24	25	45	80
25	45	50	110
26	40	45	85
27	15	30	65
28	30	40	90
29	45	50	80
30	30	35	105

3. Определить значения скоростной ошибки теоретически по формуле (2.6) и графически по построенным кривым $u_x(t)$ и $x(t)$ и сравнить их между собой.

4. Определить теоретически и графически время запаздывания при обработке поверхности, параллельной оси OX , а полученные значения сравнить между собой.

5. Определить законы изменения управляющих воздействий $u_x(t)$, $u_y(t)$ при обработке поверхности под углом α к оси OX по выражениям (2.7) и выходных координат $x(t)$ и $y(t)$ по выражениям, аналогичным (2.4), по данным из табл. 3.2 в соответствии с заданным вариантом и построить кривые их изменения в одних осях координат.

Таблица 3.2

Исходные данные для пунктов 5 и 6

Номер варианта	Добротности		Скорость v мм/с	Длина l мм	Угол на- клона α град	$\Delta\alpha$	Δk_{vy}
	k_{vx}	k_{vy}					
1	10	10	30	80	12	–	0,2
2	15	16	25	60	10	3	–
3	20	20	45	115	8	–	0,25
4	25	27	35	105	20	2	–
5	30	30	35	120	10	–	0,2
6	35	36	25	75	5	3	–
7	40	42	40	105	15	3	–
8	45	46	25	100	14	2	–
9	50	49	30	95	22	–	0,15
10	10	12	20	80	10	3	–
11	15	15	40	85	12	–	0,25
12	20	21	50	110	16	2	–
13	25	25	20	65	18	–	0,3
14	30	28	40	75	20	1	–
15	35	34	45	120	5	4	–
16	40	41	35	80	11	–	0,1
17	45	43	25	100	17	2	–
18	50	50	20	65	30	–	0,5

19	10	11	25	75	25	1	–
20	15	15	40	85	17	–	0,3
21	20	20	50	95	26	–	0,2
22	25	25	35	95	21	–	0,4
23	30	31	30	80	28	1	–
24	35	35	50	105	30	–	0,2
25	40	39	20	60	15	3	–
26	45	43	30	70	10	3	–
27	50	47	40	100	8	3	–
28	10	10	25	120	15	–	0,5
29	15	15	35	90	25	–	0,4
30	20	20	45	105	10	–	0,5

6. Определить исходную контурную ошибку Δk_o по выражению (2.9) и провести исследование влияния на величину контурной ошибки угла наклона обрабатываемой поверхности в соответствии с шагом $\Delta\alpha$ или соотношения добротностей приводов за счет изменения добротности k_{vy} с Δk_{vy} по данным по табл. 3.2 в соответствии с заданным вариантом и построить график применения контурной ошибки при десяти итерациях.

7. Определить законы изменения управляющих воздействий $u_x(t)$, $u_y(t)$ при обработке окружности по выражениям (2.10) и выходных координат $x(t)$, $y(t)$ по выражениям (2.11) в соответствии с заданным вариантом по данным из табл. 3.3 и построить кривые их изменения в одних осях координат.

Таблица 3.3

Исходные данные для пунктов 7 и 8

Номера варианта	k_v с ⁻¹	l мм	v мм/с	R мм	ΔR мм	Δv мм/с
1	40	30	20	40	–	3
2	35	60	30	85	–	2
3	30	25	40	40	2	–
4	25	70	35	105	–	2
5	20	50	30	95	–	3
6	15	60	50	80	2	–
7	10	45	50	60	2	–

8	35	50	45	65	3	–
9	30	50	55	70	2	–
10	25	45	35	100	4	–
11	20	35	40	70	–	2
12	15	40	25	40	5	–
13	10	60	45	90	2	–
14	40	40	25	60	4	–
15	30	60	30	100	–	3
16	25	60	30	90	–	2
17	20	50	40	75	–	2
18	15	50	50	80	2	–
19	10	45	60	90	–	1
20	40	55	50	85	1	–
21	35	40	45	80	2	–
22	25	35	35	60	3	–
23	20	45	50	50	–	3
24	15	30	25	50	–	2
25	10	40	30	70	4	–
26	40	50	40	70	2	–
27	35	50	35	100	–	1
28	30	40	30	50	2	–
29	20	30	50	50	–	3
30	15	30	25	50	3	–

8. Определить исходную контурную ошибку Δk_o по выражению (2.14) и провести чередование влияния на величину контурной ошибки при изменении радиуса обрабатываемой окружности R с шагом ΔR или скорости с шагом Δv соответствии с заданным вариантом по данным из табл. 3.3.

9. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

Примечание: Расчет и построение кривых изменения управляющих воздействий и выходных координат, а также графиков изменения контурной ошибки осуществлять с использованием Microsoft Excel

8.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Основные достоинства апериодического характера изменения выходных координат приводов.
2. Недостатки апериодического характера изменения выходных координат приводов.
3. Каким параметром оценивается инерционность следящих приводов?
4. При каком угле наклона обрабатываемой поверхности возникает максимальная контурная ошибка?
5. Как влияет радиус обрабатываемой окружности на величину контурной ошибки?
6. Что влияет на величину запаздывания при обработке прямолинейных поверхностей?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9. КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РЕЗАНИЯ НА ФРЕЗЕРНОМ СТАНКЕ

9.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – приобретение студентами практических навыков при анализе и синтезе систем комбинированного управления процессом резания на фрезерном станке.

9.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основным рабочим процессом на фрезерном станке является **процесс резания**, заключающийся в удалении с поверхности заготовки слоя металла в виде стружки с целью получения детали заданных формы, размеров и шероховатости обрабатываемых поверхностей.

Для осуществления процесса резания необходимо иметь два движения: главное движение резания и движение подачи. **Главное движение** – прямолинейное поступательное или вращательное движение заготовки или режущего инструмента, происходящее с наибольшей скоростью в процессе резания. **При фрезеровании главным движением является вращательное движение фрезы.** Система управления приводом главного движения, в основном, представляет собой САР, обеспечивающая стабилизацию скорости вращения фрезы на требуемом уровне.

Движение подачи – прямолинейное поступательное или вращательное движение режущего инструмента или заготовки, скорость которого меньше скорости главного движения резания, предназначенное для того, чтобы распространить отделение слоя материала на всю поверхность.

Важнейшим показателем качества обработки на фрезерном станке является **точность**, т.е. степень соответствия геометрических параметров обработанной детали параметрам, заданным чертежом. На точность обработки при фрезеровании влияют различные факторы, основными из которых являются: погрешности, возникающие в результате упругих деформаций технологической системы под действием сил резания и в результате деформации заготовки и других элементов оснастки при креплении заготовки; погрешности, вызываемые размерным износом инструмента, температурными деформациями технологической системы; погрешности настройки станка; погрешности, вызываемые действием остаточного напряжения в материале заготовок и готовых изделий и многие другие.

Для обеспечения требуемого качества обработанной поверхности необходимо в управляющей программе предусмотреть компенсацию "вредных" воздействий на процесс резания. Однако учесть все факторы при составлении управляющей программы достаточно сложно. Составление управляющей программы для фрезерного станка при решении технологической задачи ЧПУ упрощается при использовании систем адаптивного управления процессом резания.

В лабораторной работе моделируется система комбинированного управления процессом управления на фрезерном станке, позволяющая компенсировать отклонения глубины резания от номинального значения на качество обработки.

Функциональная схема системы комбинированного управления процессом резания на фрезерном станке приведена на рис. 2.1.

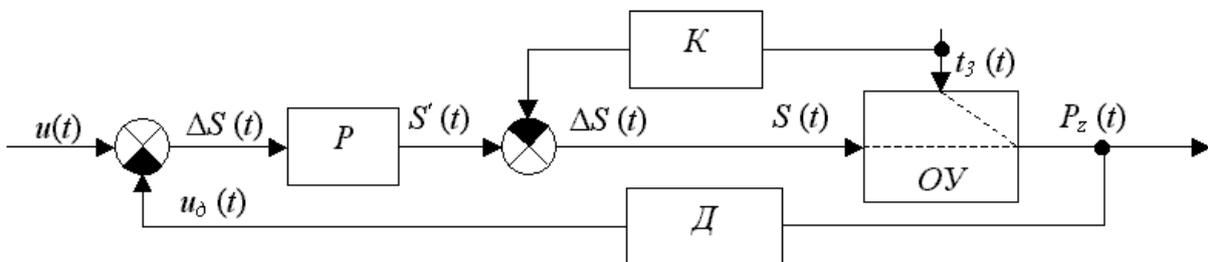


Рис. 2.1. Функциональная схема системы комбинированного управления процессом резания

где P – регулятор; K – компенсатор; OY – объект управления (процесс резания); D – датчик обратной связи; $P_z(t)$ – сила резания; $t_3(t)$ – глубина резания; $S(t)$ – подача; $u(t)$ – задающее воздействие, характеризующее требуемое (номинальное) значение силы резания; $u_d(t)$ – сигнал обратной связи.

Математические модели процесса резания аппроксимированы апериодическими звеньями первого порядка:

– по каналу управления "подача – сила резания"

$$W_y(p) = \frac{k_s}{T_o p + 1}; \quad (2.1)$$

– по каналу возмущения "глубина резания – сила резания"

$$W_t(p) = \frac{k_t}{T_t p + 1}, \quad (2.2)$$

где T_o , T_t – постоянные времени; k_s , k_t – коэффициенты передачи, определяемые по выражениям

$$k_s = \frac{c_p B S_o}{D}; \quad k_t = \frac{c_p B t_{30}}{D}, \quad (2.3)$$

где c_p – константа, зависящая от материала; B – ширина фрезерования; D – диаметр фрезы; S_o – номинальное значение подачи; t_{30} – номинальное значение глубины резания.

Номинальный режим процесса резания на фрезерном станке описывают выражением

$$P_{z,ном} = k_s S_o + k_t t_{30}. \quad (2.4)$$

Датчик обратной связи описывают передаточной функцией

$$W_d(p) = k_d \quad (2.5)$$

где k_d – коэффициент передачи датчика.

Компенсатор предназначен для компенсации отрицательно-го влияния на качество работы САР отклонения глубины резания от номинальной величины t_{30} . Передаточная функция компенсатора разработана на основе теории модельной компенсации инерционности, которая определяется соотношением

$$W_k(p) = W_t(p) W_s^{-1}(p), \quad (2.6)$$

где $W_s^{-1}(p)$ – обратная передаточная функция по каналу управления, т.е.

$$W_s^{-1}(p) = \frac{T_o p + 1}{k_s}. \quad (2.7)$$

Алгоритм моделирования компенсатора, полученный по разностной схеме, описывается следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_3(i) &= t_3(i) - t_{30}; \\ \Delta P'_z(i) &= \alpha_{11} \Delta P'_z(i-1) + \beta_{10} \Delta t_3(i); \\ \Delta S_k(i) &= \beta_{20} \Delta P'_z(i) + \beta_{21} \Delta P'_z(i-1), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где $\Delta t_3(i)$ – величина текущего отклонения глубины резания от номинального значения; $\Delta P'_z(i)$ – текущее значение отклонения силы резания, обусловленное отклонением глубины резания $\Delta t_3(i)$; α_{11} , β_{10} , β_{20} , β_{21} – коэффициенты уравнений, определяемые по формулам:

$$\alpha_{11} = \frac{T_t}{T_t + \Delta t}; \quad \beta_{10} = \frac{K_t \Delta t}{T_t + \Delta t}; \quad \beta_{20} = \frac{T_o + \Delta t}{\Delta t k_s}; \quad \beta_{21} = -\frac{T_o}{\Delta t k_s};$$

Δt – шаг электретилизации; $\Delta S_k(i)$ – эквивалентная величина подачи, соответствующая отклонению глубины резания от номинального значения.

В лабораторной работе в качестве регулятора привода подачи используются типовые регуляторы:

- *П* – регулятор с передаточной функцией

$$W_{II}(p) = k_p; \quad (2.9)$$

где k_p – коэффициент передачи регулятора, настроечное значение которого определяется по формуле:

$$k_p = \frac{1}{2,2 k_s T_o}; \quad (2.10)$$

- *ПИ* – регулятор с передаточной функцией

$$W_{III}(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_3 p}\right), \quad (2.11)$$

где коэффициент передачи k_p и постоянная времени изодрома T_3 определяются по формулам:

$$k_p = \frac{1}{1,8 k_s T_o}; \quad T_3 = 4T_o. \quad (2.12)$$

9.3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с теорией комбинированного управления процессом резания на фрезерном станке, в качестве которого выбран фрезерный станок с ЧПУ 654Ф3, характеристики которого приведены в табл. 3.1.

2. Разработать алгоритм моделирования системы комбинированного управления, приняв шаг электретизации $\Delta t = (0,1 - 0,5)T_{umt}$. В качестве обрабатываемого материала рассматривать сталь 45, которой соответствует коэффициент $c_p = 825$, используемый при расчете коэффициентов передачи k_s и k_t . За номинальные значения во всех вариантах приняты: глубины резания $t_{30} = 0,2$ мм; подачи $S_o = 0,5$ мм/об. В качестве датчика обратной связи используется датчик У1, имеющий коэффициент передачи $k_d = 0,125$ в/Н.

Таблица 3.1

Характеристики станка 654Ф3

Характеристики	Значения
Размеры рабочей поверхности стола (мм × мм)	630 × 1600
Наибольшее перемещение (мм):	
- стола:	
- продольное	1250
- поперечное	630
- шпиндельной бабки	625
Расстояние от торца шпинделя до поверхности стола (мм)	100–530
Число скоростей шпинделя	18
Частота вращения шпинделя (об/мин)	25–1250
Подача (мм/мин)	
- стола	0,1–4800
- шпиндельной бабки	0,1–4800
Скорость быстрого перемещения (мм/мин)	
- стола	4800
- шпиндельной бабки	4800
Мощность электродвигателя привода главного движения (кВт)	15

Таким образом, исходными данными для моделирования системы комбинированного управления на фрезерном станке при-

няты: $c_p = 825$; $t_{30} = 0,2$ мм; $S_o = 0,5$ мм/об; $k_d = 0,125$ в/Н, а также данные, зависящие от номера варианта и приведенные в табл. 3.2. где $P_{z\text{ном}}$ – номинальное (требуемое) значение силы резания; $u_{до}$ – сигнал с датчика обратной связи в нулевой момент времени.

3. Выбрать типовой регулятор (2.9) или (2.11) в соответствии с заданным вариантом по данным из табл. 3.2 с учетом формул расчета построенных параметров регуляторов (2.10) и (2.12). Качество регулирования необходимо оценивать по прямым оценкам качества регулирования: статистической ошибке Δ_{cm} ; времени регулирования t_p ; перерегулированию σ . Кривые переходного процесса необходимо построить с использованием алгоритма, полученного на основе разностных уравнений.

Таблица 3.2

Исходные данные

№ вар.	$P_{z\text{ном}}$, Н	T_o , с	T_t , с	D , мм	B , мм	$u_{до}$, в	t_{mp}
1.	1000	1,1	1,2	60	50	97,25	0,01
2.	800	1,0	1,1	50	60	76,00	0,05
3.	825	1,1	1,0	65	40	80,40	0,025
4.	850	1,15	1,15	80	45	83,14	0,015
5.	875	1,0	1,2	50	36	85,13	0,03
6.	900	1,2	1,0	40	32	87,36	0,04
7.	950	1,15	1,2	100	50	99,18	0,005
8.	1000	1,2	1,15	125	55	104,7	0,035
9.	1050	1,25	1,0	60	60	108,6	0,045
10.	1100	1,0	1,25	50	50	112,67	0,01
11.	925	1,3	1,3	50	50	88,2	0,005
12.	975	1,2	1,4	60	50	100,0	0,004
13.	1025	1,0	1,2	70	65	99,2	0,012
14.	1075	1,4	1,1	80	70	101,3	0,015
15.	1020	1,2	1,3	60	60	98,9	0,011
16.	910	1,1	1,2	60	55	87,6	0,008

4. Промоделировать алгоритм комбинированного управления по данным табл. 3.2 в соответствии с заданным вариантом при 20 итерациях с учетом работы компенсатора и без него. В ка-

честве регулятора использовать выбранный выше типовой регулятор. Эффективность функционирования системы произвести:

- по средне-модульной ошибке

$$\Delta u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta u(i)|, \quad (3.1)$$

где $\Delta u(i) = u(i) - u_0(i-1)$; $n = 20$

- по среднеквадратичной ошибке

$$\sigma_{cm} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta u^2(i)}; \quad (3.2)$$

- по максимально возможной ошибке

$$\Delta u_{\max} = \max \{|\Delta u(1)|, \dots, |\Delta u(n)|\}, \quad (3.3)$$

При учете работы компенсатора предполагается, что глубина резания изменяется по линейному закону, таким образом, имеется линейный тренд вида:

$$t_3(i) = t_{30} + i\Delta t k_{mp}, \quad (3.4)$$

где k_{mp} – коэффициент линейности изменения глубины резания.

При моделировании системы комбинированного управления с компенсатором рассматриваются два случая: глубина резания изменяется по линейному закону (3.4); глубина резания не только изменяется по линейному закону, но и подвержена действию случайных помех, т. е.

$$\tilde{t}_3(i) = t_3(i) + \eta(i), \quad (3.5)$$

где $\eta(i)$ – случайная ошибка, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием.

Результаты моделирования представить в виде трех кривых изменения величины $P_z(i)$ с оценкой эффективности работы системы по оценкам (3.1) ÷ (3.3).

5. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

9.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие факторы влияют на точность обработки на фрезерном станке?

2. Достоинства и недостатки системы комбинированного управления процессом резания.

3. На основе какого подхода получена передаточная функция компенсатора?
4. От чего зависит точность работы компенсатора?
5. Чем обусловлен закон изменения силы резания?
6. Какими динамическими звеньями описываются каналы управления и возмущения процесса резания?
7. Что характеризует номинальный режим процесса резания?
8. Какие параметры влияют на коэффициенты передачи в моделях процесса резания?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10. РАСЧЕТ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ ЧПУ

10.1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – приобретение студентами практических навыков расчета позиционных систем ЧПУ при проектировании систем управления на основе метода логарифмических частотных характеристик.

10.2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Позиционными системами числового программного управления (ЧПУ) называются системы, задачами которых являются либо установочные перемещения рабочего органа, либо перемещения при обработке, по одной из координат. Данные системы ЧПУ используются, например, при растачивании или при сверлении отверстий в деталях, при фрезеровании отдельных поверхностей или участков, ограниченных прямыми, параллельными осями координат.

