МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составитель
Е. А. Николаева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
направления подготовки 38.04.01 Экономика
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна

Математические методы в управлении: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 38.04.01 Экономика всех форм обучения / сост.: Е. А. Николаева; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины «Математические методы в управлении».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по дисциплине «Математические методы в управлении» и организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по дисциплине «Математические методы в управлении».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Раздел 1. Математическое моделирование. Виды математических моделей. Алгоритм построения математической модели реальной ситуации.

Пример:

1. (Задача об использовании ресурсов)

Для изготовления двух видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	*P2*
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	–	1
S4	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции 2 и 3 руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно $P1$ и $P2$, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется ($1 \times x_1$ + $3 \times x_2$) единиц ресурса $S1$, ($2 \times x_1$ + $1 \times x_2$) единиц ресурса $S2$, ($1 \times x_2$) единиц ресурса $S3$ и ($3 \times x_1$) единиц ресурса $S4$. Так как потребление ресурсов $S1$, $S2$, $S3$ и $S4$ не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$x_1 + 3\,x_2 \le 18,$$
$$2\,x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3\,x_1 \le 21$$

По смыслу задачи переменные неотрицательны

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции $P1$ и $3x_2$ руб. – от реализации продукции $P2$ т. е.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

2. (Задача о раскрое материалов) Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить математическую модель задачи.

Решение: Определим всевозможные способы распила бревен.

Способ распила	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим: x_i – число бревен, распиленных i-м способом (i = 1, 2, 3, 4); x – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$f = x \to \max$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195,$$
$$5x_1 + 2x_2 = 2x,$$
$$x_2 + 2x_3 = x,$$
$$x_4 = 3x,$$
$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

Практическое занятие:

1. Фирма производит 2 вида продукции: А и В, объём сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объёма реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырьё, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В – 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 $ соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

2. Процесс изготовления 2 видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объёмы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин.			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 $
2	5	20	15	3 $

3. В трёх хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Домашние задание:

1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 $ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5$, а каждая минута телерекламы – в 100$. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу между радио и телерекламой.

2. У врача диетолога имеется пять видов продуктов. Из них он должен составить наиболее экономную диету. Требуется, чтобы меню содержало 20 единиц белка и 20 единиц жиров. Содержание белков и жиров в единице каждого вида продукта, а также стоимость единицы продукта заданы таблицей:

	Виды продуктов				
	I	II	Ш	IV	V
Белки	1	2	1	1	3
Жиры	2	1	1	2	4
Стоимость	12	10	9	18	7

3. Фирма получила заказ на n разных блоков, которые могут изготовить n фирм. Каждый блок настолько велик, что фирма-поставщик не может выполнить более одного заказа. Известна цена изготовления разных блоков в каждой фирме. Фирма должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом общие затраты на приобретение блоков.

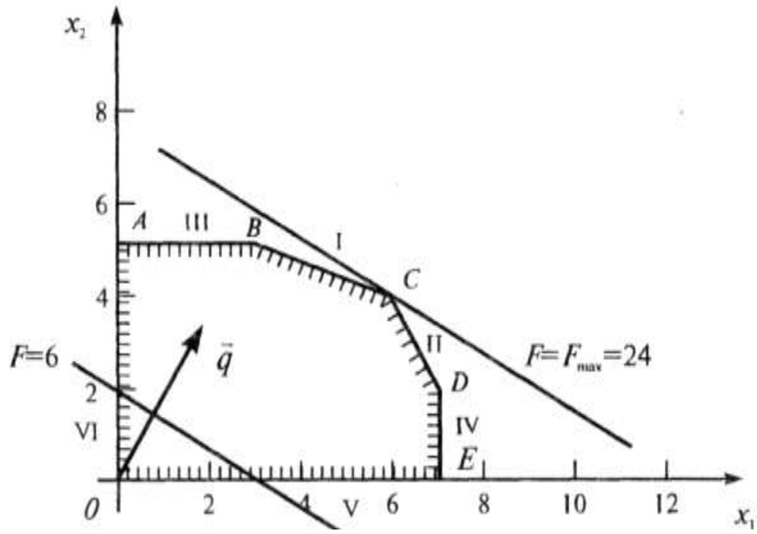
Раздел 2. Линейное программирование. Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача.

Пример:

1. Определить точку максимума, вычислить ее координаты и значение целевой функции в ней

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$
$$x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$2x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3x_1 \le 21,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Изобразим многоугольник решений



Очевидно, что при $f = 0$ линия уровня $2x_1 + 3x_2 = 0$ проходит через начало координат. Зададим, например, $f = 6$ и построим линию уровня $2x_1 + 3x_2 = 6$. Ее расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор q). Так как рассматриваемая задача – на отыскание максимума, то оптимальное решение – в угловой точке C, находящейся на пересечении прямых I и II, т. е. координаты точки С определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$$

откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, т. е. $C(6;4)$.

Максимальное значение функции $f_{\max} = 2\times6 + 3\times4 = 24$.

2. (Бесконечное множество решений)

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение: Особенность данной задачи состоит в том, что линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей ограничению:

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$

Это, вместе с направлением градиента, обуславливает наличие альтернативных оптимальных решений. Таким образом, $x^* = (3–3\alpha;1+1,5\alpha)$ где $\alpha \in [0,1]$, $f(x^*) = 10$, т. е. в каждой из этих точек целевая функция имеет одно и тоже значение.

3. (целевая функция не ограничена на допустимом множестве)

$$f(x) = 20x_1 + 10x_2 \to max$$
$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение: При параллельном переносе линии уровня в направлении градиента, эта прямая всегда пересекает многогранник решений (крайнюю точку найти не удается), при этом значение целевой функции $f(x)$ может быть сделано сколь угодно большим. Таким образом, данная задача решения не имеет, вследствие неограниченности сверху целевой функции на допустимом множестве.

4. (Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует)

$$f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$2x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение: Очевидно, что фактором, определяющим, будет ли существовать решение в случае неограниченности допустимого множества, является направление градиента целевой функции. $x^* = (4, 6)$ – точка максимума, $f(x^*) = 12$.

5. (Отсутствие допустимых решений)

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Решение: Полуплоскости, соответствующие неравенствам системы ограничений не имеют общих точек пересечения, следовательно, нет ни одной допустимой точки.

Допустимое множество пусто, задача не имеет решения.

Итак, при решении задачи ЛП возможны следующие исходы:

1. Допустимое множество – ограниченный многогранник, оптимальное решение – единственная вершина допустимого множества.

2. Задача ЛП может иметь бесконечное множество решений – одна из граней многогранника решений (на плоскости - отрезок, луч)

3. Целевая функция не ограничена на допустимом множестве. Задача ЛП не имеет решения.

4. Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует.

5. Допустимое множество пусто, задача ЛП не имеет решения.

Чтобы решить графическим методом задачу линейного программирования произвольной размерности, записанную в каноническом виде, необходимо выразить m неизвестных через какие-нибудь другие 2 или 1 переменные. После этого, пользуясь условиями неотрицательности, перейти к системе неравенств.

Найти оптимальный план задачи линейного программирования графическим методом

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max$$

при следующих условиях:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 9,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 7,$$

$$x_i \geq 0, I = 1,\ldots,5.$$

Решение: Система ограничений состоит из трех уравнений, число неизвестных $n = 5$, следовательно, задачу можно решить графически. Перейдем от исходной задачи к задаче с двумя переменными. Выразим переменные x_3, x_4, x_5 через свободные переменные x_1 и x_2

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2,$$
$$x_4 = 9 - 2\,x_1 - x_2,$$
$$x_5 = 7 - x_1 - 2\,x_2$$

Тогда целевая функция принимает вид:

$$f(x) = 2\,x_1 + x_2 - 5 + x_1 + x_2 + 9 - 2\,x_1 - x_2 - 7 + x_1 + 2\,x_2 =$$
$$= 2\,x_1 + 3\,x_2 - 3$$

С учетом условий неотрицательности, получаем

$$f(x) = 2\,x_1 + 3\,x_2 - 3 \to \max,$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$2\,x_1 + x$$
$$x_2 \leq 9,$$
$$x_1 + 2\,x_2 \leq 7$$

Из графика следует $x^* = (3, 2)$. Из выражений для x_3, x_4, x_5 находим: $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$

Таким образом, $x^* = (3, 2, 0, 1, 0)$ точка максимума, а значение целевой функции $f(x^*) = 9$.

Метод решения транспортной задачи рассмотрим на примере. В таблицу внесем данные:

$$a = (60, 120, 100),$$
$$b = (20, 110, 40, 110),$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Найдем начальный план перевозок по методу минимальной стоимости: находим в таблице клетку с наименьшим тарифом, таких клеток две. Найдем максимально возможные поставки для этих клеток: $x_{11} = min\{60,20\} = 20$, $x_{21} = min\{120,20\} = 20$, заполним клетку (1, 1), т. е. спрос первого потребителя полностью удовлетворен, вычеркиваем соответствующий ему столбец.

Затем в оставшейся части таблицы снова находим клетку с наименьшим тарифом и заполняем ее. Продолжаем до тех пор пока не будет распределен весь груз.

