

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»**

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
направления подготовки 15.03.04
Автоматизация технологических процессов и производств
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна

Чередниченко Алла Валериевна

Дополнительные главы математики: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств всех форм обучения / сост.: Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины «Дополнительные главы математики».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по дисциплине «Дополнительные главы математики» и организация самостоятельной работы.

© КузГТУ, 2019

© Николаева Е. А.,
Чередниченко А. В.,
составление, 2019

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по дисциплине «Дополнительные главы математики».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Раздел 1. Теория множеств. Множества и свойства операций над ними. Формула включений и исключений. Мощность булеана множества. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности и частичного (полного) порядка. Диаграмма Хассе. Функции: инъекции, сюръекции и биекции, условие обратимости.

Практическое занятие:

1. Дано универсальное множество U и множества A , B и C .
Найти множество D . Записать ответ в виде списка.

Вариант 1

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 5\};$$

$$D = (A \cup \bar{B}) - C.$$

Вариант 2

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, d, e, g\}, B = \{b, d, g, h\}, C = \{a, b, c, g\};$$

$$D = (A \cup \bar{B}) \cap C.$$

Вариант 3

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 5, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 8\};$$

$$D = (A \cap \bar{B}) - C.$$

Вариант 4

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, c, e, h\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, h\};$$

$$D = (A - \bar{B}) \cup C.$$

Вариант 5

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{1, 4, 5, 7\}, B = \{2, 4, 5, 8\}, C = \{1, 2, 4, 5\};$$

$$D = (\bar{A} \cup \bar{B}) - C.$$

Вариант 6

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, c, d, g\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, g\};$$

$$D = (\bar{A} \cup B) - C.$$

2. На диаграмме Вьенна–Эйлера изобразить результат действия:

Вариант 1 $(\bar{C} - \bar{B}) \cup A.$

Вариант 2 $(\bar{C} \cap \bar{B}) \cup A.$

Вариант 3 $(\bar{C} \cup \bar{B}) \cup A.$

Вариант 4 $(\bar{C} \cap \bar{B}) \cap A.$

Вариант 5 $(\bar{C} \cap \bar{B}) - A.$

Вариант 6 $(C \cap \bar{B}) \cap A.$

Вариант 7 $(C \cap \bar{B}) - \bar{A}.$

Самостоятельная работа:

1. Дано универсальное множество U и множества A , B и C .
Найти множество D . Записать ответ в виде списка.

Вариант 1

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, b, e, g\}, B = \{b, c, f, h\}, C = \{a, b, d, g\};$$

$$D = (A - \bar{B}) \cap C.$$

Вариант 2

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{1, 3, 6, 7\}, B = \{1, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 6\};$$

$$D = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C.$$

Вариант 3

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{b, c, e, g\}, B = \{b, e, f, h\}, C = \{a, b, f, g\};$$

$$D = (A \cup \bar{B}) \cap C.$$

Вариант 4

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{2, 3, 4, 7\}, B = \{1, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 4, 5\};$$

$$D = (\bar{A} \cap B) - C.$$

Вариант 5

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, f, e, g\}, B = \{a, d, f, h\}, C = \{a, b, c, h\};$$

$$D = (\bar{A} \cap \bar{B}) - C.$$

Вариант 6

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{1, 4, 5, 6\}, B = \{1, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 7\};$$

$$D = (\bar{A} \cap B) \cap C.$$

Вариант 7

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A = \{a, c, e, g\}, B = \{b, d, f, h\}, C = \{a, b, c, g\};$$

$$D = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup C.$$

Вариант 8

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A = \{2, 4, 5, 6\}, B = \{2, 3, 6, 8\}, C = \{1, 2, 4, 5\};$$

$$D = (A - \bar{B}) - C.$$

2. На диаграмме Вьенна–Эйлера изобразить результат действия:

Вариант 1 $(C \cup \bar{B}) \cup A.$

Вариант 2 $(C - \bar{B}) \cup A$.

Вариант 3 $(C - \bar{B}) - A$.

Вариант 4 $(C \cup \bar{B}) - A$.

Вариант 5 $(C \cap \bar{B}) - A$.

Вариант 6 $(C \cap \bar{B}) \cup \bar{A}$.

Вариант 7 $(\bar{C} - \bar{B}) - A$.

Вариант 8 $(\bar{C} \cup B) \cup A$.

Раздел 2. Комбинаторика. Виды комбинаторных соединений (выборки). Принципы сложения и умножения. Размещения, перестановки, сочетания без повторения (с повторением) элементов. Формулы числа разбиений целого на части (задача о расселении). Свойства чисел сочетаний: бином Ньютона, треугольник Паскаля.

Практическое занятие:

1. В аквариуме 13 рыбок, из них 5 красных. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок была ровно 1 красная?

2. Сколько способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для бега на дистанцию 1000 м?

3. На прилавке 11 банок рыбных консервов. Из них – одна испорчена. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок попалась испорченная?

4. Сколько способов составить слово БАБА из карточек разрезной азбуки слова АБРАКОДАБРА, выбирая их случайным образом?

5. В темном погребе 10 банок с огурцами. Из них 3 – помутнели. Наугад выбирают 3 банки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных банок была ровно 1 помутневшая?

6. Сколько способов составить слово СПОР из карточек разрезной азбуки слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ, выбирая их случайным образом?

7. В корзинке 13 опенков, из них 4 ложных. Наугад выбирают 7 опят. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных грибов было ровно 2 ложных?

8. Сколько способов выбрать из 10 человек команды 3 человека для участия в эстафете на 200, 300 и 400 м?

9. В ведерке 10 зернышек, из них 3 не взойдут. Наугад выбирают 5 для посадки. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных зернышек взойдут ровно 2?

10. Сколько способов составить слово БРАК из карточек разрезной азбуки слова АБРАКОДАБРА, выбирая их случайным образом?

11. В коробке 12 карандашей, 10 цветных и 2 простых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных карандашей было ровно 2 цветных?

12. Сколько способов выбрать из 6 шаров 2 – один для Маши, а другой для Вити?

