МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составитель
Е. А. Николаева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
направления подготовки 38.03.01 Экономика
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна

Математическая статистика и математическое моделирование в экономике: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 38.03.01 Экономика всех форм обучения / сост.: Е. А. Николаева; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2019.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины «Математическая статистика и математическое моделирование в экономике».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по дисциплине «Математическая статистика и математическое моделирование в экономике» и организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по дисциплине «Математическая статистика и математическое моделирование в экономике».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Теория вероятностей. Элементы комбинаторики Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Определение вероятности. Вероятность суммы и произведения событий. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Числовые характеристики. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность распределения, их свойства. Числовые характеристики. Нормальное и равномерное распределение.

Практическое занятие:

1. Элементы комбинаторики.

1.1. Сколькими способами можно расставить 7 книг на книжной полке?

1.2. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

1.3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что цифры в числе не повторяются?

1.4. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

1.5. Сколькими способами можно группу из 15 учащихся разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4, а в другой – 11 человек?

1.6. Из 20 студентов надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

1.7. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Сколько различных трехзначных чисел можно из них составить?

1.8. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

1.9. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек, причем один из преподавателей должен быть назначен старшим. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

1.10. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

1.11. Имеется шестизначная кодовая комбинация, состоящая из трех цифр 1, 3, 5, в которой цифра 1 встречается один раз, цифра 3 – два раза и цифра 5 – три раза. Сколько существует комбинаций таких наборов?

1.12. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

1.13. В почтовом отделении имеются открытки 3 видов. Сколькими способами можно купить набор из 5 открыток?

1.14. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

1.15. Сколько четырехбуквенных слов можно составить из букв М и А?

1.16. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

1.17. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколько может быть вариантов такой выдачи?

1.18. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый участник сыграл с каждым по одной партии, а партий было сыграно в 10 раз больше числа участников.

1.19. Имеются в неограниченном количестве палочки длиной 5, 6, 7, 8, 9, 10 см. Сколько различных треугольников можно из них составить?

1.20. Из 10 роз и 8 лилий нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 розы и 3 лилии. Сколькими способами это можно сделать?

1.21. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколько существует возможностей выбора этих пяти человек?

1.22. Сколькими способами можно расставить 8 томов энциклопедии на книжной полке так, чтобы первый и второй тома:

а) стояли рядом; б) не стояли рядом?

1.23. Даны две параллельные прямые. На одной из них имеется 10 точек, а на другой – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

1.24. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

1.25. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

1.26. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом? Стояли не рядом?

1.27. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных; в) 5 шаров одного цвета; г) 4 шара одного цвета?

1.28. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове: «ГОРА», «ИНСТИТУТ»?

1.29. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать три студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

1.30. Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в эстафете надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочек. Сколькими способами это можно сделать?

1.31. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом – 5 и в третьем – 2 вакантных места?

2. Непосредственный подсчет вероятностей.

2.1. При стрельбе из винтовки вероятность попадания в цель равна 0,75. Найти число попаданий, если всего было произведено 140 выстрелов.

2.2. В лотерее разыгрывается тысяча билетов. Среди них один выигрыш в 50 рублей, пять выигрышей в 20 рублей, двадцать выигрышей по 10 рублей и пятьдесят выигрышей по 5 рублей. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выиграть не менее 10 рублей; б) какого-либо выигрыша.

2.3. Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах?

2.4. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадает четное число очков.

2.5. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.

2.6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу излеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну, б) две, в) три.

2.7. В ящике содержится 100 перемешанных жетонов, пронумерованных целыми числами от 1 до 100. Найти вероятность того, что извлечённый наудачу жетон имеет номер, который не делится ни на 2, ни на 3.

2.8. В урне а белых и в черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

2.9. На 20 одинаковых жетонах написано 20 двухзначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

2.10. В мешке смешаны нити 5 сортов; 30% белых, 40% черных, 15% – красных, 10% зелёных, 5% голубых. Определить вероятность того, что наудачу взятая нить будет цветной.

2.11. В команде спортсменов 6 бегунов на короткие дистанции, 3 бегуна на длинные, 5 метателей, 7 борцов и 4 боксёра. Определить вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен будет легкоатлетом.

2.12. В пачке имеется 100 жетонов, занумерованных числами от 1до 100. Определить вероятность того, что номер наудачу взятого жетона будет кратным 25 или 30.

2.13. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что А – выпадет одинаковое число очков; В – сумма выпавших очков равна 8; С – сумма выпавших очков четная; Д –

число очков, выпавших при первом броске, больше числа очков, выпавших при втором броске; Е – сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

2.14. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «мел». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

2.15. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «рама». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

2.16. На одинаковых карточках написаны буквы а, а, б, г, е, р, л. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «алгебра»?

2.17. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наудачу последовательно вынимаются 3 карточки и ставятся слева направо в порядке появления. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число не содержит цифры 4?

2.18. В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

2.19. Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных?

2.20. Какова вероятность того, что три друга попадут в комиссию, состоящую из трех человек, если комиссию можно избрать из 15 человек?

2.21. Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу случайно берут 4 карточки и складывают в ряд. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?

2.22. Из колоды карт наудачу извлекается 3 карты. Найти вероятность того, что А – одна карта окажется бубновой масти; В – 2 карты черви; С – все разной масти.

2.23. Из колоды карт извлекается 4 карты. Найти вероятность событий: А – все черви; В – три короля и одна дама; С – один туз, один король, одна дама, один валет; Д – разной масти.

2.24. В группе из 25 студентов оценку «отлично» получили трое студентов, «хорошо» – шесть студентов, «удовлетворительно» – девять студентов. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных студента имеют неудовлетворительные оценки.

2.25. В корзине 2 красных, 5 белых и 8 синих шара. Наудачу достают три шара. Найти вероятность событий: А – все одного цвета; В – все разного цвета; С – есть два синих шара; Д – ровно два шара одного цвета.

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3.1. В ящике 7 белых шаров и 8 черных. Найти вероятность того что взяли 1 белый; 2 черных; 3 белых.

3.2. Студент сдает математику с вероятностью 0,7, физику с вероятностью 0,8, философию – 0,9. Найти вероятности: А – сдаст все экзамены; В – сдаст хотя бы один экзамен; С – сдаст ровно два экзамена; Д – сдаст ровно один экзамен? (0,504; 0,994; 0,398; 0,092)

3.3. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос преподаватель задает еще один вопрос? (28/29)

3.4. Программа экзамена содержит 30 вопросов, из которых студент знает только 15. Для успешной сдачи экзамена нужно ответить на 2 предложенных вопроса, или на один из них и дополнительный вопрос. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

3.5. В городе 4 библиотеки, в фонде каждой из которых с вероятностью 0,4 есть нужная студенту книга. В поисках книги студент обходит библиотеки пока не найдет ее или пока не обойдет все библиотеки. Найти вероятность: А – студент посетит 2 библиотеки; В – не более двух библиотек; С – четыре библиотеки. Что вероятнее: найдет книгу, или нет? (0,24; 0,64)

3.6. Три друга идут сдавать экзамен. Вероятность сдачи для первого – 0,9, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятности: А – все сдадут экзамен; В – сдаст ровно один из них; С– сдадут больше двух; Д – сдаст хотя бы один. (0,36; 0,14; 0,49; 0,99)

3.7. В первой корзине 4 белых и 6 черных шаров; во второй – 5 белых и 5 черных; в третьей 7 белых и 3 черных шара. Из каждой корзины достают по одному шару. Найти вероятности, что среди этих шаров: А – все белые; В – ровно один белый; С – хотя бы один белый; Д – два белых шара (0,14; 0,36; 0,91;0,41).

3.8. Два стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,7. Найти вероятности следующих событий: а) оба стрелка попали в мишень; б) в мишень попал хотя бы один стрелок.

3.9. В группе из 30 учеников на контрольной работе получили: 6 учеников оценки отлично, 10 учеников оценку хорошо, 9 человек оценку удовлетворительно. Какова вероятность того, что все три ученика, вызванных к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

3.10. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: 1) два мальчика, 2) две девочки, 3) девочка и мальчик?

3.11. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

4. Формулы полной вероятности и Байеса.

4.1. Болты изготавливаются на 3 станках, производящих соответственно 25%, 30%, 45% общего количества продукции. В продукции станков брак составляет соответственно 4%, 3%, 2%. Какова вероятность, что случайно взятый болт окажется дефектным?

4.2. В тире имеется 5 ружей, вероятности из попадания из которых соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

4.3. Вероятности правильного определения химического состава детали для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4 и 2/5. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка, если равновероятно деталь может попасть на проверку к любому из контролеров.

4.4. Из 25 приборов, имеющихся в магазине, 5 штук произведены заводом №1, 12 штук – заводом №2 и 8 штук – заводом №3. Вероятность того, что прибор, изготовленный заводом №1, в течение гарантийного срока не выйдет из строя, равна 0,95. Для прибора 2-го завода такая вероятность равна 0,9, а 3-го завода – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый прибор выдержит гарантийный срок.

4.5. Два токаря обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака первого – 0,03; второго – 0,04. Обработанные детали складываются в одно место. При этом первый токарь изготавливает деталей в 2 раза больше, чем второй. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

4.6. В железнодорожном составе 50 вагонов с углем двух сортов. По сортности угля вагоны состава делятся на три группы: 25 вагонов содержат 70% угля первого сорта и 30% угля второго сорта, 15 вагонов содержат соответственно 60% и 40%, остальные – 85% и 15%. Случайно взятый для анализа уголь оказался второго сорта. Какова вероятность, что он взят из вагона первой группы?

4.7. В трех одинаковых по виду и размеру коробках находятся по 20 сверл. В первой коробке 2 сверла бракованные, во второй – 3, в третьей – 5. Взятое наудачу сверло оказалось годным. Какова вероятность того, что оно взято из второй коробки?

4.8. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется годной, равна 0,96. Контролер ОТК проверяет детали по упрощенной системе. Вероятность ошибки при проверке годных деталей равна 0,02, при проверке негодных деталей – 0,01. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее контроль, является годным?

4.9. В телеателье поступили кинескопы с двух заводов: 35 штук с первого завода и 50 – со второго. Вероятность того, что кинескоп, изготовленный на первом заводе, не выйдет из строя в течение гарантированного срока, равна 0,85. Аналогичная вероятность для второго завода – 0,7. Наудачу выбранный кинескоп выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что он был изготовлен на втором заводе.

4.10. У рабочего есть 10 сверл, 2 из которых имеют дефект. Вероятность того, что в течение смены сверло не придется менять, равна 0,6 для сверла, не имеющего дефект, и 0,3 – для сверла с дефектом. Наудачу взятое сверло в течение смены сломалось. Какова вероятность того, что было взято сверло без дефекта?

4.11. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях направлено из 1 группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей групп попадет в сборную университета, равны соответственно 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал студент?

4.12. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20% пряжи составляет продукция цеха №2, а остальная – цеха №1. Продукция цеха №1 содержит 90%, а цеха №2 – 70% пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Какова вероятность, что он из цеха №1?

5. Повторные независимые испытания.

5.1. Производится 3 выстрела, вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Найти вероятности того, что будет ровно одно; два; три попадания.

5.2. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,3. Наугад выбираются 4 студента. Найти вероятности того, что среди них получают стипендию: ровно 1; ровно 2; ровно 3; никто не получает.

5.3. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб будет более 2 раз.

5.4. В комнате 6 электролампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она придет в негодность в течение года, равна 3/4. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не более двух лампочек?

5.5. Вероятность того, что расход воды на предприятии не превысит нормы в течение суток, равна 0,75. Найти вероятность того, что в течение 7 дней расход воды будет нормальным более 5 дней?

5.6. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,10. Какова вероятность того, что в сообщении из 8 знаков будет искажено не более трех знаков?

5.7. 5% телевизоров одного из телевизионных заводов требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что из 5 телевизоров более трех потребуют ремонта.

5.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

5.9. Вероятность того, что студент – девушка, равна 0,4. Найти вероятность, что из 800 студентов девушек меньше 200; более 500.

5.10. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,002 отходит в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

5.11. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени Т равна 0,005. Найти вероятность того, что произойдет не более 3 обрывов.

5.12. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Какова вероятность того, что из 600 пассажиров опоздают не более двух?

5.13. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 42 размера, равна 0,4. Найти вероятность того, что из 900 покупателей не более 460 потребуют обувь этого размера.

5.14. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха от 400 до 520 раз?

5.15. Вероятность того, что человек имеет высшее образование в России 0,3. Какова вероятность того, что из 100 случайно взятых человек высшее образование имеют более 20%?