Пункты отправления	Пункты назначения				a_i
	1 $(v_1=1)$	2 $(v_2=2)$	3 $(v_3=6)$	4 $(v_4=6)$	
1 $(u_1=0)$	1 20	2 – 40	5 + 	3	60
2 $(u_2=-1)$	1	6	5 10	2 110	120
3 $(u_3=1)$	6	3 + 70	7 – 30	4	100
b_j	20	110	40	110	

2. Полученный план перевозок необходимо проверить на оптимальность. Для этого используем метод потенциалов. Обозначим $u = (u_1,\ldots,u_m)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$, потенциалы потребителей и поставщиков соответственно. Чтобы рассчитать потенциалы, составляем систему уравнений для заполненных клеток:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Поскольку неизвестных больше, чем уравнений, произвольно полагают одно из значений $u_1 = 0$. Остальные находим из системы:

$$u_1 + v_1 = 1,$$

$$u_1 + v_2 = 2,$$

$$u_2 + v_3 = 5,$$

$$u_2 + v_4 = 2,$$

$$u_3 + v_2 = 3,$$

$$u_3 + v_3 = 7$$

Условие оптимальности записываются в виде

$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

оно должно выполняться для пустых клеток.

Если условие оптимальности не выполнено выбирается переменная x_{ij} с наибольшим положительным значением величины $u_i + v_j - c_{ij}$.

Вычислим значения критерия

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 1, \leftarrow$$
$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0,$$
$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1,$$
$$u_2 + v_2 - c_{22} = -5,$$
$$u_3 + v_1 - c_{31} = -6,$$
$$u_3 + v_4 - c_{34} = 0$$

Отсюда следует, что переменную x_{13} следует заполнить.

Далее строится замкнутый цикл, состоящий из горизонтальных и вертикальных линий, который начинается в клетке (1, 3), а остальные узлы находятся в заполненных клетках таблицы.

Клетку (1, 3) будем заполнять, поэтому в ней ставим «+». Для сохранения объемов перевозок в соседних к ней узлах цикла клетках значения x_{ij} должны убывать пометим их знаком «–». Общая величина убывания определяется минимальным значением заполненных клеток, которые убывают. Обозначим эту величину d. После определения величины d производится изменение переменных в соответствии со знаком, поставленным при обходе цикла. Результаты сводятся в новую таблицу.

	1 $(v_1 = 2)$	2 $(v_2 = 3)$	3 $(v_3 = 6)$	4 $(v_4 = 3)$
1 $(u_1 = -1)$	1 20	2 10	5 30	3
2 $(u_2 = -1)$	1	6	5 10	2 110
3 $(u_3 = 0)$	6	3 100	7	4

Полученный план перевозок снова проверяется на оптимальность:

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0$$
$$u_1 + v_4 - c_{14} = -1$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 0$$
$$u_2 + v_2 - c_{22} = -4$$
$$u_3 + v_1 - c_{31} = -4$$
$$u_3 + v_3 - c_{33} = -1$$
$$u_3 + v_4 - c_{34} = -1$$

На этом процесс вычислений заканчивается, решение найдено.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(X) = 1\times20 + 2\times10 + 5\times30 + 5\times10 + 2\times110 + 3\times100 = 760$ – минимальная стоимость перевозок.

Практическое занятие:

1) $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$

$3x_1 + 2x_2 \le 14$

$x_1 - 4x_2 \le 0$

$3x_1 - x_2 \ge 0$

$-x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$x_1 + 2x_2 \le 7$

$2x_1 + x_2 \le 8$

$x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

3) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$x_1 + x_2 \ge 1$

$2x_1 - x_2 \ge -1$

$x_1 - 2x_2 \le 0$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4) $f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to \max$

$2x_1 - x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

5) Решить транспортную задачу

$$a = (160, 400, 240)$$
$$b = (170, 190, 140, 180, 120)$$
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа:

1) Найти такие значения параметров p и q, при которых задача

$$f(x) = 3\,x_1 + 5\,x_2 \to \max$$
$$x_1 + p\,x_2 \le 1$$
$$x_1 - x_2 \ge q$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

а) имеет пустое допустимое множество;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечно много решений;

г) не имеет решений, так как функция бесконечно возрастает.

2) Решить транспортную задачу

$$a = (200, 250, 150)$$
$$b = (120, 180, 105, 90, 105)$$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Раздел 3. Теория игр. Моделирование конфликтных ситуаций в виде матричных игр. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.

1. Принцип минимакса. Определение нижней и верхней цен игры, максимальной и минимальной стратегии игроков. Определение седловой точки, оптимальных стратегий.

Пример:

1. Построить модель игры.

Пусть игрок I имеет две, а игрок II – три фишки. Независимо и тайно друг от друга игроки откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок I. В противном случае фишки выигрывает игрок II.

Ясно, что игрок I имеет две, а игрок II – три стратегии. В игре нет случайного хода. Вследствие одновременного выбора стратегий дерево игры имеет вид либо а), либо б) (рис. 1).

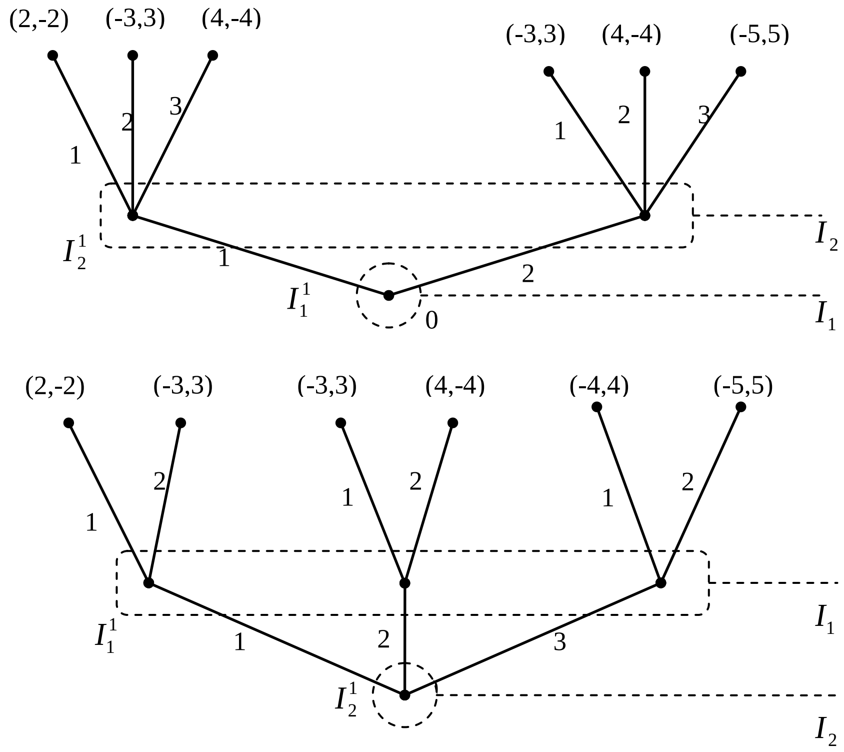


Рис. 1

На рисунке пунктиром показаны информационные множества. В окончательной позиции первое число показывает выигрыш игрока I, второе – выигрыш игрока II.

Предположим, что в рассматриваемой игре первым ходит игрок II, а игрок I знает, четное или нечетное число фишек выбрано игроком II, но не знает, какое именно нечетное. В этом случае у игрока I имеется два информационных множества (рис. 2).

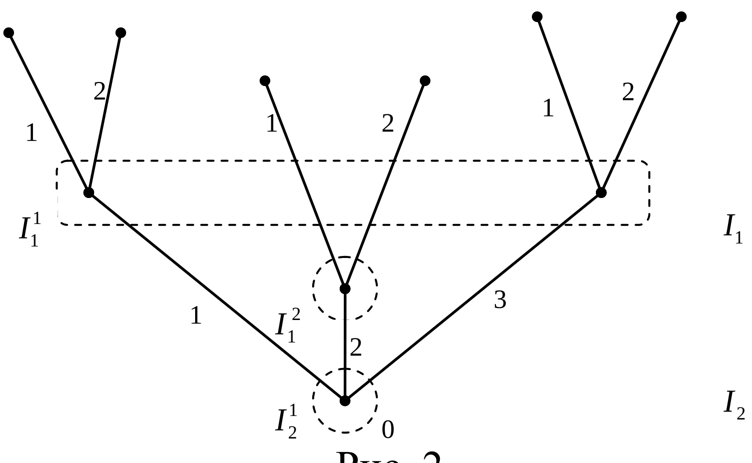


Рис. 2

2. (Семейный спор). Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут пойти на соревнование по боксу или в театр. Причем в посещении бокса муж заинтересован в большей степени и от этого он получает удовлетворение, измеряемое двумя единицами, а жена – одну единицу. При посещении театра меры удовлетворенности мужа и жены соответственно 1 и 2. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по нулю.

Усложним эту известную игру. Допустим, что представления зависят от каких-то случайных факторов. Мы можем договориться так. Пусть в урне имеется семь шаров: три белых и четыре черных. Если случайным образом извлеченный шар оказывается белым, то представление в театре лучше, чем на боксе, в случае черного шара – наоборот.

Дерево этой игры показано на рис. 3.

Игра «семейный спор» в отличие от примера 1 является неантагонистической игрой.

