Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
Е. В. Гутова

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методическими комиссиями
направления подготовки 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие
процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики

Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики

Николаева Евгения Александровна
Гутова Елена Владимировна
Спецглавы математики: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 18.03.02 Энерго-и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии, профиль 02 Процессы и оборудование нефтеперерабатывающих предприятий, всех форм обучения / сост.: Е. А. Никоогпрлаева, Е. В. Гутова; КузГТУ. – Кемерово, 2019.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплины «Спецглавы математики» и организации самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа студентов очной формы обучения

Раздел 1. Математическое моделирование. Виды математических моделей. Алгоритм построения математической модели реальной ситуации.

Тема 1. Построение математической модели реальной ситуации

Образец:

1. (Задача об использовании ресурсов)

Для изготовления двух видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		$P1$	$P2$
$S1$	18	1	3
$S2$	16	2	1
$S3$	5	–	1
$S4$	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции 2 и 3 руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно $P1$ и $P2$, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(1\,x_1 + 3\,x_2)$ единиц ресурса $S1$, $(2\,x_1 + 1\,x_2)$ единиц ресурса $S2$, $(1\,x_2)$ единиц ресурса $S3$ и $(3\,x_1)$ единиц ресурса $S4$. Так как потребление ресурсов $S1$, $S2$, $S3$ и $S4$ не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$2x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3x_1 \le 21.$$

По смыслу задачи переменные неотрицательны:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции $P1$ и $3x_2$ руб. – от реализации продукции $P2$, т. е.:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

2. (Задача о раскрое материалов) Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить математическую модель задачи.

Решение: Определим всевозможные способы распила бревен.

Способ распила	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим: x_i – число бревен, распиленных i-м способом (i = 1, 2, 3, 4); x – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$f = x \to \max,$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195,$$
$$5\,x_1 + 2\,x_2 = 2\,x,$$
$$x_2 + 2\,x_3 = x,$$
$$x_4 = 3\,x,$$
$$x_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Практическое занятие:

1. Фирма производит 2 вида продукции: A и B, объём сбыта продукции вида A составляет не менее 60 % общего объёма реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции A и B используется одно и то же сырьё, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции A составляет 2 фунта, а на единицу продукции B – 4 фунта. Цены продукции A и B равны 20 и 40 $ соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции A и B.

2. Процесс изготовления 2 видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объёмы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин.			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 $
2	5	20	15	3 $

3. В трёх хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т. бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Домашние задание:

1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 $ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 $, а каждая минута телерекламы – в 100 $. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу между радио и телерекламой.

2. У врача диетолога имеется пять видов продуктов. Из них он должен составить наиболее экономную диету. Требуется, чтобы меню содержало 20 единиц белка и 20 единиц жиров. Содержание белков и жиров в единице каждого вида продукта, а также стоимость единицы продукта заданы таблицей:

	Виды продуктов				
	I	II	Ш	IV	V
Белки	1	2	1	1	3
Жиры	2	1	1	2	4
Стоимость	12	10	9	18	7

3. Фирма получила заказ на n разных блоков, которые могут изготовить n фирм. Каждый блок настолько велик, что фирма – поставщик не может выполнить более одного заказа. Известна цена изготовления разных блоков в каждой фирме. Фирма должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом общие затраты на приобретение блоков.

Раздел 2. Линейное программирование. Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача.

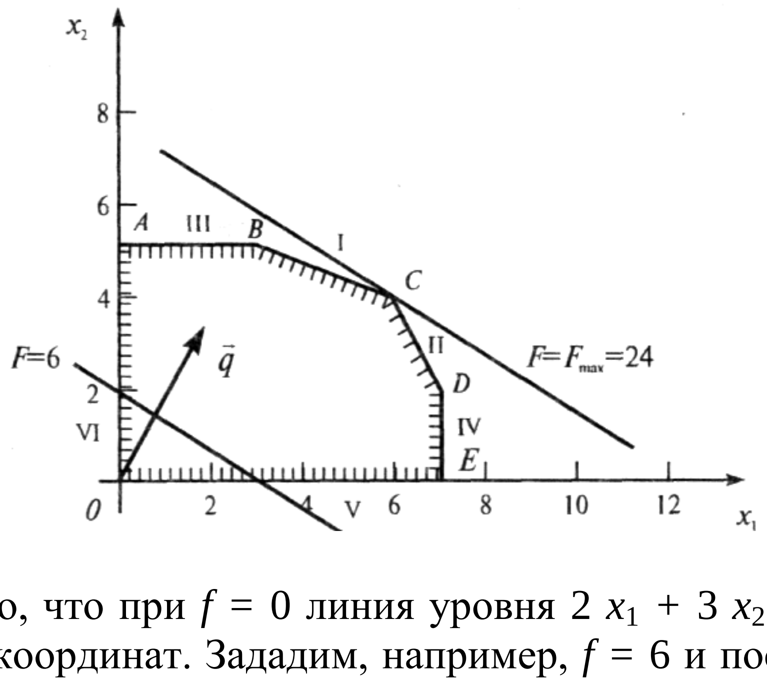
Тема 2. Метод потенциалов. Графический метод решения задач линейного программирования. Метод потенциалов

Образец:

1. Определить точку максимума, вычислить ее координаты и значение целевой функции в ней:

$$f(x) = 2\,x_1 + 3\,x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 3\,x_2 \le 18,$$
$$2\,x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3\,x_1 \le 21,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Изобразим многоугольник решений:



Очевидно, что при f = 0 линия уровня $2\,x_1 + 3\,x_2 = 0$ проходит через начало координат. Зададим, например, f = 6 и построим линию уровня $2\,x_1 + 3\,x_2 = 6$. Ее расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор q). Так как рассматриваемая задача – на отыскание максимума, то оптимальное решение – в угловой точке C, находящейся на пересечении прямых I и II, т. е. координаты точки C определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases},$$

откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, т. е. C (6;4).

Максимальное значение функции $f_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$.

2. Бесконечное множество решений:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 5,$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение: Особенность данной задачи, состоит в том, что линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей ограничению:

$$x_1 + 2x_2 \le 5.$$

Это, вместе с направлением градиента, обуславливает наличие альтернативных оптимальных решений. Таким образом, $x^* = (3 - 3\alpha;\ 1 + 1{,}5\alpha)$ где $\alpha \in [0,1]$, $f(x^*) = 10$, т. е. в каждой из этих точек целевая функция имеет одно и тоже значение.

