

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
А. В. Чередниченко

ТЕОРИЯ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методическими комиссиями
направления подготовки 38.03.02 Менеджмент
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2019

Рецензент Волков В. М. – кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский
государственный технический университет имени
Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна

Чередниченко Алла Валериевна

Теория системного анализа: методические материалы [Электрон-
ный ресурс] для обучающихся направления подготовки 38.03.02 Менедж-
мент всех форм обучения / сост.: Е. А. Николаева, А. В. Чередниченко;
КузГТУ. – Кемерово, 2019.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисци-
плины.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по
дисциплине «Теория системного анализа» и организовать самостоятель-
ную работу.

© КузГТУ, 2019

© Николаева Е. А.,
Чередниченко А. В.,
составление, 2019

Предлагаемые методические указания предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по курсу «Теория системного анализа».

Цель работы – помочь студентам при освоении дисциплины «Теория системного анализа», организация практических занятий и самостоятельной работы.

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы.

Практические занятия и самостоятельная работа

Математическая статистика:

1. Основные понятия математической статистики. Дискретный и интервальный вариационные ряды. Полигон. Гистограмма.

2. Выборочные числовые характеристики вариационного ряда: среднее, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана.

3. Интервальная оценка параметров распределения случайных величин. Доверительный интервал, доверительная вероятность, точность оценки.

Практическое занятие:

1. На угольных предприятиях исследовали производительность труда рабочих при проходке штрека (случайная величина X). Результаты наблюдений приведены в таблице:

№	X	№	X	№	X	№	X	№	X
1	0,32	11	0,19	21	0,16	31	0,15	41	0,15
2	0,16	12	0,16	22	0,33	32	0,18	42	0,19
3	0,27	13	0,14	23	0,23	33	0,21	43	0,31
4	0,25	14	0,27	24	0,35	34	0,26	44	0,22
5	0,29	15	0,18	25	0,20	35	0,27	45	0,23
6	0,17	16	0,24	26	0,17	36	0,22	46	0,36
7	0,18	17	0,12	27	0,25	37	0,23	47	0,31
8	0,22	18	0,24	28	0,20	38	0,16	48	0,21
9	0,29	19	0,21	29	0,18	39	0,18	49	0,16
10	0,25	20	0,23	30	0,17	40	0,17	50	0,28

По выборке случайной величины X требуется:

- построить интервальный вариационный ряд;
- по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее \bar{x} , выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x ;
- построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

2. Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y , где X – стаж работы работника, а Y – производительность его труда. Данные приведены в табл. Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
8	1,9	14	2,3	9	1,9	12	2,3	19	2,5
11	2,3	2	1,4	9	1,9	10	1,9	13	2,1
5	1,6	11	2,2	13	2,1	16	2,5	12	2,3
8	2,0	6	1,7	16	2,5	5	1,3	15	2,4
12	2,3	10	1,9	8	1,8	9	2,0	16	2,6
1	1,3	10	2,0	11	2,2	7	1,7	11	2,1
9	2,0	12	2,2	17	2,8	6	2,0	12	2,2
8	1,8	18	2,6	9	1,8	11	2,3	8	1,5
10	1,8	8	1,9	6	1,5	11	2,8	7	1,6
13	2,2	13	2,1	10	1,9	12	1,3	12	2,1

3. На угольных предприятиях определяли производительность труда рабочих при проходке штрека (случайная величина X) и скорость проходки (случайная величина Y , м/мес). Результаты наблюдений приведены в таблице

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0,31	136	0,19	110	0,16	70	0,15	118	0,15	100
0,16	76	0,16	87	0,33	300	0,18	152	0,19	64
0,27	160	0,14	75	0,23	185	0,21	155	0,31	150
0,25	170	0,21	120	0,36	311	0,26	151	0,22	150
0,23	101	0,18	97	0,20	97	0,29	230	0,23	126
0,17	87	0,24	100	0,17	120	0,22	215	0,36	280
0,18	72	0,12	123	0,25	201	0,23	202	0,31	154
0,22	100	0,24	103	0,20	152	0,16	120	0,21	120
0,29	194	0,21	100	0,18	118	0,18	101	0,16	120
0,25	190	0,23	103	0,17	158	0,17	100	0,28	125

По данным X – производительности труда рабочего (табл.1) необходимо: а) составить вариационный ряд; б) вычислить выборочную среднюю \bar{x} , выборочную дисперсию D_b , выборочное среднее квадратическое отклонение σ_x .