5.16. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий хотя бы одно не выдержит испытание.

5.17. Магазин получил 2000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти вероятность того, что магазин получит более трех разбитых бутылок.

6. Случайные события.

6.1. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник?

6.2. В группе из 30 студентов оценку «отлично» получили трое студентов, «хорошо» – шесть студентов, «удовлетворительно» – девять студентов. Какова вероятность того, что из четырех наудачу выбранных студентов, один имеет неудовлетворительную оценку.

6.3. У сборщика имеется 3 корпусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

6.4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что A – в мишень попадает только один из стрелков; B – в мишень попадет хотя бы один из стрелков.

6.5. Студент разыскивает нужную ему формулу в трёх справочниках. Вероятность того, формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны: 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трёх, г) только в третьем справочнике.

6.6. В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения расчета автомат не откажет, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не откажет.

6.7. Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 изготовлены на I заводе, 250 на II заводе и 150 на III заводе. Известны также вероятности 0,97; 0,91; 0,93 того, что лампочка окажется стандартного качества при изготовлении её соответственно I, II, и III заводами. Какова вероятность того, что наудачу выбранная стандартная лампочка изготовлена на втором заводе.

6.8. Характеристика материалов, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16; и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

6.9. Имеется 5 станций, с которыми поддерживается связь. Время от времени связь прерывается из-за атмосферных помех. Вследствие удаленности станций перерыв друг от друга связи с каждой из них происходит независимо от остальных с вероятностью p = 0,2. Найти вероятность того, что данный момент времени будет иметься связь не более чем с двумя станциями.

6.10. Вероятность появления успеха в каждом из 800 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха 455 раз? От 400 до 700 раз?

6.11. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 6000 изделий хотя бы три бракованные.

7. Дискретная случайная величина.

Составить ряд распределения случайной величины X и вычислить ее числовые характеристики.

7.1. Вероятность выигрыша по лотерейному билету 0,2. Случайная величина X – число выигравших билетов из трех купленных.

7.2. Студент сдает в сессию экзамены с вероятностями: математику – 0,8, физику – 0,7, историю – 0,9. Случайная величина X – число сданных экзаменов.

7.3. Студент может сдавать экзамен 3 раза, после чего его отчисляют. Вероятность сдать с 1-го раза равна 0,6, со 2-го –0,7, с 3-го – 0,8. Случайная величина X – число приходов на экзамен. Записать функцию распределения.

7.4. Студент получает «5» за экзамен: по математике с вероятностью 0,2, по физике – 0,1, по истории – 0,4. Случайная величина X – число «пятерок» в сессию.

7.5. Студент ищет нужную формулу в 3 справочниках, причем если нашел, то дальше не ищет. Вероятность найти формулу в 1-м справочнике – 0,4, во 2-м –0,5, в 3-м – 0,7. Случайная величина X – число просмотренных справочников.

7.6. Шахматист должен сыграть с тремя другими шахматистами. Он знает, что вероятность выиграть у 1-го равна 0,9, у 2-го – 0,7, у 3-го – 0,3. Случайная величина X – число выигранных партий.

7.7. У студента в сумке учебники по математике, физике, истории, геологии. Ему нужно достать учебник по математике, и он наугад достает по одному, пока не достанет нужный. Случайная величина X – число вынутых учебников.

7.8. Студент посещает занятия с вероятностями: первую пару с вероятностью – 0,6, 2-ю – 0,9, 3-ю – 0,8. Случайная величина X – число пар, на которых был студент.

7.9. У охотника 3 патрона и он стреляет в дичь пока не попадет, или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина X – число израсходованных патронов. Записать функцию распределения.

7.10. В колоде 36 карт, сдают 6 карт. Случайная величина X – число тузов среди сданных карт.

7.11. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,4. Случайная величина X – число студентов, получающих стипендию из 4-х наугад выбранных.

7.12. У дежурного гостиницы в кармане 4 различных ключа. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь комнаты. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если проверенный ключ не возвращается обратно. Найти его числовые характеристики.

8. Непрерывная случайная величина.

8.1. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)$. Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность вероятности); б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (α; β), то есть $P(\alpha<X<\beta)$. г) Построить $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 0{,}5\cdot x, & 0<x\le 2, \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{100}, & 0<x<10, \\ 1, & x\ge 10 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2, \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

1) $a = 1, b = 2$; $a = 5, b = 8$; $a = 0, b = 3$.
2) $a = 1, b = 5$; $a = 6, b = 12$; $a = –1, b = 4$.
3) $a = – 1, b = 1$; $a = 2, b = 10$; $a = –3, b = 1$.

8.2. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ Ax+\dfrac{1}{12} & при\ 0\le x\le 4 \\ 0 & при\ x>4 \end{cases}.$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ Ax^2+\dfrac{1}{20} & при\ 0\le x\le 4 \\ 0 & при\ x>0 \end{cases}$$

Найти коэффициент A. Записать функцию распределения данной случайной величины. Найти числовые характеристики.

9. Нормальный закон распределения.

9.1. Вес вылавливаемых в прудах зеркальных карпов X – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 500 г, и средним квадратическим отклонением – 75 г. Записать плотность вероятности случайной величины X. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого карпа: а) заключен в пределах от 425 г до 550 г; б) более 700 г; в) менее 400г.

9.2. Некоторая категория работников имеет среднюю зарплату 16 тыс. рублей и среднее квадратическое отклонение зарплаты 4 тыс. рублей. Предполагая, что зарплата X – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить процент работников, получающих зарплату: а) более 20 тыс. руб.; б) менее 8 тыс. рублей; в) от 15 до 18 тыс. рублей.

9.3. Длина изготавливаемых станком-автоматом деталей представляет собой случайную величину X, имеющую нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 200 см, и среднеквадратическим отклонением – 0,2 см. Записать плотность распределения случайной величины X. Определить вероятность брака, если допустимые размеры детали 20 + 0,3 см.

9.4. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Предполагая, что вес m – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить вероятность того, что вес случайно взятого человека: а) отличается от среднего не более чем на 5 кг; б) находится в пределах от 62 до 66 кг; в) менее 50 кг.

9.5. В нормально распределенной совокупности 15% значений X меньше 12, а 40% значений X больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

9.6. Игральную кость бросают 80 раз. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 будет заключено число m выпадений шестерки.

10. Равномерное распределение.

10.1. Случайная величина X распределена равномерно на интервале (2;8). Записать функцию плотности вероятности, функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и медиану. Найти вероятности $P(X<3)$; $P(X>5)$; $P(4<X<6)$.

10.2. Число дней, проведенных больным в больнице, T – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Наименьшее число дней, необходимое для обследования, равно 5; наибольшее – 12. Записать плотность распределения случайной величины T. Найти ее математическое ожидание, дисперсию; вероятность того, что время пребывания больного в больнице: а) не превысит 7 дней; б) превысит 10 дней; в) будет в пределах от 6 до 8 дней.

10.3. Автобусы идут с интервалом 10 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса имеет равномерное распределение, найти А) функции плотности и распределения, построить их графики; Б) среднее время ожидания, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания; В) вероятности того, что время ожидания автобуса будет не более 3 минут; более 4 минут; от 5 до 8 минут.

11. Показательный закон распределения.

11.1. Записать функцию плотности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$; построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вероятности $P(X<7)$; $P(X>3)$; $P(2<X<5)$.

11.2. Время между двумя сбоями вычислительной машины t – случайная величина, имеющая показательное распределение с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию плотности вероятности данной случайной величины. Найти вероятность безотказной работы машины в течение а) менее 300 часов; б) более 500 часов.

11.3. Для ремонта автомобиля требуется в среднем 3 часа. Предполагая, что время Т, необходимое для ремонта автомобиля, случайная величина, имеющая показательное распределение, записать плотность вероятности случайной величины Т. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что время ремонта составит: а) самое большее 1,5 часа; б) от 1 до 2 часов; в) более 2,5 часов.

12. Случайные величины.

12.1. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7. X – число СУ, перевыполнивших план. Составить закон распределения. Вычислить числовые характеристики. Построить функцию распределения.

12.2. X – непрерывная случайная величина, задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right); & 1 \le x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}.$$

Найти плотность распределения вероятностей, числовые характеристики, вероятность попадания СВ в интервал: $[1{,}5; 1{,}9]$, $[1{,}2; 2{,}3]$.

12.3. Из пункта С ведется стрельба из орудия. Предполагается, что дальность полета распределена нормально и среднее его значение 1000 м, с отклонением 5 м. Определить (%), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 метров.

Записать функции плотности и распределения.

12.4. Случайная величина распределена по показательному закону с математическим ожиданием равным 3. Записать функции плотности и распределения. Найти вероятность того, что данная СВ примет положительное значение.

12.5. Ребро куба x измерено приближенно: $1 \le x \le 2$. Рассматривая ребро куба как СВ X, распределенную равномерно, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба и вероятность того, что объем куба будет в пределах от 5 до 9.

12.6. X – непрерывная случайная величина, задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ Ax-4 & 2\le x\le 3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

Найти А, функцию распределения, числовые характеристики.

Самостоятельная работа:

1. На экзамене студенту предлагаются 25 билетов. В каждом билете 3 вопроса. Из 75 вопросов, вошедших в билеты, студент знает 60. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет содержать только один не известный ему вопрос?

2. В двух ящиках находятся детали: в 1-м – 10 (из них 3 стандартных), во 2-м – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

3. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причем из них в 1-м – 17, а во 2-м – 15 стандартных деталей. Из 2-го ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в 1-й ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная после этого деталь из 1-го ящика будет стандартной.

4. Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 6?

5. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень два раза и один раз промахнуться.

6. Имеется 5 урн: две из них содержат по 2 белых и 3 черных шара, две – по 1 белому и 4 черных и одна урна – 4 белых и 1 черный шар. Из одной наудачу выбранной урны взяли шар. Он

оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынули из урны с 4 белыми и 1 черным шарами?

7. В коробке находятся 2 черных, 3 красных и 5 белых шаров. Три человека вынимают по шару. Найти вероятность того, что вынутые шары будут разных цветов.

8. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при 4 циклах объект будет обнаружен.

9. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

10. На столе лежат 36 экзаменационных карточек с номерами 1,2,...,36. Преподаватель берет 2 любые карточки. Какова вероятность того, что они из первых 6?

11. Стрелок выстрелил три раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень хотя бы один раз.

12. В партии 600 лампочек; 200 изготовлены на 1-м заводе, 250 – на 2-м, 150 – на 3-м. Вероятность того, что лампочка окажется стандартной для 1го завода равна 0,97, для 2-го – 0,91, для 3-го – 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка, оказавшаяся стандартной, изготовлена 1-м заводом?

13. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет число очков, составляющих в сумме число, кратное трем.

14. Три баскетболиста должны произвести по одному броску мяча. Вероятности попадания мяча в корзину для первого, второго и третьего баскетболистов равны соответственно 0,9; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что удачно произведет бросок только один спортсмен.

15. В стройотряде 70% первокурсников и 30% студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса – 5% девушек. Все студенты по очереди

дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит девушка.

16. Для проверки магазинов нужны три ревизора, каждый из которых должен проверить два магазина. Чему равна вероятность того, что при случайном распределении объектов первому ревизору попадут данные два магазина?

17. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень один раз и два раза промахнуться.

18. Три станка расположены на одной прямой, расстояние между каждыми двумя соседними станками одинаково и равно а. Рабочий, обслуживающий станки, переходит от станка, на котором работа закончена, к любому из двух остальных с равными вероятностями. Найти вероятность того, что длина совершаемого им перехода равна а.

19. Студентам, едущим на практику, предоставили 7 мест в Ленинград, 8 – в Омск и 10 – в Воронеж. Какова вероятность того, что три определенных студента попадут на практику в Воронеж?

20. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появятся хотя бы один раз?

21. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна 0,9. Вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна 0,001. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

22. Из букв разрезной азбуки составлено слово «воздух». Перемешаем карточки, затем, вынимая их наудачу, кладем по порядку. Какова вероятность того, что получится слово «ход»?

23. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.

24. Партия состоит из вентиляторов рижского и московского заводов. В партии 70% вентиляторов рижского завода. Для вентилятора московского завода надежность в течение времени t

равна 0,95, рижского – 0,92. Найти вероятность безотказной работы вентилятора в течение времени t.

25. На сборку поступил ящик с 30 деталями, из которых 3 нестандартных, а детали высшего и первого сортов находятся в отношении 2:7. Рабочий взял 4 детали из ящика. Найти вероятность того, что взяты две детали первого сорта и по одной детали высшего сорта и нестандартной.