3. Целевая функция не ограничена на допустимом множестве:

$$f(x) = 20x_1 + 10x_2 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 \le 10,$$
$$x_1 \le 20,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение: При параллельном переносе линии уровня в направлении градиента, эта прямая всегда пересекает многогранник решений (крайнюю точку найти не удается), при этом значение целевой функции $f(x)$ может быть сделано сколь угодно большим. Таким образом, данная задача решения не имеет, вследствие неограниченности сверху целевой функции на допустимом множестве.

4. (Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует):

$$f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to \max,$$
$$2x_1 - x_2 \le 2,$$
$$x_1 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение: Очевидно, что фактором, определяющим, будет ли существовать решение в случае неограниченности допустимого множества, является направление градиента целевой функции. $x^* = (4, 6)$ – точка максимума, $f(x^*) = 12$.

5. Отсутствие допустимых решений:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \le 2,$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение: Полуплоскости, соответствующие неравенствам системы ограничений не имеют общих точек пересечения, следовательно, нет ни одной допустимой точки.

Допустимое множество пусто, задача не имеет решения.

Итак, при решении задачи ЛП возможны следующие исходы:

1. Допустимое множество – ограниченный многогранник, оптимальное решение – единственная вершина допустимого множества.

2. Задача ЛП может иметь бесконечное множество решений – одна из граней многогранника решений (на плоскости – отрезок, луч.)

3. Целевая функция не ограничена на допустимом множестве. Задача ЛП не имеет решения.

4. Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует.

5. Допустимое множество пусто, задача ЛП не имеет решения.

Чтобы решить графическим методом задачу линейного программирования произвольной размерности, записанную в каноническом виде, необходимо выразить m неизвестных через какие-нибудь другие 2 или 1 переменные. После этого, пользуясь условиями неотрицательности, перейти к системе неравенств.

6. Найти оптимальный план задачи линейного программирования графическим методом:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$$

при следующих условиях:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \\ x_i \geq 0,\ I = 1,\ldots,5. \end{gathered}$$

Решение: Система ограничений состоит из трех уравнений, число неизвестных $n = 5$, следовательно, задачу можно решить графически. Перейдем от исходной задачи к задаче с двумя переменными. Выразим переменные x_3, x_4, x_5 через свободные переменные x_1 и x_2:

$$\begin{gathered} x_3 = 5 - x_1 - x_2, \\ x_4 = 9 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 7 - x_1 - 2x_2. \end{gathered}$$

Тогда целевая функция принимает вид:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - 5 + x_1 + x_2 + 9 - 2x_1 - x_2 - 7 + x_1 + 2x_2 = \\ = 2x_1 + 3x_2 - 3.$$

С учетом условий неотрицательности, получаем:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 3 \to \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \leq 7. \end{gathered}$$

Из графика следует $x^* = (3,\ 2)$. Из выражений для x_3, x_4, x_5 находим: $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$.

Таким образом, $x^* = (3, 2, 0, 1, 0)$ точка максимума, а значение целевой функции $f(x^*) = 9$.

Метод решения транспортной задачи рассмотрим на примере. В таблицу внесем данные:

$$a = (60, 120, 100),$$
$$b = (20, 110, 40, 110),$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Найдем начальный план перевозок по методу минимальной стоимости: находим в таблице клетку с наименьшим тарифом, таких клеток две. Найдем максимально возможные поставки для этих клеток: $x_{11} = \min\{60, 20\} = 20$, $x_{21} = \min\{120, 20\} = 20$, заполним клетку (1, 1), т. е. спрос первого потребителя полностью удовлетворен, вычеркиваем соответствующий ему столбец. Затем в оставшейся части таблицы снова находим клетку с наименьшим тарифом и заполняем ее. Продолжаем до тех пор пока не будет распределен весь груз.

Пункты отправления	Пункты назначения				a_i
	1 $(v_1 = 1)$	2 $(v_2 = 2)$	3 $(v_3 = 6)$	4 $(v_4 = 6)$	
1 $(u_1 = 0)$	1 20	2 – 40	5 + 	3	60
2 $(u_2 = -1)$	1	6	5 10	2 110	120
3 $(u_3 = 1)$	6	3 + 70	7 – 30	4	100
b_j	20	110	40	110	

2. Полученный план перевозок необходимо проверить на оптимальность. Для этого используем метод потенциалов. Обозначим $u = (u_1,\ldots,u_m)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$, потенциалы потребителей и поставщиков соответственно. Чтобы рассчитать потенциалы, составляем систему уравнений для заполненных клеток:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Поскольку неизвестных больше, чем уравнений, произвольно полагают одно из значений $u_1 = 0$. Остальные находим из системы:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 1, \\ u_1 + v_2 &= 2, \\ u_2 + v_3 &= 5, \\ u_2 + v_4 &= 2, \\ u_3 + v_2 &= 3, \\ u_3 + v_3 &= 7. \end{aligned}$$

Условие оптимальности записываются в виде:

$$u_i + v_j \le c_{ij},$$

оно должно выполняться для пустых клеток.

Если условие оптимальности не выполнено выбирается переменная x_{ij} с наибольшим положительным значением величины $u_i + v_j - c_{ij}$.

Вычислим значения критерия:

$$\begin{aligned} u_1 + v_3 - c_{13} &= 1, \\ u_1 + v_4 - c_{14} &= 0, \\ u_2 + v_1 - c_{21} &= -1, \\ u_2 + v_2 - c_{22} &= -5, \\ u_3 + v_1 - c_{31} &= -6, \\ u_3 + v_4 - c_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что переменную x_{13} следует заполнить.

Далее строится замкнутый цикл, состоящий из горизонтальных и вертикальных линий, который начинается в клетке (1, 3), а остальные узлы находятся в заполненных клетках таблицы.

Клетку (1, 3) будем заполнять, поэтому в ней ставим «+». Для сохранения объемов перевозок в соседних к ней узлах цикла клетках значения x_{ij} должны убывать пометим их знаком «–». Общая величина убывания определяется минимальным значением заполненных клеток, которые убывают. Обозначим эту величину d. После определения величины d производится изменение переменных в соответствии со знаком, поставленным при обходе цикла. Результаты сводятся в новую таблицу.

