

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачёва»

Кафедра информационных и автоматизированных  
производственных систем

## ПЛАНЫ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям по дисциплинам «**Теория механизмов и машин**» и «**Основы проектирования**» для обучающихся направлений подготовки: 15.03.01 (РС, ТС) «Машиностроение»; 15.03.05 (МТ, МС) «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»; 18.03.02 (ХМ) «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии»; 23.03.03 (МА, ТК) «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Составители Н. П. Курышкин  
В. Н. Ермак

Утверждены на заседании кафедры  
Протокол № 9 от 21.05.2019  
Рекомендованы к печати  
учебно-методической комиссией  
направления подготовки 15.03.01  
Протокол № 10 от 24.04.2019  
Электронная копия находится  
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2019

## ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ

Цель занятия – практическое освоение методики кинематического анализа механизмов второго класса методом планов скоростей и ускорений. Для предложенной схемы рычажного механизма по заданному движению входного звена необходимо определить скорости и ускорения всех шарнирных точек и центров масс звеньев. Требуется также определить угловые скорости и угловые ускорения всех звеньев.

## КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Кинематический анализ механизмов выполняют в порядке присоединения групп Ассура. Начальным считают звено с заданным положением и движением.

Положения звеньев определяют построением кинематической схемы механизма. Скорости и ускорения находят графическим решением векторных уравнений, составленных на основании разложения движения звеньев на некоторое *переносное* и *относительное*.

Переносным (переносящим) считается движение подвижной системы координат (ПСК) относительно неподвижной, связанной со стойкой. Искомая абсолютная скорость и ускорение при составном движении определяются по формулам:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}; \quad (1)$$

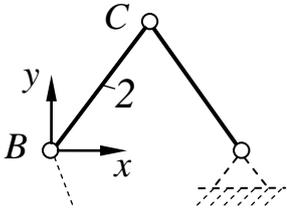
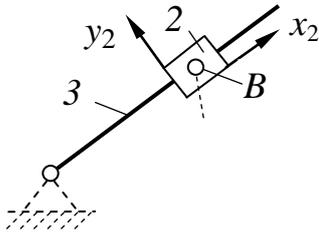
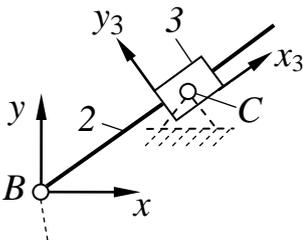
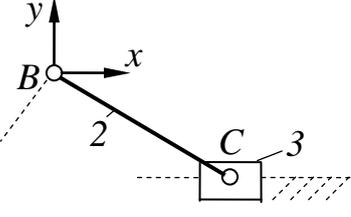
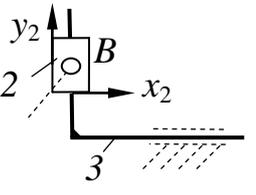
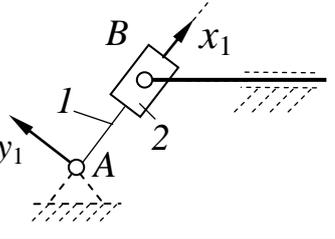
$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}}, \quad (2)$$

где  $\vec{v}_{\text{пер}}$ ,  $\vec{a}_{\text{пер}}$  – скорость и ускорение той точки ПСК, которая в данный момент совпадает с переносимой;  $\vec{v}_{\text{отн}}$ ,  $\vec{a}_{\text{отн}}$  – скорость и ускорение переносимой точки относительно ПСК;  $\vec{a}_{\text{кор}}$  – ускорение Кориолиса.

Графическое решение уравнений (1), (2) называется планом скоростей и планом ускорений, соответственно.

Разложение движения и составление векторных уравнений является самым трудным этапом решения задачи кинематического анализа, поэтому при решении задачи рекомендуется воспользоваться табл. 1, где приведены все группы Ассура второго класса в различных вариантах их присоединения к начальному механизму.