13. В колхозном гараже 4 трактора и 3 сеялки. Наугад выбирают 4 машины. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных было ровно 3 трактора золотых?

14. Сколькими способами можно набрать последние 3 цифры телефонного номера?

Самостоятельная работа:

1. В курятнике 11 куриц, из них 7 рябок, остальные белые. Наугад выбирают 4. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных куриц было ровно 3 белых?

2. Сколько способов составить слово АБРАКОДАБРА из карточек разрезной азбуки, переставляя их случайным образом?

3. В хлеву 9 коров, из них 6 доят. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 доящихся коровы?

4. Сколько способов составить из букв слова «МИШЕНЬ» различных слов?

5. Сколькими способами можно из 6 стандартных и 5 нестандартных болтов выбрать 3, так чтобы среди них было 1 стандартны 1 и 2 нестандартных?

6. Сколькими способами можно посадить 6 различных цветов в 6 разных цветочных горшков?

7. Сколькими способами можно из 4 стандартных и 5 нестандартных деталей выбрать 4, так чтобы среди них было 2 стандартные и 2 нестандартные?

8. Сколькими способами можно расставить на 6 путях 4 состава?

9. В клетке 8 мышей, из них 4 белых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных мышей было ровно 2 белых?

10. Сколькими способами можно из 15 человек класса выбрать культорга, физорга и профорга?

11. В аквариуме 7 рыбок, из них 5 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?

12. Сколько способов выбрать из 6 шаров 2 без учета порядка?

13. В ящике 7 деталей, из них 3 стандартных. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных деталей было ровно 2 стандартных?

14. Сколькими способами можно из букв a, b, c, d составить слов длины 5?

15. В аквариуме 9 рыбок, из них 4 золотых. Наугад выбирают 3. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыбок было ровно 2 золотых?

16. Сколькими способами можно в кинотеатре рассадить 6 человек на ряд из 18 мест?

Раздел 3. Логика. Логические формы мышления: понятие, суждение, умозаключение. Операции над понятиями. Классификация простых суждений по количеству и качеству. Равносильные суждения и законы логики. Правильность умозаключения. Непосредственные умозаключения. Категорический силлогизм.

Практическое занятие:

1. Разложить логическую функцию четырех переменных:

- а) по одной переменной x_1 ;
 - б) по двум переменным x_2, x_3 ;
 - в) по трем переменным x_1, x_3, x_4 ;
 - г) по всем переменным,
- если ДНФ функции имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

2. Упростить формулу $F(x, y, z)$, используя эквивалентные преобразования. Построить вектор-столбец функции, описываемой этой формулой. Построить СДНФ функции, используя:

- а) вектор-столбец,
- б) закон расщепления по недостающим переменным

$$F(x, y, z) = xy \vee (xy \vee y\bar{z}) \vee xz \vee \bar{x}(z \vee \bar{y}).$$

3. Привести формулу к ДНФ. Найти СКНФ функции, описываемой данной формулой, используя табличное представление (вектор-столбец)

$$F(x, y, z) = \overline{xy \vee (x\bar{z} \vee y) \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}}.$$

4. Найти функцию $f^*(x_1, x_2, x_3)$, двойственную к функции, описываемой формулой

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

5. Получить тупиковую ДНФ функции, описываемой формулой

$$f(x, y, z) = \bar{y}z \vee xz \vee \bar{y}\bar{z} \vee (xy \vee \bar{x}\bar{z}).$$

6. Проверить функциональную полноту системы логических функций

$$\Sigma = \{\rightarrow, \oplus\}.$$

7. Определить, какая логическая связка используется в следующих словесных выражениях: «А, если В», «коль скоро А, то В», «в случае А имеет место В», «как А, так и В», «для А необходимо В», «для А достаточно В», «А вместе с В», «А нет имеет мест а», «А, только если В», «А, пока В», «или А, или В», «А одновременно с В», «А – то же самое, что и В».

8. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний:

8.1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

8.2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

8.3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

Самостоятельная работа:

1. Найти сокращенную ДНФ функции с помощью метода Блейка-Порецкого. Построить таблицу покрытия и найти все типовые ДНФ.

$$1.1) \quad f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$$

$$1.2) \quad f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

$$1.3) \quad f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

2. Продолжить равенство.

$$2.1) \quad (x_1 \& x_2) \& x_3 =$$

$$2.2) \quad x_1 \& x_2 =$$

$$2.3) \quad (x_1 \& x_2) \vee x_3 =$$

3. Упростить выражение (привести к ДНФ). Построить СДНФ и СКНФ из вектор-столбца.

$$3.1) \quad F(x, y, z) = \overline{xy \vee (x\bar{z} \vee y) \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}(\bar{y} \vee z)}$$

$$3.2) \quad f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$$

$$3.3) \quad f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

4. Логичны ли следующие рассуждения?

4.1. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

4.2. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

4.3. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

4.4. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

5. Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных выключателей таким образом, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он был выключен, и выключению, если он был включен. Построить по возможности более простую цепь, удовлетворяющую этому требованию.

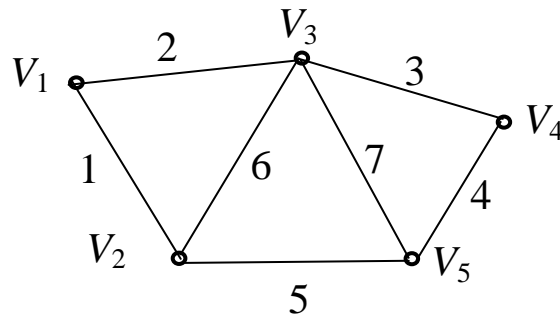
6. Пусть каждый из трех членов комитета голосуют «за», нажимая кнопку. Построить по возможности более простую цепь, которая была бы замкнута тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют «за».

Раздел 4. Теория графов. Задача о кёнигсбергских мостах. Основные понятия. Степень вершины. Эйлеров граф и его критерий. Маршруты, цепи, циклы. Связность графа. Ориентированные графы. Способы задания графов, матрицы смежности и инцидентности. Гамильтоновы циклы. Деревья: определение, признаки.