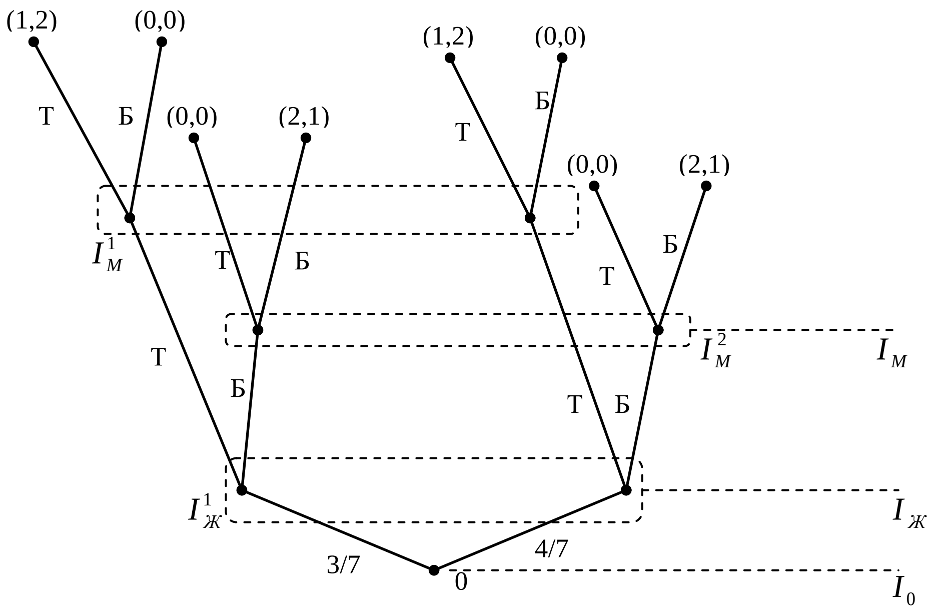


Рис. 3

Рассмотренные примеры подтверждают, что игрок может заранее решить, что выбирать ему в каждом случае, т. е. в каждом информационном множестве.

3. Рассмотрим игру «Крестики-нолики» в квадрате 3×3. Из двух игроков побеждает тот, кто поставит подряд три знака (кре-

стики или нолики). Игроки ходят по очереди. Победитель получает +1, проигравший – –1. Если это не удается, то игроки получают по нулю – ничья.

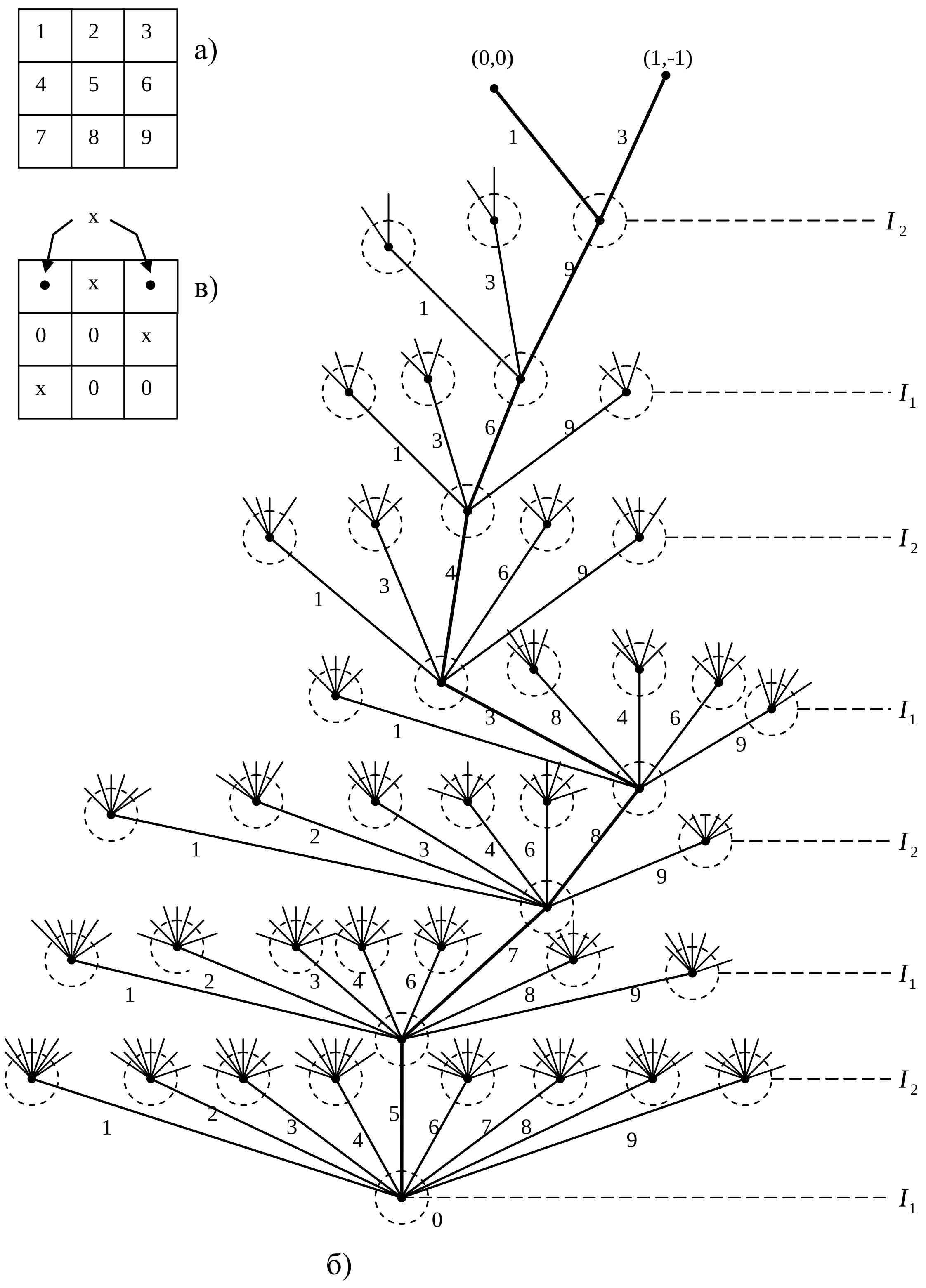


Рис. 4

Нас интересует не сама игра (в ней вряд ли можно проиграть), а ее развернутая форма (рис. 4б).

Нумерация клеток показана на рис. 4а. На рис. 4б приведены две партии (ситуации):

5 – 7 – 8 – 2 – 4 – 6 – 9 – 1,

5 – 7 – 8 – 2 – 4 – 6 – 9 – 3,

соответствующие ходы показаны на рис. 4в. Например, в первой партии стратегии игроков есть следующие цепочки:

5 – 8 – 4 – 9 – для игрока I, 7 – 2 – 6 – 1 – для игрока II.

Пример показывает, что для игр с большим количеством стратегий строить дерево практически невозможно.

4. Определить седловую точку.

$$\begin{array}{rcl} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \| \\ \text{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = \underbrace{2 \quad 5 \quad 4}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} & & \end{array}$$

Седловой точкой является пара ($i_о = 3$; $j_о = 1$), при которой $v = 2$.

Заметим, что хотя выигрыш в ситуации (3;3) также равен $2 = \underline{v} = \bar{v}$, она не является седловой точкой, так как этот выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца.

5. Выполнить доминирование.

Рассмотрим игру

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Стрелками показаны доминируемые стратегии.

Аналогично выполнено доминирование следующей игры.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&8&6\\4&2&1&0\\7&0&-1&5\\1&0&7&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&2&6\\4&2&1&0\\7&0&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&8&6\\2&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&6\\2&0\end{pmatrix}=A'$$

В результате доминирования получим игру A' размером 2×2, в которой все стратегии недоминируемые.

6. Определить максиминную и минимаксную стратегии игроков.

$$A_1=\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}0&2\\4&1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}0\\1\leftarrow\end{array}\\ \begin{array}{cc}4&2\\ &\uparrow\end{array}&\end{array}$$

Здесь $\underline{v}=1$, $\bar{v}=2$, $\underline{v}<\bar{v}$; 2-я строка – максиминная стратегия, 2-й столбец – минимаксная стратегия.

В A_1 применение минимаксной и максиминной стратегий приводит к выигрышу игрока I, равному $\underline{v}$ (α достается игроку II).

$$A_2=\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}3&2&5\\1&4&2\\2&3&0\end{pmatrix}&\begin{array}{l}2\leftarrow\\1\\0\end{array}\\ \begin{array}{ccc}3&4&5\\ \uparrow&&\end{array}&\end{array}$$

Здесь $\underline{v}=2$, $\bar{v}=3$, $\underline{v}<\bar{v}$; 1-я строка – максиминная стратегия, 2-й столбец – минимаксная стратегия.

В A_2 применение минимаксных и максиминных стратегий приводит к выигрышу игрока I, равному $\bar{v}$ (α достается игроку I).

Примеры показывают, что в случае, когда $\underline{v}<\bar{v}$ применение минимаксной и максиминной стратегий не приводит к определенному результату – в зависимости от игры имеет «выгоду» то один, то другой. Следовательно, когда $\underline{v}<\bar{v}$ минимаксная и максиминная стратегии не могут быть оптимальными (одностороннее отклонение от них может увеличить выигрыш «уклониста»).

$$A_3=\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}5&1&3\\-3&0&1\\3&2&4\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\end{array}\\ \begin{array}{ccc}&\uparrow&\end{array}&\end{array}$$

Здесь $\underline{v}=2$, $\bar{v}=2$, $\underline{v}=\bar{v}$;

Легко видеть, что в игре A_3 одностороннее отклонение от минимаксной (максиминной) стратегии невыгодно.

Здесь $\underline{v} = \overline{v} = 2$, $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $v = 2$; $i^* = 1{,}3$, $j^* = 2$.