## Группы Ассур и векторные уравнения

№	Группа Ассур	Разложение абсолютного движения	Скорости и ускорения
1		звена 2 на: 1) поступ. с $Bxy$ ; 2) вращ. относит. $Bxy$ .	$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$ $\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau$
2		звена 3 на: 1) пл.-пар. с $x_2y_2$ ; 2) поступ. относит. $x_2y_2$ .	$\bar{v}_{B_3} = \bar{v}_{B_2} + \bar{v}_{B_3 2}$ $\bar{a}_{B_3}^n + \bar{a}_{B_3}^\tau = \bar{a}_{B_2} + \bar{a}_{B_3 2} + \bar{a}_{B_3 2}^{\text{кор}}$
2a		звена 2 на: 1) поступ. с $Bxy$ ; 2) вращ. относит. $Bxy$ . Звена 2 на: 1) вращ. с $x_3y_3$ ; 2) поступ. отн. $x_3y_3$ .	$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_B + \bar{v}_{C_2 B}$ $\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_B + \bar{a}_{C_2 B}^n + \bar{a}_{C_2 B}^\tau$ $\bar{a}_{C_2} = \underbrace{\bar{a}_{C_3}}_{=0} + \bar{a}_{C_2 3} + \bar{a}_{C_2 3}^{\text{кор}}$
3		звена 2 на: 1) поступ. с $Bxy$ ; 2) вращ. относит. $Bxy$ .	$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$ $\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau$
4		звена 3 на: 1) поступ. с $x_2y_2$ ; 2) поступ. относит. $x_2y_2$ .	$\bar{v}_{B_3} = \bar{v}_{B_2} + \bar{v}_{B_3 2}$ $\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_2} + \bar{a}_{B_3 2}$
5		звена 2 на: 1) вращ. с $x_1y_1$ вокруг точки $A$ ; 2) поступ. относит. $x_1y_1$ .	$\bar{v}_{B_2} = \bar{v}_{B_1} + \bar{v}_{B_2 1}$ $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_{B_2 1} + \bar{a}_{B_2 1}^{\text{кор}}$

В этой же таблице показано разложение абсолютного движения и записаны векторные уравнения для определения скоростей и ускорений.

В некоторых случаях из уравнений ускорений выпадает  $\bar{a}_{\text{кор}}$  – ускорение Кориолиса. Это происходит тогда, когда удаётся сделать переносное движение поступательным. Если ПСК совершает поступательное движение, то её угловая скорость равна нулю и  $\bar{a}_{\text{кор}} = 0$ .

П р и м е р. Для кулисного механизма с центрами масс звеньев  $S_1$ ,  $S_2$  (рис. 2, а) дано:  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{AS_1}$ ,  $l_{BS_2}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ .

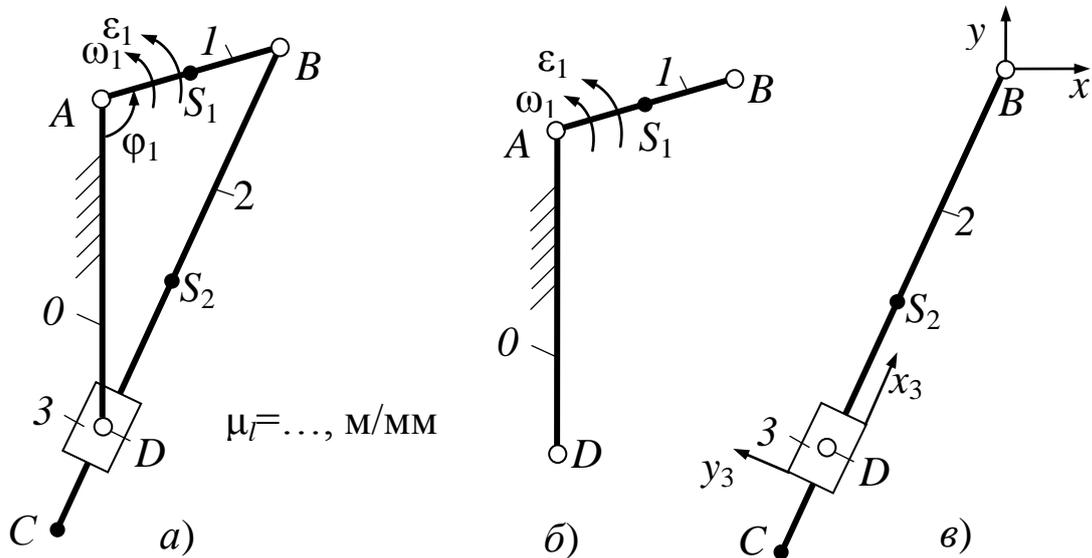


Рис. 2

Схема вычерчена в положении, заданном углом  $\varphi_1$ ; определён или выбран заранее масштабный коэффициент схемы  $\mu_l$ . Требуется определить:  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{v}_{D_2}$ ,  $\bar{v}_C$ ,  $\bar{v}_{S_1}$ ,  $\bar{v}_{S_2}$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\bar{a}_B$ ,  $\bar{a}_{D_2}$ ,  $\bar{a}_C$ ,  $\bar{a}_{S_1}$ ,  $\bar{a}_{S_2}$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ .

Согласно рекомендациям, изложенным выше, разложим механизм на группы Ассура. Для этого выделим начальную систему, состоящую из стойки 0 и кривошипа 1 (рис. 2, б). Остаётся двухповодковая группа Ассура, состоящая из звеньев 2 и 3 (рис. 2, в). Внутренняя пара этой группы – поступательная.

Определим скорости в начальной системе. Скорость точки  $B$ :

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB}, \text{ м/с}; \quad (3)$$

она направлена перпендикулярно  $AB$  в сторону  $\omega_1$  (см. рис. 1,  $a$ );  
Скорость точки  $S_1$   $v_{S_1} = \omega_1 \cdot l_{AS_1}$  и направлена в ту же сторону.

По табл. 1 находим группу Ассура «нашей» структуры (с внутренней поступательной парой) и «нашего» варианта присоединения к начальной системе. Такая группа находится в строке 2а. С учётом обозначений, принятых на рис. 2, из таблицы 1 получаем:

$$\frac{\bar{v}_{D_2}}{\parallel BD} = \frac{\bar{v}_B}{\perp AB} + \frac{\bar{v}_{D_2B}}{\perp BD}, \quad (4)$$

где  $\bar{v}_{D_2}$  – скорость точки  $D_2$  относительно стойки;  $\bar{v}_{D_2B}$  – скорость точки  $D_2$  относительно системы  $Bxy$ .

Скорости в уравнении (4) дополним обозначением направлений линий их действия, а также подчёркиваниями: одной чертой, если известна только линия действия вектора, двумя чертами, если известен ещё и модуль вектора. Такие дополнения позволяют быстро оценить разрешимость векторного уравнения. Векторное уравнение разрешимо, если содержит не более двух неизвестных. В уравнении (4) крайние векторы подчёркнуты одной чертой, их модули неизвестны, следовательно, это уравнение разрешимо.

Для решения уравнения из произвольно выбранного полюса  $p$  (рис. 3,  $b$ ) проведём вектор  $pb$ , изображающий скорость точки  $B$ . Длину вектора выберем произвольно. Вычислим масштабный коэффициент будущего плана скоростей:

$$\mu_v = v_B / \langle pb \rangle, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}.$$

Согласно уравнению (4), из конца вектора  $pb$  проведём линию перпендикулярно  $DB$ , а из полюса  $p$  – линию параллельно  $DB$ . Получим точку пересечения этих линий  $d_2$ . Векторы  $pd_2$  и  $bd_2$  (от  $b$  к  $d_2$ ) изображают скорости  $\bar{v}_{D_2}$  и  $\bar{v}_{D_2B}$  соответственно. Модули этих векторов вычислим по формуле:

$$v_i = \langle v_i \rangle \cdot \mu_v, \quad (5)$$

где  $\langle v_i \rangle$  – выраженная в миллиметрах длина отрезка, изображающего скорость  $v_i$ . Например,  $v_{D_2} = \langle pd_2 \rangle \cdot \mu_v$ , м/с.

Когда известны скорости двух точек какого-либо звена, скорость третьей и любой другой точки определяют по теореме подобия.