Функциональная схема позиционных систем ЧПУ (ПС ЧПУ) приведена на рис. 2.1, где П – блок задания управляющей программы; ЭУ – электронный усилитель; КУ – корректирующее устройство; Д – датчик обратной связи; СПИД – система «станок – приспособление – инструмент – деталь».

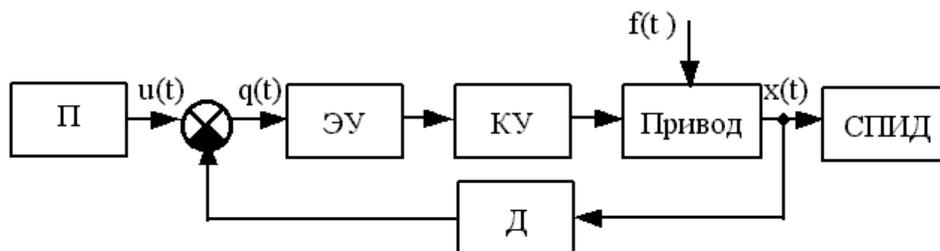


Рис. 2.1. Функциональная схема ПС ЧПУ

В общем случае передаточная функция разомкнутой системы ЧПУ

$$W_p(p) = \frac{k \cdot \prod_{j=1}^n (\tau_j p + 1) \prod_{j=1}^m (\tau_j^2 p^2 + 2\zeta_j \tau_j p + 1)}{p \cdot \prod_{i=1}^r (T_i p + 1) \prod_{i=1}^l (T_i^2 p^2 + 2\zeta_i \tau_i p + 1)} \quad (2.1)$$

где k – коэффициент передачи системы; ζ_j и ζ_i – коэффициент демпфирования; τ_j – постоянные времени дифференцирующих звеньев; T_i – постоянная времени привода и интегрирующих звеньев.

Особенность расчета ПС ЧПУ, приведенной на рис. 1 состоит в том, что сложно учесть влияние на качество обработки всех координат, каждая из которых вносит свою долю искажений контура искажаемой детали.

2.1. Методика расчета ПС ЧПУ

Расчет ПС ЧПУ заключается в выборе параметров КУ, обеспечивающих требуемые характеристики системы управления. Расчет ПС ЧПУ осуществляется в следующей последовательности:

1. Выбор структуры ПС ЧПУ и типа привода подачи.
2. Расчет требуемого значения коэффициента передачи разомкнутой части системы исходя из условия точности позиционирования:

$$k \leq \frac{\Delta Z k_2 + T_1 / \theta}{\delta_{\Pi} + \delta_H \delta_3 - \Delta x / i}, \quad (2.2)$$

где ΔZ – величина параметрического возмущения;

k_2 – коэффициент передачи элемента системы на вход которого действует величина ΔZ ;

T_1 – сила трения без смазки;

θ – коэффициент нагрузки;

δ_{Π} – погрешность позиционирования;

δ_n – измерительная погрешность датчика обратной связи;
 δ_3 – погрешность задания программы;
 Δx – величина зазора в кинематической передаче;
 i – передаточное отношение.

3. Выбор частоты среза ω_c из условия заданного быстродействия по следующим формулам:

$$t_{\max} = \pi/\omega_c; \quad (2.3)$$

$$t_n = \frac{2,6}{(1 + \sigma/100)\omega_c}; \quad (2.4)$$

$$\frac{(1 + 2\mu)}{\omega_c} = t_p = \frac{48(\sigma/100 - 0,05)}{\omega_c} \quad (2.5)$$

где σ – величина перерегулирования; μ – число колебаний за время регулирования t_p ; t_{\max} – время достижения первого максимума; t_n – время нарастания. Если $\sigma \leq 12\%$, то $t_p = t_{\max}$.

4. Выбор запасов устойчивости по амплитуде ΔL и по фазе $\Delta\varphi$ исходя из величины перерегулирования σ . Изменение величины перерегулирования в диапазоне (20...55)% приблизительно соответствует запасам устойчивости по амплитуде и фазе в интервале:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= (61...25)\text{град} \\ \Delta L &= (23...8)\text{деб} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

5. Построение желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) по значениям K , ω_c и ΔL (методика построения желаемой ЛАЧХ приведена в учебниках [3, 4]).

6. Определение по ЛАЧХ передаточной функции $W_p(p)$ разомкнутой системы ЧПУ.

7. Вычисление запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ по значениям параметров передаточной функции $W_p(p)$ (2.1) по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^n \operatorname{arctg}(\tau_j \omega_c) + \sum_{j=1}^m \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_j \tau_j \omega_c}{1 - \zeta_j^2 \omega_c^2} - \sum_{i=1}^r \operatorname{arctg}(T_i \omega_c) - \sum_{i=1}^l \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_i T_i \omega_c}{1 - \zeta_i^2 \omega_c^2}. \quad (2.7)$$

Если $\Delta\varphi$ получается меньше допустимой величины, необходимо изменить параметры ЛАЧХ.

8. Проектирование привода подачи.

9. Выбор КУ и расчет его параметров. В рассматриваемой методике расчета ПС ЧПУ используется последовательное включение КУ. Характеристики КУ определяются на основе ЛАЧХ по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} L_K(\omega) &= L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{р}}(\omega) \\ \varphi_K(\omega) &= \varphi_{\text{ж}}(\omega) - \varphi_{\text{р}}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где $L_K(\omega)$, $L_{\text{ж}}(\omega)$, $L_{\text{р}}(\omega)$ – соответственно ЛАЧХ скорректированной и исходной ПС ЧПУ и последовательного КУ; $\varphi_K(\omega)$, $\varphi_{\text{ж}}(\omega)$, $\varphi_{\text{р}}(\omega)$ – соответственно ЛФЧХ скорректированной и исходной ПС ЧПУ и КУ. По характеристикам (2.8) в соответствии с таблицей в приложении выбирается конкретное КУ.

10. Выбор типа устройства задания управляющей программы и типа датчика обратной связи.

10.3 ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ ЧПУ

В качестве примера рассмотрим расчет ПС ЧПУ, передаточная функция разомкнутой части которой имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (3.1)$$

где $k = 140$; $T_1 = 0,1$; $T_2 = 0,02$.

1. Построение ЛАЧХ и ЛФЧХ исходной системы ЧПУ.

Заменив p на $j\omega$ имеем, что

$$W_p(p) = \frac{k}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} \quad (3.2)$$

Отсюда

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}.$$

где $20 \lg k = 20 \lg 140 = 42,9$ дБ.

Сопрягающие частоты определяются следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10; \quad \lg \omega_1 = 1;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,02} = 50; \quad \lg \omega_2 = 1,699.$$

ЛАЧХ исходной ПС ЧПУ приведена на рис. 3.1,а.

Определим выражение для расчета значений ЛФЧХ, выделив для этого мнимую и вещественную части $W_p(j\omega)$.

$$\begin{aligned} W_p(j\omega) &= \frac{k}{-T_1 T_2 \omega + j(T_1 + T_2)\omega + 1} = \frac{140}{(1 - 0,002\omega^2) + j0,12\omega} \times \\ &\times \frac{(1 - 0,002\omega^2) - j0,12\omega}{(1 - 0,002\omega^2) - j0,12\omega} = \frac{140(1 - 0,002\omega^2) - j140 \times 0,12\omega}{(1 - 0,002\omega^2)^2 + (0,12\omega)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{0,12\omega}{1 - 0,002\omega^2}. \quad (3.3)$$

Результаты расчета ЛФЧХ исходной ПС ЧПУ приведены в таблице 3.1, а ее график на рис. 3.1,б.

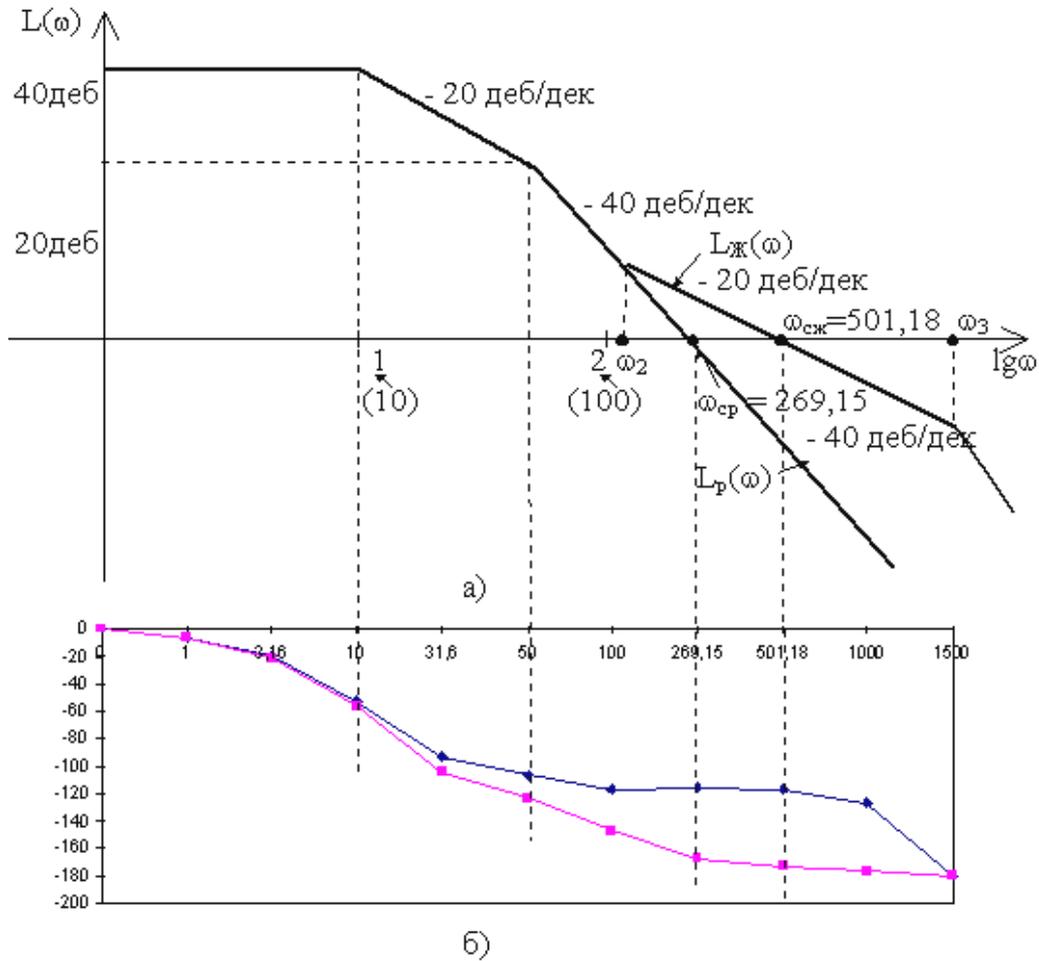


Рис. 3.1. ЛАЧХ и ЛФЧХ исходной и скорректированной ПС ЧПУ

Таблица 3.1

Значения ЛФЧХ $\varphi_p(\omega)$

ω	0	1	3,16	10	31,6	50	100	269,15	1000
$\varphi_p(\omega)$	-0	-6,85	-21,15	-56,31	-104,73	-123,69	-147,72	-167,35	-176,56

2. Определение запаса устойчивости по фазе.

Запас устойчивости по фазе исходной ПС ЧПУ определяем графически по графику $\varphi_p(\omega)$. Из графика видно, что недостаточно для качественной и устойчивой работы ПС ЧПУ, так как $\Delta\varphi_p(\omega) < 30^\circ$.

$$\Delta\varphi_p(\omega) = 12,65^\circ,$$

3. Построение ЛАЧХ скорректированной ПС ЧПУ.

Для повышения качества работы и устойчивости ПС ЧПУ включим в систему последовательное КУ (см. рис. 2.1). Для построения желаемой ЛАЧХ (то есть ЛАЧХ скорректированной ПС ЧПУ) необходимо определить частоту среза $\omega_{сж}$. Определим время регулирования t_p для исходной ПС ЧПУ при условии, что $\sigma = 20\%$, а $\mu = 0$. Отсюда имеем, что

$$\frac{3,14}{269,15} \leq t_p \leq \frac{48\left(\frac{20}{100} - 0,05\right)}{269,15}.$$

В итоге имеем, что t_p исходной системы находится в интервале $(0,012...0,027)$ с.

В скорректированной ПС ЧПУ требуется увеличить быстродействие в 2 раза, а перерегулирование σ уменьшить на один процент, то есть

$$t_{p\text{доп}} \leq 0,135 \text{ с};$$

$$\sigma_{\text{доп}} \leq 19\%.$$

Определим частоту среза ω_c , обеспечивающую данные условия, а именно:

$$\frac{3,14}{\omega_c} \leq t_p \leq \frac{48\left(\frac{19}{100} - 0,05\right)}{\omega_c}.$$

Примем $t_{pж} = 0,0134$ секунд. Тогда

$$\omega_{сж} = \frac{48 \times 0,14}{0,0134} \approx 501,18 \text{ с}^{-1}.$$

Определим сопрягающие частоты ω_2 и ω_3 . Частота ω_2 определяется точкой пересечения желаемой ЛАЧХ на средних частотах, проведенной под наклоном -20 дБ/дек через $\omega_{сж} = 501,18 \text{ с}^{-1}$ и исходной ЛАЧХ. Из графика получаем, что

$$\omega_2 = 142,86 \text{ с}^{-1}.$$

Значение ω_3 приближенно выбирается из условия, что $\omega_3 = (2...4)\omega_c$, то есть в нашем случае

$$\omega_3 = (1002,36 \div 2004,72) \text{ с}^{-1}.$$

Примем $\omega_3 = 1666,67 \text{ с}^{-1}$. Тогда

$$\lg \omega_3 = 3,301.$$

В дальнейшем ω_3 может быть скорректирована, если не будет обеспечен требуемый запас устойчивости системы по амплитуде. ЛАЧХ скорректированной ПС ЧПУ приведена на рис. 3.1, а.

4. Определение ЛАЧХ КУ.

ЛАЧХ КУ определяется по выражению

$$L_K(\omega) = L_{\text{Ж}}(\omega) - L_P(\omega).$$

Для рассматриваемого КУ ЛАЧХ приведена на рис. 3.2.

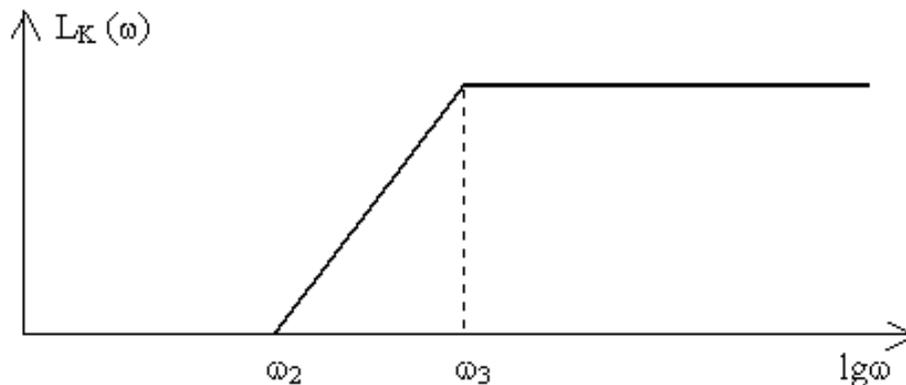


Рисунок 3.2 – ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства

5. Выбор КУ.

По таблице из приложения выбираем КУ с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{k_2(T_3p+1)}{T_4p+1}, \quad (3.4)$$

где

$$T_3 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{142,86} = 0,007 \text{ сек.},$$

$$T_4 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{1666,67} = 0,0006 \text{ сек.}$$

Так как на низких частотах $20 \lg k_2 = 0$, то $k_2 = 1$.

Передаточная функция скорректированной разомкнутой ПС ЧПУ в итоге имеет вид

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{k(T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_4p+1)}. \quad (3.5)$$

или после подстановки численных значений имеем

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{140(0,007p+1)}{(0,1p+1)(0,2p+1)(0,0006p+1)}.$$

6. Построение ЛФЧХ скорректированной ПС ЧПУ и определение запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi_p(\omega)$.

ЛФЧХ скорректированной ПС ЧПУ определяется также, как и для исходной. В итоге ЛФЧХ определяется выражением

$$\varphi_{\text{ж}}(\omega) = \arctg \frac{-(15,9\omega + 0,0018\omega^3)}{140 - 0,172\omega^2 - 0,0000012\omega^4}.$$

Результаты расчета скорректированной ПС ЧПУ приведены в табл. 3.2, а ее график на рис. 3.1, б.

Таблица 3.2

Значения ЛФЧХ $\varphi_{ж}(\omega)$

ω	0	1	3,16	10	31,6	50	100	269,15	501,18	1000
$\varphi_{ж}(\omega)$	0	-6,5	-20	-52,63	-93,4	-106,3	-116,63	115,3	116,85	127,02

В этом случае имеем, что запас устойчивости по фазе для скорректированной ПС ЧПУ

$$\Delta\varphi_{ж}(\omega) = -180^\circ - (-116,85^\circ) = 63,15^\circ.$$

Так $\Delta\varphi_{ж}(\omega) = 63,15^\circ > 40^\circ$, то требуемое условие по устойчивости выполняется.

10.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методикой расчета позиционных систем ЧПУ и выбора последовательного корректирующего устройства.

2. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ исходной ПС ЧПУ в соответствии с заданным вариантом с учетом передаточных функций разомкнутой ПС ЧПУ, приведенной в табл. 4.1 и значений их коэффициентов, приведенных в табл. 4.2. Определить запасы устойчивости по фазе и амплитуде исходной ПС ЧПУ.