26. Подбрасываются две монеты. Какова вероятность того, что на обеих выпадет герб?

27. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний – 0,3, мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок и пробивший ее был крупный?

28. В партии из пяти деталей имеются две дефектных. Наудачу отобраны три детали. Найти вероятность того, что будут отобраны две стандартных и одна дефектная детали.

29. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – по 100 руб., на 50 билетов – по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

30. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2%, третий – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

31. Группа состоит из 4 студентов горного, 8 – механического, 6 – химического и 7 – электротехнического факультетов. Какова вероятность того, что 3 первых студента, явившихся на экзамен, окажутся студентами химического факультета?

32. Имеется четыре различных ключа, из которых только один подходит к замку. Определить вероятность трех опробований при открывании замка, если испробованный ключ, в последующих попытках открыть замок не участвует.

33. Наборщик пользуется двумя кассами. в первой кассе – 90%, а во второй – 80% отличного шрифта. Извлеченная литера из наудачу взятой кассы оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она взята из первой кассы.

Математическая статистика. Основные понятия математической статистики. Дискретный и интервальный вариационные ряды. Полигон. Гистограмма. Выборочные числовые характеристики вариационного ряда: среднее, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана. Интервальная оценка параметров распределения случайных величин. Доверительный интервал, доверительная вероятность, точность оценки. Проверка статистических гипотез. Уровень значимости, критическая область, статистические критерии.

Практическое занятие:

1. На угольных предприятиях исследовали производительность труда рабочих при проходке штрека (случайная величина X). Результаты наблюдений приведены в таблице:

№	X	№	X	№	X	№	X	№	X
1	0,32	11	0,19	21	0,16	31	0,15	41	0,15
2	0,16	12	0,16	22	0,33	32	0,18	42	0,19
3	0,27	13	0,14	23	0,23	33	0,21	43	0,31
4	0,25	14	0,27	24	0,35	34	0,26	44	0,22
5	0,29	15	0,18	25	0,20	35	0,27	45	0,23
6	0,17	16	0,24	26	0,17	36	0,22	46	0,36
7	0,18	17	0,12	27	0,25	37	0,23	47	0,31
8	0,22	18	0,24	28	0,20	38	0,16	48	0,21
9	0,29	19	0,21	29	0,18	39	0,18	49	0,16
10	0,25	20	0,23	30	0,17	40	0,17	50	0,28

По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

2. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y, где X – стаж работы работника, а Y – производительность его труда. Данные приведены в табл. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
8	1,9	14	2,3	9	1,9	12	2,3	19	2,5
11	2,3	2	1,4	9	1,9	10	1,9	13	2,1
5	1,6	11	2,2	13	2,1	16	2,5	12	2,3
8	2,0	6	1,7	16	2,5	5	1,3	15	2,4
12	2,3	10	1,9	8	1,8	9	2,0	16	2,6
1	1,3	10	2,0	11	2,2	7	1,7	11	2,1
9	2,0	12	2,2	17	2,8	6	2,0	12	2,2
8	1,8	18	2,6	9	1,8	11	2,3	8	1,5
10	1,8	8	1,9	6	1,5	11	2,8	7	1,6
13	2,2	13	2,1	10	1,9	12	1,3	12	2,1

3. На угольных предприятиях определяли производительность труда рабочих при проходке штрека (случайная величина X) и скорость проходки (случайная величина Y, м/мес). Результаты наблюдений приведены в таблице.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0,31	136	0,19	110	0,16	70	0,15	118	0,15	100
0,16	76	0,16	87	0.33	300	0,18	152	0,19	64
0,27	160	0,14	75	0,23	185	0,21	155	0,31	150
0,25	170	0,21	120	0,36	311	0,26	151	0,22	150
0,23	101	0,18	97	0,20	97	0,29	230	0,23	126
0,17	87	0,24	100	0,17	120	0,22	215	0,36	280
0,18	72	0,12	123	0,25	201	0.23	202	0.31	154
0,22	100	0,24	103	0.20	152	0,16	120	0,21	120
0,29	194	0,21	100	0,18	118	0,18	101	0,16	120
0,25	190	0.23	103	0,17	158	0,17	100	0.28	125

По данным X – производительности труда рабочего (табл. 1) необходимо: а) составить вариационный ряд; б) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}$, выборочную дисперсию D_b, выборочное среднее квадратическое отклонение σ_x.

4. По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

е) исследовать линейную корреляционную зависимость между двумя случайными величинами X и Y. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции

Задача 1		**Задача 2**		**Задача 3**		**Задача 4**	
X	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***
9	10	21	30	45	65	25	60
97	60	32	40	46	50	32	50
63	40	8	20	41	40	14	45
82	50	28	30	38	45	19	45
85	50	32	35	47	64	40	64
45	30	5	15	36	44	2	44
92	56	35	44	48	55	30	55
100	60	27	30	51	57	27	57
97	64	29	32	47	61	29	61
99	71	37	41	57	64	28	64
125	80	40	40	56	66	46	66
68	40	12	20	39	43	8	43
117	75	24	30	50	59	30	59
74,7	45	11	15	46	54	12	54
105	69	24	25	51	64	38	64
110	65	45	50	48	55	42	55
108	64	39	40	52	64	36	64
135	80	52	54	64	75	54	75
86	53	13	18	48	51	22	51
105	67	43	42	53	62	39	62

Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
X	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***
112	66	27	31	49	53	28	53
107	66	31	25	58	68	24	68
118	69	36	33	50	59	43	59
93	60	37	34	53	67	50	67
72	50	39	38	44	51	26	51
104	70	33	35	49	55	36	55
130	80	49	48	60	68	52	68
112	66	38	35	42	57	31	57
53	44	18	22	41	50	15	50
103	65	25	23	52	60	34	60
102	61	23	25	62	74	30	65
106	63	38	34	55	61	28	61
124	70	58	59	61	62	43	62
78	44	15	26	38	42	12	42
77	45	23	23	43	53	23	53
91	58	16	21	47	51	22	51
88	54	31	27	46	55	33	55
116	68	24	25	57	69	44	69
99	55	32	33	58	68	26	68
108	64	25	25	54	65	38	65
148	84	60	65	64	78	60	76
93	53	38	42	54	61	38	63
132	60	28	34	47	51	35	54
128	74	44	46	57	63	49	67
137	85	39	32	59	62	45	62
114	55	19	22	58	61	38	64
79	40	30	36	55	68	26	67
84	52	46	49	49	57	26	55
95	45	22	24	44	51	18	40
91	50	47	35	53	65	34	65

Самостоятельная работа:

1. По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения;

е) исследовать линейную корреляционную зависимость между двумя случайными величинами X и Y. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции

Задача 1		**Задача 2**		**Задача 3**		**Задача 4**	
X	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***
56	60	42	55	63	50	2,5	25
76	50	67	90	84	90	3,6	30
40	45	21	34	60	44	4,6	33
60	55	34	56	70	51	2,8	32
74	90	50	70	88	70	2,6	22
11	20	22	33	36	33	3,7	23
56	65	47	65	72	65	5,9	33
68	67	45	67	75	67	2,2	21
72	85	53	77	78	77	1,8	28
104	111	61	89	88	89	2,7	23
110	120	64	85	90	85	2,2	21
15	20	25	43	97	66	1,5	23
84	70	59	68	93	68	3	26
45	54	38	59	60	59	3,6	34
68	76	50	70	78	70	5,3	36
72	80	48	64	80	64	4,7	30
86	100	54	79	92	79	2,9	20
120	95	75	100	125	100	4,5	29
56	51	43	61	69	61	2,9	22

Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
X	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***
108	105	59	74	93	74	3,3	21
64	65	50	70	74	70	2,4	22
68	71	48	56	70	56	2,2	23
105	99	60	81	95	81	5,7	33
108	88	69	90	110	90	5	30
59	51	41	60	72	60	2,5	25
83	77	59	76	83	76	3,7	24
106	98	76	99	115	99	3,7	26
52	57	48	61	86	61	1,5	23
35	50	34	45	60	45	2,6	26
70	60	48	56	80	51	3,8	25
75	87	59	78	90	78	6	32
68	67	60	89	78	89	2,8	24
80	88	66	84	108	88	1,6	21
40	42	32	50	52	50	0,5	21
67	53	48	61	76	61	1,9	22
52	51	36	50	68	50	2,2	22
60	55	42	66	70	66	0,5	21
73	69	52	79	85	76	4,3	26
75	68	60	81	90	87	2,5	25
80	65	58	61	92	56	5,8	32
130	140	80	103	120	99	3,4	23
84	63	57	71	96	79	3,9	24
80	54	51	79	90	76	2,7	25
95	75	68	95	100	92	1,8	22
100	62	72	111	108	109	1,4	24
74	64	55	54	84	53	4,8	26
48	67	58	77	92	76	3,7	26
50	55	38	47	65	44	4	28
52	40	40	55	60	54	3,6	30
81	69	55	70	95	80	3,8	31

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***
36	40	48	47	40	24	3,8	48
44	60	66	65	50	34	4,5	60
24	34	40	40	25	21	2,7	34
35	45	52	49	42	26	3,2	45
48	60	72	64	54	34	5	60
12	20	18	24	6	14	1,3	20

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***	***X***	***Y***
39	45	58	49	48	27	3,6	45
34	40	47	44	35	24	3,7	40
40	50	62	54	52	29	4	60
48	55	75	59	65	31	4,8	55
52	67	78	71	68	37	5,3	67
15	25	19	29	7	16	1,6	20
47	51	64	55	52	29	4,9	51
24	30	40	34	32	19	2,6	30
38	45	50	49	48	28	3,5	45
40	45	60	49	51	26	4	40
49	67	68	71	60	37	4,9	75
68	85	100	89	92	46	6,7	90
28	34	52	38	36	21	2,9	34
51	67	73	71	64	37	5,2	67
35	41	57	45	45	24	3,6	41
38	56	60	60	47	32	3,7	56
49	54	72	58	66	31	4,8	54
60	80	88	84	80	44	6	85
32	34	48	38	38	21	3,3	34
46	50	62	54	53	29	4,5	50
67	70	90	74	57	39	6,8	70
36	34	56	38	47	21	3,7	34
28	41	40	45	25	24	2,9	47
41	56	58	60	48	32	4,3	56
46	70	70	74	56	39	4,5	75
40	50	60	54	49	29	4	50
58	65	87	69	77	36	5,7	65
22	31	35	35	24	19	2,3	26
39	45	56	49	44	26	3,7	45
28	34	45	38	36	21	2,5	33
34	41	50	45	49	24	3,6	45
42	55	62	59	52	31	4,8	54
48	58	65	62	56	33	4,3	58
46	50	72	54	63	29	4,5	50
62	67	100	71	94	37	6,5	67
51	56	74	60	65	32	5,2	56
50	60	68	64	53	34	5	60
57	61	80	65	70	34	5,8	60
62	72	85	76	80	40	6,3	72
42	55	64	59	55	31	4,5	52

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
48	60	72	64	60	34	4,7	60
30	40	52	44	38	24	3	35
27	30	47	34	34	19	2,8	28
45	45	71	49	63	26	4,4	41

Математическое моделирование. Виды математических моделей. Алгоритм построения математической модели реальной ситуации.

Пример:

1. (Задача об использовании ресурсов)

Для изготовления двух видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		$P1$	$P2$
$S1$	18	1	3
$S2$	16	2	1
$S3$	5	–	1
$S4$	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции 2 и 3 руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно $P1$ и $P2$, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(1*x_1 + 3*x_2)$ единиц ресурса $S1$, $(2*x_1 + 1*x_2)$ единиц ресурса $S2$, $(1*x_2)$ единиц ресурса $S3$ и $(3*x_1)$ единиц ресурса $S4$. Так как потребление ресурсов $S1$, $S2$, $S3$ и $S4$ не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$x_1 + 3\,x_2 \le 18,$$
$$2\,x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3\,x_1 \le 21$$

По смыслу задачи переменные неотрицательны

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции $P1$ и $3x_2$ руб. – от реализации продукции $P2$ т. е.

$$f(x) = 2\,x_1 + 3\,x_2 \to max$$

2. (Задача о раскрое материалов) Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить математическую модель задачи.

Решение: Определим всевозможные способы распила бревен.