Согласно теореме, точки на звене и концы их скоростей на плане образуют подобные и сходственно расположенные фигуры. На данный момент известны скорости точек  $B$  и  $D$  звена 2, поэтому скорости точек  $C$  и  $S_2$  определяем по теореме подобия. Точки  $B$ ,  $S_2$ ,  $D$ ,  $C$  звена 2 расположены на одной прямой. Таким же должно быть расположение концов  $b$ ,  $s_2$ ,  $d$ ,  $c$  их скоростей. Из геометрического подобия следует:  $\frac{BD}{DC} = \frac{bd_2}{d_2c}$ , откуда  $d_2c = bd_2 \frac{DC}{BD}$ . При движении по звену 2 из точки  $B$  в  $D$  точка  $C$  встречается после  $D$ . Таким же должно быть взаимное положение точек  $b$ ,  $d_2$ ,  $c$  на плане скоростей. На этом основании найдём положение точки  $c$ . Длины отрезков  $DC$  и  $BD$  снимают со схемы механизма в миллиметрах.

Предположим, что по заданию центр масс кулисы  $S_2$  находится на середине отрезка  $BC$ . Тогда, разделив отрезок  $bc$  на плане скоростей пополам, найдём положение точки  $s_2$ . Проведя из точки  $p$  векторы  $pc$  и  $ps_2$  получим скорости  $\bar{v}_C$  и  $\bar{v}_{S_2}$ , соответственно. Модули скоростей вычисляются по формуле (5). На этом плане скоростей можно считать построенным.

После определения линейных скоростей перейдём к угловым скоростям звеньев. Угловая скорость кулисы

$$\omega_2 = v_{D_2B} / l_{DB}, \text{ с}^{-1}.$$

Судя по уравнению (5), вектор  $\bar{v}_{D_2B}$  направлен от точки  $b$  к точке  $d_2$  (о чём говорилось выше). Переносом вектора  $\bar{v}_{D_2B}$  по принадлежности в точку  $D_2$  (рис. 3,  $a$ ) найдём, что он стремится повернуть кулису вокруг точки  $B$  против часовой стрелки, туда же направлена и скорость  $\omega_2$  (как относительная, так и абсолютная).

Кулиса 2 и кулисный камень 3 соединены между собой поступательной кинематической парой, поэтому  $\omega_3 = \omega_2$ . Причём, как по величине, так и по направлению. На этом определение линейных и угловых скоростей закончено.

Перейдём к ускорениям. Последовательность определения ускорений та же, что и скоростей. Ускорение точки  $B$  кривошипа (рис. 2,  $b$ , см. также рис. 1,  $a$ )