Таблица 4.1

Передаточные функции разомкнутой ПС ЧПУ

Номер передаточной функции	Передаточные функции
I	$W_p(p) = \frac{k}{p(T_1p+1)}$
II	$W_p(p) = \frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$
III	$W_p(p) = \frac{k}{T_1^2p^2 + 2\zeta T_1p + 1}$
IV	$W_p(p) = \frac{k}{p(T_1p+1)(T_2^2p^2 + 2\zeta T_2p + 1)}$

Таблица 4.2

Таблица значений коэффициентов передаточных функций

Номер варианта	Номер $W_p(p)$	k	T_1	T_2	ζ
1	I	110	0,06	–	–
2	II	150	0,15	0,02	–
3	III	150	0,04	–	0,6
4	IV	190	0,06	0,04	0,6
5	I	200	0,02	–	–
6	II	150	0,07	0,005	–
7	III	210	0,3	–	0,8
8	IV	230	0,1	0,05	0,8
9	I	160	0,03	–	–
10	II	180	0,05	0,004	–
11	III	200	0,2	–	0,5
12	IV	210	0,08	0,04	0,6
13	I	220	0,1	–	–
14	II	190	0,09	0,02	–
15	III	170	0,05	–	0,7

Таблица 4.3

Требования к расчету скорректированной ПС ЧПУ

Номер варианта	Уменьшить перерегулирование на	Увеличить быстродействие в
1	1 %	2 раза
2	3 %	1,6 раза
3	5 %	1,5 раза
4	7 %	1,8 раза
5	2 %	1,8 раза
6	2 %	1,7 раза
7	10 %	1,9 раза
8	4 %	1,6 раза
9	1,5 %	1,6 раза
10	4 %	1,9 раза
11	10 %	2 раза
12	6 %	1,8 раза
13	2 %	1,7 раза
14	4 %	2,1 раза
15	8 %	1,9 раза

3. Определить время регулирования t_p и перерегулирование исходной ПС ЧПУ по переходной характеристике.

4. Построить ЛАЧХ скорректированной ПС ЧПУ в соответствии с заданным вариантом с учетом требований, приведенных в таблице 4.3.

5. Выбрать КУ и определить его параметры.

6. Построить ЛФЧХ скорректированной ПС ЧПУ. Определить запасы устойчивости по фазе и амплитуде скорректированной системы.

7. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

10.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назначение позиционных систем ЧПУ.

2. Из каких элементов состоит ПС ЧПУ?

3. С учетом каких требований выбирается коэффициент передачи разомкнутой части ПС ЧПУ?

4. Методика определения логарифмических частотных характеристик корректирующего устройства.

5. Чем определяется низкочастотная часть желаемой ЛАЧХ ПС ЧПУ?

6. Что влияет на выбор частоты среза?

7. Как определяются сопрягающие частоты ω_2 и ω_3 ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №11. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

11.1 Цель работы

Цель работы – изучение математических моделей цифровых систем управления (ЦСУ) и приобретение практических навыков в получении дискретных математических моделей в форме дискретных передаточных функций и разностных уравнений.

11.2 Основные теоретические положения

В работе рассматриваются способы построения дискретных математических моделей для элементов системы и для ЦСУ в целом на основе известных непрерывных математических моделей систем автоматического управления (САУ).

В качестве дискретных моделей рассматриваются разностные уравнения во временной области и дискретные передаточные функции в частотной области. Непрерывными математическими моделями являются во временной области дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, а в частотной области – непрерывные передаточные функции.

Линейные разностные уравнения n -го порядка задаются соотношением

$$\begin{aligned} y(i) + a_1 y(i-1) + a_2 y(i-2) + \dots + a_n y(i-n) = \\ = b_0 v(i) + b_1 v(i-1) + b_2 v(i-2) + \dots + b_m v(i-m) \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – коэффициенты разностного уравнения;

$y(i), v(i)$ – соответственно значения выходной и входной переменных в текущий момент времени $t_i = i\Delta t$;

Δt – шаг дискретизации;

i – дискретный аналог текущего момента времени, являющийся безразмерной величиной, характеризующий номер текущего отсчета;

$y(i-1), \dots, y(i-n)$ – значения выходной переменной в предыдущие моменты времени t_{i-1}, \dots, t_{i-n} ;

$v(i-1), \dots, v(i-m)$ – значения входной переменной в предыдущие моменты времени t_{i-1}, \dots, t_{i-m} .

Разностные уравнения обладают важным преимуществом перед дифференциальными уравнениями, так как разрешенные относительно $y(i\Delta t)$ они уже в самой записи (2.2) содержат алгоритм решения, легко реализуемый на ЭВМ, так как представляют собой рекуррентную формулу расчета текущего значения выходной переменной $y(i)$.

$$y(i) = -a_1 y(i-1) - a_2 y(i-2) - \dots - a_n y(i-n) + b_0 v(i) + b_1 v(i-1) + b_2 v(i-2) + \dots + b_m v(i-m), \quad (2)$$

Дискретные передаточные функции получаются на основе Z-преобразования, которое в дискретном случае играет такую же роль, что и преобразование Лапласа в непрерывном случае. Z-преобразование тесно связано с дискретным преобразованием Лапласа. Эта связь определяется соотношением:

$$X^*(p) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i\Delta t) e^{-pi\Delta t}, \quad (3)$$

где $x^*(t)$ – дискретная последовательность (решетчатая функция), задаваемая соотношением

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i\Delta t) \delta(t - i\Delta t), \quad (4)$$

где $\delta(t - i\Delta t)$ – смещенные дельта-функции, существующие только в моменты времени $t_i = i\Delta t$ и равные нулю при всех других значениях t .

Пример дискретной последовательности $x^*(t) = \{x(i\Delta t)\}$ приведен на рисунке 1.

Недостатком дискретного преобразования Лапласа является наличие в выражении (3) трансцендентного сомножителя $e^{-pi\Delta t}$, из-за которого преобразование $X^*(p)$ и дискретные передаточные функции становятся иррациональными функциями аргумента p , что создает трудности при их использовании.

С целью получения дискретной передаточной функции в дробно-рациональной форме, свойственной непрерывным системам вводят замену

$$z = e^{p \Delta t}. \quad (5)$$

Тогда имеем, что

$$X^*(z) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i \Delta t) z^{-i}. \quad (6)$$

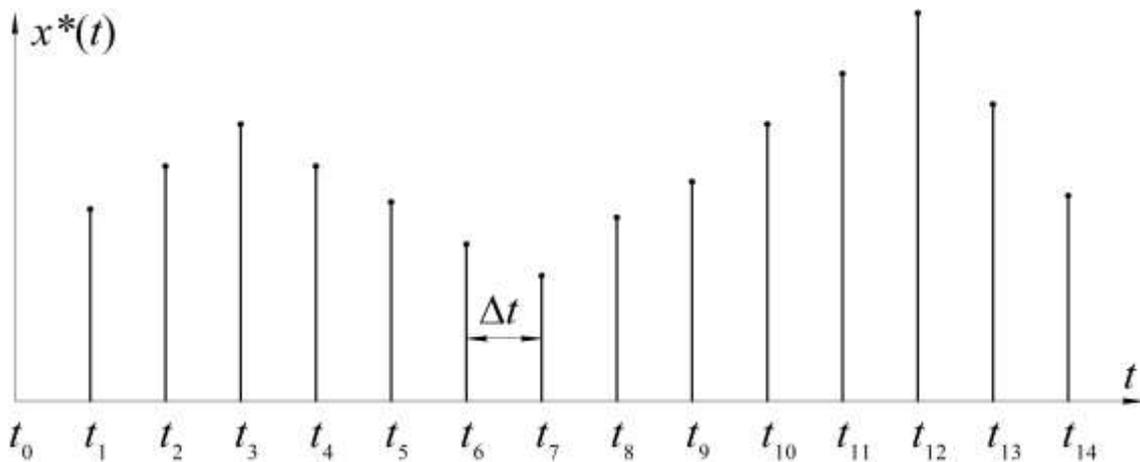


Рисунок 1 – Дискретная последовательность

Выражение (6) называется Z-преобразованием дискретной последовательности $X^*(t)$.

Главное достоинство и удобство Z-преобразования состоит в том, что сама запись Z-преобразования (6) дает простой способ выполнения прямого и обратного Z-преобразований:

1. Для нахождения Z-преобразования известной временной функции $x(t)$ необходимо ее каждое дискретное значение $x(i \Delta t)$ умножить на $(z - i)$, а затем свернуть получившийся ряд.

2. Для нахождения временной функции $x(t)$ по известному Z-изображению $X(z)$, необходимо $X(z)$ представить в виде степенного ряда по убывающей степени $(z - i)$, получающиеся при этом числовые коэффициенты являются дискретными значениями $x(i \Delta t)$ функции $x(t)$. В соответствии с данными правилами составлена таблица, содержащая наиболее часто употребляемые временные функции, их изображения по Лапласу и Z-изображения

выходной последовательности к Z -изображению входной последовательности при нулевых начальных условиях, то есть

$$W(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} y(i\Delta t) z^{-i}}{\sum_{i=0}^{+\infty} v(i\Delta t) z^{-i}}. \quad (7)$$

Если известно аналитическое выражение весовой функции, то

$$W(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} w(i\Delta t) z^{-i}. \quad (8)$$

Дискретная передаточная функция в дробно-рациональной форме имеет вид:

$$W(z) = \frac{b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-1-n} + \dots + b_m z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (9)$$

где $z - 1$ – есть временная задержка на один шаг дискретизации.

11.2.1 Получение дискретных передаточных функций

Дискретные передаточные функции получают как на основе непрерывных передаточных функций, так и на основе разностных уравнений. Наибольший интерес представляет первый случай, который символически записывается так:

$$W(z) = Z\{W(p)\}. \quad (10)$$

При получении $W(z)$ на основе $W(p)$ наибольшее распространение получили два метода:

- табличный метод;
- метод подстановки.

При табличном методе исходными данными для получения $W(z)$ являются либо непрерывные передаточные функции $W(p)$, либо весовые функции $\omega(t)$. Далее по таблице, приведенной в приложении А, определяется дискретная передаточная функция

$W(z)$. Единственная проблема, которая здесь имеет место, состоит в том, что в таблице приведены Z -изображения только для передаточных функций невысокого порядка. Если $W(p)$ является передаточной функцией высокого порядка, то ее необходимо предварительно разложить в сумму дробно-рациональных членов, каждый из которых представлен в таблице А.1. Подробно методы разложения рассмотрены в [5].

При методе подстановок осуществляется приближенный переход от $W(p)$ к $W(z)$. В настоящее время известны два вида подстановок:

– общая подстановка, полученная при выполнении операций численного интегрирования по методу прямоугольников

$$p = \frac{1}{\Delta t} \frac{z-1}{z} = \frac{1-z^{-1}}{\Delta t}; \quad (11)$$

– подстановка Тастина, полученная Тастиным при выполнении операций численного интегрирования по методу трапеций

$$p = \frac{2}{\Delta t} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (12)$$

При получении дискретной передаточной функции $W(z)$ на основе разностных уравнений исходными являются уравнения вида (1), которые записываются в операторной форме, то есть в виде

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + \dots + a_n Y(z) z^{-n} = \\ = b_0 V(z) + b_1 V(z) z^{-1} + b_2 V(z) z^{-2} + \dots + b_m V(z) z^{-m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вынесем за скобки $Y(z)$ и $V(z)$:

$$\begin{aligned} Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) = \\ = V(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}). \end{aligned} \quad (14)$$

Откуда имеем, что

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (15)$$

11.2.2 Получение разностных уравнений.

В работе разностные уравнения получаются на основе:

- дифференциальных уравнений;
- интегро-дифференциальных уравнений;
- дискретных передаточных функций.

В качестве исходных рассматриваются дифференциальные уравнения вида:

$$\begin{aligned} T_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + T_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \\ = k \left[\tau_m \frac{d^m v(t)}{dt^m} + \tau_{m-1} \frac{d^{m-1} v(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \tau_1 \frac{dv(t)}{dt} + v(t) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где k – коэффициент передачи;

$T_1, \dots, T_n, \tau_1, \dots, \tau_m$ – постоянные времени.

Для получения разностных уравнений в выражении (16) дифференциалы заменяются приближенно левыми разностями:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y(i)}{\Delta t} = \frac{y(i) - y(i-1)}{\Delta t}, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &\approx \frac{\Delta^2 y(i)}{\Delta t^2} = \frac{\Delta y(i) - \Delta y(i-1)}{\Delta t^2} = \frac{y(i) - 2y(i-1) + y(i-2)}{\Delta t^2}, \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta y(i), \Delta^2 y(i)$ – разности первого и второго порядков.

После замены дифференциалов разностями приводятся подобные члены, в результате чего получается итоговое разностное уравнение. При получении разностных уравнений на основе дифференциальных порядок разностного уравнения всегда совпадает с порядком дифференциального уравнения.

При получении разностного уравнения для интегродифференциального уравнения необходимо учитывать особенность получения разностного уравнения для операции интегрирования, то есть для интеграла вида:

$$y(t) = k \int_0^t v(t) dt. \quad (18)$$

При численном интегрировании по методу прямоугольников интеграл (18) заменяется суммой

$$y(i) = k \sum_{j=0}^{i-1} \Delta t v(j). \quad (19)$$

Так как (см. рисунок 2) интеграл (18) представляет собой площадь криволинейной трапеции, то сумма (19) представляет собой площадь прямоугольников с основаниями равными Δt и высотой $v(i)$. Запишем сумму вида (19) для предыдущего момента времени, то есть

$$y(i-1) = k \sum_{j=0}^{i-2} \Delta t v(j). \quad (20)$$

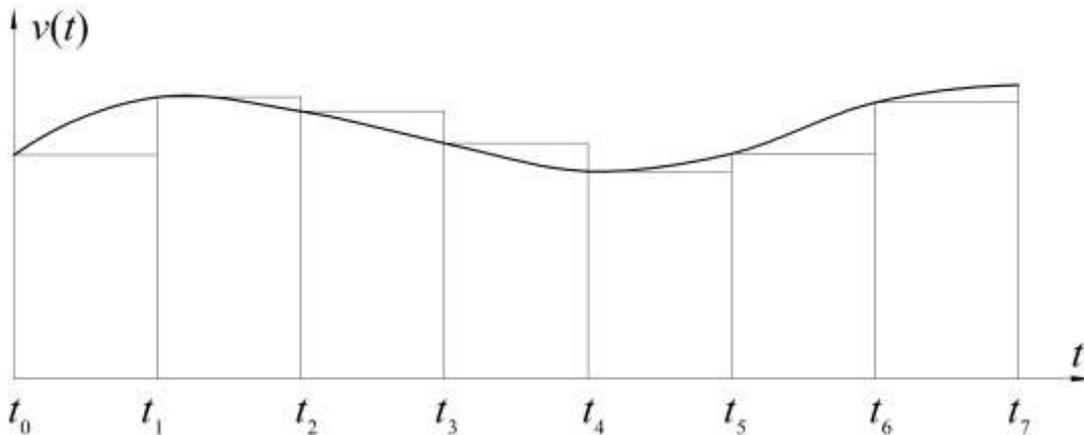


Рисунок 2 – График решетчатой функции

При вычитании суммы (20) из суммы (19) получаем уравнение вида:

$$y(i) - y(i-1) = k \Delta t v(i-1). \quad (21)$$

В итоге разностное уравнение имеет вид:

$$y(i) = y(i-1) + b_1 v(i-1), \quad (22)$$

где $b_1 = k \Delta t$.

Методика получения разностных уравнений для интегродифференциальных уравнений состоит в следующем:

1. Дифференциалы заменяются левыми разностями на основе формулы (17).
2. Интегралы заменяются суммами вида (19).
3. Полученное уравнение записывается для моментов времени i и $i-1$.
4. Уравнение для $(i-1)$ -го момента времени вычитается из уравнения для i -го момента времени. После преобразования и приведения подобных членов получается требуемое разностное уравнение.

Разностное уравнение на основе дискретной передаточной функции вида (9) получается следующим образом:

1. Z-изображение выходной переменной записывается в виде:

$$Y(z) = W(z)V(z)$$

или

$$Y(z) = \frac{b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-1-n} + \dots + b_m z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} V(z). \quad (23)$$

2. Левая и правая части уравнения (23) умножаются на знаменатель в правой части. В итоге получается операторное уравнение вида:

$$\begin{aligned} Y(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) &= \\ &= (b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-1-n} + \dots + b_m z^{-n}) V(z) \end{aligned} \quad (24)$$

3. Раскрывая скобки в (24), получается операторное уравнение вида:

$$\begin{aligned} a_0 Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + \dots + a_n Y(z) z^{-n} &= \\ = b_0 V(z) z^{m-n} + b_1 V(z) z^{m-1-n} + \dots + b_m V(z) z^{-n} \end{aligned} \quad (25)$$

4. Перейдя во временную область, имеем разностное уравнение вида:

$$\begin{aligned} a_0 y(i) + a_1 y(i-1) + a_2 y(i-2) + \dots + a_n y(i-n) = \\ = b_0 v(i-n+m) + b_1 v(i-n+m-1) + \dots + b_m v(i-n) \end{aligned} \quad (26)$$

11.2.3 Получение разностных уравнений ЦСУ

Разностные уравнения ЦСУ получаются на основе математических моделей САУ. При этом возможны два способа:

- получение разностных уравнений ЦСУ на основе передаточной функции САУ;
- получение разностных уравнений ЦСУ в виде последовательности разностных уравнений ЦСУ в соответствии с ее структурной схемой.

Получение разностного уравнения ЦСУ по передаточной функции САУ осуществляется следующим образом:

1. По структурной схеме САУ и передаточным функциям ее элементов получают передаточную функцию системы $W_c(p)$.
2. По $W_c(p)$ восстанавливается дифференциальное уравнение САУ, либо формируется дискретная передаточная функция ЦСУ $W_c(z)$.
3. По дифференциальному уравнению системы либо по ее дискретной передаточной функции получается разностное уравнение системы.

Недостаток данного способа состоит в получении разностных уравнений высокого порядка, что часто приводит к большим вычислительным ошибкам.

Получение разностного уравнения ЦСУ по структурной схеме САУ реализуется по следующей схеме:

1. Формируются разностные уравнения для динамических звеньев САУ, которые представляют собой в основном типовые динамические звенья.
2. Формируются уравнения связи, то есть разностные уравнения элементов сравнения и суммирования.
3. Строится алгоритм моделирования ЦСУ в виде алгоритма последовательного выполнения разностных уравнений в соответствии со структурной схемой САУ.