	1 $(v_1 = 2)$	2 $(v_2 = 3)$	3 $(v_3 = 6)$	4 $(v_4 = 3)$
1 $(u_1 = -1)$	1 20	2 10	5 30	3
2 $(u_2 = -1)$	1	6	5 10	2 110
3 $(u_3 = 0)$	6	3 100	7	4

Полученный план перевозок снова проверяется на оптимальность:

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0,$$
$$u_1 + v_4 - c_{14} = -1,$$
$$u_2 + v_1 - c_{21} = 0,$$
$$u_2 + v_2 - c_{22} = -4,$$
$$u_3 + v_1 - c_{31} = -4,$$
$$u_3 + v_3 - c_{33} = -1,$$
$$u_3 + v_4 - c_{34} = -1.$$

На этом процесс вычислений заканчивается, решение найдено.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(X) = 1\cdot 20 + 2\cdot 10 + 5\cdot 30 + 5\cdot 10 + 2\cdot 110 + 3\cdot 100 = 760$$

– минимальная стоимость перевозок.

Практическое занятие:

1) $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$,
$3x_1 + 2x_2 \le 14$,
$x_1 - 4x_2 \le 0$,
$3x_1 - x_2 \ge 0$,
$-x_1 + x_2 \le 2$,
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

2) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min$,
$x_1 + 2x_2 \le 7$,
$2x_1 + x_2 \le 8$,
$x_2 \le 3$,
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min$,
$x_1 + x_2 \ge 1$,
$2x_1 - x_2 \ge -1$,
$x_1 - 2x_2 \le 0$,
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

4) $f(x) = 6x_1 - 2x_2 \to \max$,
$2x_1 - x_2 \le 2$,
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

5) Решить транспортную задачу

$$a = (160, 400, 240),$$
$$b = (170, 190, 140, 180, 120),$$
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}.$$

Домашние задание:

1) Найти такие значения параметров p и q, при которых задача:

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$x_1 + p\,x_2 \le 1,$$
$$x_1 - x_2 \ge q,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

а) имеет пустое допустимое множество;
б) имеет единственное решение;
в) имеет бесконечно много решений;
г) не имеет решений, так как функция бесконечно возрастает.
2) Решить транспортную задачу:

$$a = (200,\ 250,\ 150),$$
$$b = (120,\ 180,\ 105,\ 90,\ 105),$$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Раздел 3. Сетевое и календарное планирование. Принципы построения сетевой модели. Расчет сетевой модели. Календарный график работ.

Тема 3. Построение сетевой модели. Расчет сетевой модели. Календарный график работ.

Образец

1. Постройте сетевую модель, включающую операции *A*, *B*, *C*, *L*, которая отображает следующие отношения упорядочения:

1) *A*, *B* и *C* – исходные операции программы, которые можно начинать одновременно.

2) *A* и *B* предшествуют *D*;

3) *B* предшествует *E*, *F* и *H*;

4) *F* и *C* предшествуют *G*;

5) *E* и *H* предшествуют *I* и *Y*;

6) *C*, *D*, *F* и *Y* предшествуют *K*;

7) *K* предшествует *L*.

8) *I*, *G* и *L* – завершающие операции программы.

Сеть, соответствующая этим отношениям упорядочения, приведена ниже. Фиктивные операции D_1 и D_2 введены для того, чтобы правильно отразить отношения следования. Операция D_1 использована для однозначного определения операций *E* и *H* по конечным событиям.

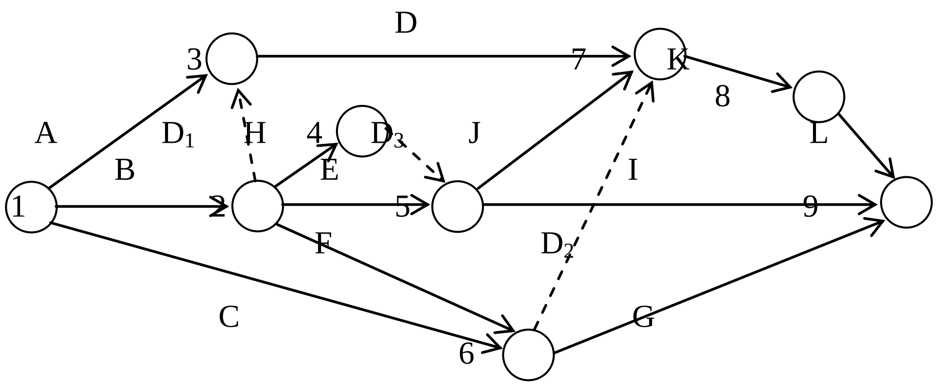


Рис. 1.

2. Рассмотрим сетевую модель, показанную на рис. 2, с исходным событием 0 и завершающим событием 6. Оценки времени, необходимого для выполнения каждой операции, даны у стрелок.

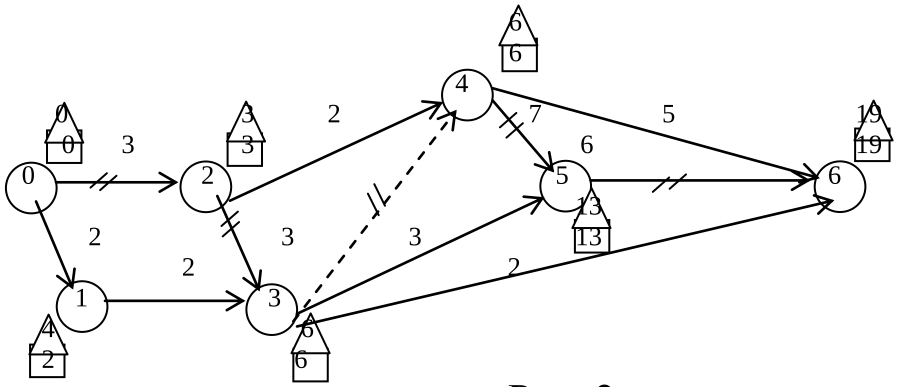


Рис. 2.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый этап называется **прямым проходом**. Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее **ранний срок** его наступления. Эти числа указаны на рис. 2 в квадратах. На втором этапе, называемом **обратным проходом**, вычисления начинаются с завершающего события сети и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется число, представляющее **поздний срок** его наступления. Эти числа даны в треугольниках.