$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^t}}, \quad (6)$$

$\parallel BA \perp BA$

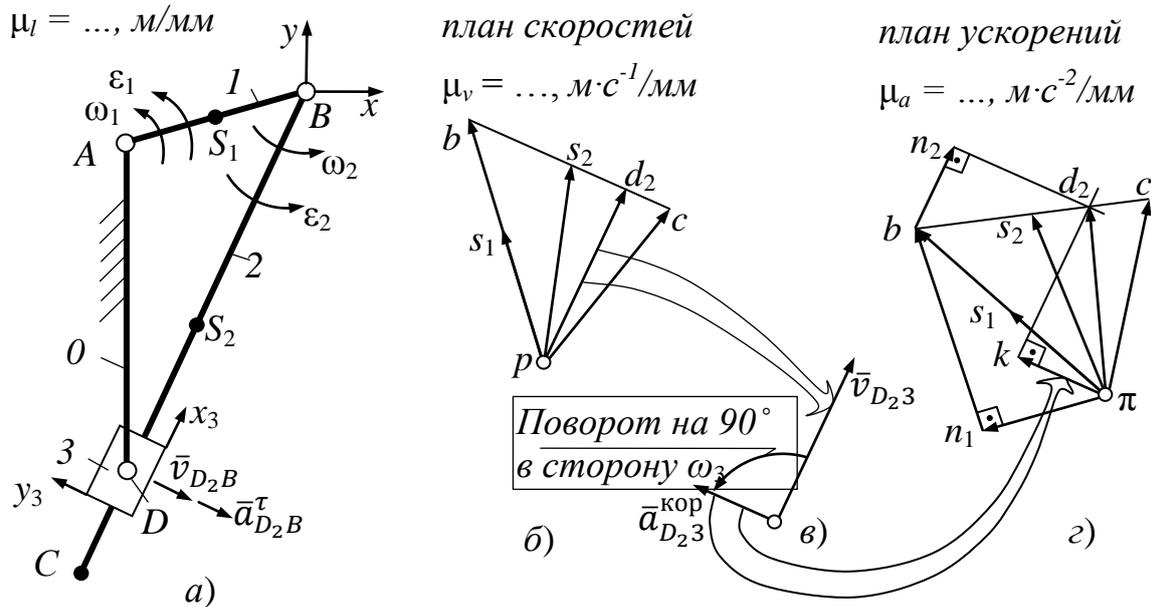


Рис. 3

где  $\bar{a}_B^n$  – нормальная составляющая,  $\bar{a}_B^\tau$  – тангенциальная.

$a_B^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ , м/с<sup>2</sup>,  $a_B^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{AB}$ , м/с<sup>2</sup>.  $\bar{a}_B^n$  направлено от  $B$  к  $A$ ,  $\bar{a}_B^\tau$  – перпендикулярно  $AB$  в сторону  $\varepsilon_1$ .

Полное ускорение точки  $B$  найдём графически (рис. 3,  $z$ ). Для этого из полюса  $\pi$  проведём произвольной длины отрезок  $\pi n_1$ , изображающий  $\bar{a}_B^n$ . По формуле  $\mu_a = a_B^n / \langle \pi n_1 \rangle$ , м·с<sup>-2</sup>/мм, вычислим масштабный коэффициент будущего плана ускорений. Вычислим длину отрезка  $n_1 b$ , изображающего ускорение  $\bar{a}_B^\tau$ :  $n_1 b = a_B^\tau / \mu_a$ , мм. Отложим  $n_1 b$  из точки  $n_1$ . Соединив полюс  $\pi$  с точкой  $b$ , получим вектор  $\pi b$ , изображающий  $\bar{a}_B$ . Численное значение ускорения точки  $B$  найдём по формуле:  $a_B = \langle \pi b \rangle \cdot \mu_a$ , м/с<sup>2</sup>. Таким образом, модуль и направление ускорения  $\bar{a}_B$  найдены.

Ускорение центра масс  $S_1$  кривошипа найдём по теореме подобия, которая для ускорений формулируется так же, как и для скоростей. Отметим, что ускорение  $\bar{a}_A = 0$  и, следовательно, начало и конец ускорения точки  $A$  находится в полюсе  $\pi$ . Предположим, что по условию задачи точка  $S_1$  расположена на середине  $AB$ . Такое же положение должна занимать точка  $s_1$  по отношению к  $ab$ .

Проведя вектор из  $\pi$  в  $s_1$ , получим ускорение  $\bar{a}_{s_1}$ . Как видно по рисунку,  $a_{s_1} = a_B/2$ , м/с<sup>2</sup>.

Определим ускорения в группе Ассура 2, 3. Начнём с точки  $D_2$ . Как видно по табл. 1 (строка 2а) и с учётом обозначений, принятых на рис. 2, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{D_2} = \underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}_{D_2B}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{D_2B}^\tau}} \\ \bar{a}_{D_2} = \underbrace{\bar{a}_{D_3}}_{=0} + \underline{\underline{\bar{a}_{D_23}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{D_23}^{\text{кор}}}}, \end{array} \right. \quad (7)$$

$\parallel DB \quad \perp DB$

где  $\bar{a}_{D_2B}^n$  и  $\bar{a}_{D_2B}^\tau$  – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения точки  $D_2$  относительно системы  $Bxu$ ;  $\bar{a}_{D_3}$  – ускорение точки  $D$  звена 3 (эта точка неподвижна);  $\bar{a}_{D_23}$  и  $\bar{a}_{D_23}^{\text{кор}}$  – относительное и кориолисово ускорение точки  $D_2$  относительно системы  $x_3y_3$ . Указанные под уравнениями линии действия ускорений относятся к слагаемым, как первого, так и второго уравнений.