У игрока I – две, а у игрока II – одна оптимальная стратегия. Поэтому седловых точек две: (1,2) и (3,2).

Практическое занятие:

Построить математическую модель задачи.

1.1. (Планирование выпуска новых моделей одежды на швейном предприятии). Швейное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен, однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируется три возможных варианта выпуска данной модели (А, Б, В). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект.

$$\begin{array}{c} A \\ Б \\ В \end{array} \begin{pmatrix} +22 & +22 & +22 \\ +21 & +23 & +23 \\ +20 & +21 & +24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array}$$

Прибыль (тыс. руб.) которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

Требуется найти объем выпуска модели одежды, обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

1.2. (Планирование выпуска обуви). Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей А и В. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний I и II. В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $C = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$.

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

2. Найдите седловые точки и значение игры:

$$а)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Найти оптимальные стратегии и значения игр с матрицами

$$а)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 7/4 \end{pmatrix}$$

4. Преобразуя матрицу выигрышей, найти решение игр с матрицами:

$$а)\ \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad в)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа:

Построить математическую модель задачи.

1.1. (Планирование посева). Сельскохозяйственное предприятие может посеять одну из трех культур, которые обозначим через A_1, A_2, A_3. Необходимо определить, какую из культур сеять, если при прочих равных условиях урожаи этих культур зависят главным образом от погоды, а план должен обеспечить наибольший доход. Рассмотрим лишь три состояния природы: год может быть засушливым, нормальным и дождливым.

Решить численный пример для исходных данных, приведенных в таблице.

Исходные условия	Урожайность (в ц)		
	A_1	A_2	A_3
Нормальная погода	5	12,5	7,5
Дождливая погода	15	5	10
Сухая погода	20	7,5	0
Цена за один центнер в ед. стоимости	2	4	8

1.2. (Распределение конкурсных работ). Пусть имеется два конструкторских бюро (КБ), причем одно из КБ имеет 4 отдела, а другое – 3 отдела. Объявлен конкурс на создание проектов двух агрегатов. Эти проекты должны будут оцениваться некоторой комиссией, которая выбирает лучший проект каждого агрегата. То конструкторское бюро, чей проект первого агрегата лучше, получит «a» рублей премии; аналогично, за принятый второй проект выплачивают «b» рублей. Предполагается, что если в одном КБ над проектом одного агрегата работало больше отделов, чем в другом, то, наверное, будет принят проект первого КБ, если же в каждом КБ число отделов, работающих над аналогичным проектом, одинаково, то вероятность принятия данного проекта равна 1/2.

Требуется определить, какое количество отделов каждое КБ должно выделить для создания того или иного проекта с тем, чтобы каждое КБ могло рассчитывать на максимально возможную для него величину премии.

Решить эту задачу при условии, что $a = b$, т. е. премии за каждую из двух работ равны.

Указание. В качестве выигрыша первого игрока принять разницу между математическим ожиданием фактически получаемой премии и величиной $(a + b)/2$, равной половине величины премии за оба проекта.

2. Найти оптимальные стратегии и значения игр с матрицами

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & -8 \\ -2 & 4 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Преобразуя матрицу выигрышей, найти решение игр с матрицами:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & -2/3 & -1/6 & 2/3 \\ 1/2 & -1/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1/2 & -2/3 & -1/3 & -5/6 & -1/6 \\ 2/3 & 1/6 & -5/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Выполните доминирование:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 11 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Определение смешанной стратегии, ожидаемого выигрыша, верхней и нижней цен игры в смешанных стратегиях, смешанного расширения игры, седловой точки, оптимальной смешанной стратегии. Принцип минимакса в смешанных стратегиях. Нахождение решения МИ в чистых стратегиях, использование доминирования для уменьшения размерности игры. Решение игры «2×2». Решение игр «$2\times n$» и «$m\times 2$». Решение игр «$m\times n$» (m, $n>2$). Сведение игры к паре двойственных задач, определение оптимальных стратегий и цены игры.

Пример:

1.Рассмотрим игру, заданную матрицей.

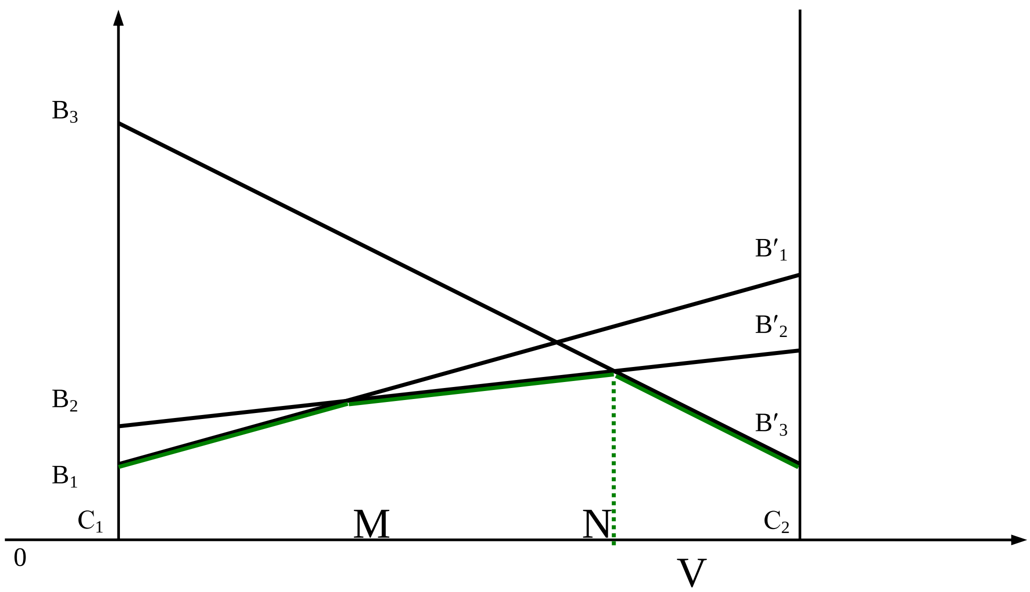
$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1 \; \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На плоскости xOy введём систему координат и на оси Ox отложим отрезок единичной длины C_1C_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 (u, $1-u$). В частности, точке $C_1(0;0)$ отвечает стратегия C_1, точке $C_2(1;0)$ – стратегия C_2 и т. д.

В точках C_1 и C_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью Oy) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии C_1, а на втором – при стратегии C_2. Если игрок 1 применит стратегию C_1, то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – 2, при стратегии B_2 – 3, а при стратегии B_3 – 11. Числам 2, 3, 11 на оси Ox соответствуют точки B_1, B_2 и B_3.

Если же игрок 1 применит стратегию C_2, то его выигрыш при стратегии B_1 равен 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Эти числа определяют точки B_1', B_2', B_3' на перпендикуляре, восстановленном в точке C_2. Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B'_2, B_3 и B'_3 получим три прямые, расстояние до которых от оси Ox определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной $B_1MNB'_3$, определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N; следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $u^* = (u, 1-u)$, а её ордината равна цене игры v. Координаты точки N находим как точку пересечения прямых $B_2B'_2$ и $B_3B'_3$.



Соответствующие два уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 3u+5(1-u)=v \\ 11u+2(1-u)=v \end{cases} \Rightarrow \mathrm{u}=\frac{3}{11}, \mathrm{v}=\frac{49}{11}.$$

Следовательно, $u^* = (\frac{3}{11}; \frac{9}{11})$ при цене игры $v = \frac{49}{11}$. Таким образом, мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

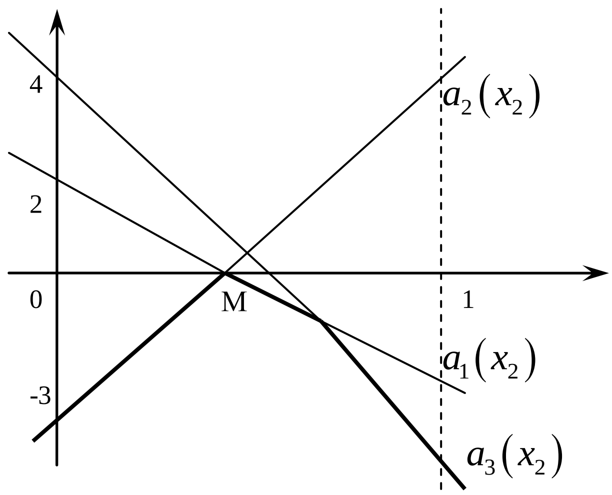
$$\begin{cases} 3w+5(1-w)=v \\ 5w+2(1-w)=v \end{cases} \Rightarrow w=\frac{9}{11}$$

и, следовательно, $w^* = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (Из рисунка видно, что стратегия B_1 не войдёт в оптимальную стратегию).

2. Решить игру

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Строим:



$a(x_2)=\min\{-5x_2+2, 7x_2-3, -8x_2+4\}$. В точке М пересекаются $a_1(x_2)$ и $a_2(x_2)$, поэтому решаем систему:

$$\begin{cases} -5x_2^* + 2 = v, \\ 7x_2^* - 3 = v. \end{cases}$$

и находим $x_2^* = \dfrac{5}{12}$, $x^* = (7/12,\ 5/12)$, $v = -1/12$.

Применяя к игре $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ формулу, находим $y^* = (7/12,\ 5/12,\ 0)$.