Рассмотрим теперь прямой проход. Пусть $T_i^{P.H.}$ – ранний срок начала всех операций, выходящих из события i. Если принять $i = 0$, то $T_i^{P.H.} = 0$. Обозначим символом D_{ij} продолжительность операции (i, j). Тогда вычисления при прямом проходе выполнятся по формуле

$$T_j^{P.H.} = \max_i \left\{ T_i^{P.H.} + D_{ij} \right\} \text{ для всех операций } (i, j), \text{ где } T_0^{P.H.} = 0.$$

Применительно к рис. 2 вычисления при прямом проходе начинаются с $T_0^{P.H.} = 0$, как показано в квадрате над событием 0. Поскольку в событие 1 входит только одна операция (0, 1) продолжительностью $D_{01} = 2$, то

$$T_1^{P.H.} = T_0^{P.H.} + D_{01} = 0 + 2 = 2.$$

Этот результат записан в квадрате у события 1. Рассмотрим далее событие 2. (Заметим, что событие 3 пока рассматривать нельзя, так как срок $T_2^{Р.Н.}$ (для события 2) еще неизвестен).

Таким образом:

$$T_2^{Р.Н.} = T_0^{Р.Н.} + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Поместим этот результат в квадрат у события 2.

Вычисления продолжается аналогичным образом, пока не будут определены значения $T_j^{Р.Н.}$ для всех *j*.

Имеем:

$$T_3^{Р.Н.} = \max_{i=1,2}\left\{T_i^{Р.Н.} + D_{i3}\right\} = \max\left\{2+2; 3+3\right\} = 6,$$
$$T_4^{Р.Н.} = \max_{i=2,3}\left\{T_i^{Р.Н.} + D_{i4}\right\} = \max\left\{3+2; 6+0\right\} = 6.$$

На этом вычисления прямого прохода заканчивается.

Обратный проход начинается с завершающего события сети. При этом целью является определение $T_i^{П.О.}$ – поздних сроков окончания всех операций, входящих в событие *i*. Если принять $i = n$, где n – завершающее событие сети, то $T_n^{П.О.} = T_n^{Р.Н.}$ является отправной точкой обратного прохода. В общем виде для любого события *i*: $T_i^{П.О.} = \min_i\left\{T_i^{П.О.} - D_{ij}\right\}$ для всех операций (*i*, *j*).

Значения $T_i^{П.О.}$ (указанные в треугольниках) вычисляется следующим образом:

$$T_6^{П.О.} = T_6^{Р.Н.} = 19,$$
$$T_5^{П.О.} = T_6^{П.О.} - D_{56} = 19 - 6 = 13,$$
$$T_4^{П.О.} = \min_{i=4,5}\left\{T_j^{П.О.} - D_{4j}\right\} = \min\left\{13-7; 19-5\right\} = 6,$$
$$T_3^{П.О.} = \min_{i=4,5,6}\left\{T_j^{П.О.} - D_{3j}\right\} = \min\left\{6-0; 13-3; 19-2\right\} = 6,$$
$$T_2^{П.О.} = \min_{i=3,4}\left\{T_j^{П.О.} - D_{2j}\right\} = \min\left\{6-3; 6-2\right\} = 3,$$
$$T_1^{П.О.} = T_3^{П.О.} - D_{13} = 6 - 2 = 4,$$
$$T_0^{П.О.} = \min_{i=1,2}\left\{T_j^{П.О.} - D_{0j}\right\} = \min\left\{4-2; 3-3\right\} = 0.$$

Таким образом, вычисления при обратном проходе закончены.

Операция (i, j) принадлежит **критическому пути**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$T_i^{Р.Н.} = T_i^{П.О.}; \;\; T_j^{Р.Н.} = T_j^{П.О.};$$
$$T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} = T_j^{П.О.} - T_i^{П.О.}.$$

На рис. 2 критический путь включает операции (0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) и (3, 6). Критический путь определяет кратчайшую возможную продолжительность всей программы в целом. Заметим, что операции (2, 4), (3, 5), (3, 8) и (4, 6) удовлетворяет условию:

$$T_i^{Р.Н.} - T_i^{П.О.}; \; T_j^{Р.Н.} - T_j^{П.О.},$$

но не удовлетворяет условию:

$$T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} = T_j^{П.О.} - T_i^{П.О.},$$

поэтому они не являются критическими.

При определении критического пути необходимо вычислить резервы времени для некритических операций.

Прежде чем приступить к вычислению резервов времени, нужно ввести определения еще двух сроков, связанных с каждой операцией. Это **срок позднего начала** $T^{П.Н.}$ и **срок раннего окончания** $T^{Р.О.}$, которые для любой операции (i, j) задаются соотношениями:

$$T_{ij}^{П.Н.} = T_j^{П.О.} - D_{ij}, \; T_{ij}^{Р.О.} = T_i^{Р.Н.} + D_{ij}.$$

Различает два основных вида резервов времени: **полный резерв (ПР)** и **свободный резерв (СР)**. Полный резерв времени операции (i, j) представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция $T_j^{П.О.} - T_i^{Р.Н.}$, и ее продолжительностью D_{ij}, т. е.:

$$ПР_{ij} = T_j^{П.О.} - T_i^{Р.Н.} - D_{ij} = T_j^{П.Н.} - T_{ij}^{Р.О.} = T_{ij}^{П.Н.} - T_i^{Р.Н.}.$$

Свободный резерв времени определяется в предположении, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии величина CP_{ij} для операции (i, j) представляет собой превышение допустимого отрезка времени $T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.}$ над продолжительностью операции D_{ij}, т. е.:

$$CP_{ij} = T_j^{Р.Н.} - T_i^{Р.Н.} - D_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций сети можно свести в удобную для пользования таблицу (табл. 1).

Заметим, что только критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени. Когда полный резерв равен нулю, сводный резерв также должен быть равен нулю. Однако обратное неверно, поскольку свободный резерв некритической операции также может быть нулевым. Так, например, в табл. 1 свободный резерв времени некритической операции (0, 1) равен нулю. Звездой отмечена критическая операция.

Таблица 1.

Операция (i, j)	Продолжительность D_{ij}	Раннее		Позднее		Полный резерв $ПР_{ij}$	Свободный резерв CP_{ij}
		Начало $T_i^{Р.Н.}$	Окончание $T_{ij}^{Р.О.}$	Начало $T_{ij}^{П.Н.}$	Окончание $T_j^{П.О.}$		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)*	3	0	3	0	3	0	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)*	3	3	6	3	6	0	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3, 4)*	0	6	6	6	6	0	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)*	7	6	13	6	13	0	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)*	6	13	19	13	19	0	0

При построении календарного графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное (параллельное) выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, может оказаться невозможным. Именно в этом отношении представляет ценность полные резервы времени некритических операций. Сдвигая некритическую операции в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Однако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы.