Пример:

Граф G задан диаграммой. Для него:

- 1) составить матрицу смежности;
- 2) составить матрицу инцидентности;
- 3) указать степени вершин графа;
- 4) составить маршруты длины, равной 5;
- 5) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 ;
- 6) построить простой цикл, содержащий вершину V_4 .



Решение

1) Составим матрицу смежности вершин. Она является квадратной матрицей, в которой число строк и столбцов равно числу вершин n , в данном случае $n = 5$. Составим матрицу из пяти строк и пяти столбцов, запишем ее элементы в общем виде:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \\
 \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Заполняем первую строку:

$a_{11} = 0$, так как при вершине V_1 нет петли;

$a_{12} = 1$, так как вершины V_1 и V_2 соединены одним ребром;

$a_{13} = 1$, так как вершины V_1 и V_3 соединены одним ребром;

$a_{14} = 0$, так как между вершинами V_1 и V_4 нет ребра;

$a_{15} = 0$, так как между вершинами V_1 и V_5 нет ребра.

Аналогично заполняем 2-ю строку. Смотрим, с какими вершинами соединена вершина V_2 . Она соединена с вершинами V_1 , V_3 , V_5 одним ребром. Поэтому элементы a_{21} , a_{23} , a_{25} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем третью строку. Смотрим, с какими вершинами соединена вершина V_3 . Она соединена с вершинами V_1 , V_2 , V_4 , V_5 одним ребром. Поэтому элементы a_{31} , a_{32} , a_{34} , a_{35} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем 4-ю строку. Вершина V_4 соединена с вершинами V_3 и V_5 . Поэтому элементы a_{43} и a_{45} равны 1, остальные равны 0.

Заполняем 5-ю строку. Вершина V_5 соединена с вершинами V_2 , V_3 и V_4 . Поэтому элементы a_{52} , a_{53} , a_{54} равны 1, остальные равны 0.

Запишем матрицу смежности, в которую подставим полученные значения элементов:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \\
 \begin{array}{l}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2) Составим матрицу инцидентности. В данном случае матрица инцидентности – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу вершин, то есть $m=5$, а число столбцов равно числу ребер, то есть $n=7$. Запишем ее элементы в общем виде:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\
 \begin{array}{l}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57}
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Так как граф неориентированный, то элементы матрицы будут принимать значения или 1, или 0.

Заполняем первую строку. Выделяем вершину V_1 , и смотрим, каким ребрам она принадлежит (инцидентна). Вершина V_1 инцидентна ребрам 1 и 2, поэтому $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Заполняем вторую строку. Выделяем вершину V_2 , и смотрим, каким ребрам она инцидентна. Вершина V_2 инцидентна ребрам 1, 5, 6, поэтому $a_{21} = 1$, $a_{25} = 1$, $a_{26} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Заполняем третью строку. Вершина V_3 инцидентна ребрам 2, 3, 6, 7, поэтому $a_{32} = 1$, $a_{33} = 1$, $a_{36} = 1$, $a_{37} = 1$, остальные элементы строки равны 0.

Аналогично заполняем остальные строки.

Запишем матрицу инцидентности, подставляя найденные значения элементов.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 V_1 & \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \\
 V_2 & \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right. \\
 V_3 & \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right. \\
 V_4 & \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \\
 V_5 & \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

3) Степенью вершин графа называется сумма инцидентных ей ребер.

Из вершины V_1 выходит два ребра, $d(V_1) = 2$. Вершине V_2 инцидентны три ребра, $d(V_2) = 3$. Для остальных вершин: $d(V_3) = 4$, $d(V_4) = 2$, $d(V_5) = 3$.

4) Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Длина маршрута равна количеству ребер в нем (с повторениями) Составим маршрут длины, равной 5:

$$M = \{V_1, \underline{l_2}, V_3, \underline{l_3}, V_4, \underline{l_4}, V_5, \underline{l_5}, V_2, \underline{l_6}, V_3\}.$$

5) Составим цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 . В цепи все ребра различны: $M_1 = \{V_2, \underline{l_6}, V_3, \underline{l_2}, V_1, \underline{l_1}, V_2, \underline{l_5}, V_5\}$. В простой цепи все вершины (и ребра) различны: $M_2 = \{V_2, \underline{l_5}, V_5\}$.

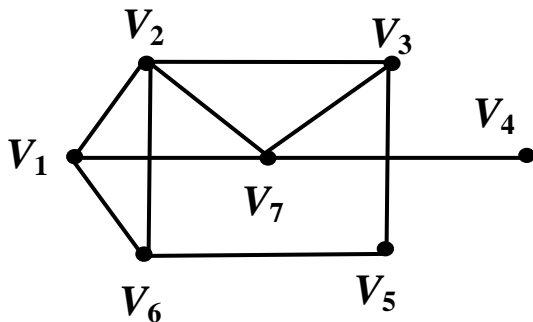
6) Построим простой цикл, содержащий вершину V_4 . Проложим через V_4 замкнутый маршрут, в котором нет повторяющихся вершин и ребер: $M_3 = \{ V_4, l_4, V_5, l_5, V_2, l_6, V_3, l_3, V_4 \}$.

Практическое занятие:

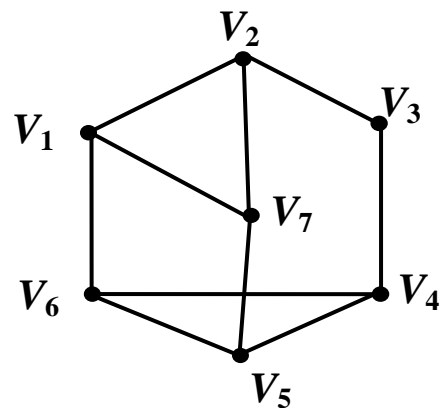
Для указанных графов:

- 1) составить матрицу смежности;
- 2) составить матрицу инцидентности;
- 3) указать степени вершин графа;
- 4) составить маршруты длины, равной 5;
- 5) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 ;
- 6) построить простой цикл, содержащий вершину V_4 .