11.3 Примеры получения дискретных передаточных функций и разностных уравнений

11.3.1 Получение дискретной передаточной функции табличным методом

Получить дискретную передаточную функцию $W_c(z)$ табличным методом, если

$$W(p) = \frac{2}{0,5p + 1}.$$

Разделив числитель и знаменатель на величину 0,5, получим

$$W(p) = \frac{4}{p + 2} = 4 \left(\frac{1}{p + 2} \right).$$

По таблице А.1 в приложении А имеем, что

$$W'(z) = Z \left(\frac{1}{p + 2} \right) = \frac{z}{z - e^{-2\Delta t}}.$$

Тогда

$$W(z) = \frac{4z}{z - e^{-2\Delta t}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на величину z получаем, что

$$W(z) = \frac{4}{1 - z^{-1} e^{-2\Delta t}}. \quad (27)$$

11.3.2 Получение дискретной передаточной функции подстановкой Тастина

Получить дискретную передаточную функцию подстановкой Тастина (12) и разностное уравнение, если

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}.$$

Сделав подстановку вида (12) имеем, что

$$W(z) = \frac{k \left(T_1 \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1 \right)}{T_2 \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{2kT_1(1-z^{-1}) + k\Delta t(1+z^{-1})}{2T_2(1-z^{-1}) + \Delta t(1+z^{-1})}.$$

После преобразования имеем, что

$$W(z) = \frac{(2kT_1 + k\Delta t) + (k\Delta t - 2kT_1)z^{-1}}{(2T_2 + \Delta t) + (\Delta t - 2T_2)z^{-1}}. \quad (28)$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta_0 = 2kT_1 + k\Delta t; \quad \beta_1 = k\Delta t - 2kT_1;$$

$$\alpha_0 = 2T_2 + \Delta t; \quad \alpha_1 = \Delta t - 2T_2;$$

В итоге дискретная передаточная функция

$$W(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1}}. \quad (29)$$

Получим теперь разностное уравнение для этого запишем уравнение (29) для Z -изображения:

$$Y(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1}} V(z).$$

Умножив на знаменатель в правой части, получим:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1})Y(z) = (\beta_0 + \beta_1 z^{-1})V(z).$$

Раскрыв скобки, получим, что

$$\alpha_0 Y(z) + \alpha_1 Y(z) z^{-1} = \beta_0 V(z) + \beta_1 V(z) z^{-1}.$$

Переходя во временную область, имеем

$$\alpha_0 y(i) + \alpha_1 y(i-1) = \beta_0 v(i) + \beta_1 v(i-1)$$

или

$$y(i) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} y(i-1) + \frac{\beta_0}{\alpha_0} v(i) + \frac{\beta_1}{\alpha_0} v(i-1).$$

Обозначив через

$$a_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}; b_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}; b_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_0},$$

получаем разностное уравнение вида

$$y(i) = a_1 y(i-1) + b_0 v(i) + b_1 v(i-1). \quad (30)$$

11.3.3 Получение разностного уравнения по дифференциальному уравнению

Получим разностное уравнение по его дифференциальному уравнению на примере апериодического звена первого порядка.

$$T \frac{d y(t)}{dt} + y(t) = k v(t), \quad (31)$$

где T – постоянная времени;

k – коэффициент передачи.

Заменив в (31) дифференциал левой разностью и перейдя к аналогу дискретного времени, имеем, что

$$T \frac{y(i) - y(i-1)}{\Delta t} + y(i) = k v(i)$$

или

$$(T + \Delta t) y(i) = T y(i-1) + k \Delta t v(i)$$

откуда

$$y(i) = a_1 y(i-1) + b_0 v(i), \quad (32)$$

где $a_1 = \frac{T}{T + \Delta t}$; $b_0 = \frac{k \Delta t}{T + \Delta t}$.

11.3.4 Получение разностного уравнения на основе интегро-дифференциального

Получить разностное уравнение для ПИД-регулятора, описываемого интегро-дифференциальным уравнением вида:

$$U(t) = k_p \left[E(t) + \frac{1}{T_{\text{И}}} \int_0^t E(t) dt + T_{\text{Д}} \frac{dE(t)}{dt} \right], \quad (33)$$

где $U(t)$ – управляющее воздействие;

$E(t)$ – ошибка рассогласования;

k_p – коэффициент передачи регулятора;

$T_{\text{И}}, T_{\text{Д}}$ – постоянные интегрирования и дифференцирования.

Заменим в (33) интеграл суммой (18), а дифференциал левой разностью (19). Тогда, перейдя к дискретному времени, имеем, что

$$U(i) = k_p \left[E(i) + \frac{\Delta t}{T_{\text{И}}} \sum_{j=0}^{i-1} E(j) + T_{\text{Д}} \frac{E(i) - E(i-1)}{\Delta t} \right]. \quad (34)$$

Запишем аналогичное выражение для момента времени $i - 1$

$$U(i-1) = k_p \left[E(i-1) + \frac{\Delta t}{T_{\text{И}}} \sum_{j=0}^{i-2} E(j) + T_{\text{Д}} \frac{E(i-1) - E(i-2)}{\Delta t} \right]$$

и вычтем его из (34). В результате получим уравнение

$$U(i) - U(i-1) = k_p \left[E(i) - E(i-1) + \frac{\Delta t}{T_{\text{И}}} E(i-1) + \frac{T_{\text{Д}}}{\Delta t} (E(i) - 2E(i-1) + E(i-2)) \right]$$

После преобразования получаем уравнение вида:

$$U(i) = U(i-1) + k_p \left(1 + \frac{T_{\text{Д}}}{\Delta t} \right) E(i) - k_p \left(1 - \frac{\Delta t}{T_{\text{И}}} + \frac{2T_{\text{Д}}}{\Delta t} \right) E(i-1) + k_p \frac{T_{\text{Д}}}{\Delta t} E(i-2)$$

В итоге разностное уравнение ПИД-регулятора имеет вид:

$$U(i) = U(i-1) + q_0 E(i) + q_1 E(i-1) + q_2 E(i-2), \quad (35)$$

где $q_0 = k_P \left(1 + \frac{T_D}{\Delta t} \right)$; $q_1 = k_P \left(\frac{\Delta t}{T_I} - \frac{2T_D}{\Delta t} - 1 \right)$; $q_2 = k_P \frac{T_D}{\Delta t}$.

11.3.5 Получение разностного уравнения по структурной схеме САУ

Получить разностное уравнение ЦСУ по структурной схеме САУ, приведенной на рисунке 3.

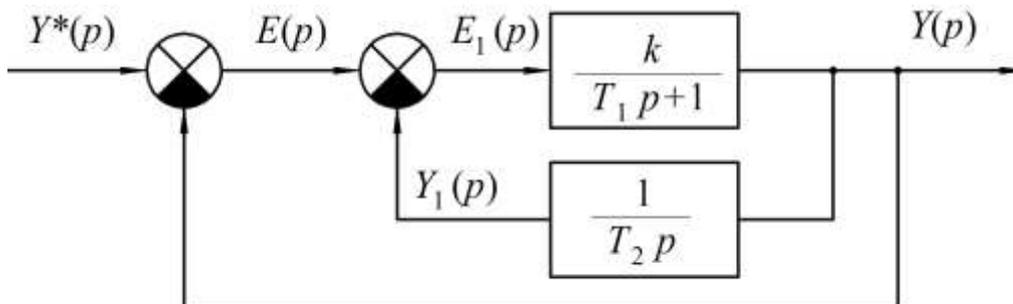


Рисунок 3 – Структурная схема САУ

Найдем передаточную функцию внутреннего контура

$$W_I(p) = \frac{\frac{k}{T_1 p + 1}}{1 + \frac{1}{T_2 p} \frac{k}{T_1 p + 1}} = \frac{k T_2 p}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k}.$$

Изображение по Лапласу выходной переменной имеет вид

$$Y(p) = \frac{k T_2 p}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k} Y^*(p)$$

или

$$Y(p)(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k) = k T_2 p Y^*(p)$$

Раскрыв скобки и перейдя во временную область, получим дифференциальное уравнение системы

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kT_2 \frac{dy^*(t)}{dt}. \quad (36)$$

Заменив в (36) дифференциалы левыми разностями, получим

$$\begin{aligned} T_1 T_2 \frac{y(i) - 2y(i-1) + y(i-2)}{\Delta t^2} + T_2 \frac{y(i) - y(i-1)}{\Delta t} + ky(i) = \\ = kT_2 \frac{y^*(i) - y^*(i-1)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Умножив полученное уравнение на Δt^2 и приведя подобные члены, получим уравнение вида:

$$\begin{aligned} (T_1 T_2 + T_2 \Delta t + k \Delta t^2) y(i) = (T_1 T_2 + T_2 \Delta t) y(i-1) - T_1 T_2 y(i-2) + \\ + k T_2 \Delta t y^*(i) - k T_2 \Delta t y^*(i-1) \end{aligned}$$

Разделив на выражение при $y(i)$, получим разностное уравнение ЦСУ:

$$y(i) = a_1 y(i-1) + a_2 y(i-2) + b_0 y^*(i) + b_1 y^*(i-1), \quad (37)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{2T_1 T_2 + T_2 \Delta t}{\Delta}; \quad a_2 = -\frac{T_1 T_2}{\Delta}; \quad b_0 = \frac{k T_2 \Delta t}{\Delta}; \quad b_1 = -\frac{k T_2 \Delta t}{\Delta};$$

$$\Delta = T_1 T_2 + T_2 \Delta t + k \Delta t^2.$$

11.3.6 Получение алгоритма моделирования по структурной схеме САУ

Получить разностное уравнение ЦСУ по структурной схеме САУ (рисунок 3) с использованием передаточных функций элементов системы.

1. Получим разностные уравнения для динамических звеньев в прямой и обратной цепях:

$$Y(p) = \frac{k}{T_1 p + 1} E_1(p).$$

Тогда уравнение в операторной форме определяется соотношением

$$T_1 p Y(p) + Y(p) = k E_1(p).$$

В итоге дифференциальное уравнение имеет вид:

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \varepsilon_1(t).$$

Заменяв дифференциал левой разностью, после преобразования получаем разностное уравнение вида:

$$y(i) = a_{11} y(i-1) + b_{01} \varepsilon_1(i), \quad (38)$$

где $a_{11} = \frac{T_1}{T_1 + \Delta t}$; $b_{01} = \frac{k \Delta t}{T_1 + \Delta t}$.

Примечание: второй индекс в коэффициентах разностного уравнения определяет номер элемента системы.

Для второго звена

$$Y_1(p) = \frac{1}{T_2 p} Y(p),$$

которое в операторной форме имеет вид

$$T_2 p Y_1(p) = Y(p).$$

Тогда имеем дифференциальное уравнение

$$T_2 \frac{dy_1(t)}{dt} = y(t).$$

Заменяв дифференциал левой разностью, получаем разностное уравнение вида

$$y_1(i) = y_1(i-1) + b_{02} y(i), \quad (39)$$

где $b_{02} = \frac{\Delta t}{T_2}$.

2. Получим уравнения связи, то есть разностные уравнения элементов сравнения:

– для первого элемента сравнения

$$\varepsilon(i) = y^*(i) - y(i-1),$$

так как сигнал обратной связи всегда берется в предыдущий момент времени;

– для второго элемента сравнения

$$\varepsilon_1(i) = \varepsilon(i) - y_1(i-1).$$

В итоге получаем следующий алгоритм моделирования разностных уравнений ЦСУ:

$$\varepsilon(i) = y^*(i) - y(i-1);$$

$$\varepsilon_1(i) = \varepsilon(i) - y_1(i-1);$$

$$y(i) = a_{11} y(i-1) + b_{01} \varepsilon_1(i);$$

$$y_1(i) = y_1(i-1) + b_{02} y(i).$$

11.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться со способами построения дискретных передаточных функций и разностных уравнений, как элементов системы, так и ЦСУ в целом.

2. Найти дискретную передаточную функцию $W(z)$ по известной передаточной функции $W(p)$, приведенной в таблице 1 и значениями коэффициентов из таблицы 2, используя метод подстановок в соответствии с вариантом, заданным преподавателем.

Таблица 1 – Непрерывные передаточные функции

Номер $W(p)$	Передаточная функция
1	$W_1(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}$
2	$W_2(p) = \frac{k T_1 p}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$
3	$W_3(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$

Продолжение таблицы 1

Номер $W(p)$	Передаточная функция
4	$W_4(p) = \frac{k(T_1p + 1)}{T_2^2 p^2 + 0,8T_2p + 1}$
5	$W_5(p) = \frac{kp(T_1p + 1)}{(T_2p + 1)(T_3p + 1)}$
6	$W_6(p) = \frac{k(T_1p + 1)}{(T_2p + 1)^2}$
7	$W_7(p) = \frac{k(T_1p + 1)}{p^2(T_2p + 1)}$
8	$W_8(p) = \frac{kT_1p^2}{(T_2p + 1)(T_3p + 1)}$

Таблица 2 – Варианты задания 1

№ варианта	№ $W(p)$	Вид подстановки		Значения параметров				Δt
		общая	Тастина	k	T_1	T_2	T_3	
1	1	–	+	2,3	5	3	–	0,2
2	2	+	–	1,8	2	4	1,6	0,2
3	5	–	+	1,5	10	5	6	0,5
4	8	+	–	2	4	10	8	0,1
5	6	–	+	2,4	3	2	–	0,1
6	1	+	–	1,4	2	10	–	0,4
7	7	–	+	0,8	4	15	–	0,5
8	3	+	–	5	1	2	–	0,1
9	4	–	+	3	2,4	3	–	0,2
10	5	+	–	2,1	4	3	8	0,3
11	2	–	+	4	0,1	5	8	0,1
12	6	+	–	2,3	4	2	–	0,4

Продолжение таблицы 2

№ варианта	№ $W(p)$	Вид подстановки		Значения параметров				Δt
		общая	Тастина	k	T_1	T_2	T_3	
13	8	–	+	0,6	4	5	9	0,8
14	7	+	–	6	2,8	4	–	0,3
15	3	–	+	4,8	5	10	–	0,8
16	4	+	–	2	2	3,6	–	0,4

3. Найти дискретную передаточную функцию $W(z)$ методом подстановок и разностное уравнение системы, по структурной схеме САУ, приведенной в приложении Б в соответствии с вариантом, заданным преподавателем. Значения параметров передаточных функций приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Варианты задания 2

№ варианта	№ схемы	Вид подстановки		Значения параметров						Δt
		общая	Тастина	T_1	T_2	T_3	τ_1	τ_2	τ_3	
1	1	+	–	2	5	–	0,4	1	0,2	0,2
2	2	–	+	4	10	–	0,5	0,1	–	0,4
3	3	+	–	1,4	2,4	–	1	0,3	–	0,1
4	4	–	+	2	10	–	2,8	1,1	–	0,3
5	5	+	–	5	4	10	1,1	1,2	–	0,2
6	6	–	+	2,5	8	–	4,1	2,3	–	0,4
7	7	+	–	4	–	–	0,8	0,2	–	0,1
8	8	–	+	10	5	4	2,5	4,1	–	0,4
9	1	+	–	4	2	–	1,6	1,8	0,5	0,5
10	2	–	+	4	10	–	0,5	0,9	–	0,3
11	3	+	–	8	3	–	5	0,6	–	0,2
12	4	–	+	10	10	–	2,1	4,5	–	0,4
13	5	+	–	7	6	10	3,5	–	–	0,3
14	6	–	+	2	8	–	2,1	–	–	0,5
15	7	+	–	1,8	–	–	0,4	0,1	–	0,1
16	8	–	+	5	8	10	2	3	–	0,3

4. Построить алгоритм моделирования ЦСУ по структурным схемам САУ, приведенным в приложении Б на основе передаточных функций элементов системы в соответствии с вариантом, заданным преподавателем. Варианты задания 3 приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Варианты задания 3

№ варианта	№ схемы	Вид подстановки		Значения параметров						Δt
		общая	Тастина	T_1	T_2	T_3	τ_1	τ_2	τ_3	
1	8	–	+	10	5	4	2,5	4,1	–	0,2
2	7	+	–	1,8	–	–	0,4	0,1	–	0,2
3	6	–	+	2,5	8	–	4,1	2,3	–	0,4
4	5	+	–	5	4	10	1,1	1,2	–	0,3
5	4	–	+	10	10	–	2,1	4,5	–	0,1
6	3	+	–	1,4	2,4	–	1	0,3	–	0,3
7	2	–	+	4	10	–	0,5	0,1	–	0,2
8	1	+	–	4	2	–	1,6	1,8	0,5	0,5
9	8	–	+	5	8	10	2	3	–	0,1
10	7	+	–	4	–	–	0,8	0,2	–	0,1
11	6	–	+	2	8	–	2,1	–	–	0,4
12	5	+	–	7	6	10	3,5	–	–	0,8
13	4	–	+	2	10	–	2,8	1,1	–	0,1
14	3	+	–	8	3	–	5	0,6	–	0,5
15	2	–	+	4	10	–	0,5	0,9	–	0,6
16	1	+	–	2	5	–	0,4	1	0,2	0,2

5. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

11.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Основное достоинство Z-преобразования.
2. Что такое дискретная передаточная функция?
3. Как определяется дискретная передаточная функция, если известна весовая функция системы?

4. Назовите основной недостаток получения разностных уравнений системы по ее передаточной функции.
5. На что влияет шаг дискретизации?
6. Есть ли связь между порядками дифференциального и разностного уравнений?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №12. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

12.1 Цель работы

Целью работы является:

- изучение критериев устойчивости, применяемых для исследования дискретных систем управления;
- приобретение практических навыков по их использованию при анализе устойчивости дискретных систем автоматического управления (ДСАУ).

12.2 Основные теоретические положения

Основные определения устойчивости непрерывных систем справедливы и для дискретных систем с учетом некоторых особенностей.

Основное условие устойчивости. Для устойчивости линейной дискретной системы автоматического управления необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по модулю меньше единицы, или (вторая формулировка) находились внутри единичного круга на плоскости корней.

Для исследования устойчивости без непосредственного решения дифференциального уравнения применяются критерии устойчивости. Все критерии устойчивости, которые используются для анализа устойчивости непрерывных систем, могут быть использованы для дискретных систем с учетом некоторых особенностей.