Данные, необходимые для построения календарного графика, приведены в табл. 1. Прежде всего определяются календарные сроки выполнения критических операций. Далее рассматривается некритические операции, и указываются их ранние сроки начала $T^{Р.Н.}$ и поздние сроки окончания $T^{П.О.}$. Критические операции изображаются сплошными линиями. Отрезки времени, в пределах которых могут выполняться некритические операции, наносятся пунктирными линиями, показывающими, что календарные сроки этих операций можно выбрать в указанных пределах при условии сохранения отношений следования.

На рис. 3 показан календарный график. Фиктивная операция (3, 4) не требует затрат времени и поэтому показана на графике вертикальным отрезком. Числа, проставленные над некритическими операциями, соответствуют их продолжительностям.

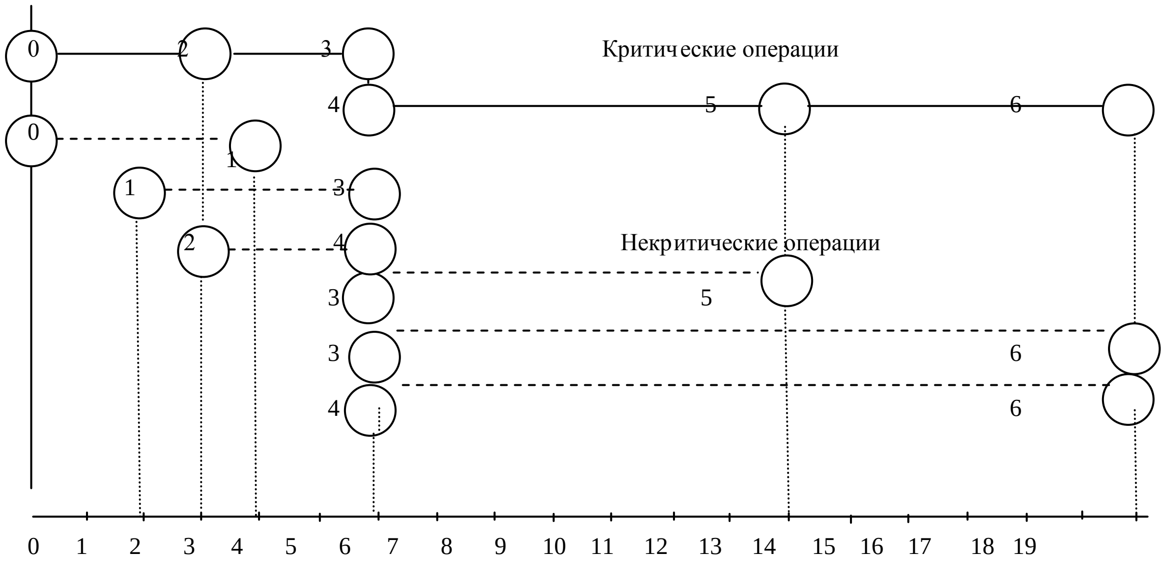


Рис. 3.

Роль полных и свободных резервов времени при выборе календарных сроков выполнения некритических операций объясняется двумя общими правилами.

Правило 1. Если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием (пунктирные отрезки на рис. 3).

Правило 2. Если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к ее раннему сроку начала не более чем на величину свободного резерва, не влияя при этом на выбор календарных сроков непосредственно следующих операций.

В рассматриваемом примере правило 2 применимо только к операции (0, 1), а календарные сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

Предположим для выполнения различных операций требуется указанные ниже ресурсы рабочей силы.

Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)	Операция	Потребность в рабочей силе (чел.)
(0, 1)	0	(3, 5)	2
(0, 2)	5	(3, 6)	1
(1, 3)	0	(4, 5)	2
(2, 3)	7	(4, 6)	5
(2, 4)	3	(5, 6)	6

Задача заключается в построении такого календарного плана (графика) реализации программы, при котором потребности в рабочей силе будут наиболее равномерными на протяжении всего срока осуществления программы.

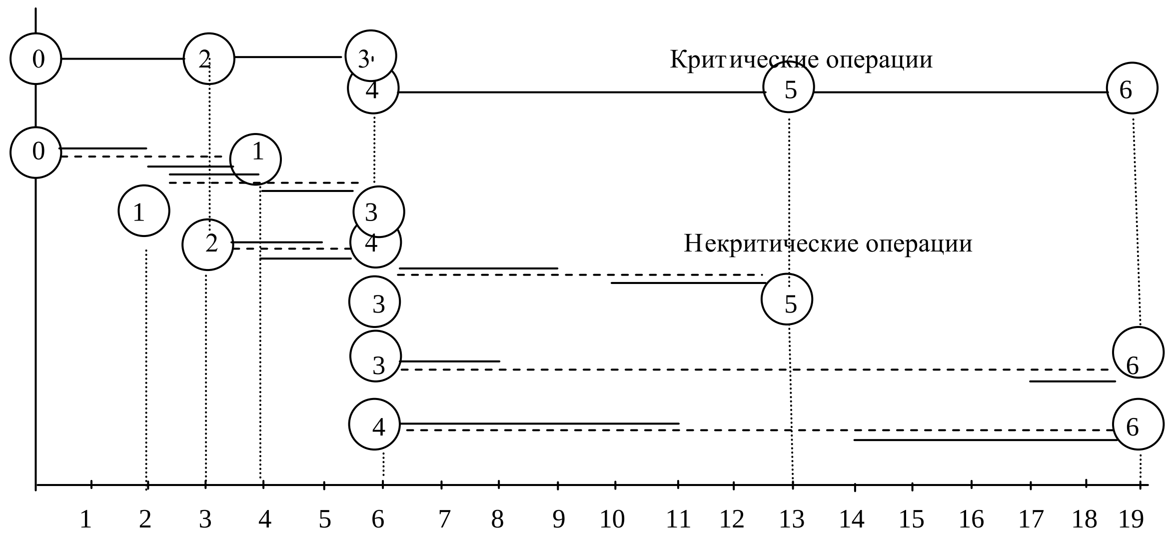


Рис. 4.