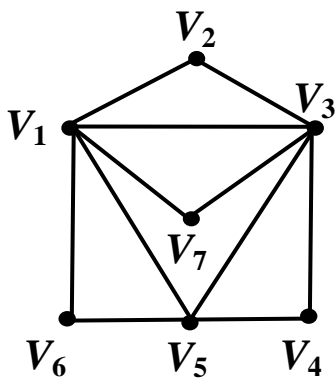
1)



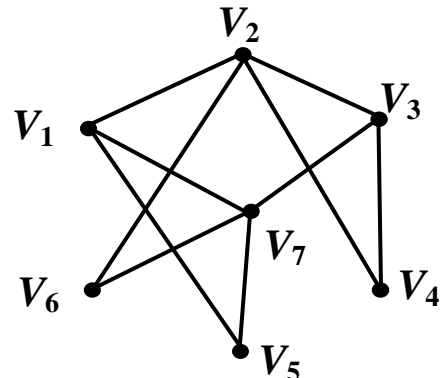
2)



3)



4)

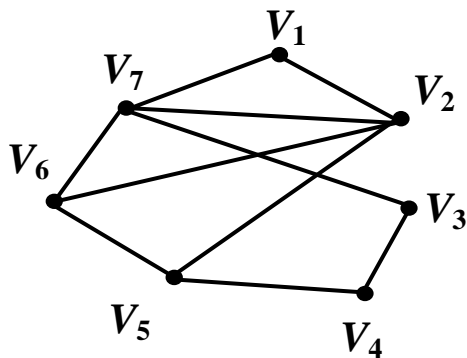


Самостоятельная работа:

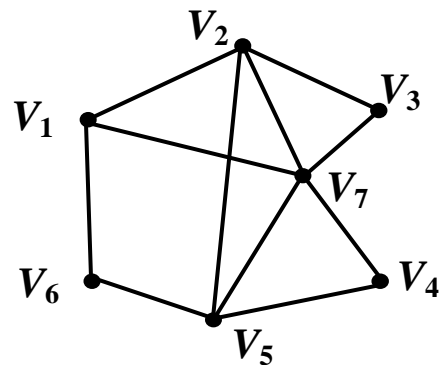
Для указанных графов:

- 1) составить матрицу смежности;
- 2) составить матрицу инцидентности;
- 3) указать степени вершин графа;
- 4) составить маршруты длины, равной 5;
- 5) составить цепь и простую цепь, соединяющие вершины V_2 и V_5 ;
- 6) построить простой цикл, содержащий вершину V_4 .

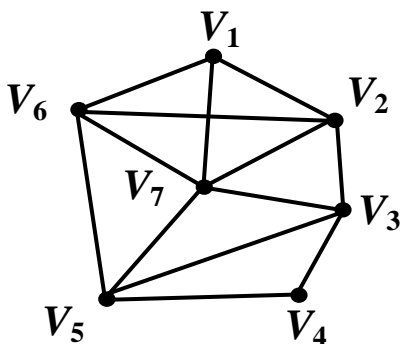
5)



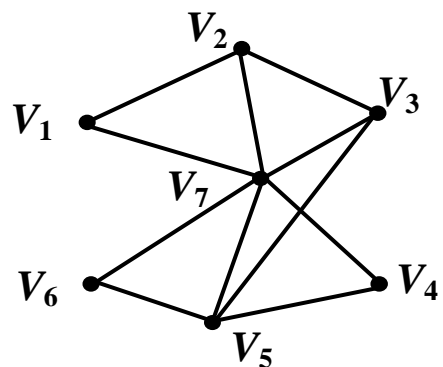
6)



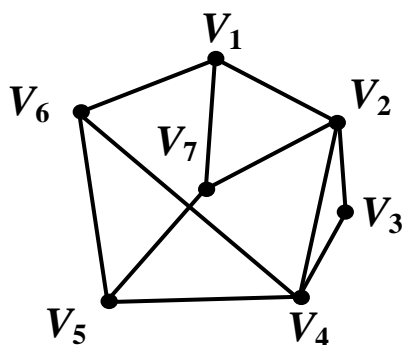
7)



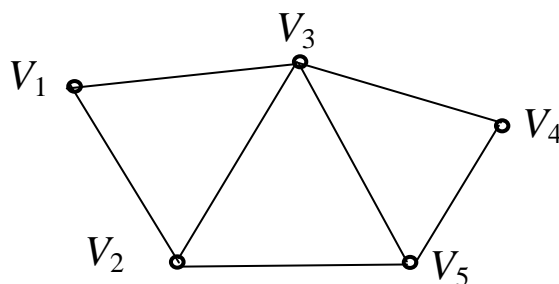
8)



9)



10)



Раздел 5. Численные методы. Приближенные числа и действия с ними. Численные методы решения алгебраических уравнений. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Пример:

I Задача приближённого вычисления корней уравнения $f(x) = 0$ распадается на две задачи:

1) задачу отделения корней, то есть отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключён один и только один корень уравнения;

2) вычисление корня с заданной точностью, используя один из рекомендуемых методов.

1. Отделить корни уравнения

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$$

аналитически и уточнить один из них методом проб с точностью 0,01.

Решение. Полагая $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$, имеем

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x - 3).$$

Отсюда корни производной: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3/4$. Составим таблицу знаков функции $f(x)$ ($\text{sign } f(x)$):

| | | | | | |
|---------------------|-----------|------|-------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $3/4$ | 1 | $+\infty$ |
| $\text{sign } f(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |

Из таблицы видно, что исходное уравнение имеет два действительных корня $x_1 \in [-\infty, -1]$; $x_2 \in [1, +\infty]$. Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

| | | | | |
|---------------------|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 1 | 2 |
| $\text{sign } f(x)$ | + | - | - | + |

Следовательно, $x_1 \in [-2, -1]$; $x_2 \in [1, 2]$.