Способ распила	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим: x_i – число бревен, распиленных i-м способом (i = 1, 2, 3, 4); x – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$f = x \to max$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195,$$
$$5x_1 + 2x_2 = 2x,$$

$$x_2 + 2x_3 = x,$$
$$x_4 = 3x,$$
$$x_i \geq 0 \ (i = 1,2,3,4)$$

Практическое занятие:

1. Фирма производит 2 вида продукции: А и В, объём сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объёма реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырьё, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В – 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 $ соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

2. Процесс изготовления 2 видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объёмы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин.			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 $
2	5	20	15	3 $

3. В трёх хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т. бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Домашние задание:

1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 $ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5$, а каждая минута телерекламы – в 100$. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу между радио и телерекламой.

2. У врача диетолога имеется пять видов продуктов. Из них он должен составить наиболее экономную диету. Требуется, чтобы меню содержало 20 единиц белка и 20 единиц жиров. Содержание белков и жиров в единице каждого вида продукта, а также стоимость единицы продукта заданы таблицей:

	Виды продуктов				
	I	II	Ш	IV	V
Белки	1	2	1	1	3
Жиры	2	1	1	2	4
Стоимость	12	10	9	18	7

3. Фирма получила заказ на *n* разных блоков, которые могут изготовить *n* фирм. Каждый блок настолько велик, что фирма – поставщик не может выполнить более одного заказа. Известна цена изготовления разных блоков в каждой фирме. Фирма должна заключить *n* контрактов на поставку ей *n* видов блоков, минимизировав при этом общие затраты на приобретение блоков.

Сетевое и календарное планирование. Принципы построения сетевой модели. Расчет сетевой модели. Календарный график работ.

Пример:

1. Постройте сетевую модель, включающую операции *A*, *B*, *C*, …, *L*, которая отображает следующие отношения упорядочения:

1. *A*, *B* и *C* – исходные операции программы, которые можно начинать одновременно.

2. *A* и *B* предшествуют *D*.

3. *B* предшествует *E*, *F* и *H*.

4. *F* и *C* предшествуют *G*.

5. *E* и *H* предшествуют *I* и *Y*.

6. *C*, *D*, *F* и *Y* предшествуют *K*.

7. *K* предшествует *L*.

8. *I*, *G* и *L* – завершающие операции программы.

Сеть, соответствующая этим отношениям упорядочения, приведена ниже. Фиктивные операции D_1 и D_2 введены для того, чтобы правильно отразить отношения следования. Операция D_1 использована для однозначного определения операций *E* и *H* по конечным событиям.

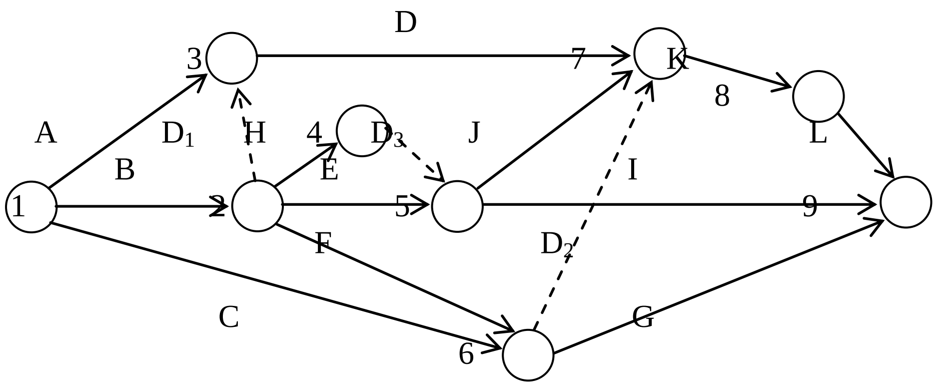


Рис. 1

2. Рассмотрим сетевую модель, показанную на рис. 2, с исходным событием 0 и завершающим событием 6. Оценки времени, необходимого для выполнения каждой операции, даны у стрелок.

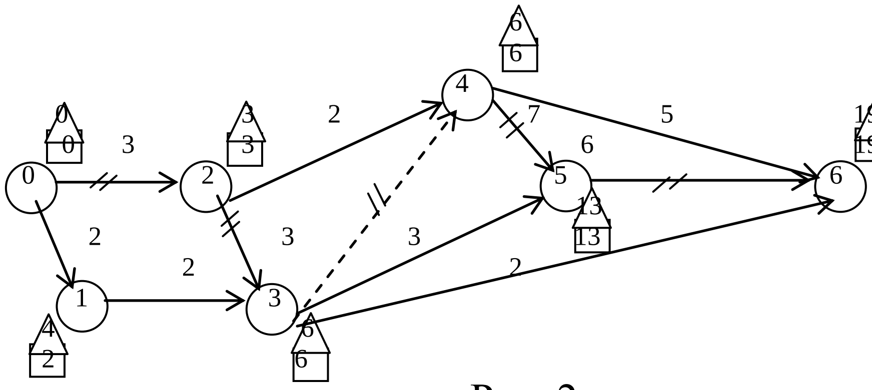


Рис. 2.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый этап называется **прямым проходом**. Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее **ранний срок** его наступления. Эти числа указаны на рис. 2 в квадратах. На втором этапе, называемом **обратным проходом**, вычисления начинаются с завершающего события сети и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется число, представляющее **поздний срок** его наступления. Эти числа даны в треугольниках.

Рассмотрим теперь прямой проход. Пусть $T_i^{Р.Н.}$ – ранний срок начала всех операций, выходящих из события i. Если принять $i = 0$, то $T_i^{Р.Н.} = 0$. Обозначим символом D_{ij} продолжительность операции (i, j). Тогда вычисления при прямом проходе выполнятся по формуле

$$T_j^{Р.Н.} = \max_i \left\{ T_i^{Р.Н.} + D_{ij} \right\} \text{ для всех операций } (i, j), \text{ где } T_0^{Р.Н.} = 0.$$

Применительно к рис. 2 вычисления при прямом проходе начинаются с $T_0^{Р.Н.} = 0$, как показано в квадрате над событием 0. Поскольку в событие 1 входит только одна операция (0, 1) продолжительностью $D_{01} = 2$, то

$$T_1^{Р.Н.} = T_0^{Р.Н.} + D_{01} = 0 + 2 = 2.$$

Этот результат записан в квадрате у события 1. Рассмотрим далее событие 2. (Заметим, что событие 3 пока рассматривать нельзя, так как срок $T_2^{Р.Н.}$ (для события 2) еще неизвестен). Таким образом,

$$T_2^{Р.Н.} = T_0^{Р.Н.} + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Поместим этот результат в квадрат у события 2.

Вычисления продолжается аналогичным образом, пока не будут определены значения $T_j^{Р.Н.}$ для всех j. Имеем

$$T_3^{Р.Н.} = \max_{i=1,2}\{T_i^{Р.Н.} + D_{i3}\} = \max\{2+2;\, 3+3\} = 6,$$

$$T_4^{Р.Н.} = \max_{i=2,3}\{T_i^{Р.Н.} + D_{i4}\} = \max\{3+2; 6+0\} = 6.$$

На этом вычисления прямого прохода заканчивается.

Обратный проход начинается с завершающего события сети. При этом целью является определение $T_i^{П.О.}$ – поздних сроков окончания всех операций, входящих в событие i. Если принять $i = n$, где n – завершающее событие сети, то $T_n^{П.О.} = T_n^{Р.Н.}$ является отправной точкой обратного прохода. В общем виде для любого события i: $T_i^{П.О.} = \min_i\{T_i^{П.О.} - D_{ij}\}$ для всех операций (i, j).

Значения $T_i^{П.О.}$ (указанные в треугольниках) вычисляется следующим образом:

$$T_6^{П.О.} = T_6^{Р.Н.} = 19,$$

$$T_5^{П.О.} = T_6^{П.О.} - D_{56} = 19 - 6 = 13,$$

$$T_4^{П.О.} = \min_{i=4,5}\{T_j^{П.О.} - D_{4j}\} = \min\{13-7; 19-5\} = 6,$$

$$T_3^{П.О.} = \min_{i=4,5,6}\{T_j^{П.О.} - D_{3j}\} = \min\{6-0; 13-3; 19-2\} = 6,$$

$$T_2^{П.О.} = \min_{i=3,4}\{T_j^{П.О.} - D_{2j}\} = \min\{6-3;\, 6-2\} = 3,$$

$$T_1^{П.О.} = T_3^{П.О.} - D_{13} = 6 - 2 = 4,$$

$$T_0^{П.О.} = \min_{i=1,2}\{T_j^{П.О.} - D_{0j}\} = \min\{4-2;\, 3-3\} = 0.$$

Таким образом, вычисления при обратном проходе закончены.

Операция (i, j) принадлежит **критическому пути**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$T_i^{Р.Н.} = T_i^{П.О.}; \quad T_j^{Р.Н.} = T_j^{П.О.};$$

$$T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} = T_j^{П.О.} - T_i^{П.О.}.$$

На рис. 2 критический путь включает операции (0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) и (3, 6). Критический путь определяет кратчайшую возможную продолжительность всей программы в целом. Заметим, что операции (2, 4), (3, 5), (3, 8) и (4, 6) удовлетворяет условию

$$T_i^{Р.Н.} = T_i^{П.О.}; \quad T_j^{Р.Н.} = T_j^{П.О.},$$

но не удовлетворяет условию

$$T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} = T_j^{П.О.} - T_i^{П.О.},$$

поэтому они не являются критическими.

При определении критического пути необходимо вычислить резервы времени для некритических операций.

Прежде чем приступить к вычислению резервов времени, нужно ввести определения еще двух сроков, связанных с каждой операцией. Это **срок позднего начала** $T^{П.Н.}$ и **срок раннего окончания** $T^{Р.О.}$, которые для любой операции (i, j) задаются соотношениями

$$T_{ij}^{П.Н.} = T_j^{П.О.} - D_{ij}, \quad T_{ij}^{Р.О.} = T_i^{Р.Н.} + D_{ij}.$$

Различает два основных вида резервов времени: **полный резерв (ПР)** и **свободный резерв (СР)**. Полный резерв времени операции (i, j) представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция $T_j^{П.О.} - T_i^{Р.Н.}$, и ее продолжительностью D_{ij}, т. е.

$$ПР_{ij} = T_j^{П.О.} - T_i^{Р.Н.} - D_{ij} = T_j^{П.Н.} - T_{ij}^{Р.О.} = T_{ij}^{П.Н.} - T_i^{Р.Н.}.$$

Свободный резерв времени определяется в предположении, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии величина $СР_{ij}$ для операции (i, j) представляет собой превышение допустимого отрезка времени $T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.}$ над продолжительностью операции D_{ij}, т. е.

$$СР_{ij} = T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} - D_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций сети можно свести в удобную для пользования таблицу (табл. 1).

Заметим, что только критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени. Когда полный резерв равен нулю, сводный резерв также должен быть равен нулю. Однако обратное неверно, поскольку свободный резерв некритической операции также может быть нулевым. Так, например, в табл. 1 свободный резерв времени некритической операции (0, 1) равен нулю. Звездой отмечена критическая операция.

Таблица 1.

Операция (i, j) (1)	Продолжительность D_{ij} (2)	Раннее		Позднее		Полный резерв $ПР_{ij}$ (7)	Свободный резерв $СР_{ij}$ (8)
		Начало $T_i^{Р.Н.}$ (3)	Окончание $T_{ij}^{Р.О.}$ (4)	Начало $T_{ij}^{П.Н.}$ (5)	Окончание $T_j^{П.О.}$ (6)		
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)*	3	0	3	0	3	0	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)*	3	3	6	3	6	0	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3, 4)*	0	6	6	6	6	0	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)*	7	6	13	6	13	0	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)*	6	13	19	13	19	0	0

При построении календарного графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное (параллельное) выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, может оказаться невозможным. Именно в этом отношении представляет ценность полные резервы времени некритических операций. Сдвигая некритическую операции в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Однако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы.

Данные, необходимые для построения календарного графика, приведены в табл. 1. Прежде всего определяются календарные сроки выполнения критических операций. Далее рассматривается некритические операции, и указываются их ранние сроки начала $T^{Р.Н.}$ и поздние сроки окончания $T^{П.О.}$. Критические операции изображаются сплошными линиями. Отрезки времени, в пределах которых могут выполняться некритические операции, наносятся пунктирными линиями, показывающими, что календарные сроки этих операций можно выбрать в указанных пределах при условии сохранения отношений следования.

На рис. 3 показан календарный график. Фиктивная операция (3, 4) не требует затрат времени и поэтому показана на графике вертикальным отрезком. Числа, проставленные над некритическими операциями, соответствуют их продолжительностям.