12.2.1 Алгебраические критерии

12.2.1.1 Необходимое условие устойчивости

Для оценки устойчивости используется характеристическое уравнение дискретной системы автоматического управления, ко-

торое представляет собой знаменатель дискретной передаточной функции

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0. \quad (2.1)$$

Для того чтобы все корни характеристического уравнения (2.1) были по модулю меньше 1, необходимо, чтобы при $a_0 > 0$ выполнялись неравенства

$$F(1) > 0 \text{ и } (-1)^n F(-1) > 0 \quad (2.2)$$

12.2.1.2 Критерий Гурвица

Критерий устойчивости Гурвица можно применять к дискретным системам автоматического управления (ДСАУ) при выполнении следующей подстановки:

$$v = \frac{z+1}{z-1}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в (2.1), получим

$$\begin{aligned} F(v) &= (1-v)^n F\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = \\ &= \alpha_0 v^n + \alpha_1 v^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} v + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

ДСАУ устойчива по критерию Гурвица, если при положительности коэффициентов преобразованного характеристического уравнения все n определителей Гурвица, составленные по определённой схеме, положительны. Если хотя бы один из определителей Гурвица отрицательный, то система неустойчива.

Матрица, по которой определяются все n определителей Гурвица, имеет вид

$$\begin{array}{cccccc}
 \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & & \Delta_n \\
 \left| \begin{array}{cccccc}
 \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots & \dots & 0 \\
 \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_n
 \end{array} \right. & & & & & (2.5)
 \end{array}$$

Итак, для устойчивости ДСАУ необходимо, чтобы:

$$\Delta_1 = |\alpha_1| > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; \\
 \Delta_{n-1} > 0; \Delta_n = \alpha_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (2.6)$$

12.2.1.3 Критерий Джури

ДСАУ устойчива по критерию Джури, если при выполнении необходимого условия устойчивости все элементы первого столбца таблицы Джури, находящиеся в нечетных строках были положительны.

Формирование таблицы Джури осуществляется следующим образом:

- в первую строку таблицы записываются коэффициенты характеристического уравнения (2.1) начиная с a_0 ;
- во вторую строку таблицы записываются коэффициенты характеристического уравнения (2.1) в обратном порядке начиная с a_n ;
- элементы третьей строки таблицы определяются следующим образом: из элемента первой строки вычитается соответствующий элемент второй строки, умноженный на отношение последних элементов двух верхних строк;
- в четвертую строку записываются элементы третьей строки в обратном порядке;

– элементы пятой строки определяются аналогично элементам третьей строки, а элементы шестой – аналогично элементам четвертой строки и т.д.

Таблица Джури в общем виде представлена на рисунке 2.1.

$C_{11} = a_0$	$C_{12} = a_1$	$C_{13} = a_2$...	$C_{1,n-1} = a_{n-2}$	$C_{1,n} = a_{n-1}$	$C_{1,n+1} = a_n$
$C_{21} = a_n$	$C_{22} = a_{n-1}$	$C_{23} = a_{n-2}$...	$C_{2,n-1} = a_2$	$C_{2,n} = a_1$	$C_{2,n+1} = a_0$
$C_{31} = a_0 - a_n \frac{a_n}{a_0}$	$C_{32} = a_1 - a_{n-1} \frac{a_n}{a_0}$	$C_{33} = a_2 - a_{n-2} \frac{a_n}{a_0}$...	$C_{3,n-1} = a_{n-2} - a_2 \frac{a_n}{a_0}$	$C_{3,n} = a_{n-1} - a_1 \frac{a_n}{a_0}$	
$C_{41} = C_{3,n}$	$C_{42} = C_{3,n-1}$	$C_{4,n-1} = C_{32}$	$C_{4,n} = C_{31}$	
$C_{51} = C_{31} - C_{41} \frac{C_{3,n}}{C_{4,n}}$	$C_{52} = C_{32} - C_{42} \frac{C_{3,n}}{C_{4,n}}$	$C_{5,n-1} = C_{3,n-1} - C_{4,n-1} \frac{C_{3,n}}{C_{4,n}}$		
$C_{61} = C_{5,n-1}$	$C_{62} = C_{5,n-2}$	$C_{6,n-1} = C_{51}$		
...						

Рисунок 2.1 – Таблица Джури

12.2.2 Частотные критерии

При исследовании ДСАУ в частотной области применяются два основных критерия: Михайлова и Гурвица.

При использовании частотных критериев осуществляется переход от характеристического полинома к характеристическому комплексу путем замены переменной $z = e^{j\omega}$, где $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Так как годограф, построенный по характеристическому уравнению ДСАУ симметричен относительно вещественной оси и полностью определяется своими значениями для $0 \leq \omega \leq \pi$, поэтому достаточно строить и рассматривать поведение годографа при изменении аргумента от 0 до π .

При определении значений действительной и мнимой частей комплекса при $\omega = 0$ и при $\omega = \pi$ получаем, что в том и другом случае мнимая часть равна 0. Значит, годограф всегда будет начинаться ($\omega = 0$) и заканчиваться ($\omega = \pi$) на действительной оси.

12.2.2.1 Критерий Михайлова

В основе данного критерия лежит принцип аргумента, который формулируется следующим образом: если полином $F(z)$

имеет n корней, лежащих внутри единичной окружности, то приращение аргумента характеристического комплекса при изменении ω от 0 до π составляет $n\omega$.

ДСАУ устойчива по критерию Михайлова, если при изменении частоты ω от 0 до π годограф Михайлова повернётся в положительном направлении (против часовой стрелки), начиная с вещественной положительной полуоси на угол $n\pi$, т. е. пройдет через $2n$ четверти, где n – порядок характеристического полинома.

Пример годографа Михайлова для устойчивой ДСАУ приведен на рисунке 2.2, а для неустойчивой ДСАУ 2-го порядка – на рисунке 2.3.

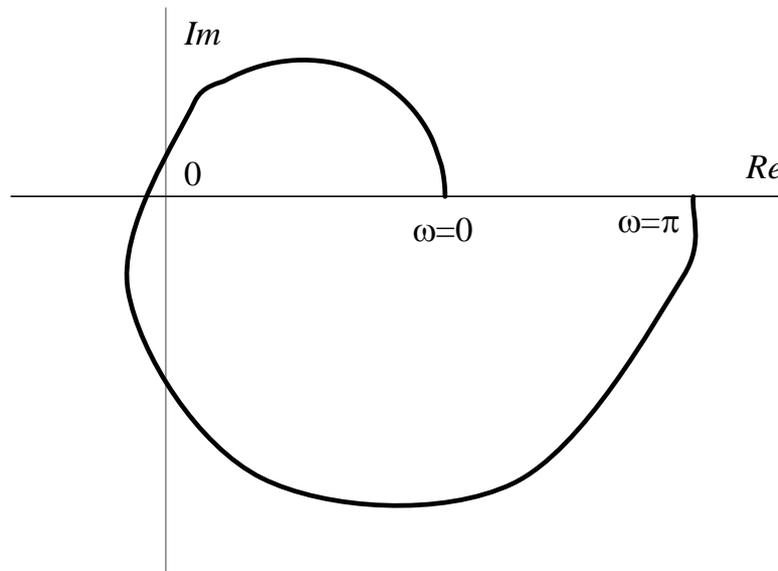


Рисунок 2.2 – Годограф Михайлова для устойчивой ДСАУ 2-го порядка

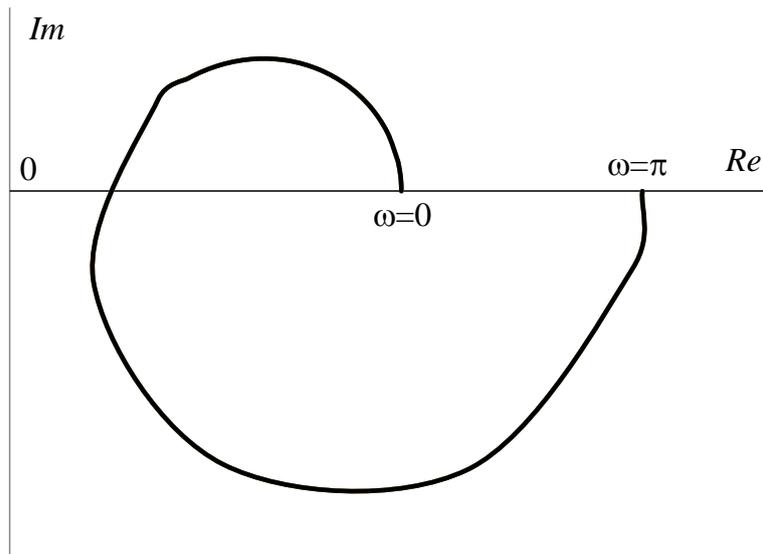


Рисунок 2.3 – Годограф Михайлова для неустойчивой ДСАУ 2-го порядка

12.2.2.2 Критерий Найквиста

Особенность критерия Найквиста состоит в том, что он оценивает устойчивость системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике её разомкнутой части, называемой годографом Найквиста. Критерий Найквиста применяется только для замкнутых систем.

Для устойчивости ДСАУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста при изменении частоты ω от 0 до π не охватывал точку с координатами $(-1, j0)$.

Отличительной особенностью применения критерия Найквиста для ДСАУ является то, что амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) заканчивается не в начале координат, а на действительной оси (рис. 2.4).

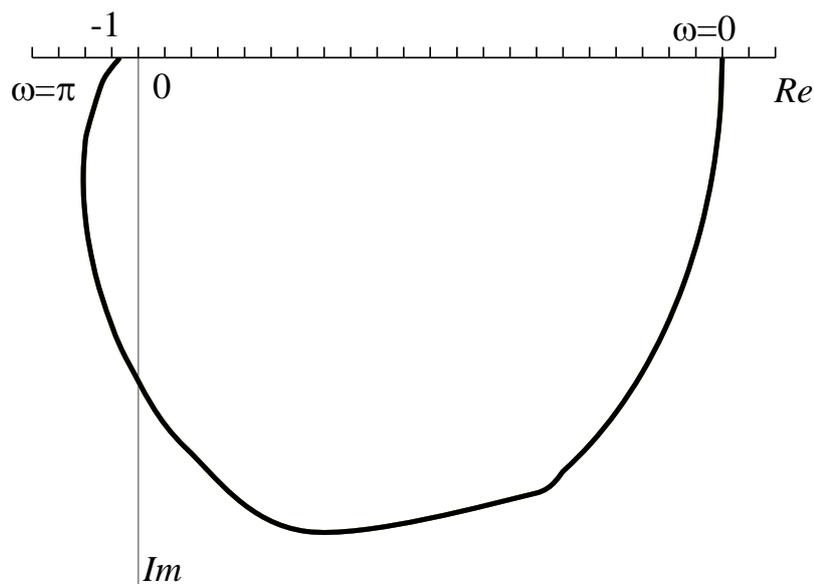


Рисунок 2.4 – Годограф Найквиста для устойчивой ДСАУ

12.3 Примеры определения устойчивости для ДСАУ

12.3.1 Определение устойчивости по корням характеристического уравнения

Исследовать устойчивость системы заданной дискретной передаточной функцией

$$W(z) = \frac{5(z+1)}{5z^2 - z + 0,5}.$$

Характеристическое уравнение ДСАУ имеет вид $5z^2 - z + 0,5 = 0$. Корни данного уравнения: $z_{1,2} = 0,5 \pm 0,5j$.

Их модули

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{0,5} < 1.$$

Следовательно, ДСАУ является устойчивой.

12.3.2 Необходимое условие устойчивости

Определить устойчивость системы, заданной дискретным характеристическим уравнением

$$F(z) = z^3 + 2,3z^2 + 0,5z - 0,2.$$

Так как $a_0 = 1 > 0$, определим значение характеристического уравнения при $p = 1$.

$$F(1) = 1^3 + 2,3 \cdot 1^2 + 0,5 \cdot 1 - 0,2 = 3,6 > 0$$

$$(-1)^3 F(-1) = (-1)(-1 + 2,3 - 0,5 - 0,2) = -0,6 < 0$$

Необходимое условие устойчивости не выполняется. Следовательно, система неустойчива.

12.3.3 Критерий Гурвица

Определить устойчивость системы, заданной дискретным характеристическим уравнением

$$F(z) = z^3 - 0,1z^2 - 0,46z - 0,08.$$

Представим дискретное характеристическое уравнение в общем виде

$$F(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3,$$

где $a_0 = 1$; $a_1 = -0,1$; $a_2 = -0,46$; $a_3 = -0,08$.

Выполнив подстановку (2.3), вычислим значения коэффициентов

$$\alpha_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0,72;$$

$$\alpha_1 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 = 3,32;$$

$$\alpha_2 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 = 3,6;$$

$$\alpha_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0,36.$$

Вычислим определители Гурвица

$$\Delta_1 = |3,32| = 3,32 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3,32 & 0,36 \\ 0,72 & 3,6 \end{vmatrix} \approx 11,69;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3,32 & 0,36 & 0 \\ 0,72 & 3,6 & 0 \\ 0 & 3,32 & 0,36 \end{vmatrix} \approx 4,2 > 0.$$

Так как все коэффициенты преобразованного уравнения больше 0 и все определители Гурвица больше 0, следовательно, ДСАУ устойчива.

12.3.4 Критерий Джюри

Исследовать устойчивость ДСАУ, заданной характеристическим уравнением

$$F(z) = z^4 - 0,7z^3 - 0,4z^2 + 0,05z + 0,1.$$

Проверка необходимого условия устойчивости:

- $a_0 = 1 > 0$;
- $F(1) = 1 - 0,7 - 0,4 + 0,05 + 0,1 = 0,05 > 0$;
- $(-1)^4 F(-1) = (1 + 0,7 - 0,4 - 0,05 + 0,1) = 1,35 > 0$.

Необходимое условие устойчивости выполняется.

Составляем таблицу Джюри:

1	-0,7	-0,4	0,05	0,1
0,1	0,05	-0,4	-0,7	1
0,99	-0,705	-0,36	0,12	
0,12	-0,36	-0,705	0,99	
0,975455	-0,66136	-0,27455		
-0,27455	-0,66136	0,975455		
0,898183	-0,84751			
-0,84751	0,898183			
0,098492				

Так как элементы первого столбца, находящиеся в нечетных строках положительны и выполняется необходимое условие устойчивости, следовательно, ДСАУ устойчива.

12.3.5 Критерий Михайлова

Определить устойчивость системы, заданной дискретным характеристическим уравнением

$$F(z) = z^3 - 0,7z^2 - 0,4z + 0,05. \quad (3.1)$$

Заменяя в выражении (3.1) z на $e^{j\omega}$ получим

$$F(j\omega) = e^{3j\omega} - 0,7e^{2j\omega} - 0,4e^{j\omega} + 0,05. \quad (3.2)$$

С учетом того, что $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$ находим выражения для вещественной и мнимой частей

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= \cos(3\omega) - 0,7 \cos(2\omega) - 0,4 \cos(\omega) + 0,05 \\ V(\omega) &= \sin(3\omega) - 0,7 \sin(2\omega) - 0,4 \sin(\omega) \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Построим годограф Михайлова. Результаты расчёта точек для построения графика приведены в таблице 3.1, а годограф Михайлова – на рисунке 3.1.

Таблица 3.1 – Данные для построения годографа Михайлова

ω	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1
$U(\omega)$	-0,050	-0,050	-0,051	-0,053	-0,055	-0,057	-0,079
$V(\omega)$	0	0,012	0,024	0,036	0,048	0,060	0,117
ω	0,3	0,6	1	1,5	2	2,5	π
$U(\omega)$	-0,288	-0,761	-0,865	0,504	1,634	0,519	-1,250
$V(\omega)$	0,270	0,096	-0,832	-1,475	-0,113	1,370	0,000

ДСАУ неустойчива, так как годограф Михайлова начинается на отрицательной части вещественной полуоси.

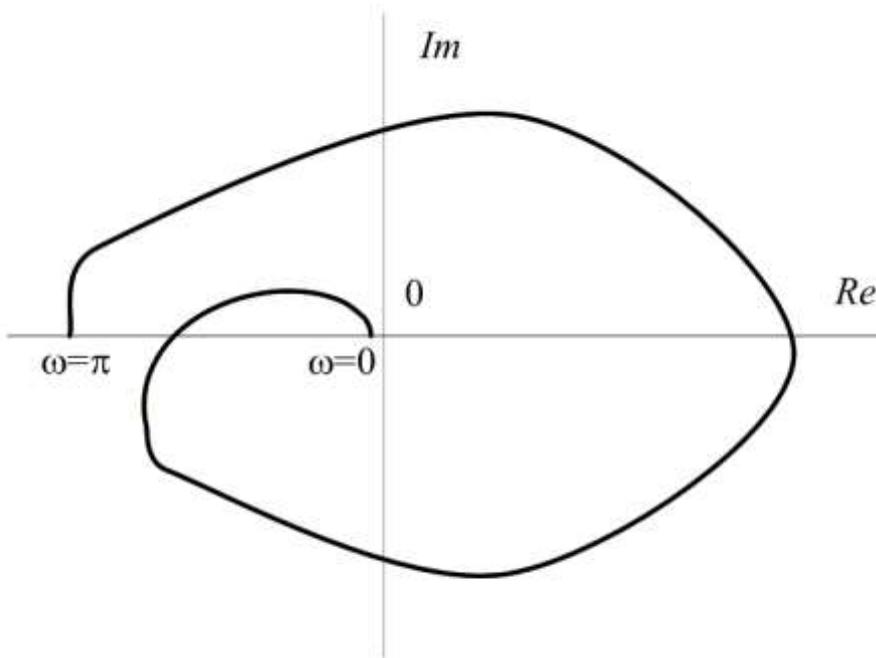


Рисунок 3.1 – Годограф Михайлова

12.3.6 Критерий Найквиста

Определить устойчивость системы, заданной дискретной передаточной функцией разомкнутой части ДСАУ

$$W_p(z) = \frac{0,5(z + 0,7)}{z^2 - 1,2z + 0,35}. \quad (3.4)$$

Заменив в выражении (3.4) z на $e^{j\omega}$ получим

$$\begin{aligned} W_p(j\omega) &= \frac{0,5(e^{j\omega} + 0,7)}{e^{2j\omega} - 1,2e^{j\omega} + 0,35} = \\ &= \frac{0,5(\cos(\omega) + 0,7 + j \sin(\omega))}{\cos(2\omega) - 1,2 \cos(\omega) + 0,35 + j(\sin(2\omega) - 1,2 \sin(\omega))} = (3.5) \\ &= \frac{0,5(\alpha_1 + j\beta_1)}{\alpha_2 + j\beta_2} \end{aligned}$$

где $\alpha_1 = \cos(\omega) + 0,7$; $\beta_1 = \sin(\omega)$; $\alpha_2 = \cos(2\omega) - 1,2 \cos(\omega) + 0,35$;
 $\beta_2 = \sin(2\omega) - 1,2 \sin(\omega)$.