Вычислим  $a_{D_2B}^n$  и  $a_{D_23}^{\text{кор}}$ :

$a_{D_2B}^n = \omega_2^2 \cdot l_{DB}$ , м/с<sup>2</sup>;  $a_{D_23}^{\text{кор}} = 2 \cdot \omega_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{D_23}$ , м/с<sup>2</sup> ( $v_{D_23} = v_{D_2}$ ). Направление ускорения Кориолиса определим по правилу Жуковского с помощью рис. 3, в. После вычислений остаются неизвестными  $a_{D_2B}^\tau$ ,  $a_{D_23}$  и  $\bar{a}_{D_2}$ . Последнее неизвестно ни по величине, ни по направлению. С учётом этого имеем два уравнения с четырьмя неизвестными, из чего следует, что система (7) разрешима.

Графическое решение этой системы (рис. 3, г) заключается в построении из единой точки (полюса  $\pi$ ) цепочек векторов, стоящих в правой части уравнений. Вектор  $\bar{a}_{D_23}$  прибавляют последним. Точка пересечения линий действия последних слагаемых даёт решение.

На основании этих правил, из конца вектора  $\pi b$  проведём вектор  $\pi n_2 = a_{D_2B}^n / \mu_a$ , мм, изображающий ускорение  $\bar{a}_{D_2B}^n$ . Из точки  $n_2$  проведём линию действия вектора  $\bar{a}_{D_2B}^\tau$ . Цепочка векторов второго уравнения начинается в полюсе  $\pi$  вектором  $\pi k$  длиной  $\pi k = a_{D_23}^{\text{кор}} / \mu_a$ , мм. Из точки  $k$  проведём линию действия относитель-

ного ускорения  $\bar{a}_{D_23}$ . На пересечении линий действия векторов  $\bar{a}_{D_2B}^T$  и  $\bar{a}_{D_23}$  получим точку  $d_2$ . Соединив полюс  $\pi$  с точкой  $d_2$ , получим ускорение точки  $D_2$ . Численное значение этого ускорения определим по формуле:  $a_{D_2} = \langle \pi d_2 \rangle \cdot \mu_a$ , м/с<sup>2</sup>. Аналогично найдём:  $a_{D_2B}^T = \langle n_2 d_2 \rangle \cdot \mu_a$ , м/с<sup>2</sup>;  $a_{D_23} = \langle k d_2 \rangle \cdot \mu_a$ , м/с<sup>2</sup>.

Ускорения точек  $C$  и  $S_2$  определим по теореме подобия. Кинематический анализ закончим определением угловых ускорений звеньев. Угловое ускорение кулисы 2  $\varepsilon_2 = a_{D_2B}^T / l_{DB}$ , с<sup>-2</sup>. Направление  $\varepsilon_2$  определим переносом вектора  $n_2 d_2$ , изображающего ускорение  $\bar{a}_{D_2B}^T$ , в точку  $D_2$  (см. рис. 3, а). Этот вектор стремится повернуть звено 2 вокруг точки  $B$  против часовой стрелки. Так же направлено и  $\varepsilon_2$ . Угловое ускорение  $\varepsilon_3$  кулисного камня 3, как и угловая скорость, равно угловому ускорению  $\varepsilon_2$ . На этом решение задачи закончено.