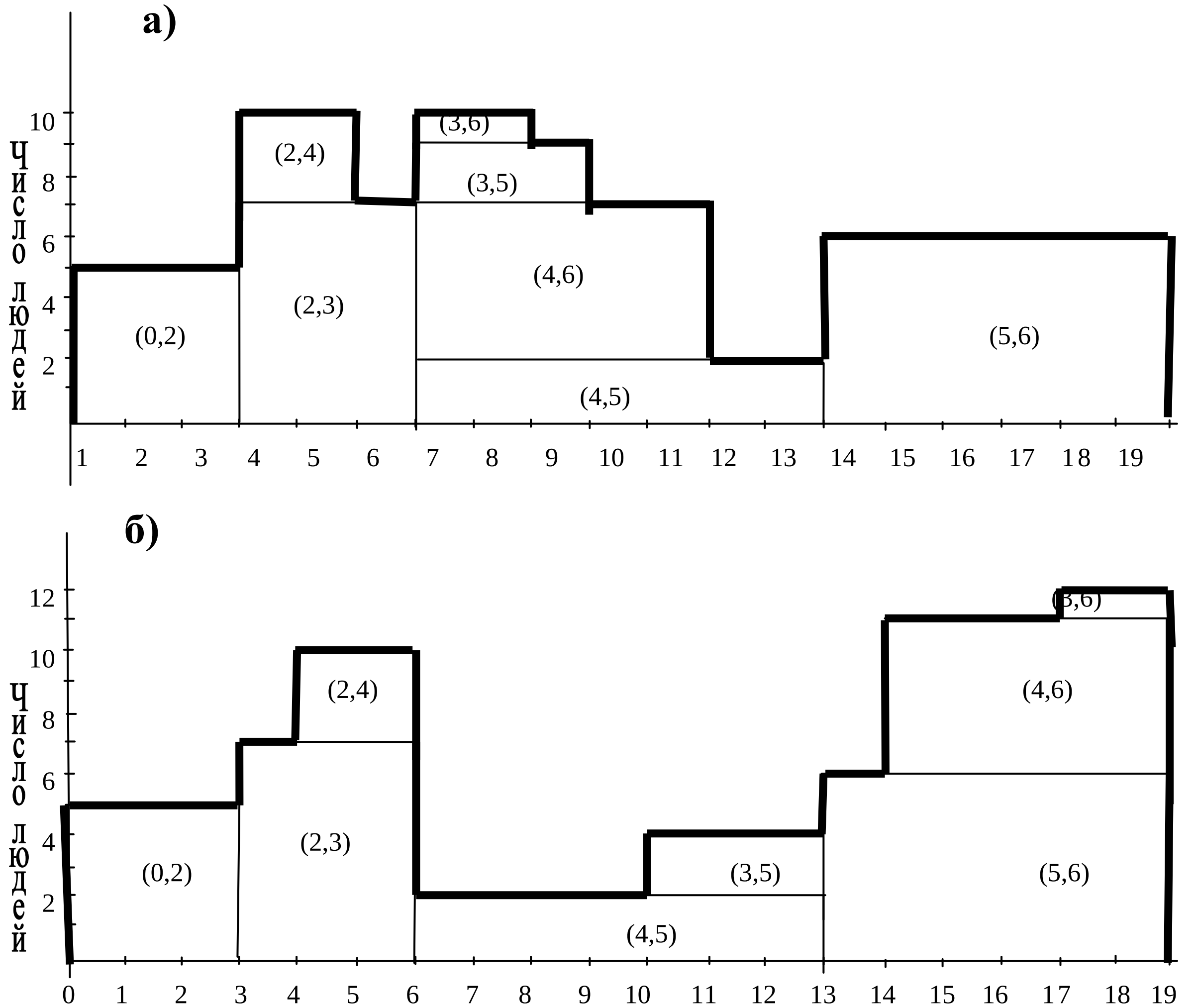


Рис. 5.

а) ранний календарный план для некритических операций;
б) поздний календарный план для некритических операций.

На рис. 5. а показана потребность в рабочей силе при условии выбора в качестве календарных сроков некритических операций их ранних сроков начала (так называемый ранний (левый) календарный план), а на рис. 5. б – потребность в рабочей силе при выборе наиболее поздних сроков (так называемый поздний (правый) календарный план). Пунктирной линией представлена потребность критических операций, которая должна быть обязательно удовлетворена, если нужно выполнить программу в минимально возможный срок. (Отметим, что для операций (0, 1) и (1, 3) ресурсы рабочей силы не требуются).

Как показывают потребности в ресурсах критической операции (2, 3), для реализации программы необходимо, по крайней мере, 7 человек. При раннем календарном плане некритических операций максимальная потребность в ресурсах составляет 10 человек, а при позднем – 12. Этот пример наглядно показывает, что максимальные потребности в ресурсах зависят от использования резервов времени некритических операций. Однако, как видно из рис. 5, независимо от распределения этих резервов максимальная потребность в рабочей силе для рассматриваемой программы не может быть меньше 10 человек, так как интервал времени, в пределах которого можно выполнять операции (2, 4) совпадает с интервалом критической операции (2, 3).

График потребности в рабочей силе при раннем календарном плане можно улучшить, выбрав поздние календарные сроки для операции (3, 5) и назначив выполнение операции (3, 8) непосредственно после завершения операции (4, 6). Новый график потребности в рабочей силе, приведенный на рис. 6, обеспечивает более равномерное распределение ресурсов.