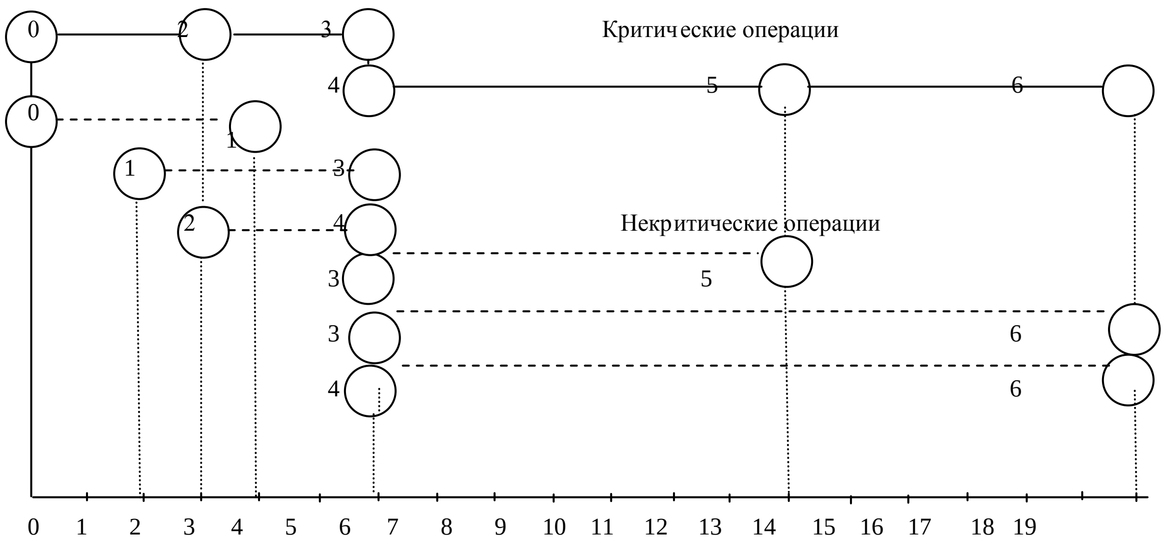


Рис. 3

Роль полных и свободных резервов времени при выборе календарных сроков выполнения некритических операций объясняется двумя общими правилами.

Правило 1. Если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием (пунктирные отрезки на рис. 3).

Правило 2. Если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к ее раннему сроку начала не более чем на величину свободного резерва, не влияя при этом на выбор календарных сроков непосредственно следующих операций.

В рассматриваемом примере правило 2 применимо только к операции (0, 1), а календарные сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

Предположим для выполнения различных операций требуется указанные ниже ресурсы рабочей силы.

Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)	Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)
(0, 1)	0	(3, 5)	2
(0, 2)	5	(3, 6)	1
(1, 3)	0	(4, 5)	2
(2, 3)	7	(4, 6)	5
(2, 4)	3	(5, 6)	6

Задача заключается в построении такого календарного плана (графика) реализации программы, при котором потребности в рабочей силе будут наиболее равномерными на протяжении всего срока осуществления программы.

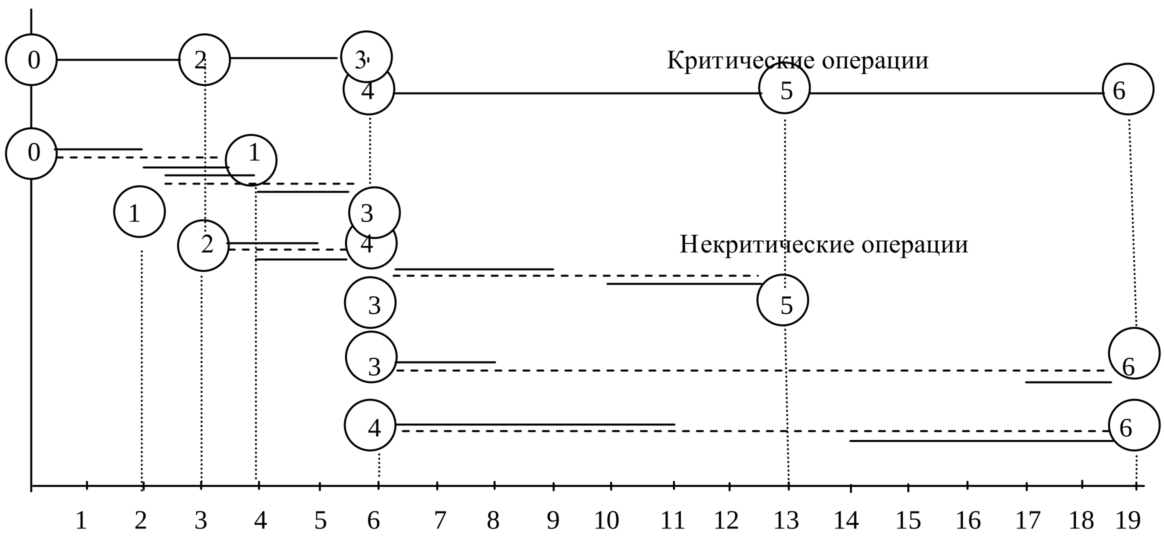


Рис. 4

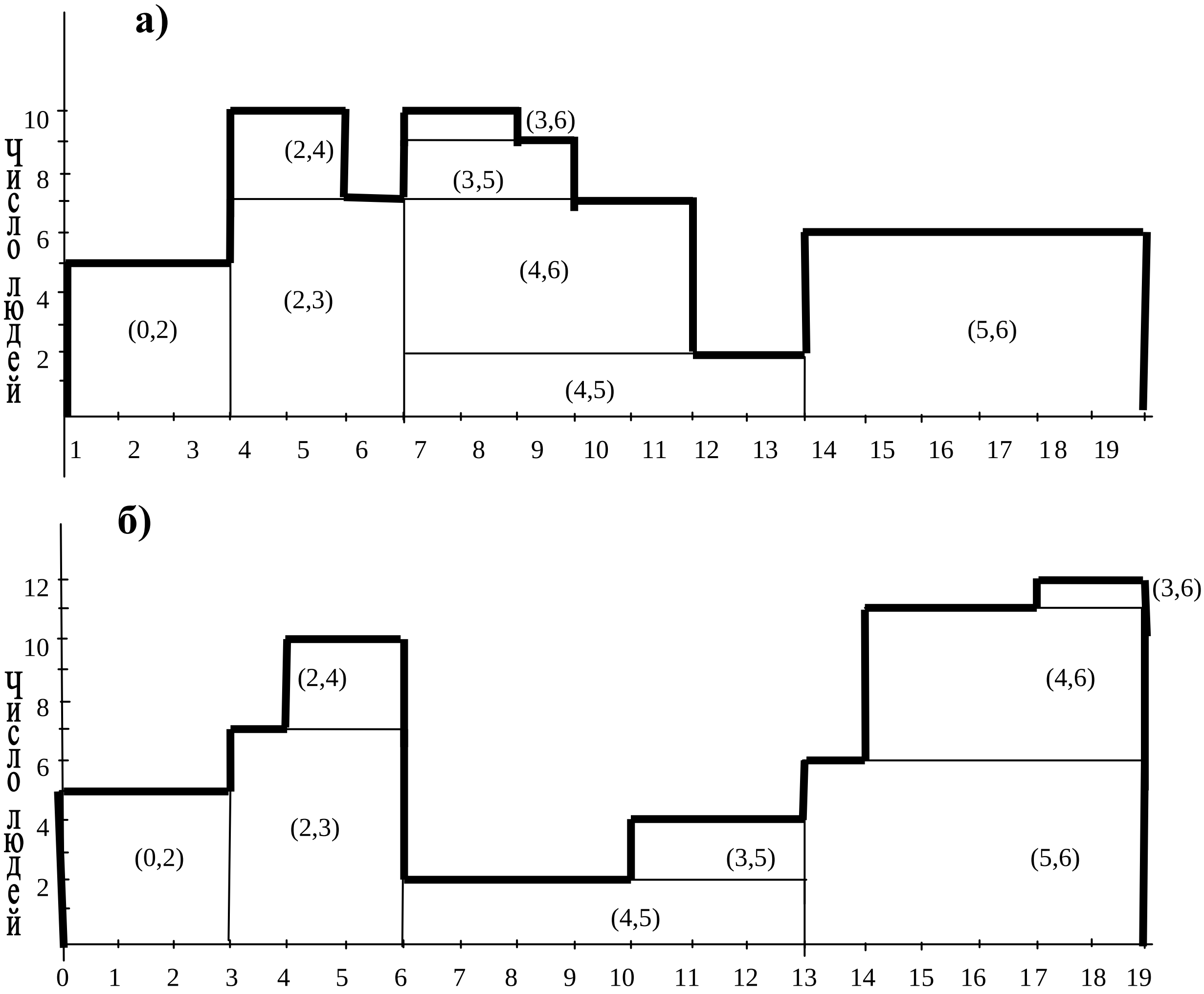


Рис. 5
а) ранний календарный план для некритических операций;
б) поздний календарный план для некритических операций.

На рис. 5.а показана потребность в рабочей силе при условии выбора в качестве календарных сроков некритических операций их ранних сроков начала (так называемый ранний (левый) календарный план), а на рис. 5.б – потребность в рабочей силе при выборе наиболее поздних сроков (так называемый поздний (правый) календарный план). Пунктирной линией представлена потребность критических операций, которая должна быть обязательно удовлетворена, если нужно выполнить программу в минимально возможный срок. (Отметим, что для операций (0, 1) и (1, 3) ресурсы рабочей силы не требуются).

Как показывают потребности в ресурсах критической операции (2, 3), для реализации программы необходимо, по крайней мере, 7 человек. При раннем календарном плане некритических операций максимальная потребность в ресурсах составляет 10 человек, а при позднем – 12. Этот пример наглядно показывает, что максимальные потребности в ресурсах зависят от использования резервов времени некритических операций. Однако, как видно из рис. 5, независимо от распределения этих резервов максимальная потребность в рабочей силе для рассматриваемой программы не может быть меньше 10 человек, так как интервал времени, в пределах которого можно выполнять операции (2, 4) совпадает с интервалом критической операции (2, 3).

График потребности в рабочей силе при раннем календарном плане можно улучшить, выбрав поздние календарные сроки для операции (3, 5) и назначив выполнение операции (3, 8) непосредственно после завершения операции (4, 6). Новый график потребности в рабочей силе, приведенный на рис. 6, обеспечивает более равномерное распределение ресурсов.

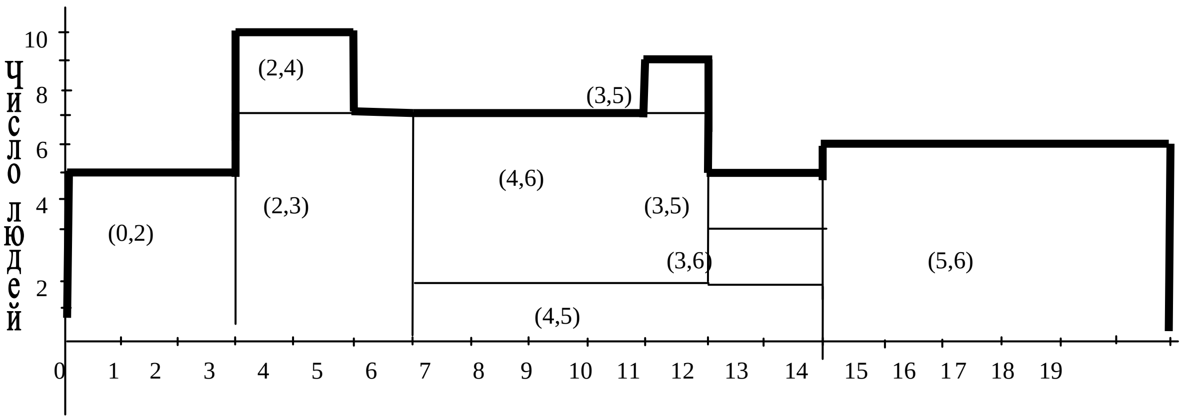
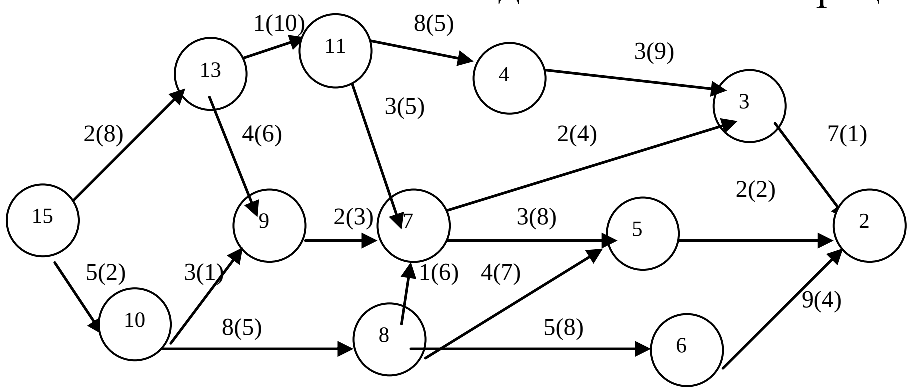