### ЗАДАНИЕ

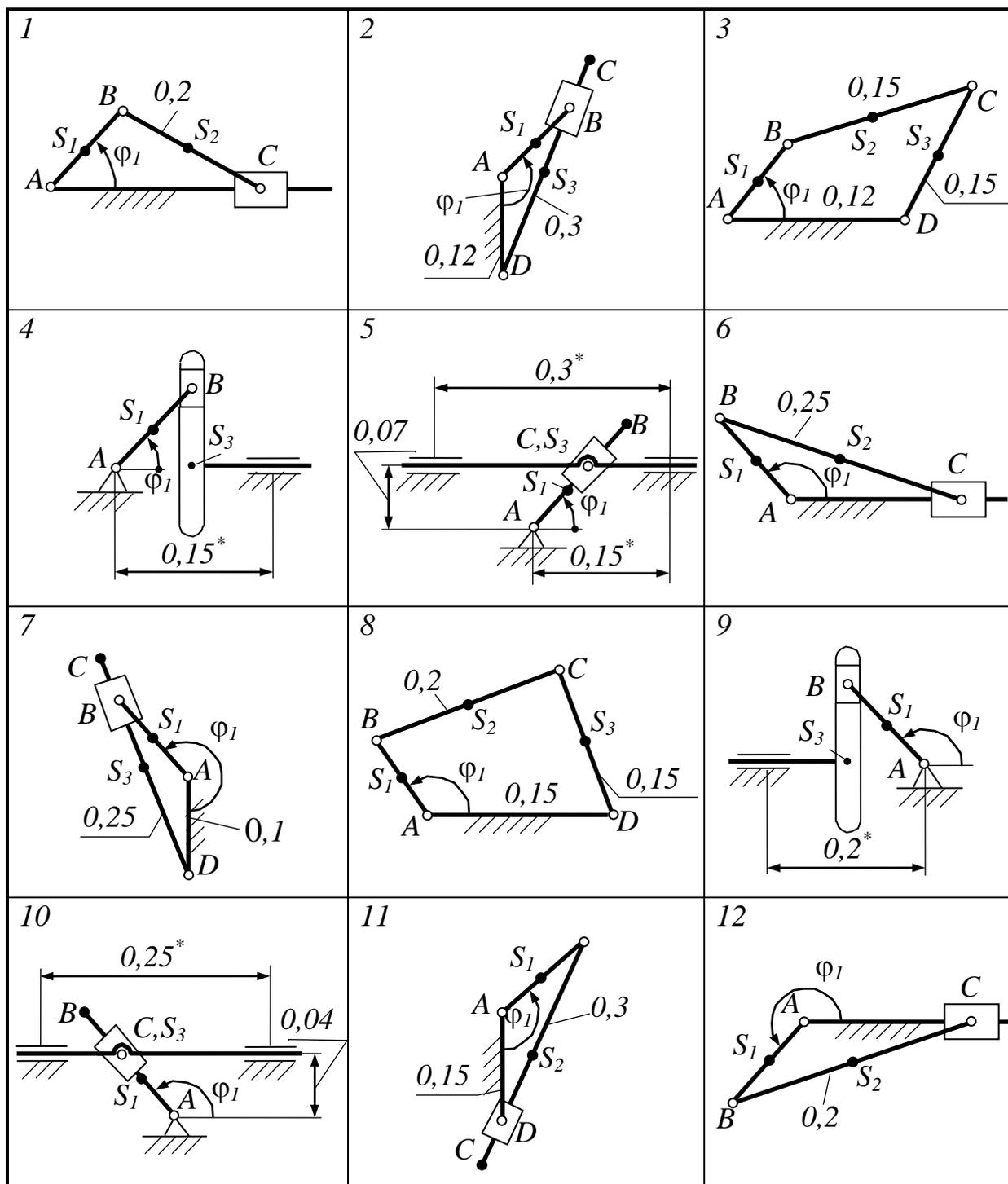
Для предложенной схемы механизма (см. приложение) по заданным  $\varphi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$  методом планов определить:

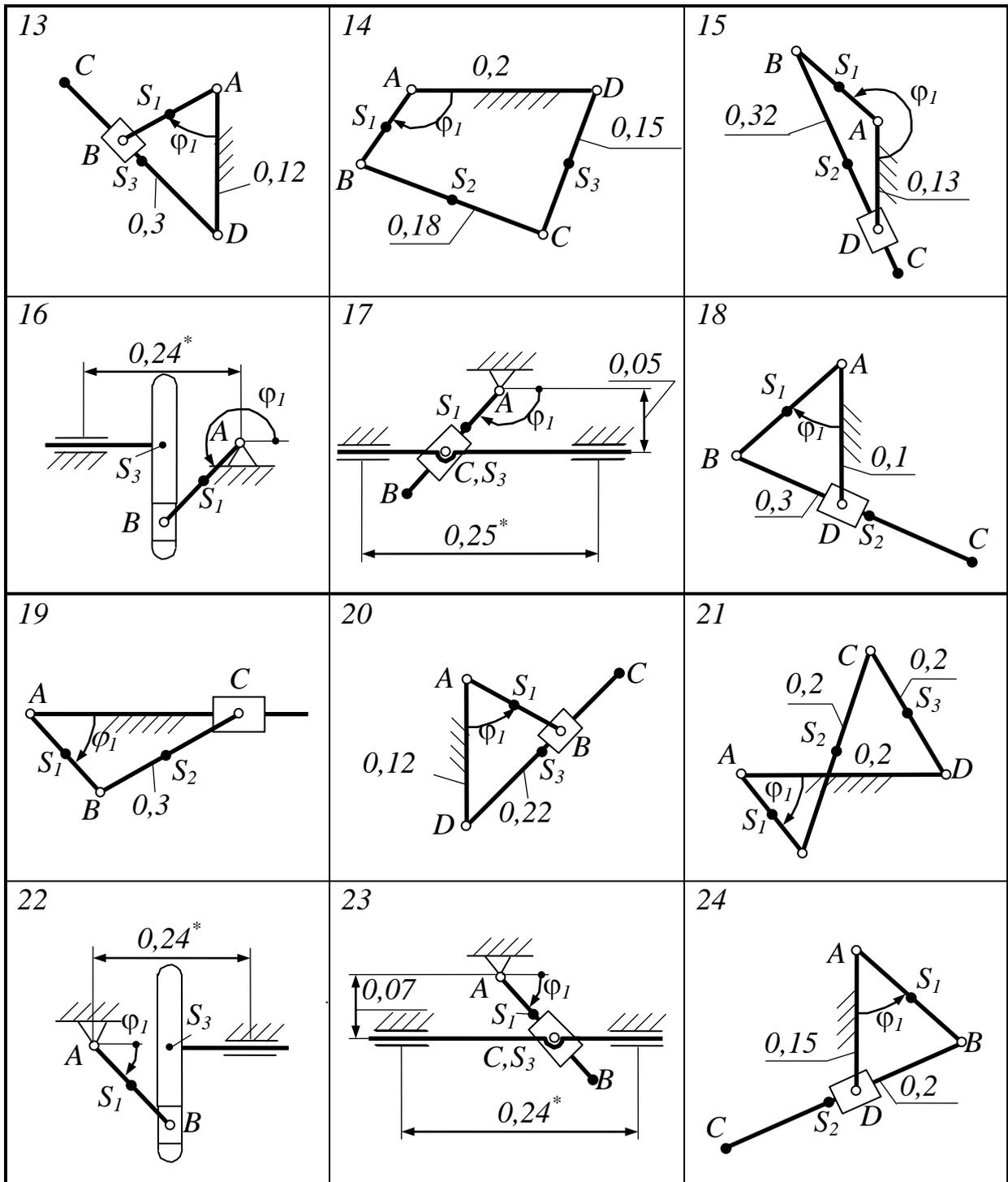
- скорости и ускорения всех обозначенных точек механизма;
- угловые скорости и угловые ускорения всех звеньев.

Центры масс звеньев  $S_i$  находятся на их середине. Угол  $\varphi_1$  принять кратным 45°,  $\omega_1 = 10$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon_1 = 200$  с<sup>-2</sup>, Направление  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  – против часовой стрелки. Размеры звеньев, приведенные на схеме, представлены в метрах. Длина кривошипа во всех заданиях  $l_{AB} = 0,1$  м.

### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Ермак, В. Н. Теория механизмов и машин (краткий курс): учеб. пособие / В. Н. Ермак; Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 2011. – 164 с.





\* – размеры использовать при силовом расчёте.

Составители

Николай Петрович Курышкин

Владимир Николаевич Ермак

## ПЛАНЫ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям по дисциплинам «Теории механизмов и машин» и «Основы проектирования» для обучающихся направлений подготовки: 15.03.01 (МТ, МС) «Машиностроение»; 15.03.05 (РС, ТС) «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»; 18.03.02 (ХМ) «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии»; 23.03.03 (МА, ТК) «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 03.06.2019. Формат 60×84/16

Бумага белая офсетная. Отпечатано на ризографе

Уч.-изд. л. 0,5. Тираж 25 экз. Заказ \_\_\_\_\_

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово,

ул. Д. Бедного, 4а