3.Найти решение игры, определяемой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. При решении этой игры к каждому элементу матрицы А прибавим 1 и получим следующую матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь пару взаимно-двойственных задач:

$$p_1 + p_2 + p_3 \to \min \qquad\qquad q_1 + q_2 + q_3 \to \max$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ 2p_1 + \quad\quad p_3 \ge 1, \\ \quad\quad\quad\quad p_3 \ge 1, \\ p_1, p_2, p_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 + 2q_2 \quad\quad \le 1, \\ q_1 \quad\quad + q_3 \le 1, \\ 2q_1 + q_2 \quad\quad \le 1, \\ q_1, q_2, q_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решим вторую из них симплекс-методом: $(q_1, q_2, q_3) = \left(0; \dfrac{1}{2}; 1\right)$. Тогда из соотношений двойственности следует, что $(p_1, p_2, p_3) = \left(\dfrac{1}{2}; 1; 0\right)$.

Следовательно, цена игры с платёжной матрицей A_1 равна

$$v_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} \quad \left(= \frac{1}{q_1 + q_2 + q_3} \right),$$

а игры с платёжной матрицей A –

$$v = v_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

При этом оптимальные стратегии игроков имеют вид

$$X = (u_1, u_2, u_3) = (vp_1, vp_2, vp_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\cdot 1; \frac{2}{3}\cdot 0\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right),$$

$$Y = (w_1, w_2, w_3) = (vq_1, vq_2, vq_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot 0; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Практическое занятие:

1. Решение матричной игры: а) показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий; б) выполнить доминирование; в) свести исходную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования и решить их.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Найти решение матричных игр.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix};$$

Самостоятельная работа:

1. Решение матричной игры: а) показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий; б) выполнить доминирование; в) свести исходную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования и решить их.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Найти решение матричных игр.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Используя геометрический метод, найти решения игр с матрицами:

$$a)\ \begin{pmatrix} 10 & 7 & 11 & 0 \\ -8 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad в)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найдите решение игр, определяемых следующими матрицами:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \qquad б)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$в)\ A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \qquad г)\ A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Решите следующие игры методом линейного программирования:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Раздел 4. Сетевое и календарное планирование. Принципы построения сетевой модели. Расчет сетевой модели. Календарный график работ.

Пример:

1. Постройте сетевую модель, включающую операции A, B, C, …, L, которая отображает следующие отношения упорядочения:

1. A, B и C – исходные операции программы, которые можно начинать одновременно.

2. A и B предшествуют D.

3. B предшествует E, F и H.

4. F и C предшествуют G.

5. E и H предшествуют I и Y.

6. C, D, F и Y предшествуют K.

7. K предшествует L.

8. I, G и L – завершающие операции программы.

Сеть, соответствующая этим отношениям упорядочения, приведена ниже. Фиктивные операции D_1 и D_2 введены для того, чтобы правильно отразить отношения следования. Операция D_1 использована для однозначного определения операций E и H по конечным событиям.

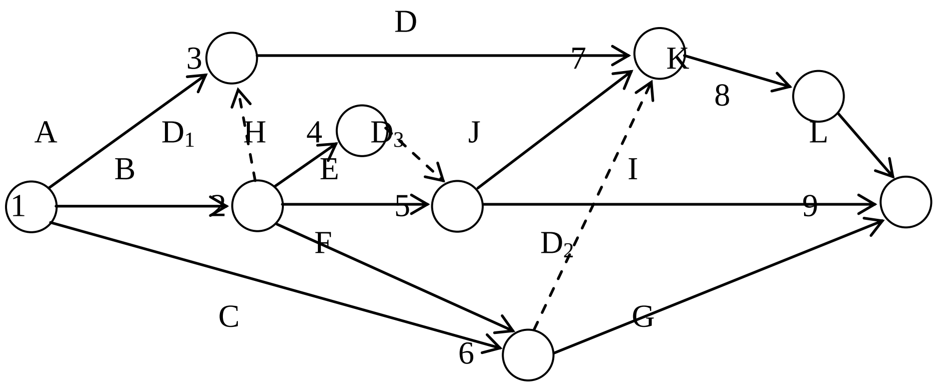


Рис. 1

2. Рассмотрим сетевую модель, показанную на рис. 2, с исходным событием 0 и завершающим событием 6. Оценки времени, необходимого для выполнения каждой операции, даны у стрелок.

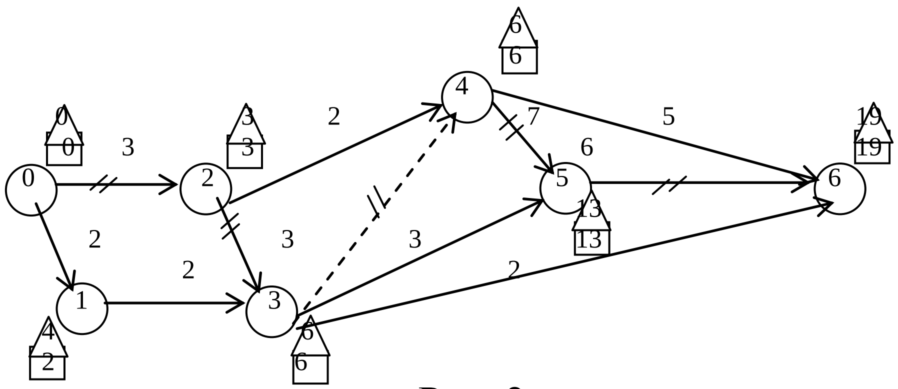


Рис. 2

Расчет критического пути включает два этапа. Первый этап называется **прямым проходом**. Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее **ранний срок** его наступления. Эти числа указаны на рис. 2 в квадратах. На втором этапе, называемом **обратным проходом**, вычисления начинаются с завершающего события сети и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется число, представляющее **поздний срок** его наступления. Эти числа даны в треугольниках.

Рассмотрим теперь прямой проход. Пусть $T_i^{Р.Н.}$ – ранний срок начала всех операций, выходящих из события i. Если принять $i = 0$, то $T_i^{Р.Н.} = 0$. Обозначим символом D_{ij} продолжительность операции (i, j). Тогда вычисления при прямом проходе выполнятся по формуле

$$T_j^{Р.Н.} = \max_i \left\{T_i^{Р.Н.} + D_{ij}\right\} \text{ для всех операций } (i, j), \text{ где } T_0^{Р.Н.} = 0.$$

Применительно к рис. 2 вычисления при прямом проходе начинаются с $T_0^{Р.Н.} = 0$, как показано в квадрате над событием 0. Поскольку в событие 1 входит только одна операция (0, 1) продолжительностью $D_{01} = 2$, то

$$T_1^{Р.Н.} = T_0^{Р.Н.} + D_{01} = 0 + 2 = 2.$$

Этот результат записан в квадрате у события 1. Рассмотрим далее событие 2. (Заметим, что событие 3 пока рассматривать нельзя, так как срок $T_2^{Р.Н.}$ (для события 2) еще неизвестен). Таким образом,

$$T_2^{Р.Н.} = T_0^{Р.Н.} + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Поместим этот результат в квадрат у события 2.

Вычисления продолжается аналогичным образом, пока не будут определены значения $T_j^{Р.Н.}$ для всех j. Имеем

$$T_3^{Р.Н.} = \max_{i=1,2} \left\{T_i^{Р.Н.} + D_{i3}\right\} = \max\{2+2;\ 3+3\} = 6,$$

$$T_4^{Р.Н.} = \max_{i=2,3} \left\{T_i^{Р.Н.} + D_{i4}\right\} = \max\{3+2; 6+0\} = 6.$$

На этом вычисления прямого прохода заканчивается.

Обратный проход начинается с завершающего события сети. При этом целью является определение $T_i^{П.О.}$ – поздних сроков окончания всех операций, входящих в событие i. Если принять $i = n$, где n – завершающее событие сети, то $T_n^{П.О.} = T_n^{Р.Н.}$ является отправной точкой обратного прохода. В общем виде для любого события i: $T_i^{П.О.} = \min_i \left\{T_i^{П.О.} - D_{ij}\right\}$ для всех операций (i, j).

Значения $T_i^{П.О.}$ (указанные в треугольниках) вычисляется следующим образом:

$$T_6^{П.О.} = T_6^{Р.Н.} = 19,$$

$$T_5^{П.О.} = T_6^{П.О.} - D_{56} = 19 - 6 = 13,$$

$$T_4^{П.О.} = \min_{i=4,5} \left\{ T_j^{П.О.} - D_{4j} \right\} = \min \{13 - 7; 19 - 5\} = 6,$$

$$T_3^{П.О.} = \min_{i=4,5,6} \left\{ T_j^{П.О.} - D_{3j} \right\} = \min \{6 - 0; 13 - 3; 19 - 2\} = 6,$$

$$T_2^{П.О.} = \min_{i=3,4} \left\{ T_j^{П.О.} - D_{2j} \right\} = \min \{6 - 3; 6 - 2\} = 3,$$

$$T_1^{П.О.} = T_3^{П.О.} - D_{13} = 6 - 2 = 4,$$

$$T_0^{П.О.} = \min_{i=1,2} \left\{ T_j^{П.О.} - D_{0j} \right\} = \min \{4 - 2; 3 - 3\} = 0.$$

Таким образом, вычисления при обратном проходе закончены.