Уточним один из корней, например, $x_1 \in [-2, -1]$, методом проб до сотых долей. В методе проб интервал изоляции корня уменьшается путём деления его, например, пополам, определяя, на границах, какой из частей первоначального интервала функция $f(x)$ меняет знак. Затем полученный интервал снова делят на две части и т. д. Такой процесс проводится до тех пор, пока не перестанут изменяться десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т. е. пока не будет достигнута заданная степень точности). Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу.

| n | a_n | b_n | $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ | $f(x_n)$ |
|-----|-------|-------|-----------------------------|----------|
| 0 | -2 | -1 | -1,5 | -3,5625 |
| 1 | -2 | -1,5 | -1,75 | 0,3633 |
| 2 | -1,75 | -1,5 | -1,63 | -1,8140 |
| 3 | -1,75 | -1,63 | -1,69 | -0,7981 |
| 4 | -1,75 | -1,69 | -1,72 | -0,2363 |
| 5 | -1,75 | -1,72 | -1,73 | -0,0406 |
| 6 | -1,75 | -1,73 | -1,74 | 0,1592 |
| 7 | -1,74 | -1,73 | | |

Ответ: $x = -1,73$.

2. Отделить корни уравнения $\text{tg}(0,55x + 0,1) = x^2$ и уточнить один из них методом хорд с точностью 0,001.

Решение. Для отделения корней построим графики функций $y_1 = \text{tg}(0,55x + 0,1)$; $y_2 = x^2$. Составим таблицу значений этих функций.

| | | | | | | |
|-------|-----|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| y_1 | 0,1 | 0,21 | 0,33 | 0,46 | 0,60 | 0,76 |
| y_2 | 0 | 0,04 | 0,16 | 0,36 | 0,64 | 1,0 |

Таким образом, положительный корень уравнения заключён в промежутке $[0,6; 0,8]$. Чтобы уточнить корень методом хорд, можно руководствоваться следующим правилом:

а) если $f''(x) \cdot f(b) > 0$ на $[a, b]$, то за приближённое значение искомого корня принимается значение

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

при этом $x_0 = a$;

б) если $f''(x) \cdot f(a) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_{n+1} = a - \frac{(x_n - a)f(a)}{f(x_n) - f(a)},$$

при этом $x_0 = b$.

Вычисление приближённых значений корней следует вести до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения уравнения.

Определим знаки функции $f(x) = \operatorname{tg}(0,55x + 0,1) - x^2$ на концах промежутка $[0,6; 0,8]$ и знак её второй производной в этом промежутке:

$$f(0,6) = \operatorname{tg} 0,43 - 0,36 = 0,4586 - 0,36 = 0,0986;$$

$$f(0,8) = \operatorname{tg} 0,54 - 0,64 = 0,5994 - 0,64 = -0,0406;$$

$$f'(x) = \frac{0,55}{\cos^2(0,55x + 0,1)} - 2x; \quad f''(x) = \frac{0,605 \sin(0,55x + 0,1)}{\cos^3(0,55x + 0,1)} - 2 < 0$$

при $x \in [0,6; 0,8]$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

где $b = 0,8$; $x_0 = 0,6$.

Вычисления удобно располагать в таблице.

| n | x_n | $f(x_n)$ | $\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$ |
|-----|--------|----------|-------------------------------------|
| 0 | 0,6 | 0,0986 | -0,142 |
| 1 | 0,742 | 0,0064 | -0,008 |
| 2 | 0,750 | 0,0002 | -0,0002 |
| 3 | 0,7502 | 0 | |

Ответ: $x = 0,750$.

3. Отделить корни уравнения

$$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$$

и уточнить один из них методом касательных с точностью 0,001.

Решение. Отделим корни аналитически.

$$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5,$$

так как $D = 0,16 - 6 < 0$,

то $f'(x)$ действительных корней не имеет. $f''(x) = 6x - 0,4$.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$.

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $\text{sign } f(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий в промежутке $[-1, 0]$. Уточним этот корень методом касательных.

Если действительный корень уравнения $f(x) = 0$ изолирован на отрезке $[a, b]$. Возьмём на этом отрезке такое число x_0 , при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т. е. $f''(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$ (в частности, за x_0 может быть принят тот из концов отрезка $[a, b]$, в котором соблюдено это условие). За приближённое значение корня возьмём $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Второе при-

ближение будем искать аналогично: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, и т. д. Полу-

ченная таким образом последовательность имеет своим пределом искомый корень.

Так как $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$ и $f''(x) < 0$ в промежутке $[-1, 0]$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = -1$. Для вычислений применяем формулу $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Вычисления располагаем в таблице.

| n | x_n | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ |
|-----|---------|----------|-----------|--------------------------|
| 0 | -1 | -0,2 | 3,9 | -0,051 |
| 1 | -0,949 | -0,0093 | 3,5814 | -0,0026 |
| 2 | -0,9464 | -0,0004 | 3,5657 | -0,00001 |

Ответ: $x = -0,946$.

II Вычислить определённый интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$, используя приближенную формулу параболы (Симпсона).

Решение. Для приближенного вычисления определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$:

1) делят интервал интегрирования $[a, b]$ точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на n равных частей, $h = (b - a)/n$ – шаг разбиения, $x_0 = a$; $x_n = b$;

2) вычисляют значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления: $y_0 = f(x_0) = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n) = f(b)$;

3) вычисленные значения подставляют в приближенную формулу параболы (Симпсона):

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})],$$

$n = 2k$ – четное число.

Для нашего примера разобьем интервал $[2, 3]$ на 10 частей: $h = (3 - 2)/10 = 0,1$ и подсчитаем значения подынтегральной функции в точках разбиения:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3 |
| y_i | 1,44 | 1,35 | 1,27 | 1,2 | 1,14 | 1,09 | 1,05 | 1,01 | 0,97 | 0,94 | 0,91 |

Подставим найденные значения в формулу Симпсона:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x} = \frac{0,1}{3} \cdot [1,44 + 0,91 + 4 \cdot (1,35 + 1,2 + 1,09 + 1,01 + 0,94) + \\ + 2 \cdot (1,27 + 1,14 + 1,05 + 0,97)] = 0,33 \cdot (2,35 + 22,36 + 8,86) = 1,0071.$$

Ответ: $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x} = 1,0071.$

III Методом Рунге–Кутта вычислить на отрезке $[a; b] = [0; 0,5]$ численное решение дифференциального уравнения $y' = x + y$ с начальным условием $y(0) = 1$, приняв шаг $h = 0,1$.