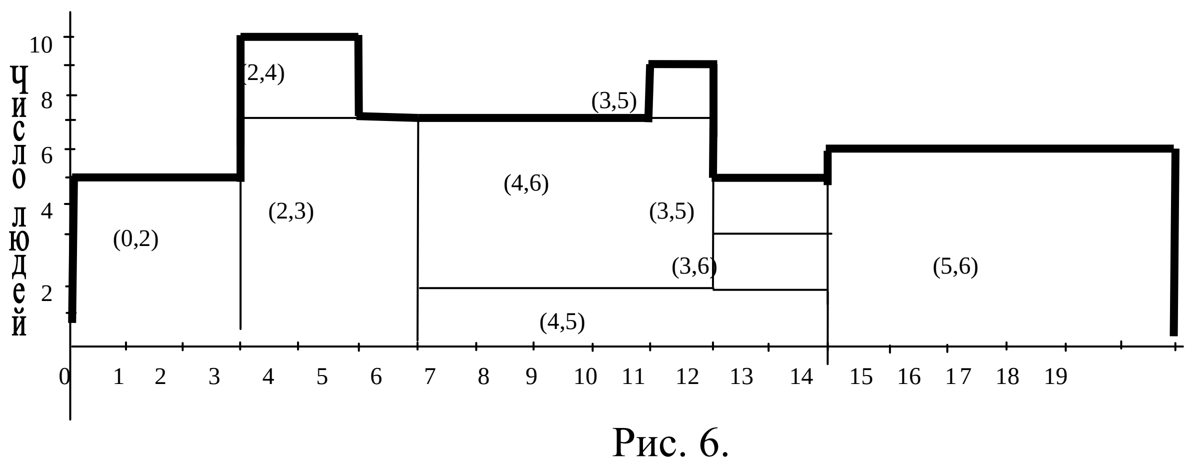
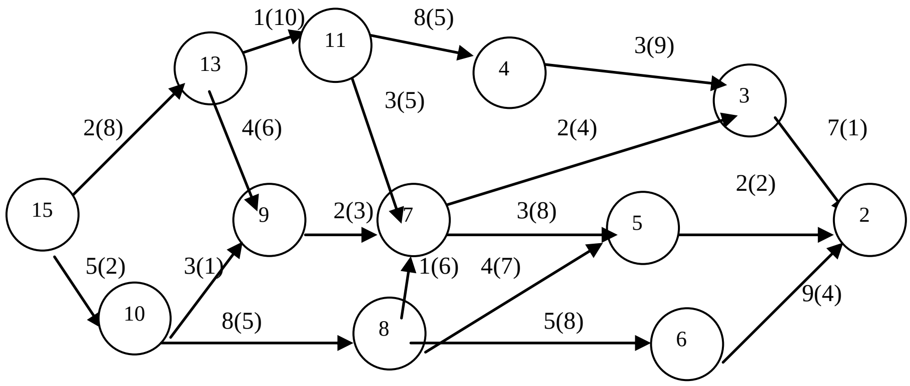


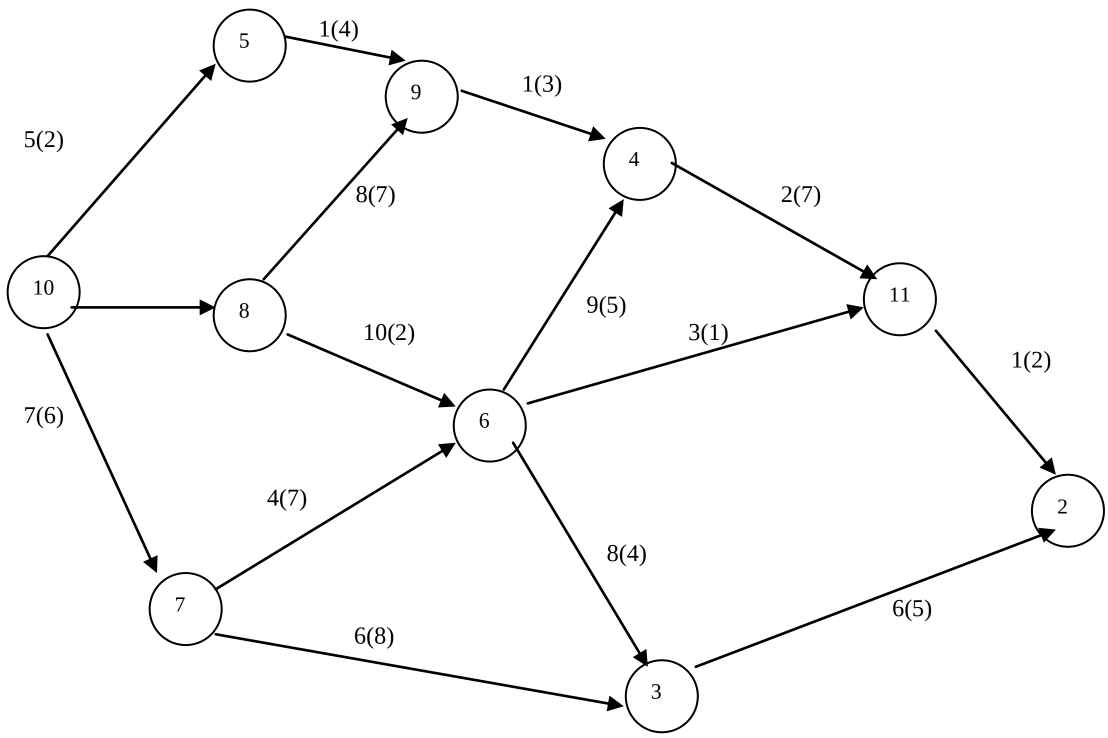
Рис. 6.

Практическое занятие:

1. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.