Операция (i, j) принадлежит **критическому пути**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$T_i^{Р.Н.} = T_i^{П.О.}; \quad T_j^{Р.Н.} = T_j^{П.О.};$$

$$T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} = T_j^{П.О.} - T_i^{П.О.}.$$

На рис. 2 критический путь включает операции (0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) и (3, 6). Критический путь определяет кратчайшую возможную продолжительность всей программы в целом. Заметим, что операции (2, 4), (3, 5), (3, 8) и (4, 6) удовлетворяет условию

$$T_i^{Р.Н.} = T_i^{П.О.}; \quad T_j^{Р.Н.} = T_j^{П.О.},$$

но не удовлетворяет условию

$$T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} = T_j^{П.О.} - T_i^{П.О.},$$

поэтому они не являются критическими.

При определении критического пути необходимо вычислить резервы времени для некритических операций.

Прежде чем приступить к вычислению резервов времени, нужно ввести определения еще двух сроков, связанных с каждой операцией. Это **срок позднего начала** $T^{П.Н.}$ и **срок раннего окончания** $T^{Р.О.}$, которые для любой операции (i, j) задаются соотношениями

$$T_{ij}^{П.Н.} = T_j^{П.О.} - D_{ij}, \quad T_{ij}^{Р.О.} = T_i^{Р.Н.} + D_{ij}.$$

Различает два основных вида резервов времени: **полный резерв (ПР)** и **свободный резерв (СР)**. Полный резерв времени операции (i, j) представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция $T_j^{П.О.} - T_i^{Р.Н.}$, и ее продолжительностью D_{ij}, т. е.

$$ПР_{ij} = T_j^{П.О.} - T_i^{Р.Н.} - D_{ij} = T_j^{П.Н.} - T_{ij}^{Р.О.} = T_{ij}^{П.Н.} - T_i^{Р.Н.}.$$

Свободный резерв времени определяется в предположении, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии величина $СР_{ij}$ для операции (i, j) представляет собой превышение допустимого отрезка времени $T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.}$ над продолжительностью операции D_{ij}, т. е.

$$СР_{ij} = T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} - D_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций сети можно свести в удобную для пользования таблицу (табл. 1).

Заметим, что только критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени. Когда полный резерв равен нулю, сводный резерв также должен быть равен нулю. Однако обратное неверно, поскольку свободный резерв некритической операции также может быть нулевым. Так, например, в табл. 1 свободный резерв времени некритической операции (0, 1) равен нулю. Звездой отмечена критическая операция.

Таблица 1.

Операция (i, j) (1)	Продолжительность D_{ij} (2)	Раннее		Позднее		Полный резерв $ПР_{ij}$ (7)	Свободный резерв $СР_{ij}$ (8)
		Начало $T_i^{Р.Н.}$ (3)	Окончание $T_{ij}^{Р.О.}$ (4)	Начало $T_{ij}^{П.Н.}$ (5)	Окончание $T_j^{П.О.}$ (6)		
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)*	3	0	3	0	3	0	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)*	3	3	6	3	6	0	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3, 4)*	0	6	6	6	6	0	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)*	7	6	13	6	13	0	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)*	6	13	19	13	19	0	0

При построении календарного графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное (параллельное) выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, может оказаться невозможным. Именно в этом отношении представляет ценность полные резервы времени некритических операций. Сдвигая некритическую операции в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Однако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы.

Данные, необходимые для построения календарного графика, приведены в табл. 1. Прежде всего определяются календарные сроки выполнения критических операций. Далее рассматривается некритические операции, и указываются их ранние сроки начала $T^{Р.Н.}$ и поздние сроки окончания $T^{П.О.}$. Критические операции изображаются сплошными линиями. Отрезки времени, в пределах которых могут выполняться некритические операции, наносятся пунктирными линиями, показывающими, что календарные сроки этих операций можно выбрать в указанных пределах при условии сохранения отношений следования.

На рис. 3 показан календарный график. Фиктивная операция (3, 4) не требует затрат времени и поэтому показана на графике вертикальным отрезком. Числа, проставленные над некритическими операциями, соответствуют их продолжительностям.

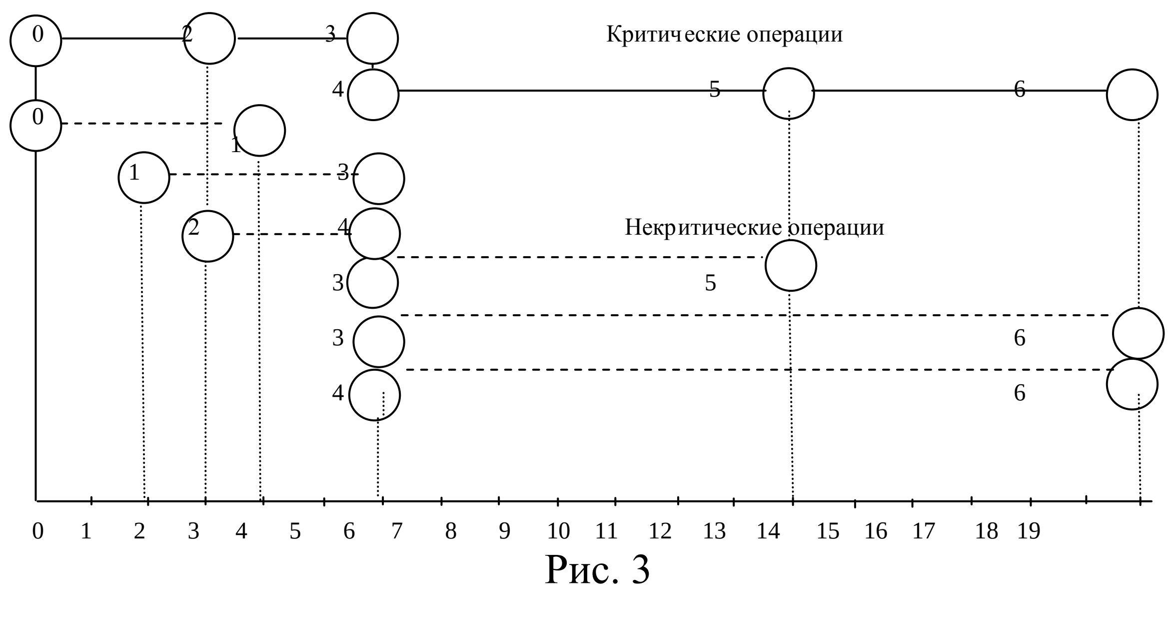


Рис. 3

Роль полных и свободных резервов времени при выборе календарных сроков выполнения некритических операций объясняется двумя общими правилами.

Правило 1. Если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием (пунктирные отрезки на рис. 3).

Правило 2. Если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к ее раннему сроку начала не более чем на величину свободного резерва, не влияя при этом на выбор календарных сроков непосредственно следующих операций.

В рассматриваемом примере правило 2 применимо только к операции (0, 1), а календарные сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

Предположим для выполнения различных операций требуется указанные ниже ресурсы рабочей силы.

Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)	Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)
(0, 1)	0	(3, 5)	2
(0, 2)	5	(3, 6)	1
(1, 3)	0	(4, 5)	2
(2, 3)	7	(4, 6)	5
(2, 4)	3	(5, 6)	6

Задача заключается в построении такого календарного плана (графика) реализации программы, при котором потребности в рабочей силе будут наиболее равномерными на протяжении всего срока осуществления программы.

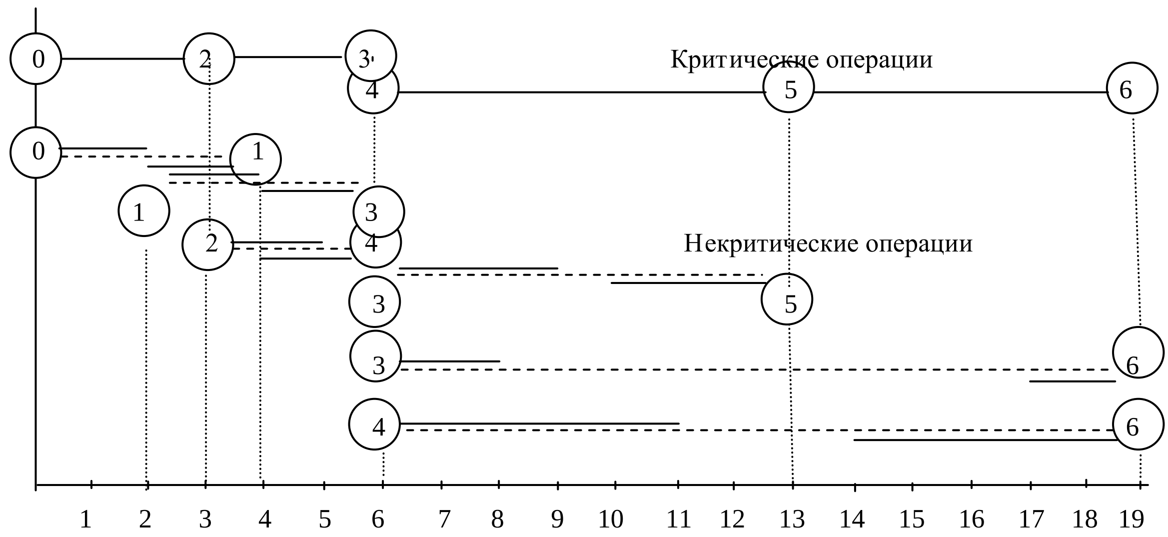
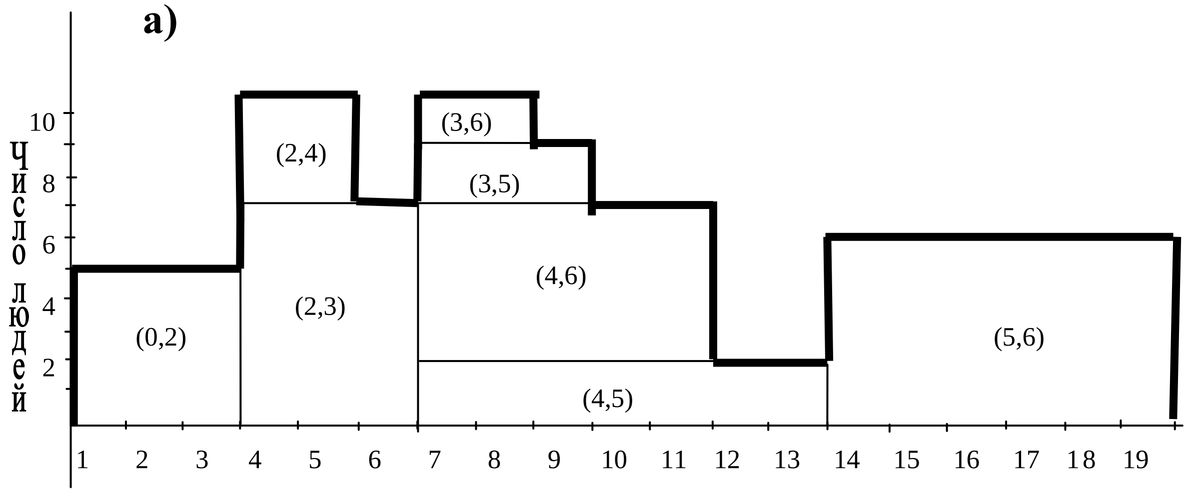