Выделим вещественную и мнимую части, умножив на комплексно-сопряженный знаменатель

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \frac{0,5(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \\ Q(\omega) &= \frac{0,5(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Построим годограф Найквиста, то есть АФЧХ разомкнутой части ДСАУ. Результаты расчёта точек годографа Найквиста приведены в таблице 3.2.

ДСАУ устойчива, так как годограф Найквиста (рис. 3.2) не охватывает точку $(-1, j0)$.

Таблица 3.2 – Данные для построения годографа Найквиста

ω	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1
$P(\omega)$	5,67	5,66	5,63	5,58	5,52	5,44	4,82
$Q(\omega)$	0	-0,27	-0,54	-0,80	-1,06	-1,31	-2,43
ω	0,2	0,3	0,6	1	1,5	2	π
$P(\omega)$	2,98	1,22	-0,99	-0,93	-0,49	-0,24	-0,06
$Q(\omega)$	-3,69	-3,77	-1,92	-0,46	0,03	0,10	0,00

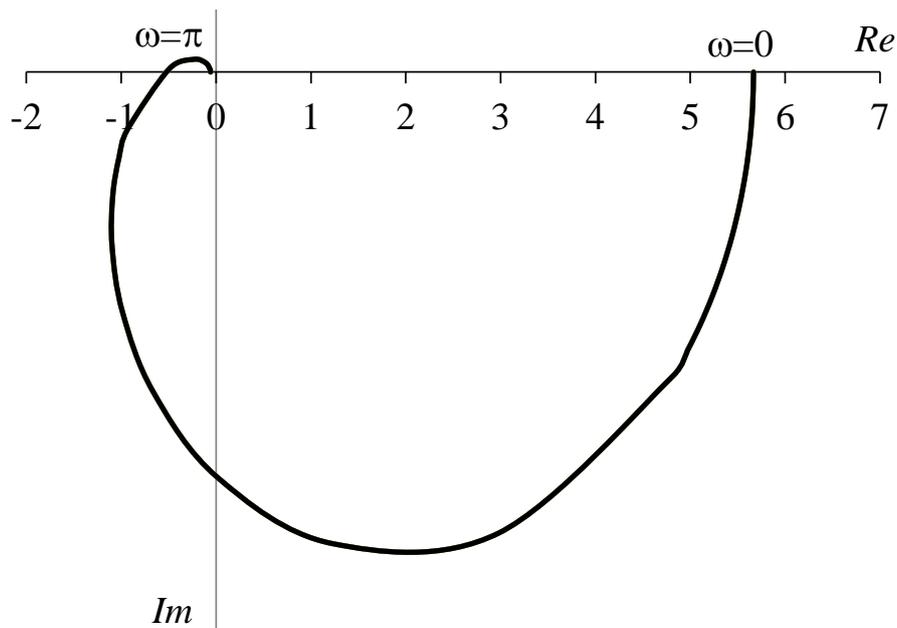


Рисунок 3.2 – Годограф Найквиста

12.4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с критериями устойчивости дискретных систем автоматического управления..

2. Найти дискретную передаточную функцию $W(z)$ по структурной схеме САУ, приведенной в приложении А (табл. А.1) в соответствии с вариантом, заданным преподавателем. Значения параметров передаточных функций приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Исходные данные для определения $W(z)$

№ варианта	№ схемы	Значения параметров						Δt
		T_1	T_2	T_3	τ_1	τ_2	τ_3	
1	1	2	5	–	0,4	1	0,2	0,2
2	2	4	10	–	0,5	0,1	–	0,4
3	3	1,4	2,4	–	1	0,3	–	0,1
4	4	2	10	–	2,8	1,1	–	0,3
5	5	5	4	10	1,1	1,2	–	0,2
6	6	2,5	8	–	4,1	2,3	–	0,4
7	7	4	–	–	0,8	0,2	–	0,1
8	8	10	5	4	2,5	4,1	–	0,4
9	1	4	2	–	1,6	1,8	0,5	0,5
10	2	4	10	–	0,5	0,9	–	0,3
11	3	8	3	–	5	0,6	–	0,2
12	4	10	10	–	2,1	4,5	–	0,4
13	5	7	6	10	3,5	–	–	0,3
14	6	2	8	–	2,1	–	–	0,5
15	7	1,8	–	–	0,4	0,1	–	0,1
16	8	5	8	10	2	3	–	0,3

3. Проверить необходимое условие устойчивости для заданной ДСУ.

4. Определить устойчивость заданной ДСАУ по критериям Гурвица и Джюри.

5. Определить устойчивость заданной ДСАУ по критериям Михайлова и Найквиста.

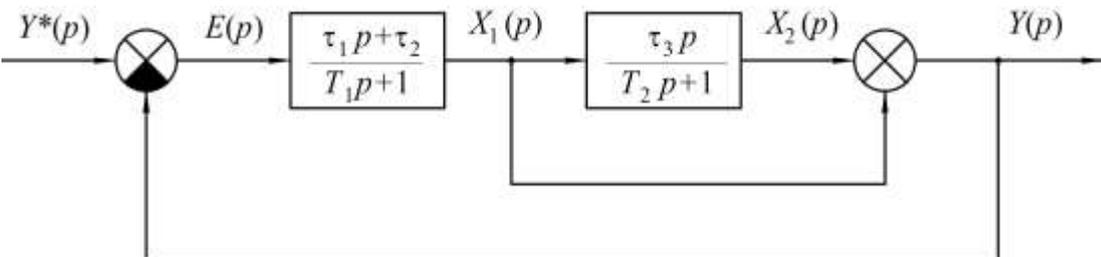
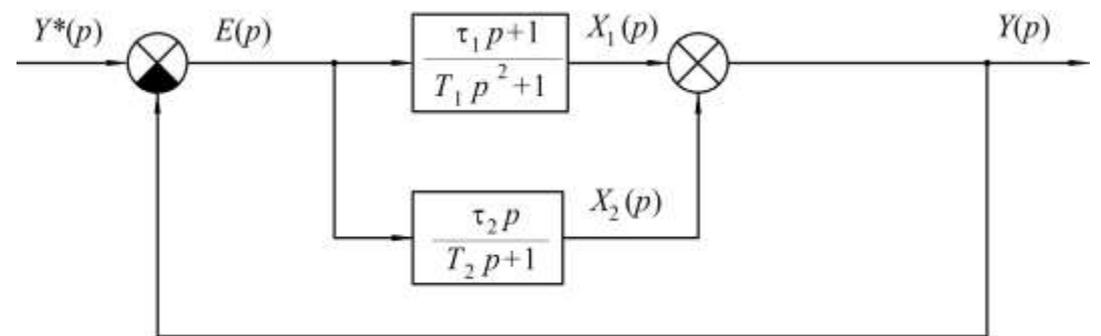
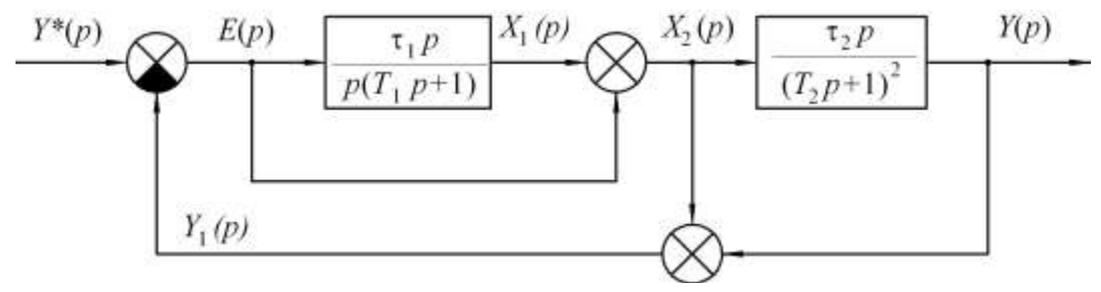
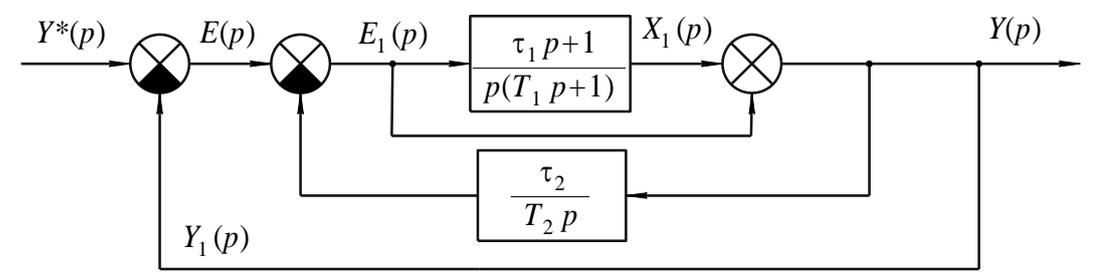
6. Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

12.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте условия устойчивости ДСАУ.
2. Какие критерии применяются для оценки устойчивости ДСАУ?
3. Что является необходимым условием устойчивости для ДСАУ?
4. В чем отличие применения критерия Гурвица для ДСАУ?
5. Сформулируйте критерий Джури.
6. Каким образом формируется таблица для критерия Джури?
7. В чем особенность применения критерия Михайлова для ДСАУ?
8. Формулировка критерия Найквиста для ДСАУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

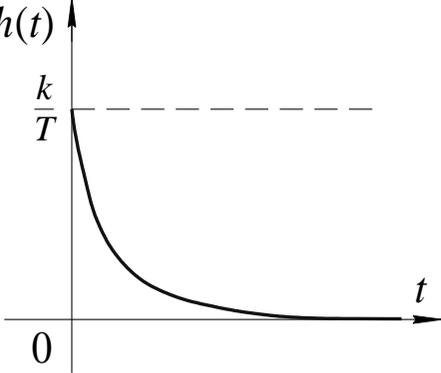
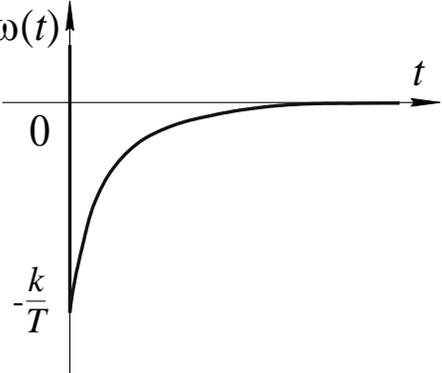
Таблица А.1 – Структурные схемы САУ

№	Структурная схема
1	
2	
3	
4	

Продолжение таблицы А.1

№	Структурная схема
5	
6	
7	
8	

Продолжение таблицы А.1

Тип звена	Переходная характеристика	Весовая характеристика
РДЗ	$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$ 	$\omega(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-t/T}$ 
ФЗ	$h(t) = k 1(t) + kT \delta(t)$	$\omega(t) = k \delta(t) + k \delta'(t)$

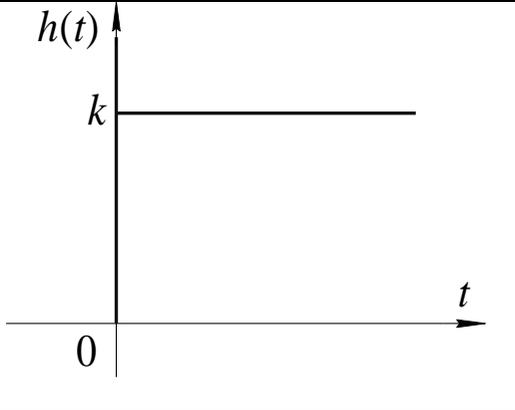
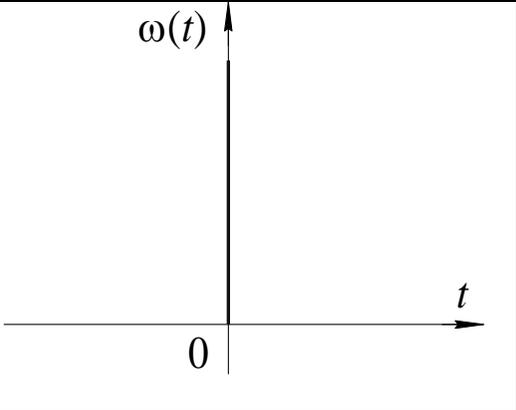
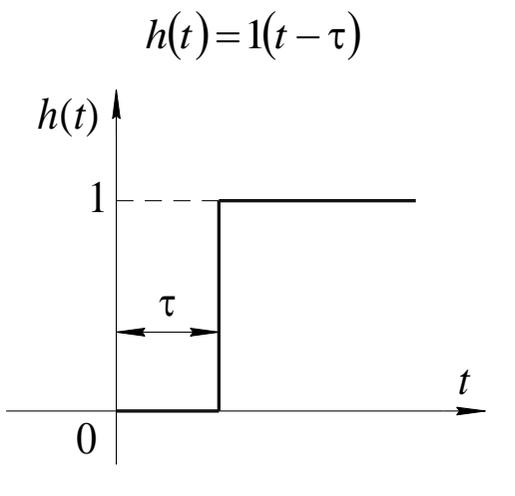
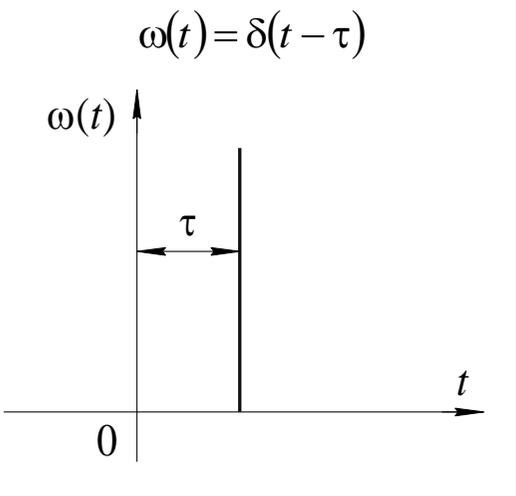
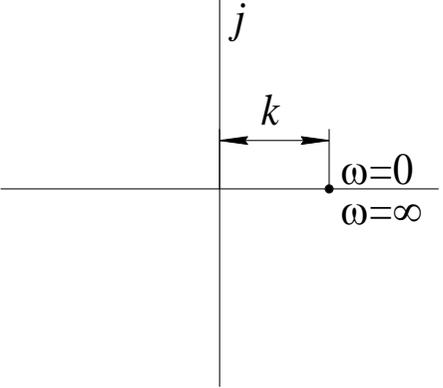
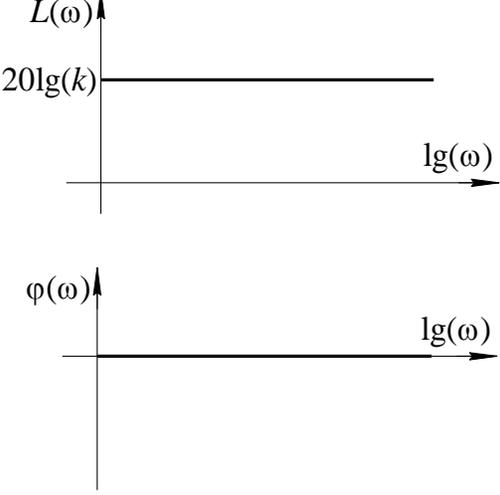
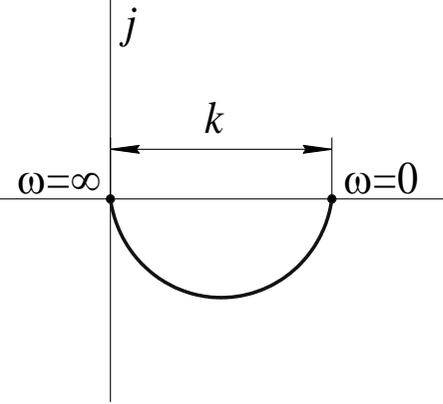
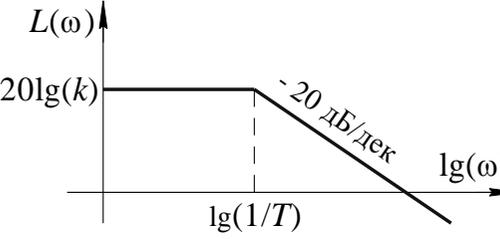
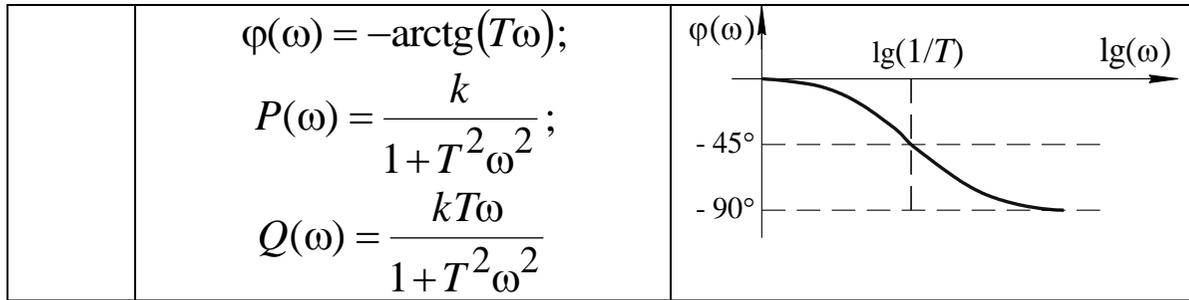
		
ЗЧЗ	<p>$h(t) = 1(t - \tau)$</p> 	<p>$\omega(t) = \delta(t - \tau)$</p> 

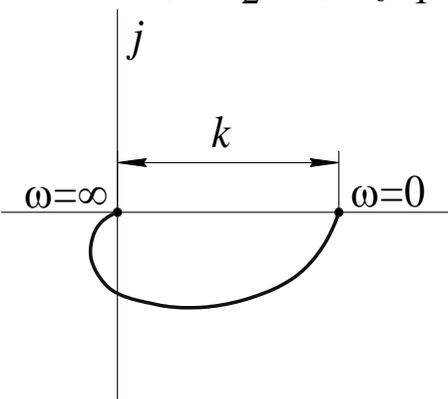
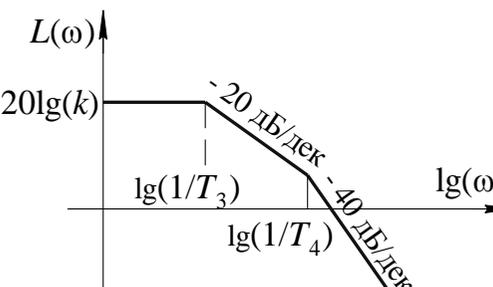
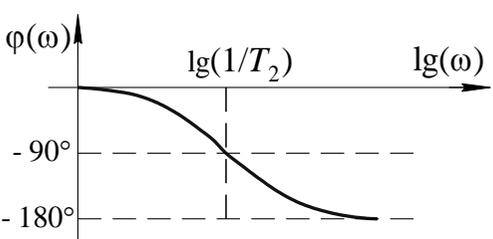
Таблица А.2 – Частотные характеристики типовых динамических звеньев