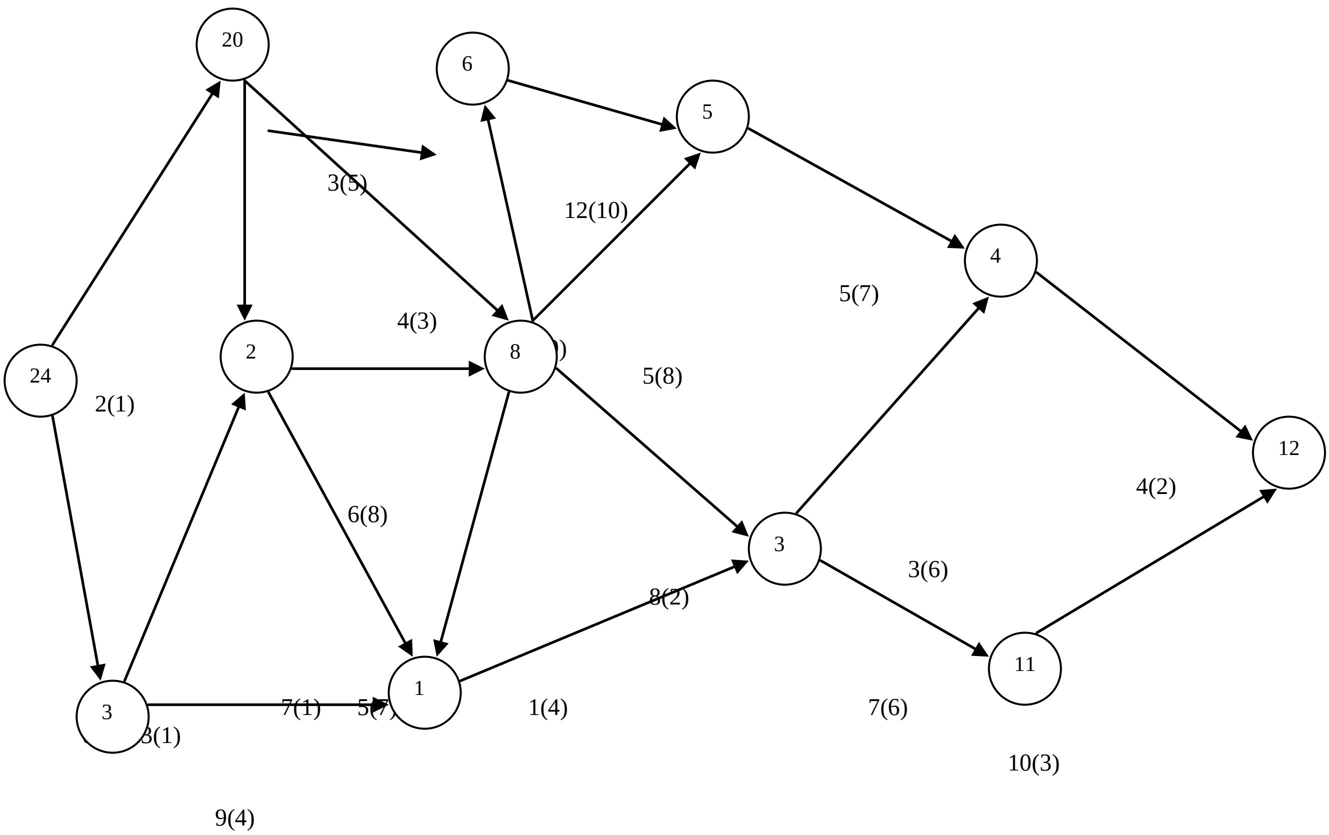


2. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.

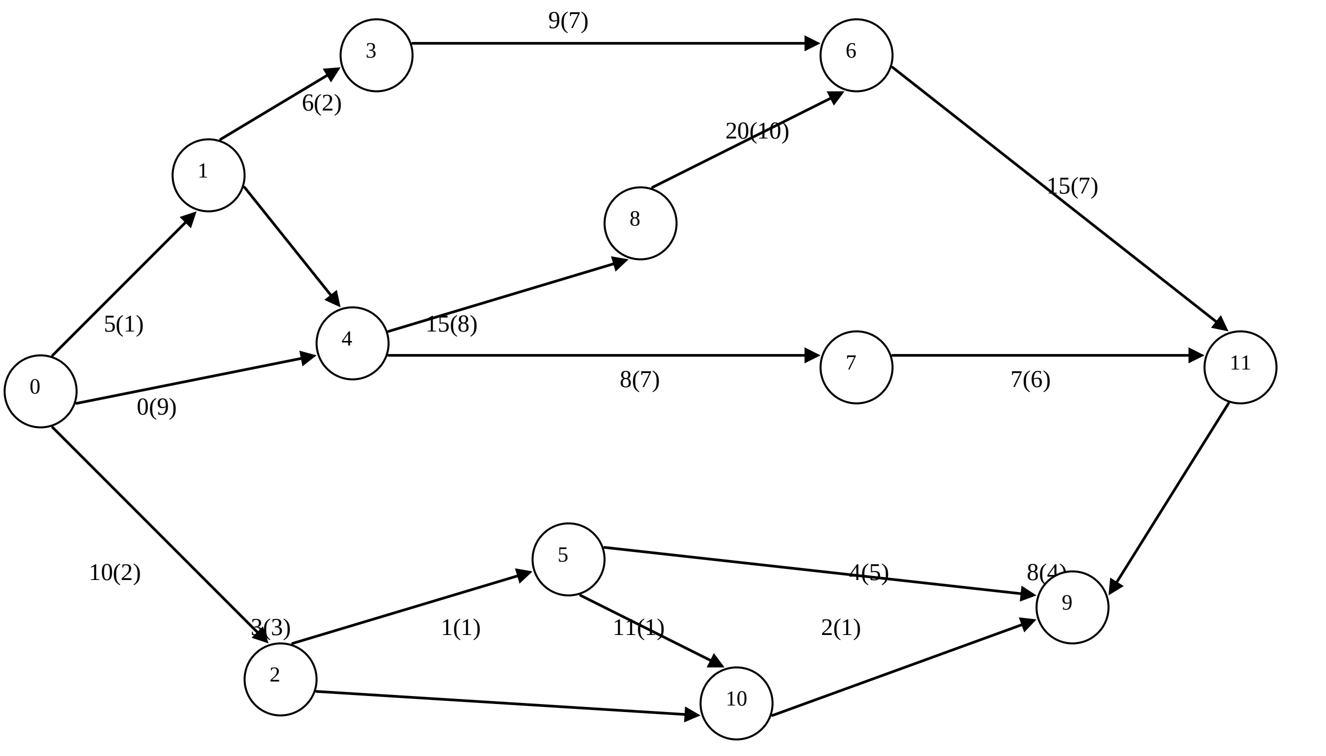


Домашнее задание:

1. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.



2. Правильно пронумеровать вершины графа. Построить календарный график работ. Числа в скобках – потребность в рабочей силе. Числа без скобок – длительность операции.



Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Основная учебная литература

1. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – Москва: Высш. шк., 2001. – 552 с.
2. Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1974. – 271 с.
3. Голоколосова, Т. В. Исследование операций: учебное пособие / Т. В. Голоколосова, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 120 с.
4. Данилов Н. Н. Игровые модели принятия решения: учеб. пособие. – Кемерово. Изд-во КемГУ, 1981. – 122 с.
5. Данилов Н. Н. Теоретико-игровое моделирование конфликтных ситуаций: учеб. пособие. – Кемерово. Изд-во ТГУ, 2005. – 142 с.
6. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в теория игр. – Москва: Наука, 1981. – 336 с.
7. Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов. – Москва: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
8. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – Москва: Вильямс, 2005. – 901 с.

Дополнительная учебная литература

9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов экономических специальных вузов. – Москва: Высшая шк., 1986. – 320 с.
10. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – Москва: Физматгиз, 1961. – 68 с.
11. Воробьев Н. Н. Теория игр. – Москва: Знание, 1985. – 272 с.
12. Давыдов Э. Г. Исследование операций. – Москва: Высш. шк., 1990. – 381 с.
13. Дегтярев Ю. И. Исследование операций. – Москва: Наука, 1986. – 320 с.
14. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.