Решение. С шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0,5-0}{5} = 0,1$ построим систему равноотстоящих точек $x_k = x_0 + kh$, при этом $x_0 = a$, $x_n = b$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Значения искомой функции $y = y(x)$ в точках x_k на отрезке $[0; 0,5]$ последовательно находим по формулам

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

где $\Delta y_k = \frac{1}{6}(q_1^{(k)} + 2q_2^{(k)} + 2q_3^{(k)} + q_4^{(k)});$

$$q_1^{(k)} = hf(x_k, y_k); \quad q_2^{(k)} = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_1^{(k)}}{2});$$

$$q_3^{(k)} = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_2^{(k)}}{2}); \quad q_4^{(k)} = hf(x_{k+1}, y_k + q_3^{(k)});$$

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{k+1} = x_k + h, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Для нашего примера $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, из начальных условий $y_0 = 1$,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (q_1^{(0)} + 2q_2^{(0)} + 2q_3^{(0)} + q_4^{(0)});$$

$$f(x_k, y_k) = x_k + y_k; \quad q_1^{(0)} = 0,1 \cdot (0 + 1) = 0,1;$$

$$q_2^{(0)} = 0,1 \cdot \left[0,05 + \left(1 + \frac{0,1}{2} \right) \right] = 0,11;$$

$$q_3^{(0)} = 0,1 \cdot \left[0,05 + \left(1 + \frac{0,11}{2} \right) \right] = 0,1105;$$

$$q_4^{(0)} = 0,1 \cdot [0,1 + (1 + 0,1105)] = 0,12105;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot (0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) = 0,1103$$

и, следовательно, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103$.

Аналогично вычисляются значения функции $y = y(x)$ в других точках области. Результаты вычислений удобно сводить в таблицу (смотри таблицу ниже). Для данной задачи известно точное решение: $y = 2e^x - x - 1$, при этом $y(0,5) = 1,79744$.

| k | x | y | $q = hf(x_k, y_k) = 0,1(x + y)$ | Δy_k |
|-----|------|--------|---------------------------------|------------------------------|
| 0 | 0 | 1 | 0,1 | 0,1 |
| | 0,05 | 1,05 | 0,11 | 0,22 |
| | 0,05 | 1,055 | 0,1105 | 0,221 |
| | 0,1 | 1,1105 | 0,12105 | 0,12105 |
| | | | | $1/6 \cdot 0,66205 = 0,1103$ |
| 1 | 0,1 | 1,1103 | 0,1210 | 0,1210 |
| | 0,15 | 1,1709 | 0,1321 | 0,2642 |
| | 0,15 | 1,1763 | 0,1326 | 0,2652 |
| | 0,2 | 1,2429 | 0,1443 | 0,1443 |
| | | | | $1/6 \cdot 0,7947 = 0,1324$ |
| 2 | 0,2 | 1,2427 | 0,1443 | 0,1443 |
| | 0,25 | 1,3149 | 0,1565 | 0,3130 |
| | 0,25 | 1,3209 | 0,1571 | 0,3142 |
| | 0,3 | 1,3998 | 0,1700 | 0,1700 |
| | | | | $1/6 \cdot 0,9415 = 0,1569$ |
| 3 | 0,3 | 1,3936 | 0,1700 | 0,1700 |
| | 0,35 | 1,4846 | 0,1835 | 0,3670 |
| | 0,35 | 1,4904 | 0,1840 | 0,3680 |
| | 0,4 | 1,5836 | 0,1984 | 0,1984 |
| | | | | $1/6 \cdot 1,1034 = 0,1840$ |
| 4 | 0,4 | 1,5836 | 0,1984 | 0,1984 |
| | 0,45 | 1,6828 | 0,2133 | 0,4266 |
| | 0,45 | 1,6902 | 0,2140 | 0,4280 |
| | 0,5 | 1,7976 | 0,2298 | 0,2298 |
| | | | | $1/6 \cdot 1,2828 = 0,2138$ |
| 5 | 0,5 | 1,7974 | | |

Практическое занятие:

1. Отделить корни данного уравнения и уточнить один из них указанным методом с заданной точностью.

| Номер варианта | Уравнение | Рекомендуемый метод | Точность |
|----------------|---------------------------|---------------------|----------|
| 1 | $x^4 + 3x - 20 = 0$ | касательных | 0,01 |
| 2 | $x^3 - 2x - 5 = 0$ | хорд | 0,01 |
| 3 | $x^4 - 3x + 1 = 0$ | касательных | 0,01 |
| 4 | $x^3 + 3x + 5 = 0$ | хорд | 0,01 |
| 5 | $x^4 + 5x - 7 = 0$ | проб | 0,01 |
| 6 | $x^3 - 12x - 5 = 0$ | итераций | 0,01 |
| 7 | $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ | итераций | 0,01 |

2. Вычислить определённый интеграл, используя приближённую формулу параболических трапеций (Симпсона), взять $h = 0,1$.

| | | |
|---|--|---|
| № 1 $\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x^4};$ | № 2 $\int_0^{0,6} \frac{e^x dx}{2+x};$ | № 3 $\int_0^{0,8} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$ |
| № 4 $\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x} dx;$ | № 5 $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{8+x^2} dx;$ | № 6 $\int_0^{0,6} \frac{\cos x}{1+x} dx;$ |
| № 7 $\int_0^{0,6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}};$ | № 8 $\int_0^{0,6} e^{\sin x} dx$ | № 9 $\int_0^{0,6} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} dx;$ |

3. Методом Рунге–Кутта вычислить на отрезке $[a; b]$ решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $y(a) = y_0$, приняв шаг $h = \frac{b-a}{5}$.

| Номер варианта | Уравнение | $[a; b]$ | y_0 |
|-------------------|-----------------------------|--------------|-------|
| 1 | $y' = \frac{y-x}{y+x}$ | $[0; 0,5]$ | 1 |
| 2 | $y' = y - \frac{2x}{y}$ | $[0; 1]$ | 1 |
| 3 | $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ | $[0; 1]$ | 1 |
| 4 | $y' = 2y + 3e^x$ | $[0,3; 0,6]$ | 1,415 |
| 5 | $y' = x + y^2$ | $[0; 0,3]$ | 0 |
| 6 | $y' = y^2 - x^2$ | $[1; 2]$ | 1 |
| 7 | $y' = x^2 + y^2$ | $[0; 1]$ | 0,27 |