Рис. 4



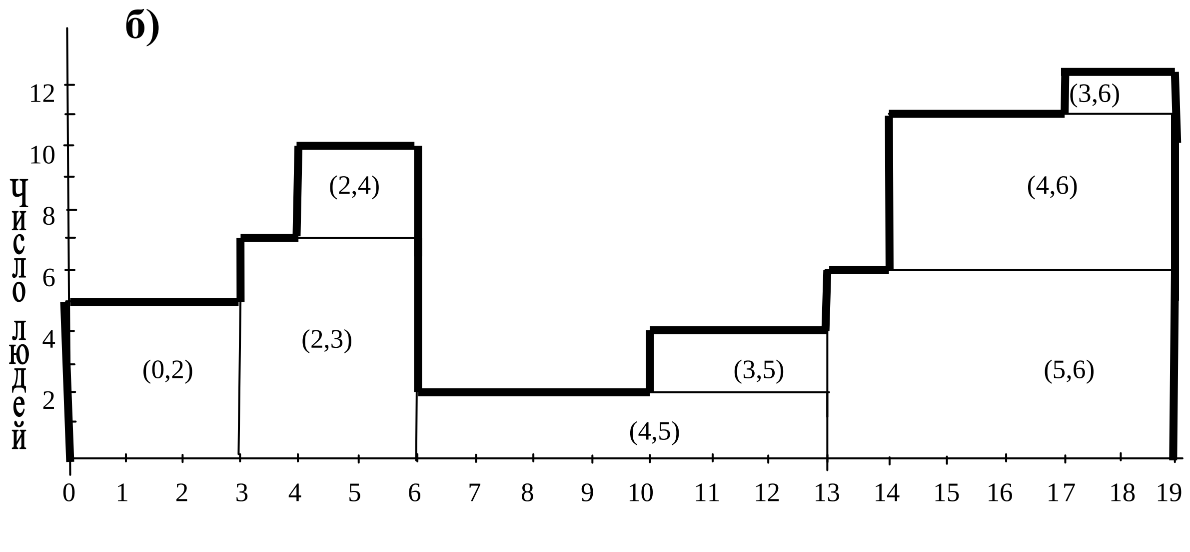


Рис. 5

а) ранний календарный план для некритических операций;

б) поздний календарный план для некритических операций.

На рис. 5.а показана потребность в рабочей силе при условии выбора в качестве календарных сроков некритических операций их ранних сроков начала (так называемый ранний (левый) календарный план), а на рис. 5.б – потребность в рабочей силе при выборе наиболее поздних сроков (так называемый поздний (правый) календарный план). Пунктирной линией представлена потребность критических операций, которая должна быть обязательно удовлетворена, если нужно выполнить программу в минимально возможный срок. (Отметим, что для операций (0, 1) и (1, 3) ресурсы рабочей силы не требуются).

Как показывают потребности в ресурсах критической операции (2, 3), для реализации программы необходимо, по крайней мере, 7 человек. При раннем календарном плане некритических операций максимальная потребность в ресурсах составляет 10 человек, а при позднем – 12. Этот пример наглядно показывает, что максимальные потребности в ресурсах зависят от использования резервов времени некритических операций. Однако, как видно из рис. 5, независимо от распределения этих резервов максимальная потребность в рабочей силе для рассматриваемой программы не может быть меньше 10 человек, так как интервал времени, в пределах которого можно выполнять операции (2, 4) совпадает с интервалом критической операции (2, 3).

График потребности в рабочей силе при раннем календарном плане можно улучшить, выбрав поздние календарные сроки для операции (3, 5) и назначив выполнение операции (3, 8) непосредственно после завершения операции (4, 6). Новый график потребности в рабочей силе, приведенный на рис. 6, обеспечивает более равномерное распределение ресурсов.

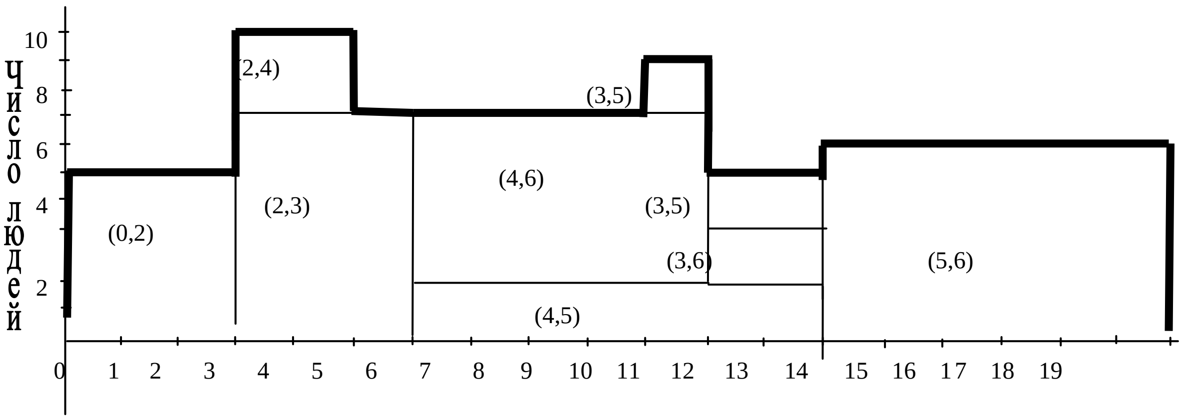
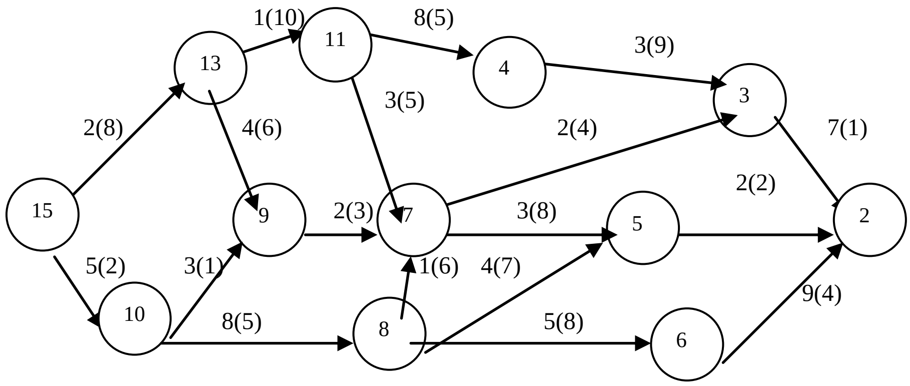