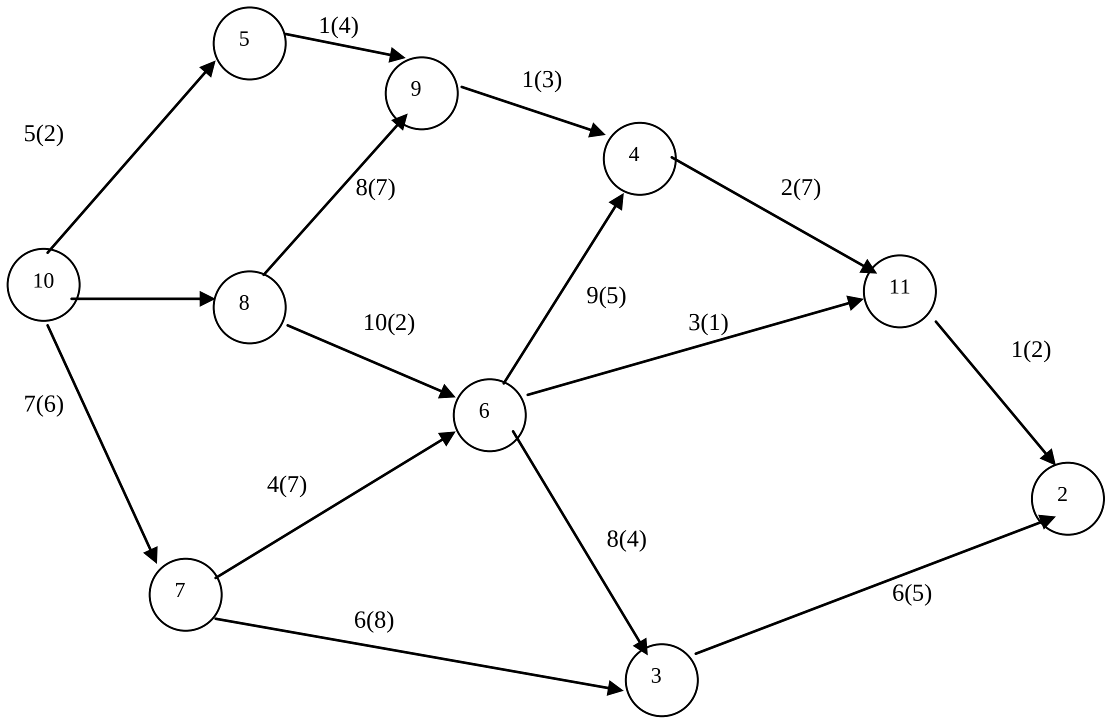
Рис. 6

Практическое занятие:

1. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.

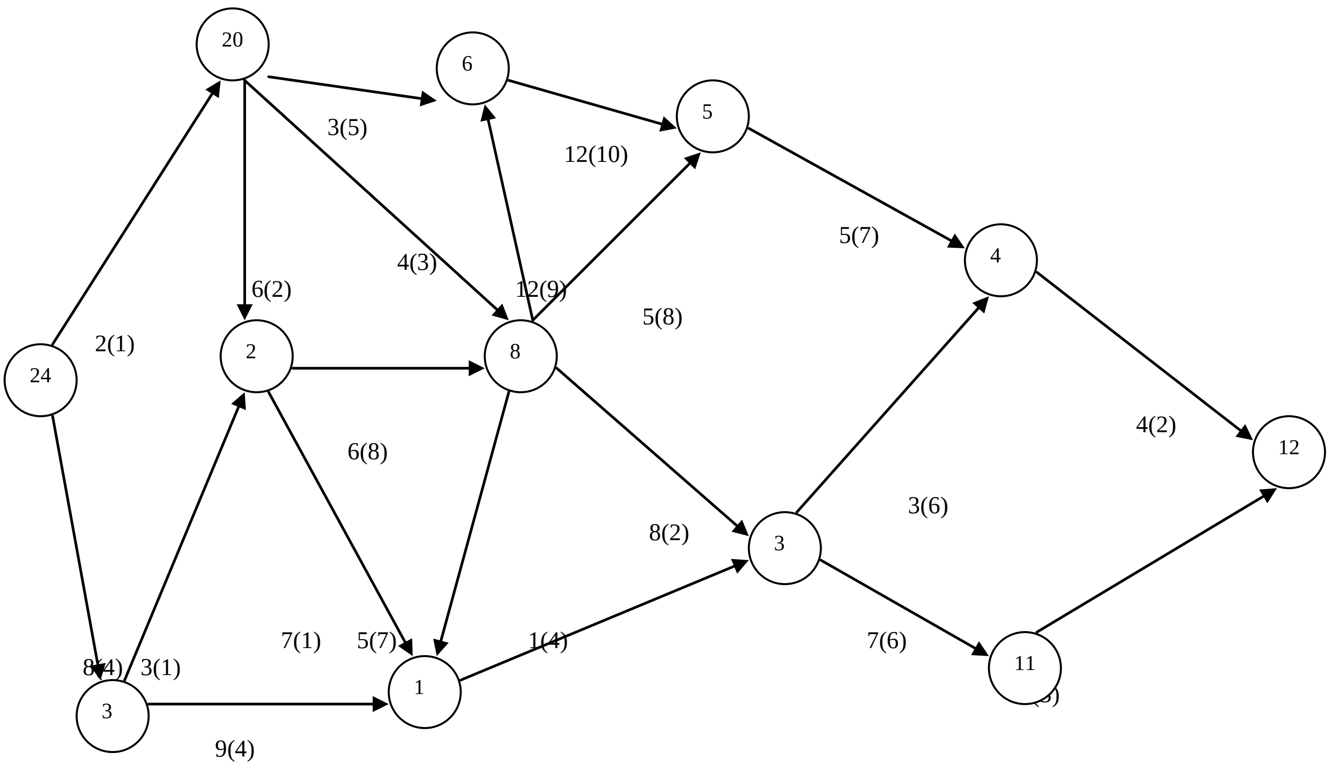


2. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.

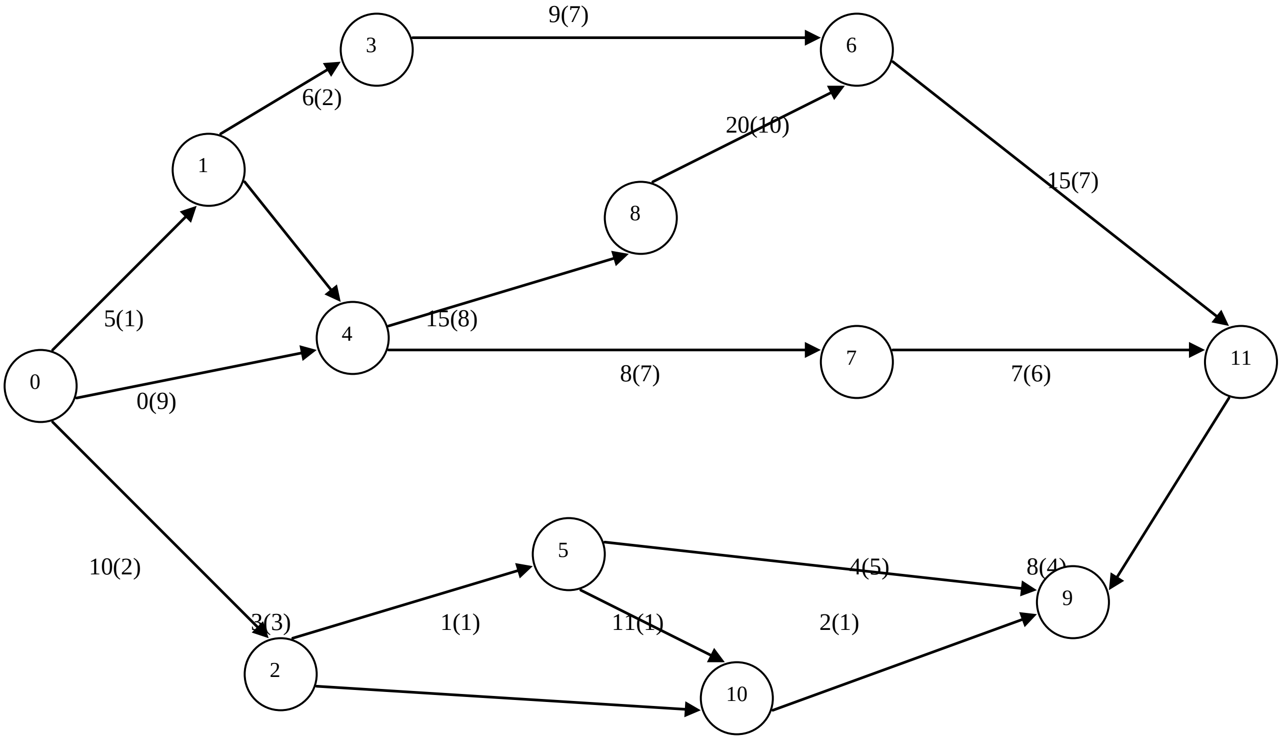


Самостоятельная работа:

1. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.



2. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.



Теория игр. Моделирование конфликтных ситуаций в виде матричных игр. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.

1. Принцип минимакса. Определение нижней и верхней цен игры, максимальной и минимальной стратегии игроков. Определение седловой точки, оптимальных стратегий.

Пример:

1. Построить модель игры.

Пусть игрок I имеет две, а игрок II – три фишки. Независимо и тайно друг от друга игроки откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок I. В противном случае фишки выигрывает игрок II.

Ясно, что игрок I имеет две, а игрок II – три стратегии. В игре нет случайного хода. Вследствие одновременного выбора стратегий дерево игры имеет вид либо а), либо б) (рис. 1).

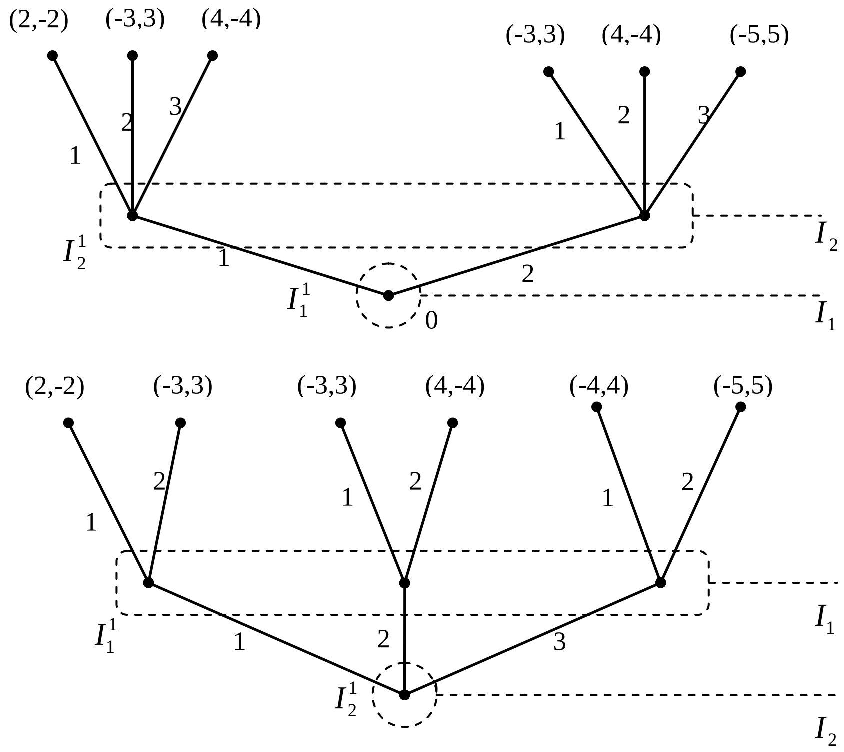


Рис. 1

На рисунке пунктиром показаны информационные множества. В окончательной позиции первое число показывает выигрыш игрока I, второе – выигрыш игрока II.

Предположим, что в рассматриваемой игре первым ходит игрок II, а игрок I знает, четное или нечетное число фишек выбрано игроком II, но не знает, какое именно нечетное. В этом случае у игрока I имеется два информационных множества (рис. 2).