Самостоятельная работа:

1. Отделить корни данного уравнения и уточнить один из них указанным методом с заданной точностью.

| Номер варианта | Уравнение | Рекомендуемый метод | Точность |
|-------------------|----------------------|------------------------|----------|
| 1 | $x + e^x = 0$ | проб | 0,01 |
| 2 | $x^5 - x - 2 = 0$ | проб | 0,01 |
| 3 | $x^3 - 10x + 5 = 0$ | хорд | 0,01 |
| 4 | $x^4 - 8x + 1 = 0$ | касательных | 0,01 |
| 5 | $2x - \cos x = 0$ | итераций | 0,01 |
| 6 | $3x^5 + 6x - 16 = 0$ | хорд | 0,01 |
| 7 | $2x^3 + 2x - 7 = 0$ | касательных | 0,01 |
| 8 | $x + \ln x = 3$ | итераций | 0,01 |
| 9 | $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ | итераций | 0,001 |
| 10 | $x^2 + 4\sin x = 0$ | итераций | 0,001 |
| 11 | $2x + \cos x = 0,5$ | итераций | 0,001 |
| 12 | $x^3 - 6x - 8 = 0$ | хорд | 0,001 |
| 13 | $x - \sin x = 0,25$ | хорд | 0,001 |

2. Вычислить определённый интеграл, используя приближённую формулу параболических трапеций (Симпсона), взять $h = 0,1$.

| | | |
|---|---|--|
| № 1 $\int_0^{0,6} \frac{\sin^2 x}{x} dx;$ | № 2 $\int_0^{0,6} x\sqrt{1+x^3} dx;$ | № 3 $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$ |
| № 4 $\int_1^{1,6} \frac{e^x}{x} dx;$ | № 5 $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{5+x^2} dx;$ | № 6 $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+5x^2} dx;$ |
| № 7 $\int_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};$ | № 8 $\int_0^{0,6} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx;$ | № 9 $\int_0^{0,6} \frac{e^{x^2}}{1+x} dx;$ |
| № 10 $\int_0^{0,6} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx;$ | № 11 $\int_0^{0,6} \frac{e^{2x}-1}{x} dx.$ | № 12 $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{8+x^2} dx;$ |

3. Методом Рунге-Кутты вычислить на отрезке $[a; b]$ решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $y(a) = y_0$, приняв шаг $h = \frac{b-a}{5}$.

| Номер варианта | Уравнение | $[a; b]$ | y_0 |
|----------------|-----------------------------|------------|-------|
| 1 | $y' = xy(y^2 - 1)$ | $[0; 1]$ | 0,5 |
| 2 | $y' = x^2 + y^2 - xy$ | $[0; 1]$ | 0,1 |
| 3 | $y' = \frac{2y-x}{y}$ | $[1; 2]$ | 2 |
| 4 | $y' = \frac{1}{y^2 - x}$ | $[1; 2]$ | 0 |
| 5 | $y' = x^3 - y$ | $[1; 2]$ | -1 |
| 6 | $y' = xy - e^x$ | $[0; 0,1]$ | 0 |
| 7 | $y' = 2xy + x^2$ | $[0; 0,5]$ | 0 |
| 8 | $y' = x + \sin \frac{y}{3}$ | $[0; 2]$ | 1 |
| 9 | $y' = 2x + \cos y$ | $[0; 0,1]$ | 0 |
| 10 | $y' = y^3 + x^2$ | $[0; 1]$ | 1 |

| Номер варианта | Уравнение | $[a; b]$ | y_0 |
|-------------------|---------------------|----------|-------|
| 11 | $y' = xy - y^2$ | $[0; 1]$ | 0,5 |
| 12 | $y' = xy^3 - y$ | $[0; 1]$ | 1 |
| 13 | $y' = y^2 e^x - 2y$ | $[0; 1]$ | 1 |

Раздел 6. Комплексные числа и функции. Операции над комплексными числами. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы числа. Определение простейших функций. Предел, непрерывность, дифференцируемость функции комплексного аргумента. Условие Коши–Римана. Аналитические функции. Нули и особые точки, и их классификация. Вычеты. Теоремы Коши. Вычисление интегралов.

Практическое занятие:

1. Найти значение функции $f(z) = z^4 + \frac{2+i}{z} - (-3+2i)$ при $z = 1-2i$.
2. Решить уравнение $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z = 2$; $z = -2$; $z = i$; $z = -i$; $z = 1+i$; $z = -1+i$; $z = -1-\sqrt{3}i$.
4. Выполнить действия $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{24}$.
5. Найти все корни $\sqrt[4]{-4}$.
6. Вычислить $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$.
7. Провести вычисления в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{5+i} + (i-1)(2-3i); \quad \left(\frac{i^5+2}{i^{19}-1}\right)^2 \quad \frac{4-i}{5+i} + (i-1)(2+3i);$$

$$\frac{2+i}{5+i} + (i-3)(2-3i); \quad \frac{3-i}{5-i} + (i-5)(2-3i); \quad \frac{7-i}{5+i} + (4i-1)(2-2i);$$

$$\frac{2-i}{3+i} + (3i-1)(2-3i); \quad \left(\frac{i^6+2}{i^{21}-1}\right)^2 \quad \left(\frac{i^4+2}{i^{18}-1}\right)^2 \quad \left(\frac{i^{12}+2}{i^{15}-1}\right)^2$$

8. Для комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Построить вектор комплексного числа на плоскости. Записать число в тригонометрической и показательной формах:

$$z = 4 \quad z = -4 \quad z = 2i \quad z = -3i \quad z = 1 + i \\ z = -1 + \sqrt{3}i \quad z = -2 - 2i \quad z = 4 - 4i$$

9. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа. Дайте геометрическую интерпретацию операции извлечения корня:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{24}; \quad \sqrt[4]{-4}; \quad \sqrt[3]{8}; \quad \sqrt[6]{1}; \quad \sqrt[4]{1+i} \\ \left(\frac{+1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{24}; \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^{24}; \quad \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{24}; \quad \left(\frac{+1 - \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{24}; \quad \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^{24};$$

10. Выражение $(2+i)(3+2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах...