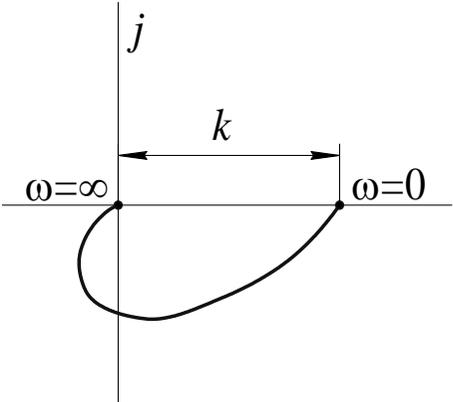
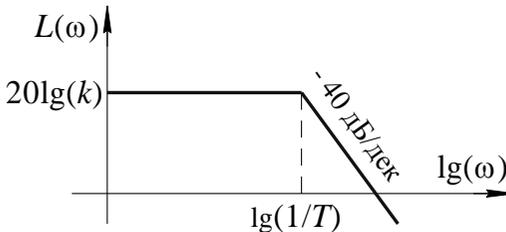
Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
УЗ	$W(j\omega) = k;$	$L(\omega) = 20\lg(k)$

	 <p> $A(\omega) = k; \varphi(\omega) = 0^\circ;$ $P(\omega) = k; Q(\omega) = 0$ </p>	
A3I	<p> $W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega};$ </p>  <p> $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$ </p>	<p> $L(\omega) = 20 \lg(k) -$ $- 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$ </p> 

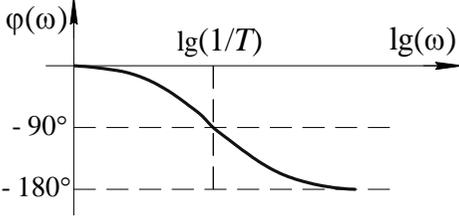
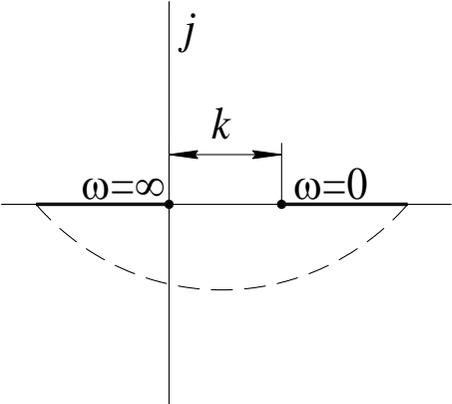
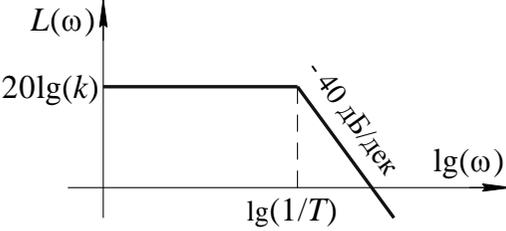


Продолжение таблицы А.2

Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
А3П	$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T_2^2 \omega^2) + jT_1 \omega};$  $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}};$ $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2};$ $P(\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2) + T_1^2 \omega^2};$	$L(\omega) = 20 \lg(k) -$ $- 20 \lg \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} -$ $- 20 \lg \sqrt{1 + T_4^2 \omega^2}$  

	$Q(\omega) = \frac{k T_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2) + T_1^2 \omega^2}$	
КБЗ	$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2 \omega^2) + j 2\zeta T \omega};$ 	$L(\omega) \approx 20 \lg(k) - 20 \lg \sqrt{(1 - T\omega)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}$ 

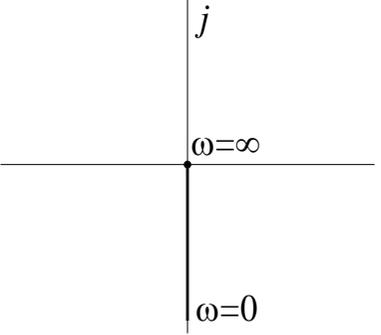
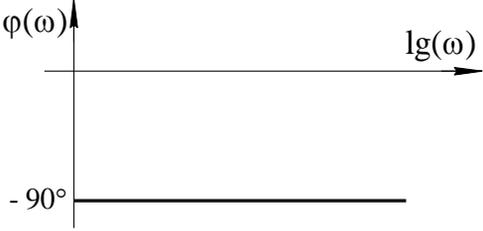
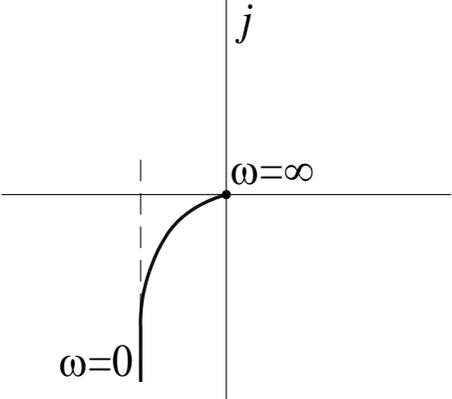
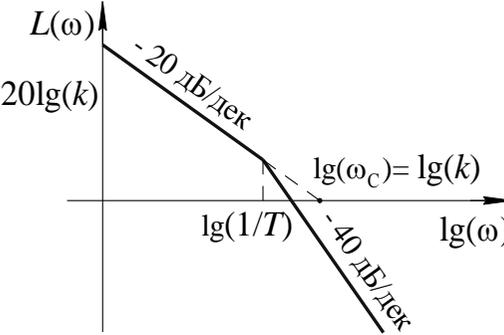
Продолжение таблицы А.2

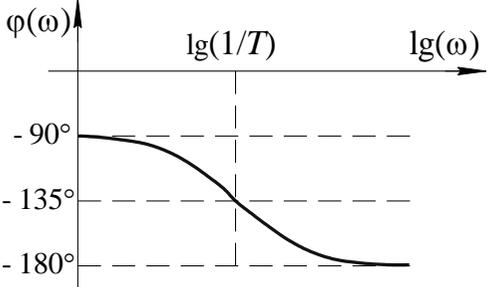
Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
КБЗ	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}};$ $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T \omega}{1-T^2\omega^2};$ $P(\omega) = \frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2};$ $Q(\omega) = -\frac{2k\zeta T \omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}$	
КНЗ	$W(j\omega) = \frac{k}{1-T^2\omega^2};$ 	$L(\omega) = 20\lg(k) - 40\lg \sqrt{ 1-T^2\omega^2 }$ 

	$A(\omega) = \left \frac{k}{1 - T^2 \omega^2} \right ;$ $\varphi(\omega) = 0^\circ;$ $P(\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2};$ $Q(\omega) = 0$	
ИИЗ	$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega};$ $A(\omega) = \frac{k}{\omega};$ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2};$	$L(\omega) = 20 \lg(k) - 40 \lg(\omega)$

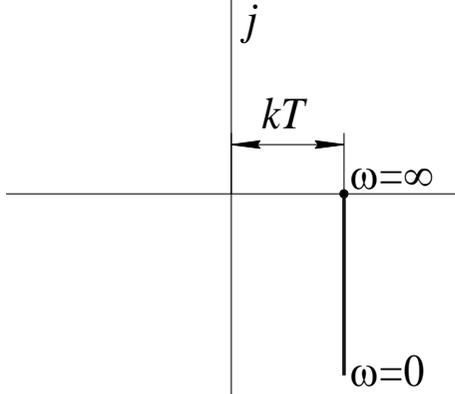
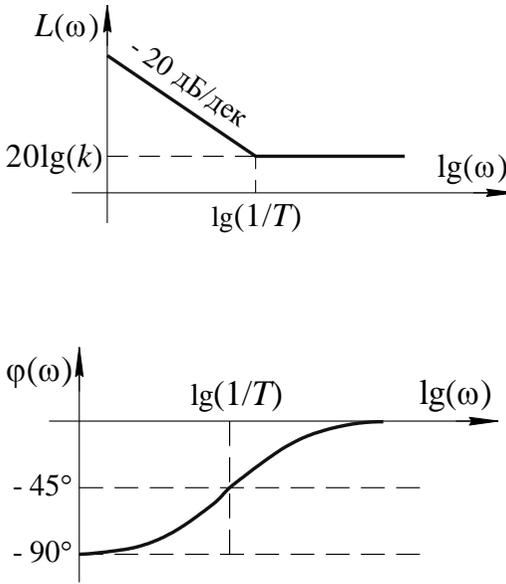
Продолжение таблицы А.2

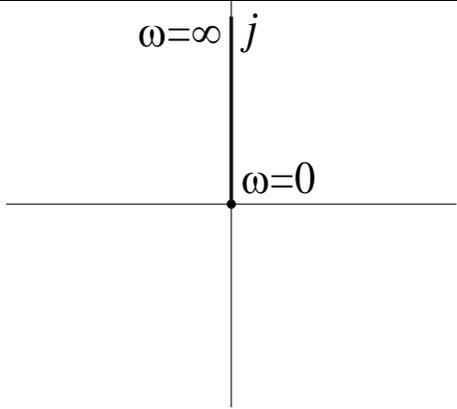
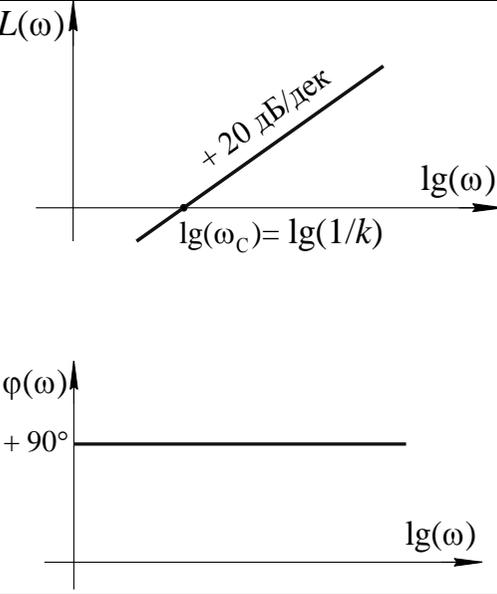
Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
-----------	--------------------------	--

ИИЗ	 $P(\omega) = 0; Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$	
РИЗ	$W(j\omega) = \frac{k}{-T\omega^2 + j\omega};$  $A(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}};$	$L(\omega) = 20\lg(k) - 20\lg(\omega) - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$ 

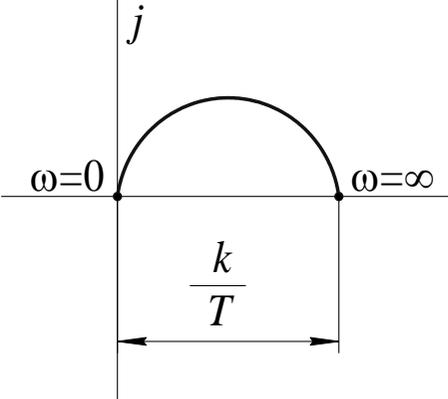
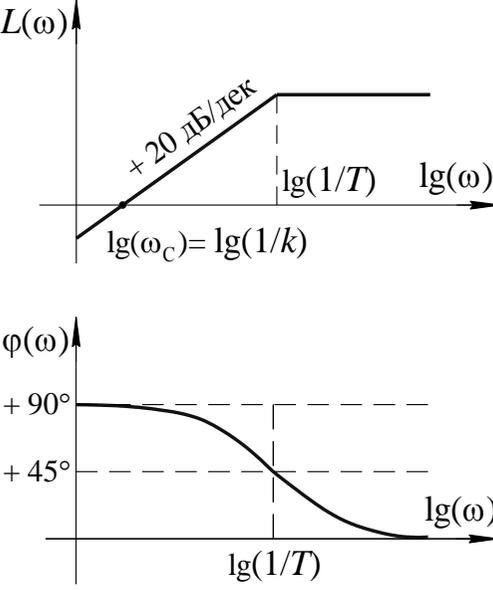
	$\varphi(\omega) = -\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(T\omega)\right);$ $P(\omega) = -\frac{kT}{1+T^2\omega^2};$ $Q(\omega) = -\frac{k}{\omega(1+T^2\omega^2)}$	
ИЗ	$W(j\omega) = \frac{k(1+jT\omega)}{j\omega};$	$L(\omega) = 20\lg(k) - 20\lg(\omega) + 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$

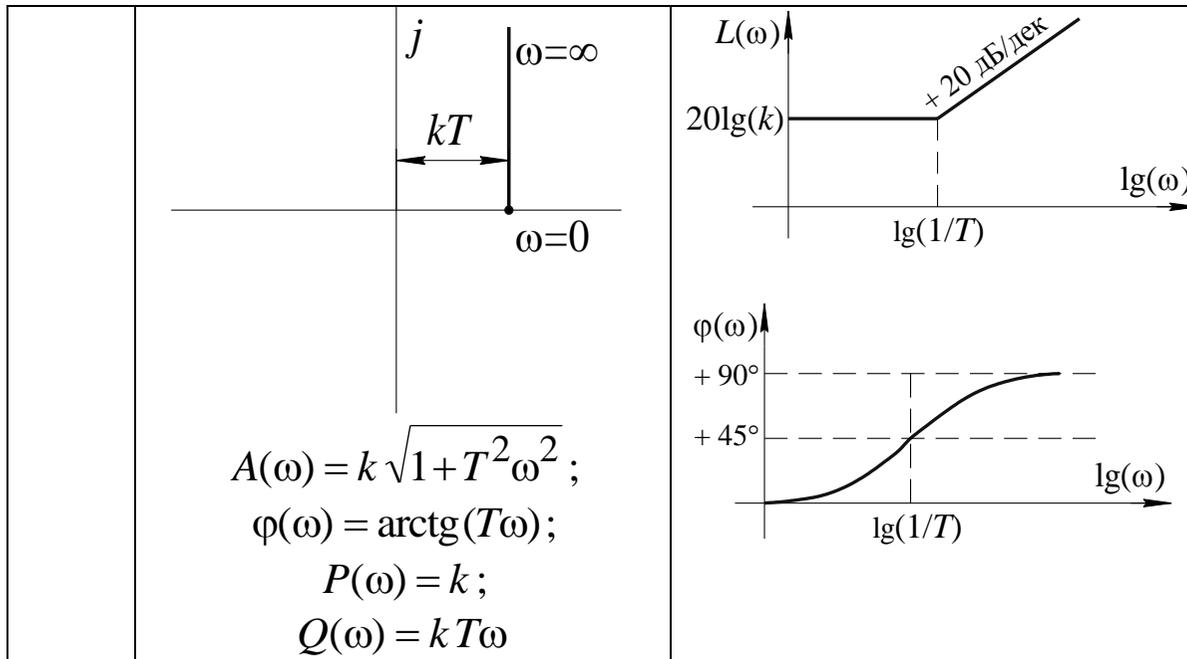
Продолжение таблицы А.2

Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
ИЗ	 $A(\omega) = \frac{k}{\omega} \sqrt{1 + T^2 \omega^2};$ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(T\omega);$ $P(\omega) = kT; Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$	
ИДЗ	$W(j\omega) = jk\omega;$	$L(\omega) = 20\lg(k) + 20\lg(\omega)$

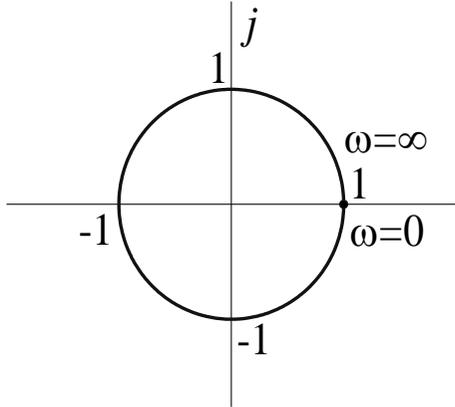
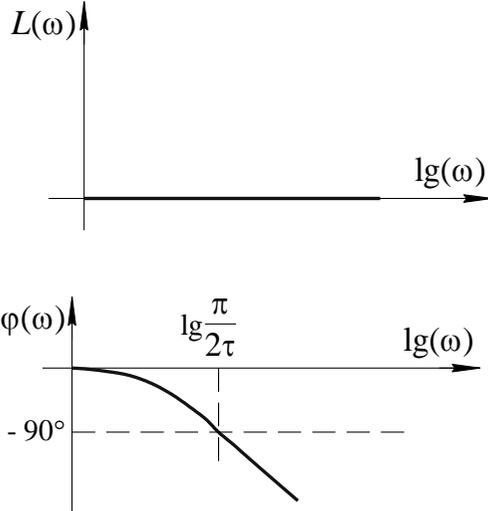
	 <p> $A(\omega) = k \omega; \varphi(\omega) = +\frac{\pi}{2};$ $P(\omega) = 0; Q(\omega) = k \omega$ </p>	
РДЗ	$W(j\omega) = \frac{jk\omega}{1+jT\omega};$ $A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$	$L(\omega) = 20\lg(k) + 20\lg(\omega) -$ $- 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$

Продолжение таблицы А.2

Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
РДЗ	 $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(T\omega);$ $P(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1+T^2\omega^2};$ $Q(\omega) = \frac{k\omega}{1+T^2\omega^2}$	
ФЗ	$W(j\omega) = k(1 + j\omega T);$	$L(\omega) = 20 \lg(k) + 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$



Продолжение таблицы А.2

Тип звена	Частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
ЗЧЗ	$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau};$  $A(\omega) = 1;$ $\varphi(\omega) = -\omega\tau;$ $P(\omega) = \cos(\omega\tau);$ $Q(\omega) = -\sin(\omega\tau)$	$L(\omega) = 0$ 

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1 – Таблица h – функций ($H = 0,00 \div 0,45$)