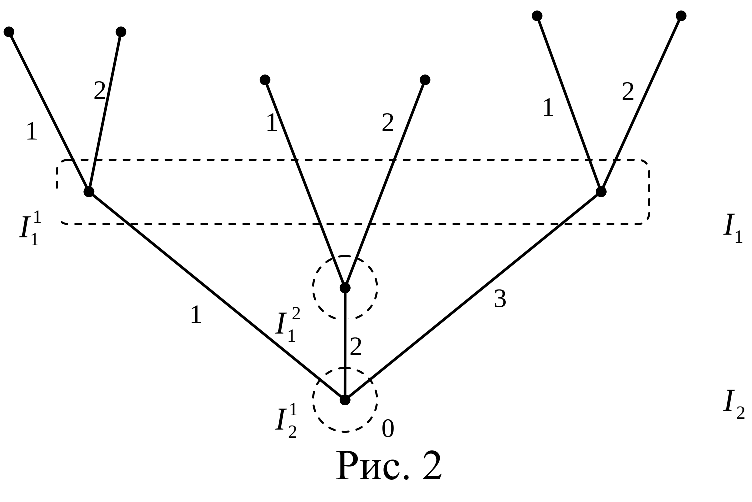


Рис. 2

2. (Семейный спор). Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут пойти на соревнование по бок-

су или в театр. Причем в посещении бокса муж заинтересован в большей степени и от этого он получает удовлетворение, измеряемое двумя единицами, а жена – одну единицу. При посещении театра меры удовлетворенности мужа и жены соответственно 1 и 2. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по нулю.

Усложним эту известную игру. Допустим, что представления зависят от каких-то случайных факторов. Мы можем договориться так. Пусть в урне имеется семь шаров: три белых и четыре черных. Если случайным образом извлеченный шар оказывается белым, то представление в театре лучше, чем на боксе, в случае черного шара – наоборот.

Дерево этой игры показано на рис. 3.

Игра «семейный спор» в отличие от примера 1 является неантагонистической игрой.

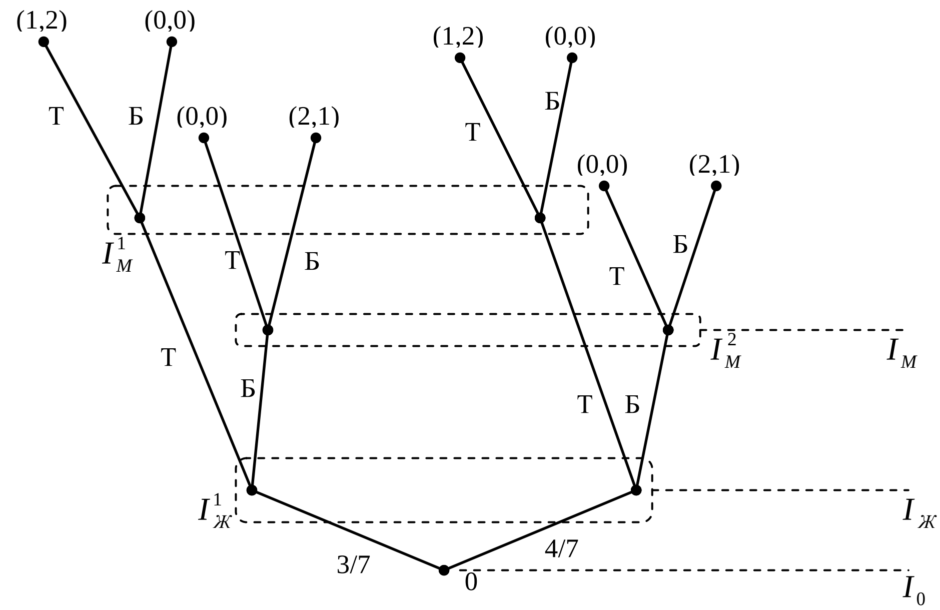


Рис. 3

Рассмотренные примеры подтверждают, что игрок может заранее решить, что выбирать ему в каждом случае, т. е. в каждом информационном множестве.

3. Рассмотрим игру «Крестики-нолики» в квадрате 3×3. Из двух игроков побеждает тот, кто поставит подряд три знака (крестики или нолики). Игроки ходят по очереди. Победитель полу-

чает +1, проигравший – –1. Если это не удается, то игроки получают по нулю – ничья.

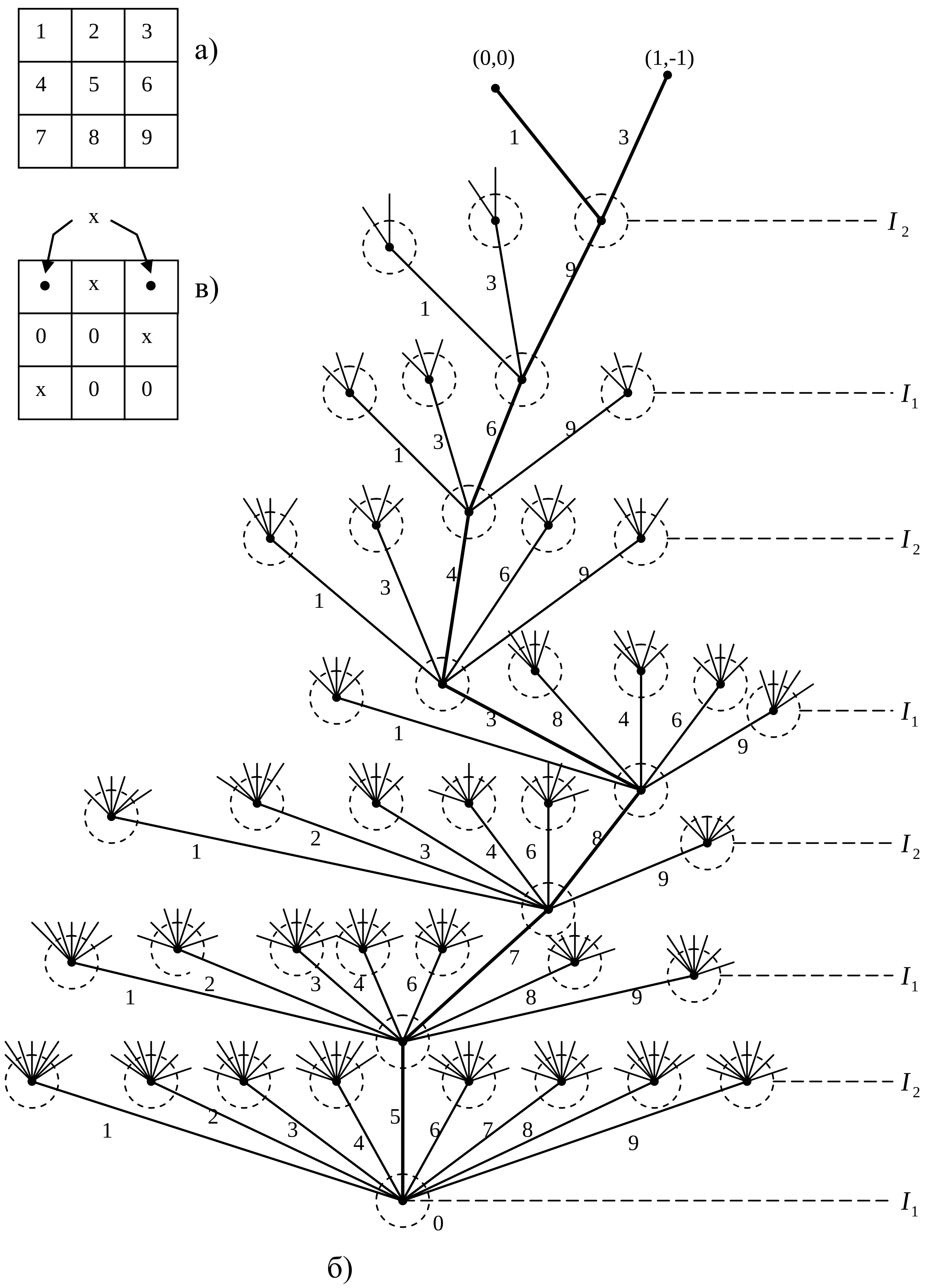


Рис. 4

Нас интересует не сама игра (в ней вряд ли можно проиграть), а ее развернутая форма (рис. 4б).

Нумерация клеток показана на рис. 4а. На рис. 4б приведены две партии (ситуации):

5 – 7 – 8 – 2 – 4 – 6 – 9 – 1,

5 – 7 – 8 – 2 – 4 – 6 – 9 – 3,

соответствующие ходы показаны на рис. 4в. Например, в первой партии стратегии игроков есть следующие цепочки:

5 – 8 – 4 – 9 – для игрока I, 7 – 2 – 6 – 1 – для игрока II.

Пример показывает, что для игр с большим количеством стратегий строить дерево практически невозможно.

4. Определить седловую точку.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&5&4\\2&3&2\end{pmatrix}\qquad \min_j a_{ij} = \left.\begin{matrix}-3\\0\\2\end{matrix}\right\}\ \max_i\min_j a_{ij}=2$$

$$\max_i a_{ij} = \underbrace{2\qquad 5\qquad 4}_{\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}=2}$$

Седловой точкой является пара $(i_o = 3;\ j_o = 1)$, при которой $v = 2$.

Заметим, что хотя выигрыш в ситуации (3;3) также равен $2 = \underline{v} = \overline{v}$, она не является седловой точкой, так как этот выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца.

5. Выполнить доминирование.

Рассмотрим игру

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&4\\1&2&5&3\\4&1&3&2\end{pmatrix}\ \square\ \begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&5\\4&1&3\end{pmatrix}\ \square\ \begin{pmatrix}1&2&5\\4&1&3\end{pmatrix}\ \square\ \begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}=A'$$

Стрелками показаны доминируемые стратегии.

Аналогично выполнено доминирование следующей игры.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

В результате доминирования получим игру A' размером 2×2, в которой все стратегии недоминируемые.

6. Определить максиминную и минимаксную стратегии игроков.

$$A_1 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ & \uparrow \end{array} & \end{array}$$

Здесь $\underline{v}=1$, $\bar{v}=2$, $\underline{v}<\bar{v}$; 2-я строка – максиминная стратегия, 2-й столбец – минимаксная стратегия.

В A_1 применение минимаксной и максиминной стратегий приводит к выигрышу игрока I, равному $\underline{v}$ (α достается игроку II).

$$A_2 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2 \leftarrow \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ \uparrow & & \end{array} & \end{array}$$

Здесь $\underline{v}=2$, $\bar{v}=3$, $\underline{v}<\bar{v}$; 1-я строка – максиминная стратегия, 2-й столбец - минимаксная стратегия.

В A_2 применение минимаксных и максиминных стратегий приводит к выигрышу игрока I, равному $\bar{v}$ (α достается игроку I).

Примеры показывают, что в случае, когда $\underline{v}<\bar{v}$ применение минимаксной и максиминной стратегий не приводит к определенному результату - в зависимости от игры имеет "выгоду" то один, то другой. Следовательно, когда $\underline{v}<\bar{v}$ минимаксная и максиминная стратегии не могут быть оптимальными (одностороннее отклонение от них может увеличить выигрыш "уклониста").

Здесь $\underline{v}=2$, $A_3 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & \end{array} & \end{array}$ $\bar{v}=2$, $\underline{v}=\bar{v}$;

Легко видеть, что в игре A_3 одностороннее отклонение от минимаксной (максиминной) стратегии невыгодно.

Здесь $\underline{v} = \overline{v} = 2$, $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $v = 2$; $i^* = 1{,}3$, $j^* = 2$.

У игрока I – две, а у игрока II – одна оптимальная стратегия. Поэтому седловых точек две: (1,2) и (3,2).

Практическое занятие:

Построить математическую модель задачи.

1.1. (Планирование выпуска новых моделей одежды на швейном предприятии). Швейное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен, однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируется три возможных варианта выпуска данной модели (А, Б, В). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект.

Прибыль (тыс. руб.) которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

$$\begin{array}{cc} A & \\ Б & \\ B & \\ & \end{array}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} +22 & +22 & +22 \\ +21 & +23 & +23 \\ +20 & +21 & +24 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

Требуется найти объем выпуска модели одежды, обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

1.2. (Планирование выпуска обуви). Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей А и В. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний I и II. В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $C=\begin{pmatrix}52 & 22\\ 22 & 49\end{pmatrix}$.