11. Дано $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + i$. Тогда $z_1, z_2; \frac{z_1}{z_2}$ равно:

12. Число $z = x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ — чисто мнимое при x , равном:

13. Число $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

14. Выражение $(3i-1)(2i+5)-4i$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах...

15. Дано $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + 2i$. Тогда $z_1, z_2; \frac{z_1}{z_2}$ равно:

16. Определить, при каком действительном значении x числа $z_1 = (2-xi) + (3+4i)$ и $z_2 = 5 + 3xi$ будут сопряженными.

17. Число $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

18. Выражение $(2+3i)(3-2i)$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах...

19. Дано $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - i$. Тогда $z_1 \cdot z_2; \frac{z_1}{z_2}$ равно:

20. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто действительное при x , равном:

21. Число $z = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

22. Выражение $(2 + 3i)^2 - 2$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах...

23. Дано $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$. Тогда $z_1, z_2; \frac{z_1}{z_2}$ равно:

24. Число $z = x^2 - xi - i^3 - 1$ – чисто мнимое при x , равном:

25. Число $z = 6e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

26. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $w = e^{z^2}$

27. Восстановить функцию комплексной переменной: $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2$, $f(2) = 1$.

28. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $w = \sin z$

29. Восстановить функцию комплексной переменной: $\operatorname{Re} f(z) = 2 \sin x \cdot \cosh y - x$, $f(0) = 1$

30. Найти особые точки функций:

$$1). f(z) = \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2} \quad 2). f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$$

31. Найти вычеты функций в их особых точках.

$$1). f(z) = \frac{z+3}{z(z-2)(z+1)^2} \quad 2). f(z) = \operatorname{ctg} z, z = \pi.$$

32. Вычислить интегралы:

$$1). \int_{|z+2i|=2} \frac{z^4}{(z+4)^3} dz, 2). \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz, 3). \oint_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

Самостоятельная работа:

1. Определить x так, чтобы комплексные числа были равны, $z_1 = x^2 - 7x + 9xi$ и $z_2 = x^2i + 20i - 12$.

2. При каких значениях x и y комплексное число $3y - x - 6 + 2yi - 3xi + 10i$ будет равно 0?

3. При каких действительных значениях x комплексное число $x^2 - 3(x+1) + 2i + 5$ будет чисто мнимым?

4. Найти модуль и аргумент комплексных чисел $-1 + \sqrt{3}i$, $-7 + i$; $-3 - 2i$, числа сопряженные данным и изобразить их геометрически.

5. Представить в тригонометрической и показательной форме числа: $2 + 4i$, $12i$, $-4 - 3i$.

6. Представить в алгебраической и показательной форме числа: $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$

7. Представить в тригонометрической и алгебраической форме числа: $3 \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{6}}$ $4 \cdot e^{\frac{-i \cdot 2\pi}{3}}$ $5 \cdot e^{\frac{i \cdot 4\pi}{3}}$

8. Выполнить сложение комплексных чисел $z = z_1 + z_2 + z_3$, где $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$, $z_3 = 2 - i$.

9. Вычислить: а) $(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - i\sqrt{2})$; б) $\frac{1+i}{1-i}$;
в) $\frac{4+i}{2-i} + \frac{5-3i}{3+i}$; г) $(2-3i)^2$; д) $(-3+2i) \cdot 2 + (7-5i) \cdot 3$; $\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1-i)^2}$;
 $i4 + 2i8 - 4i42 + 6i123 - 4i27$

10. Найти комплексное число z из уравнения $(2+5i) \cdot z = 2-5i$.

11. Найти два действительных числа, удовлетворяющих равенству: а) $\frac{2i}{x} + iy - 2 = 3i - \frac{3}{x} + y$; б) $3x + xi - 5i - y = yi - 7$; в) $(2+3i)(x-i) + (y+5i) = 1-3i$.

12. Найти x , если $(1+2xi)^3 + 11$ есть чисто мнимое число.

13. Найти x , если $(x-2i)^3 - 2xi$ есть действительное число.

14. Найти такие действительные x, y , при которых выполняется равенство: $x + 2xi + 3 + (y-2i)^2 = \frac{18-14i}{3+i}$.

15. Найти a и b , если: а) $\sqrt{a+bi} = 5+3i$; б) $\sqrt{a+bi}^{17} = 1+2i$

16. Провести вычисления в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{5+i} + (i-1)(2-3i); \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} - 1} \right)^2$$

17. Для указанных комплексных чисел определите реальную часть, мнимую часть, модуль и аргумент. Постройте вектор комплексного числа на плоскости. Запишите число в тригонометрической и показательной формах: $z = 4$ $z = -4$ $z = 2i$ $z = -3i$
 $z = 1+i$ $z = -1 + \sqrt{3}i$ $z = -2 - 2i$ $z = 4 - 4i$.

18. Проведите вычисления, используя показательную и тригонометрическую форму записи комплексного числа: $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1-i} \right)^{24}$

19. Найти корни уравнений: $z^2 + 6z + 13 = 0$, $z^2 - 8z + 20 = 0$, $z^3 + 27 = 0$.

20. Выражение $(3+2i)^2 + 5i$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах...

21. Дано $z_1 = 3+i$, $z_2 = 2-i$. Тогда $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

23. Число $z = 4x i + (3i + 2)^2 + x^2$ — чисто действительное при x , равно:

22. Число $z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

23. Выражение $(3-2i)^2 - 4$ имеет вид в алгебраической, тригонометрической и показательной формах...

24. Дано $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+i$. Тогда $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

25. Число $z = 4x i + (3i + 2)^2 + x^2$ — чисто мнимое при x , равно:

26. Число $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраической форме записи имеет вид:

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Основная учебная литература

1. Шипачев В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2010. – 479 с.

2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.

Дополнительная учебная литература

3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.

4. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 240 с.

5. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 2: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 396 с.