$t_{\text{табл}}$	Коэффициенты наклона H									
	$0,00$	$0,05$	$0,10$	$0,15$	$0,20$	$0,25$	$0,30$	$0,35$	$0,40$	$0,45$
$0,0$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$0,2$	0,064	0,067	0,070	0,073	0,076	0,079	0,083	0,086	0,089	0,092
$0,4$	0,127	0,133	0,141	0,146	0,152	0,159	0,165	0,171	0,177	0,183
$0,6$	0,189	0,198	0,208	0,217	0,227	0,236	0,246	0,255	0,264	0,274
$0,8$	0,250	0,263	0,275	0,288	0,300	0,312	0,325	0,337	0,349	0,361
$1,0$	0,310	0,325	0,341	0,356	0,371	0,386	0,402	0,417	0,432	0,447
$1,2$	0,367	0,386	0,403	0,422	0,440	0,458	0,476	0,493	0,510	0,528
$1,4$	0,422	0,443	0,464	0,485	0,506	0,526	0,546	0,566	0,586	0,606
$1,6$	0,475	0,499	0,522	0,545	0,568	0,591	0,613	0,636	0,657	0,679
$1,8$	0,525	0,551	0,577	0,602	0,627	0,652	0,674	0,700	0,724	0,747
$2,0$	0,571	0,600	0,628	0,655	0,682	0,709	0,733	0,761	0,783	0,810
$2,2$	0,615	0,645	0,675	0,705	0,734	0,762	0,789	0,816	0,842	0,867
$2,4$	0,655	0,687	0,719	0,750	0,781	0,810	0,839	0,866	0,893	0,918
$2,6$	0,692	0,726	0,758	0,791	0,823	0,854	0,883	0,911	0,938	0,964
$2,8$	0,725	0,761	0,795	0,829	0,862	0,983	0,924	0,952	0,978	1,002
$3,0$	0,755	0,792	0,828	0,863	0,895	0,928	0,958	0,986	1,013	1,038
$3,2$	0,781	0,819	0,857	0,892	0,926	0,958	0,988	1,016	1,042	1,066
$3,4$	0,804	0,844	0,882	0,918	0,952	0,984	1,014	1,041	1,066	1,087
$3,6$	0,824	0,867	0,903	0,940	0,974	1,006	1,035	1,062	1,085	1,106
$3,8$	0,842	0,883	0,922	0,958	0,993	1,024	1,052	1,078	1,100	1,119

4,0	0,856	0,898	0,937	0,974	1,008	1,038	1,066	1,090	1,110	1,127
4,2	0,868	0,910	0,950	0,986	1,020	1,049	1,076	1,098	1,117	1,132
4,4	0,878	0,920	0,960	0,996	1,029	1,057	1,082	1,103	1,120	1,132
4,6	0,885	0,928	0,968	1,003	1,035	1,063	1,086	1,105	1,119	1,129
4,8	0,891	0,934	0,973	1,009	1,040	1,066	1,088	1,104	1,117	1,124
5,0	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,112
6,0	0,903	0,945	0,981	1,013	1,036	1,054	1,065	1,069	1,068	1,062
7,0	0,904	0,945	0,978	1,006	1,024	1,034	1,037	1,033	1,023	1,009
8,0	0,911	0,951	0,983	1,007	1,020	1,024	1,021	1,011	0,998	0,9812
9,0	0,925	0,966	0,996	1,016	1,025	1,025	1,017	1,006	0,992	0,978
10,0	0,939	0,980	1,009	1,025	1,030	1,027	1,018	1,005	0,994	0,985
11,0	0,946	0,988	1,015	1,028	1,030	1,024	1,013	1,002	0,993	0,990
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,989	0,990
13,0	0,950	0,980	1,012	1,010	1,015	1,004	0,993	0,986	0,984	0,989
14,0	0,951	0,990	1,010	1,015	1,008	0,997	0,987	0,983	0,985	0,991
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,006	0,995	0,987	0,986	0,991	0,998
16,0	0,961	0,998	1,015	1,014	1,006	0,995	0,990	0,992	0,999	1,007
17,0	0,965	1,001	1,016	1,014	1,005	0,996	0,993	0,998	1,006	1,011
18,0	0,966	1,002	1,015	1,012	1,002	0,994	0,994	1,000	1,007	1,010
19,0	0,966	1,002	1,013	1,008	0,998	0,992	0,994	1,001	1,006	1,006
20,0	0,967	1,001	1,011	1,004	0,995	0,991	0,994	1,001	1,004	1,001

Продолжение таблицы Б.1

$t_{\text{табл}}$	Коэффициенты наклона H									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
21,0	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,996	1,002	1,003	0,999
22,0	0,971	1,004	1,011	1,002	0,994	0,994	1,000	1,005	1,004	0,998

23,0	0,973	1,006	1,011	1,002	0,995	0,997	1,003	1,006	1,004	0,998
24,0	0,975	1,006	1,010	1,001	0,995	0,998	1,005	1,006	1,002	0,998
25,0	0,975	1,006	1,008	0,999	0,996	0,999	1,004	1,004	0,999	0,996
26,0	0,975	1,005	1,006	0,997	0,994	0,999	1,003	1,001	0,996	0,996
27,0	0,976	1,005	1,005	0,996	0,994	1,000	1,003	0,999	0,995	0,997
28,0	0,977	1,006	1,005	0,996	0,996	1,001	1,003	0,999	0,996	0,999
29,0	0,979	1,007	1,005	0,997	0,998	1,003	1,004	0,999	0,998	1,002
30,0	0,980	1,007	1,004	0,997	0,999	1,004	1,003	0,999	0,999	1,003
31,0	0,980	1,007	1,003	0,996	0,999	1,004	1,001	0,998	1,000	1,003

Таблица Б.2 – Таблица h -функций ($H = 0,50 \div 1,00$)

$t_{\text{табл}}$	Коэффициенты наклона H									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	1,00
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,096	0,102	0,102	0,105	0,109	0,111	0,115	0,118	0,123	0,127
0,4	0,190	0,203	0,203	0,208	0,217	0,222	0,228	0,241	0,241	0,247
0,6	0,283	0,302	0,302	0,303	0,314	0,329	0,338	0,347	0,356	0,364
0,8	0,375	0,396	0,396	0,410	0,421	0,433	0,445	0,457	0,468	0,482
1,0	0,461	0,491	0,491	0,505	0,519	0,534	0,548	0,561	0,575	0,590
1,2	0,545	0,579	0,579	0,596	0,612	0,628	0,644	0,659	0,675	0,688
1,4	0,625	0,662	0,662	0,681	0,702	0,716	0,734	0,751	0,768	0,785
1,6	0,700	0,741	0,741	0,760	0,780	0,798	0,817	0,834	0,851	0,869
1,8	0,769	0,812	0,812	0,833	0,850	0,872	0,891	0,908	0,926	0,944
2,0	0,831	0,878	0,878	0,899	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008
2,2	0,887	0,936	0,936	0,957	0,977	0,996	1,010	1,031	1,047	1,060
2,4	0,940	0,988	0,988	1,008	1,028	1,045	1,062	1,078	1,092	1,106
2,6	0,986	1,032	1,032	1,052	1,068	1,086	1,101	1,115	1,127	1,137

2,8	1,027	1,069	1,069	1,088	1,104	1,119	1,132	1,143	1,153	1,160
3,0	1,061	1,100	1,100	1,116	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,174
3,2	1,084	1,123	1,123	1,138	1,150	1,160	1,168	1,173	1,177	1,179
3,4	1,109	1,141	1,141	1,153	1,162	1,169	1,174	1,177	1,177	1,176
3,6	1,124	1,153	1,153	1,161	1,168	1,172	1,174	1,173	1,170	1,166
3,8	1,135	1,157	1,157	1,164	1,168	1,169	1,167	1,164	1,158	1,152
4,0	1,141	1,158	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132
4,2	1,143	1,154	1,154	1,155	1,153	1,148	1,141	1,131	1,120	1,109
4,4	1,141	1,147	1,147	1,144	1,139	1,131	1,121	1,109	1,096	1,082
4,6	1,135	1,136	1,136	1,131	1,123	1,112	1,100	1,086	1,071	1,056
4,8	1,128	1,122	1,122	1,115	1,104	1,092	1,077	1,062	1,045	1,029
5,0	1,117	1,107	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,003
6,0	1,051	1,020	1,020	1,001	0,984	0,966	0,949	0,934	0,922	0,914
7,0	0,992	0,957	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917
8,0	0,966	0,941	0,941	0,934	0,932	0,996	0,943	0,955	0,970	0,987

Продолжение таблицы Б.2

$t_{\text{табл}}$	Коэффициенты наклона H									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	1,00
9,0	0,968	0,961	0,961	0,967	0,976	0,990	1,006	1,023	1,038	1,051
10,0	0,982	0,993	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062
11,0	0,993	1,014	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021
12,0	0,997	1,018	1,018	1,026	1,029	1,025	1,015	1,000	0,985	0,970
13,0	0,997	1,012	1,012	1,012	1,005	0,993	0,979	0,965	0,955	0,952
14,0	0,999	1,005	1,005	0,998	0,987	0,975	0,965	0,961	0,965	0,976
15,0	1,005	1,002	1,002	0,993	0,983	0,977	0,978	0,987	1,001	1,018
16,0	1,010	1,001	1,001	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,040
17,0	1,012	1,000	1,000	0,996	0,999	1,008	1,021	1,030	1,032	1,026
18,0	1,008	0,997	0,997	0,997	1,004	1,014	1,020	1,019	1,008	0,993
19,0	1,001	0,993	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,970
20,0	0,995	0,992	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,980	0,972	0,975
21,0	0,993	0,996	0,996	1,001	1,002	0,996	0,986	0,982	0,987	1,001
22,0	0,995	1,002	1,002	1,005	1,002	0,995	0,992	0,997	1,010	1,024
23,0	0,997	1,007	1,007	1,007	1,002	0,997	1,001	1,011	1,022	1,025
24,0	0,999	1,007	1,007	1,004	0,999	0,999	1,007	1,015	1,016	1,006
25,0	1,000	1,004	1,004	0,999	0,996	1,000	1,007	1,008	0,998	0,984
26,0	1,000	0,999	0,999	0,995	0,995	1,000	1,002	0,996	0,984	0,978
27,0	1,001	0,997	0,997	0,994	0,997	1,001	0,998	0,989	0,984	0,991
28,0	1,003	0,997	0,997	0,997	1,001	1,003	0,997	0,992	0,997	1,011
29,0	1,004	0,998	0,998	1,001	1,005	1,003	0,998	1,000	1,011	1,021
30,0	1,003	0,999	0,999	1,004	1,005	1,002	0,999	1,006	1,015	1,012
31,0	1,002	1,000	1,000	1,004	1,002	0,998	1,000	1,007	1,006	0,994

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Таблица Z-преобразований

№	$x(t)$	$X(p)$	$x(i)$	$X(z)$
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1(i \Delta t)$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$i \Delta t$	$\frac{\Delta t z}{(z-1)^2}$
3	t^2	$\frac{2}{p^3}$	$(i \Delta t)^2$	$\frac{(\Delta t)^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	t^3	$\frac{3}{p^4}$	$(i \Delta t)^3$	$\frac{(\Delta t)^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha i \Delta t}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha \Delta t}}$
6	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha i \Delta t}$	$\frac{(1-e^{-\alpha \Delta t})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha \Delta t})}$
7	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$i \Delta t e^{-\alpha i \Delta t}$	$\frac{z e^{-\alpha \Delta t}}{(z-e^{-\alpha \Delta t})^2}$

Продолжение таблицы А.1

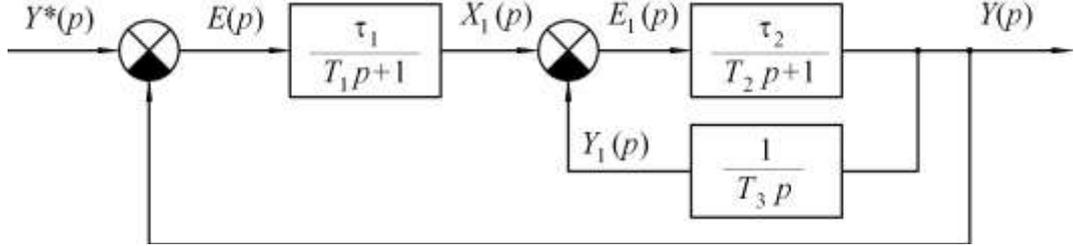
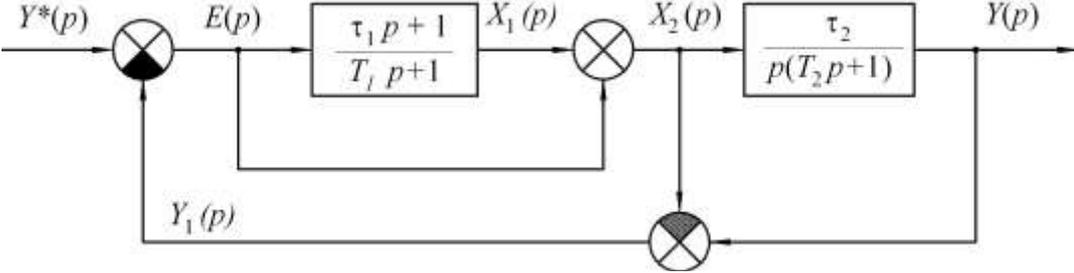
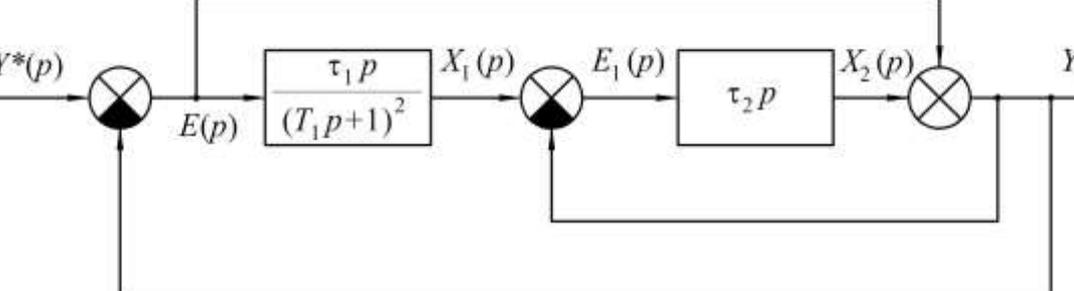
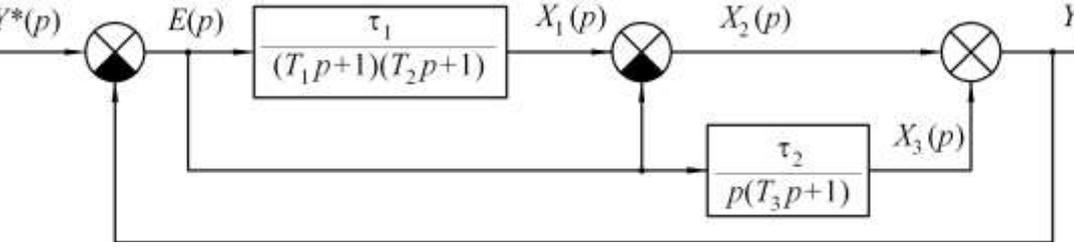
№	$x(t)$	$X(p)$	$x(i)$	$X(z)$
8	$t^2 e^{-\alpha t}$	$\frac{2}{(p+\alpha)^3}$	$(i\Delta t)^2 e^{-\alpha i\Delta t}$	$\frac{z(z+e^{-\alpha\Delta t})e^{-2\alpha\Delta t}}{(z-e^{-\alpha\Delta t})^3}$
9	$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$	$\frac{\beta-\alpha}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$e^{-\alpha i\Delta t} - e^{-\beta i\Delta t}$	$\frac{z(e^{-\alpha\Delta t} - e^{-\beta\Delta t})}{(z-e^{-\alpha\Delta t})(z-e^{-\beta\Delta t})}$
10	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega i\Delta t)$	$\frac{z \sin(\omega\Delta t)}{z^2 - 2z \cos(\omega\Delta t) + 1}$
11	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega i\Delta t)$	$\frac{z(z - \cos(\omega\Delta t))}{z^2 - 2z \cos(\omega\Delta t) + 1}$
12	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha i\Delta t} \sin(\omega i\Delta t)$	$\frac{z e^{-\alpha\Delta t} \sin(\omega\Delta t)}{z^2 - 2z e^{-\alpha\Delta t} \cos(\omega\Delta t) + e^{-2\alpha\Delta t}}$
13	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha i\Delta t} \cos(\omega i\Delta t)$	$\frac{z^2 - z e^{-\alpha\Delta t} \cos(\omega\Delta t)}{z^2 - 2z e^{-\alpha\Delta t} \cos(\omega\Delta t) + e^{-2\alpha\Delta t}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1 – Структурные схемы САУ

№	Структурная схема
1	
2	
3	
4	

Продолжение таблицы Б.1

№	Структурная схема
5	
6	
7	
8	

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров, И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – Москва: Машиностроение, 1981. – 504 с.
1. Лукас, В. А. Теория автоматического управления. – Москва: Недра, 1990. – 416 с.
3. Ключев, А. С. Автоматическое регулирование. – Москва: Высшая школа, 1986. – 351с.
4. Котов К. Н. Автоматическое регулирование и регуляторы / К. Н. Котов, Н. А. Шершевер. – Москва: Металлургия, 1987. – 384 с.
5. Штефан, И. А. Структурные преобразования в системах оценивания и управления / И. А. Штефан,. В. Я. Карташов. – Кемерово: КемГУ, 1989. – 38 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	1
2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	7
1.1 Получение передаточной функции по дифференциальному уравнению	7
1.2 Структурные схемы систем автоматического управления.....	9
1.3 Типовые структуры связей между элементами системы	13
1.4 Преобразование структурных схем.....	15
3 ПРИМЕРЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ	18
4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	28
5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	41
6 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	2
СОДЕРЖАНИЕ.....	3

Составители

Галина Алексеевна Алексеева
Иван Владимирович Чичерин
Илья Сергеевич Сыркин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания к лабораторной работе по дисциплине
"Информационная теория управления" для студентов
направления подготовки бакалавров 230400.62
"Информационные системы и технологии"
профиль "Информационные системы и технологии"

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л.

Тираж экз. Заказ

ГУ КузГТУ. 650026, Кемерово, ул. Весенняя, 28.

Типография ГУ КузГТУ. 650099, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4 А.