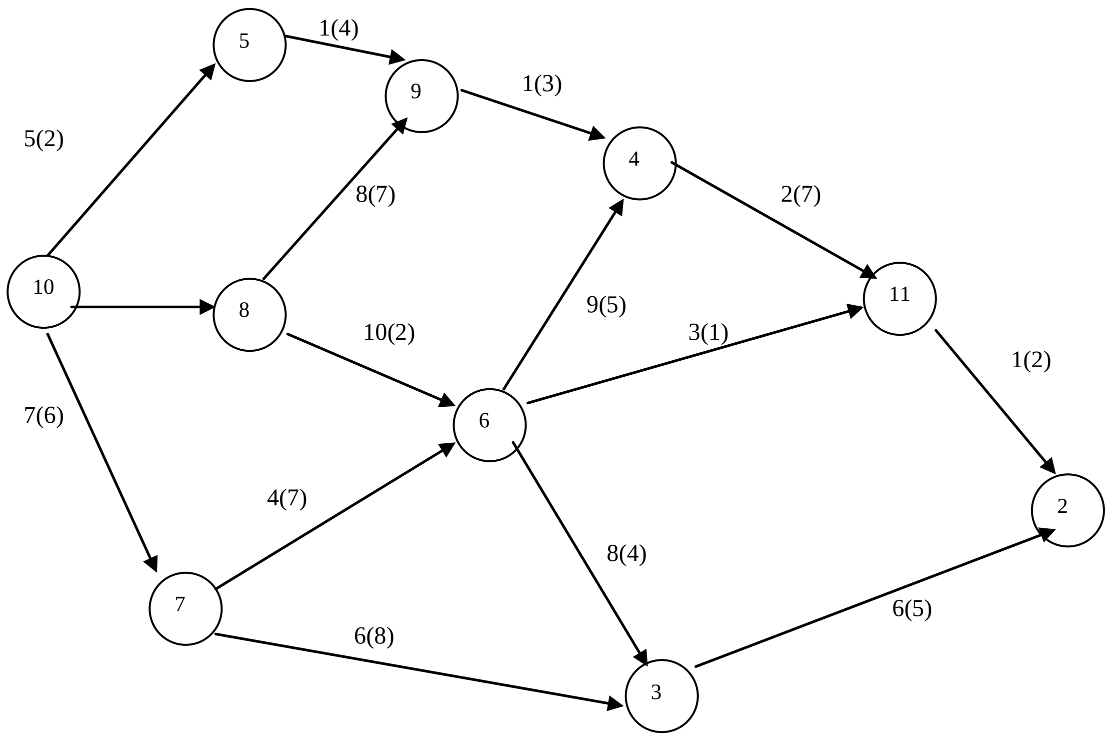
Рис. 6

Практическое занятие:

1. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.

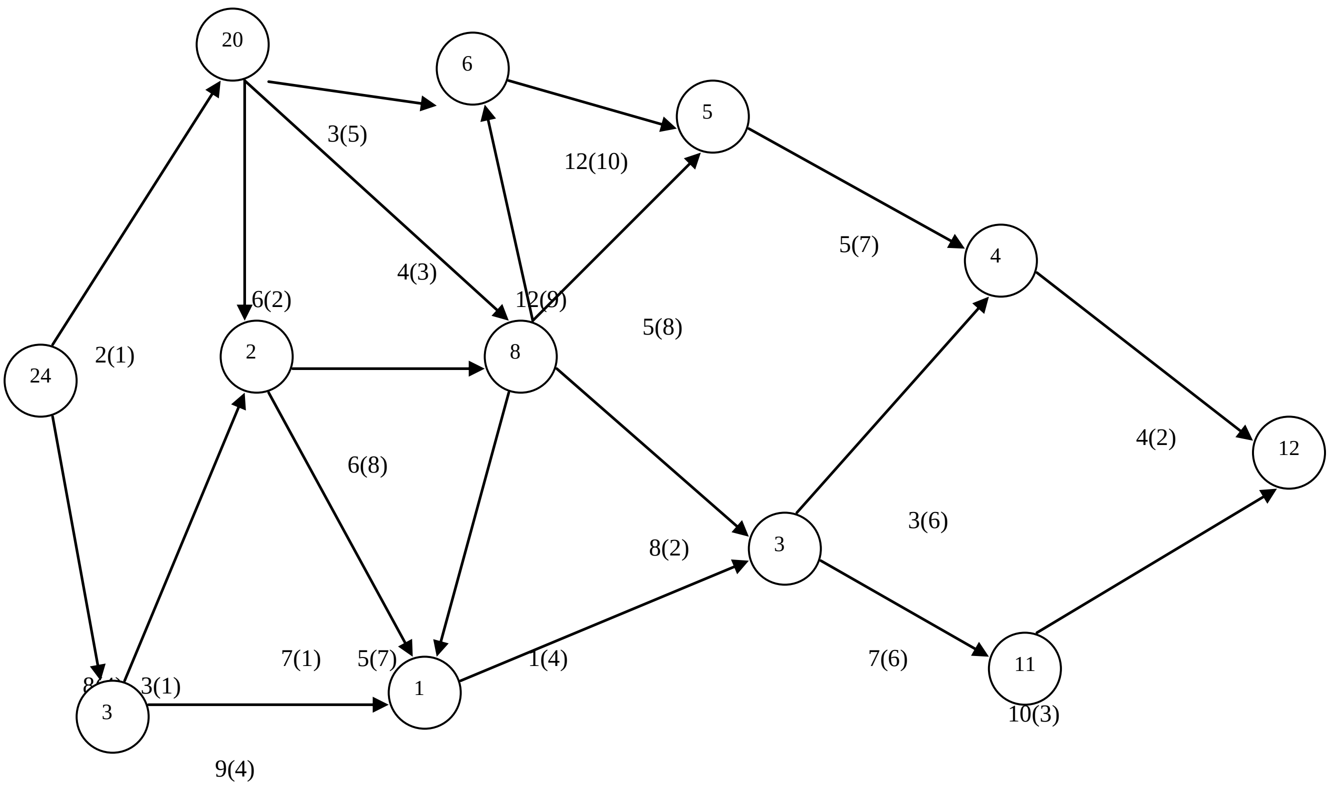


2. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.

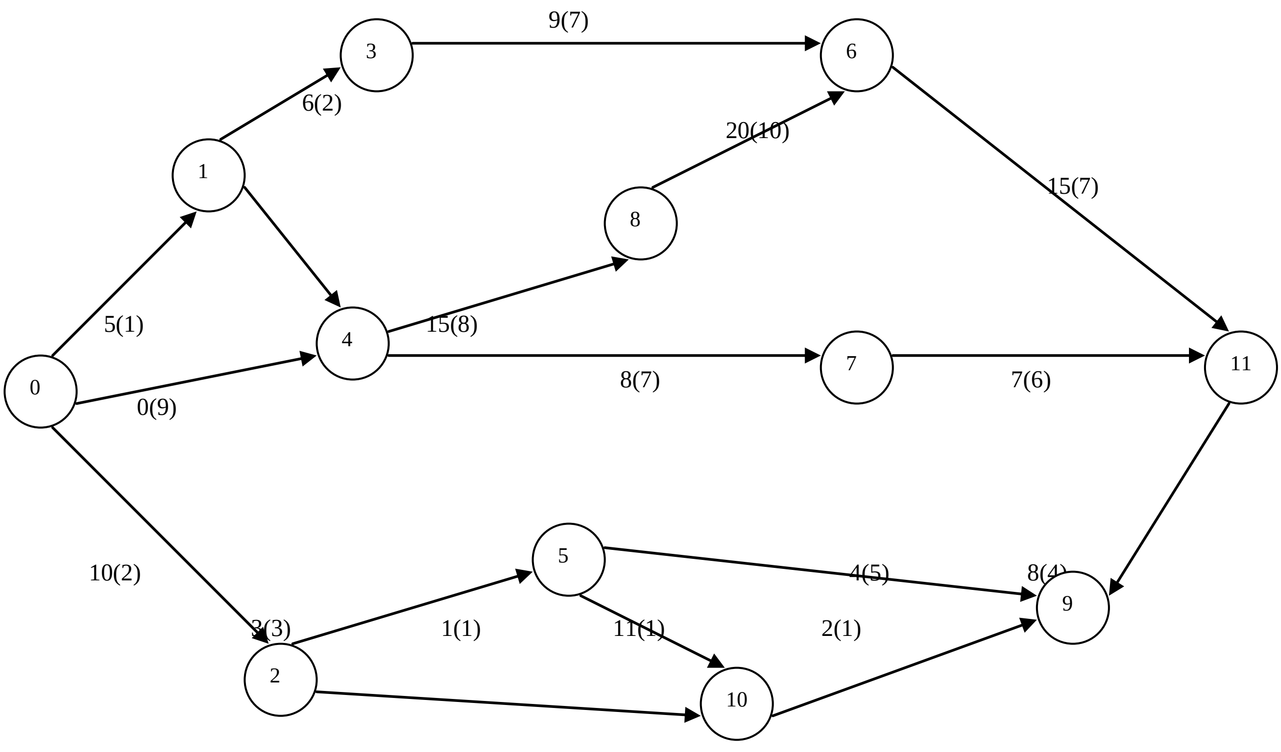


Самостоятельная работа:

1. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.



2. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.



Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Основная учебная литература

1. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – Москва: Высш. шк., 2001. – 552 с.

2. Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1974. – 271 с.

3. Голоколосова, Т. В. Исследование операций: учебное пособие / Т. В. Голоколосова, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 120 с.

4. Данилов Н. Н. Игровые модели принятия решения: учеб. пособие. – Кемерово. Изд-во КемГУ, 1981. – 122 с.

5. Данилов Н. Н. Теоретико-игровое моделирование конфликтных ситуаций: учеб. пособие. – Кемерово. Изд-во ТГУ, 2005. – 142 с.

6. Дюбин Г. Н. Введение в теория игр / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. – Москва: Наука, 1981. – 336 с.

7. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике: учебн. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – Москва: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

8. Таха Х. А. Введение в исследование операций. – Москва: Вильямс, 2005. – 901 с.

Дополнительная учебная литература

9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов экономических специальных вузов. – Москва: Высшая шк., 1986. – 320 с.

10. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – Москва: Физматгиз, 1961. – 68 с.

11. Воробьев Н. Н. Теория игр. – Москва: Знание, 1985. – 272 с.

12. Давыдов Э. Г. Исследование операций. – Москва: Высш. шк., 1990. – 381 с.

13. Дегтярев Ю. И. Исследование операций. – Москва: Наука, 1986. – 320 с.

14. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.