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

2. Найдите седловые точки и значение игры:

$a)\ \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $б)\ \begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

3. Найти оптимальные стратегии и значения игр с матрицами

$a)\ \begin{pmatrix}4 & 6 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $б)\ \begin{pmatrix}1/4 & 0 & 1/4\\ 1/2 & 3/4 & 1\\ 0 & -1/2 & 7/4\end{pmatrix}$

4. Преобразуя матрицу выигрышей, найти решение игр с матрицами:

$a)\ \begin{pmatrix}-1 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 5\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad$ $б)\ \begin{pmatrix}4 & 5 & 4 & 2\\ 9 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$ $\qquad$ $в)\ \begin{pmatrix}4 & 2 & 9 & 7\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ 8 & 1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 8 & 0\end{pmatrix}$

Самостоятельная работа:

Построить математическую модель задачи.

1.1. (Планирование посева). Сельскохозяйственное предприятие может посеять одну из трех культур, которые обозначим через A_1, A_2, A_3. Необходимо определить, какую из культур сеять, если при прочих равных условиях урожаи этих культур зависят главным образом от погоды, а план должен обеспечить наибольший доход. Рассмотрим лишь три состояния природы: год может быть засушливым, нормальным и дождливым.

Решить численный пример для исходных данных, приведенных в таблице.

Исходные условия	Урожайность (в ц)		
	A_1	A_2	A_3
Нормальная погода	5	12,5	7,5
Дождливая погода	15	5	10
Сухая погода	20	7,5	0
Цена за один центнер в ед. стоимости	2	4	8

1.2. (Распределение конкурсных работ). Пусть имеется два конструкторских бюро (КБ), причем одно из КБ имеет 4 отдела, а другое – 3 отдела. Объявлен конкурс на создание проектов двух агрегатов. Эти проекты должны будут оцениваться некоторой комиссией, которая выбирает лучший проект каждого агрегата. То конструкторское бюро, чей проект первого агрегата лучше, получит «a» рублей премии; аналогично, за принятый второй проект выплачивают «b» рублей. Предполагается, что если в одном КБ над проектом одного агрегата работало больше отделов, чем в другом, то, наверное, будет принят проект первого КБ, если же в каждом КБ число отделов, работающих над аналогичным проектом, одинаково, то вероятность принятия данного проекта равна 1/2.

Требуется определить, какое количество отделов каждое КБ должно выделить для создания того или иного проекта с тем, чтобы каждое КБ могло рассчитывать на максимально возможную для него величину премии.

Решить эту задачу при условии, что $a = b$, т. е. премии за каждую из двух работ равны.

Указание. В качестве выигрыша первого игрока принять разницу между математическим ожиданием фактически получаемой премии и величиной $(a + b)/2$, равной половине величины премии за оба проекта.

2. Найти оптимальные стратегии и значения игр с матрицами

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & -8 \\ -2 & 4 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Преобразуя матрицу выигрышей, найти решение игр с матрицами:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & -2/3 & -1/6 & 2/3 \\ 1/2 & -1/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1/2 & -2/3 & -1/3 & -5/6 & -1/6 \\ 2/3 & 1/6 & -5/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Выполните доминирование:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 11 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Определение смешанной стратегии, ожидаемого выигрыша, верхней и нижней цен игры в смешанных стратегиях, смешанного расширения игры, седловой точки, оптимальной смешанной стратегии. Принцип минимакса в смешанных стратегиях. Нахождение решения МИ в чистых стратегиях, использование доминирования для уменьшения размерности игры. Решение игры «2×2». Решение игр «2×n» и «m×2». Решение игр «m×n» (m, n>2). Сведение игры к паре двойственных задач, определение оптимальных стратегий и цены игры.

Пример:

1. Рассмотрим игру, заданную матрицей.

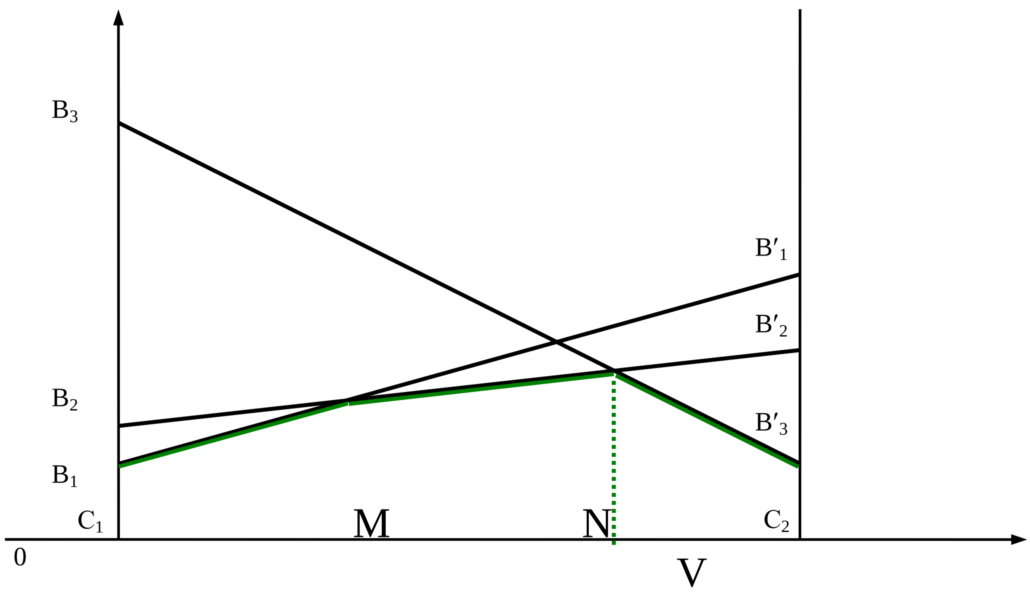
$$\begin{array}{cc} & \quad 2 \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1 \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На плоскости xOy введём систему координат и на оси Ox отложим отрезок единичной длины C_1C_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 $(u,\ 1-u)$. В частности, точке $C_1(0;0)$ отвечает стратегия C_1, точке $C_2(1;0)$ – стратегия C_2 и т. д.

В точках C_1 и C_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью Oy) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии C_1, а на втором – при стратегии C_2. Если игрок 1 применит стратегию C_1, то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – 2, при стратегии B_2 – 3, а при стратегии B_3 – 11. Числам 2, 3, 11 на оси Ox соответствуют точки B_1, B_2 и B_3.

Если же игрок 1 применит стратегию C_2, то его выигрыш при стратегии B_1 равен 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Эти числа определяют точки B_1', B_2', B_3' на перпендикуляре, восстановленном в точке C_2. Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B'_2, B_3 и B'_3 получим три прямые, расстояние до которых от оси Ox определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной $B_1MNB'_3$, определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N; следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $u^* = (u,\ 1-u)$, а её ордината равна цене игры v. Координаты точки N находим как точку пересечения прямых $B_2B'_2$ и $B_3B'_3$.



Соответствующие два уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 3u + 5(1-u) = v \\ 11u + 2(1-u) = v \end{cases} \Rightarrow u = \frac{3}{11}, v = \frac{49}{11}.$$

Следовательно, $u^* = (\frac{3}{11}; \frac{9}{11})$ при цене игры $v = \frac{49}{11}$. Таким образом, мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

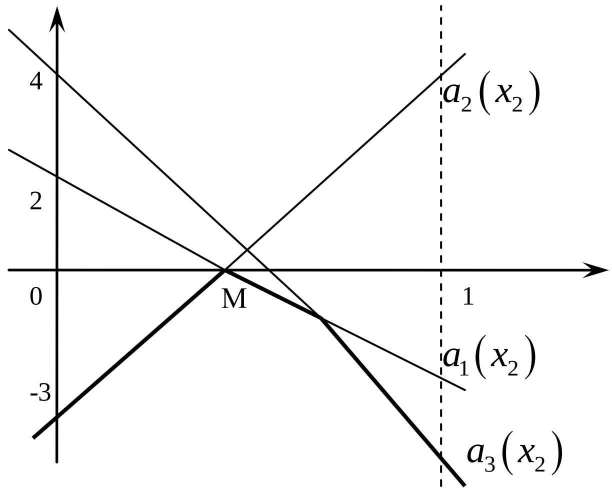
$$\begin{cases} 3w + 5(1-w) = v \\ 5w + 2(1-w) = v \end{cases} \Rightarrow \mathrm{w} = \frac{9}{11},$$

и, следовательно, $w^* = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (Из рисунка видно, что стратегия B_1 не войдёт в оптимальную стратегию).

2. Решить игру

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Строим:



$a(x_2)=\min\{-5x_2+2, 7x_2-3, -8x_2+4\}$. В точке М пересекаются $a_1(x_2)$ и $a_2(x_2)$, поэтому решаем систему:

$$\begin{cases} -5x_2^*+2=v, \\ 7x_2^*-3=v. \end{cases}$$

и находим $x_2^*=\dfrac{5}{12}$, $x^*=(7/12,\ 5/12)$, $v=-1/12$.

Применяя к игре $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ формулу, находим $y^*=(7/12,\ 5/12,\ 0)$.

3.Найти решение игры, определяемой матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. При решении этой игры к каждому элементу матрицы А прибавим 1 и получим следующую матрицу

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь пару взаимно-двойственных задач:

$$p_1+p_2+p_3 \to \min \qquad\qquad q_1+q_2+q_3 \to \max$$

$$\begin{cases} p_1+p_2+2p_3 \ge 1, \\ 2p_1+p_3 \ge 1, \\ p_3 \ge 1, \\ p_1, p_2, p_3 \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} q_1+2q_2 \le 1, \\ q_1+q_3 \le 1, \\ 2q_1+q_2 \le 1, \\ q_1, q_2, q_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решим вторую из них симплекс-методом: $(q_1, q_2, q_3) = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$. Тогда из соотношений двойственности следует, что $(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

Следовательно, цена игры с платёжной матрицей A_1 равна

$$v_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \quad \left(= \frac{1}{q_1 + q_2 + q_3} \right),$$

а игры с платёжной матрицей A –

$$v = v_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

При этом оптимальные стратегии игроков имеют вид

$$X = (u_1, u_2, u_3) = (vp_1, vp_2, vp_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\cdot 1; \frac{2}{3}\cdot 0\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right),$$

$$Y = (w_1, w_2, w_3) = (vq_1, vq_2, vq_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot 0; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Практическое занятие:

1 Решение матричной игры: а) показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий; б) выполнить доминирование; в) свести исходную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования и решить их.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Найти решение матричных игр.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix};$$

Самостоятельная работа:

1. Решение матричной игры: а) показать существование или отсутствие чистых оптимальных стратегий; б) выполнить доминирование; в) свести исходную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования и решить их.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 5 & 3\\ 0 & 5 & 5 & 1\\ -1 & 6 & 6 & 0\end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 11\\ 6 & 7 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 9\\ 5 & 6 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

2 Найти решение матричных игр.

$$\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4 & -6 & 6 & 4\\ 2 & -3 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & 2\\ 9 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4 & 3 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 0\\ 2 & 4\\ 8 & 2\end{pmatrix}$$

3. Используя геометрический метод, найти решения игр с матрицами:

$$a)\ \begin{pmatrix}10 & 7 & 11 & 0\\ -8 & -2 & -9 & 1\end{pmatrix} \qquad б)\ \begin{pmatrix}-4 & 0\\ 3 & -2\\ 5 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix} \qquad в)\ \begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & -1\\ -4 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

4. Найдите решение игр, определяемых следующими матрицами:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}; \qquad б)\ A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 9 & 3\\ 5 & 9\\ 6 & 9\end{pmatrix};$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 9\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}; \qquad г)\ A=\begin{pmatrix}7 & 6 & 7 & 5\\ 6 & 7 & 9 & 8\\ 5 & 8 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

5. Решите следующие игры методом линейного программирования:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 & 3\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 5 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}$

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Основная учебная литература

1. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2010. – 479 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – Москва: Высш. шк., 2001. – 552 с.
3. Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1974. – 271 с.
4. Дюбин Г. Н. Введение в теория игр / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. – Москва: Наука, 1981. – 336 с.
5. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике: учебн. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – Москва: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
6. Таха Х. А. Введение в исследование операций. – Москва: Вильямс, 2005. – 901 с.

Дополнительная учебная литература

7. Трухан, А. А. Линейная алгебра и линейное программирование. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 316 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/99214. – Загл. с экрана.
8. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов экономических специальных вузов. – Москва: Высшая шк., 1986. – 320 с.
9. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – Москва: Физматгиз, 1961. – 68 с.
10. Воробьев Н. Н. Теория игр. – Москва: Знание, 1985. – 272 с.
11. Давыдов Э. Г. Исследование операций. – Москва: Высш. шк., 1990. – 381 с.
12. Дегтярев Ю. И. Исследование операций. – Москва: Наука, 1986. – 320 с.
13. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.