4. По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее \bar{x} , выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x ;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

е) исследовать линейную корреляционную зависимость между двумя случайными величинами X и Y . Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y . Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции:

задача 1		задача 2		задача 3		задача 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
9	10	21	30	45	65	25	60
97	60	32	40	46	50	32	50
63	40	8	20	41	40	14	45
82	50	28	30	38	45	19	45
85	50	32	35	47	64	40	64
45	30	5	15	36	44	2	44
92	56	35	44	48	55	30	55
100	60	27	30	51	57	27	57
97	64	29	32	47	61	29	61
99	71	37	41	57	64	28	64
125	80	40	40	56	66	46	66
68	40	12	20	39	43	8	43
117	75	24	30	50	59	30	59

задача 1		задача 2		задача 3		задача 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
74,7	45	11	15	46	54	12	54
105	69	24	25	51	64	38	64
110	65	45	50	48	55	42	55
108	64	39	40	52	64	36	64
135	80	52	54	64	75	54	75
86	53	13	18	48	51	22	51
105	67	43	42	53	62	39	62
112	66	27	31	49	53	28	53
107	66	31	25	58	68	24	68
118	69	36	33	50	59	43	59
93	60	37	34	53	67	50	67
72	50	39	38	44	51	26	51
104	70	33	35	49	55	36	55
130	80	49	48	60	68	52	68
112	66	38	35	42	57	31	57
53	44	18	22	41	50	15	50
103	65	25	23	52	60	34	60
102	61	23	25	62	74	30	65
106	63	38	34	55	61	28	61
124	70	58	59	61	62	43	62
78	44	15	26	38	42	12	42
77	45	23	23	43	53	23	53
91	58	16	21	47	51	22	51
88	54	31	27	46	55	33	55
116	68	24	25	57	69	44	69
99	55	32	33	58	68	26	68
108	64	25	25	54	65	38	65
148	84	60	65	64	78	60	76
93	53	38	42	54	61	38	63
132	60	28	34	47	51	35	54
128	74	44	46	57	63	49	67
137	85	39	32	59	62	45	62
114	55	19	22	58	61	38	64
79	40	30	36	55	68	26	67
84	52	46	49	49	57	26	55
95	45	22	24	44	51	18	40
91	50	47	35	53	65	34	65

Самостоятельная работа:

1. По выборке случайной величины X требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд;

б) по сгруппированной выборке вычислить выборочное среднее \bar{x} , выборочную дисперсию S_x^2 и выборочное среднее квадратическое отклонение S_x ;

в) построить гистограмму вариационного ряда;

г) проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$;

д) найти статистические оценки параметров распределения.

е) исследовать линейную корреляционную зависимость между двумя случайными величинами X и Y . Вычислить выборочный коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X и Y . Найти коэффициент корреляции, составить уравнение линейной регрессии, построить линию регрессии, проверить значимость коэффициента корреляции:

Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
56	60	42	55	63	50	2,5	25
76	50	67	90	84	90	3,6	30
40	45	21	34	60	44	4,6	33
60	55	34	56	70	51	2,8	32
74	90	50	70	88	70	2,6	22
11	20	22	33	36	33	3,7	23
56	65	47	65	72	65	5,9	33
68	67	45	67	75	67	2,2	21
72	85	53	77	78	77	1,8	28
104	111	61	89	88	89	2,7	23
110	120	64	85	90	85	2,2	21
15	20	25	43	97	66	1,5	23
84	70	59	68	93	68	3	26
45	54	38	59	60	59	3,6	34
68	76	50	70	78	70	5,3	36
72	80	48	64	80	64	4,7	30
86	100	54	79	92	79	2,9	20
120	95	75	100	125	100	4,5	29

Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
56	51	43	61	69	61	2,9	22
108	105	59	74	93	74	3,3	21
64	65	50	70	74	70	2,4	22
68	71	48	56	70	56	2,2	23
105	99	60	81	95	81	5,7	33
108	88	69	90	110	90	5	30
59	51	41	60	72	60	2,5	25
83	77	59	76	83	76	3,7	24
106	98	76	99	115	99	3,7	26
52	57	48	61	86	61	1,5	23
35	50	34	45	60	45	2,6	26
70	60	48	56	80	51	3,8	25
75	87	59	78	90	78	6	32
68	67	60	89	78	89	2,8	24
80	88	66	84	108	88	1,6	21
40	42	32	50	52	50	0,5	21
67	53	48	61	76	61	1,9	22
52	51	36	50	68	50	2,2	22
60	55	42	66	70	66	0,5	21
73	69	52	79	85	76	4,3	26
75	68	60	81	90	87	2,5	25
80	65	58	61	92	56	5,8	32
130	140	80	103	120	99	3,4	23
84	63	57	71	96	79	3,9	24
80	54	51	79	90	76	2,7	25
95	75	68	95	100	92	1,8	22
100	62	72	111	108	109	1,4	24
74	64	55	54	84	53	4,8	26
48	67	58	77	92	76	3,7	26
50	55	38	47	65	44	4	28
52	40	40	55	60	54	3,6	30
81	69	55	70	95	80	3,8	31

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
36	40	48	47	40	24	3,8	48
44	60	66	65	50	34	4,5	60
24	34	40	40	25	21	2,7	34
35	45	52	49	42	26	3,2	45

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
48	60	72	64	54	34	5	60
12	20	18	24	6	14	1,3	20
39	45	58	49	48	27	3,6	45
34	40	47	44	35	24	3,7	40
40	50	62	54	52	29	4	60
48	55	75	59	65	31	4,8	55
52	67	78	71	68	37	5,3	67
15	25	19	29	7	16	1,6	20
47	51	64	55	52	29	4,9	51
24	30	40	34	32	19	2,6	30
38	45	50	49	48	28	3,5	45
40	45	60	49	51	26	4	40
49	67	68	71	60	37	4,9	75
68	85	100	89	92	46	6,7	90
28	34	52	38	36	21	2,9	34
51	67	73	71	64	37	5,2	67
35	41	57	45	45	24	3,6	41
38	56	60	60	47	32	3,7	56
49	54	72	58	66	31	4,8	54
60	80	88	84	80	44	6	85
32	34	48	38	38	21	3,3	34
46	50	62	54	53	29	4,5	50
67	70	90	74	57	39	6,8	70
36	34	56	38	47	21	3,7	34
28	41	40	45	25	24	2,9	47
41	56	58	60	48	32	4,3	56
46	70	70	74	56	39	4,5	75
40	50	60	54	49	29	4	50
58	65	87	69	77	36	5,7	65
22	31	35	35	24	19	2,3	26
39	45	56	49	44	26	3,7	45
28	34	45	38	36	21	2,5	33
34	41	50	45	49	24	3,6	45
42	55	62	59	52	31	4,8	54
48	58	65	62	56	33	4,3	58
46	50	72	54	63	29	4,5	50
62	67	100	71	94	37	6,5	67
51	56	74	60	65	32	5,2	56
50	60	68	64	53	34	5	60

Задача 5		Задача 6		Задача 7		Задача 8	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
57	61	80	65	70	34	5,8	60
62	72	85	76	80	40	6,3	72
42	55	64	59	55	31	4,5	52
48	60	72	64	60	34	4,7	60
30	40	52	44	38	24	3	35
27	30	47	34	34	19	2,8	28
45	45	71	49	63	26	4,4	41

Математическое моделирование:

1. Виды математических моделей. Алгоритм построения математической модели реальной ситуации.

2. Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача. Метод потенциалов.

Пример:

1. (Задача об использовании ресурсов)

Для изготовления двух видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		<i>P1</i>	<i>P2</i>
<i>S1</i>	18	1	3
<i>S2</i>	16	2	1
<i>S3</i>	5	–	1
<i>S4</i>	21	3	–

Прибыль, получаемая от единицы продукции 2 и 3 руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1 , x_2 – число единиц продукции соответственно *P1* и *P2*, запланированных к производству.

Для их изготовления потребуется $(1 x_1 + 3 x_2)$ единиц ресурса $S1$, $(2 x_1 + 1 x_2)$ единиц ресурса $S2$, $(1 x_2)$ единиц ресурса $S3$ и $(3 x_1)$ единиц ресурса $S4$. Так как потребление ресурсов $S1$, $S2$, $S3$ и $S4$ не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{aligned}x_1 + 3 x_2 &\leq 18, \\2 x_1 + x_2 &\leq 16, \\x_2 &\leq 5, \\3 x_1 &\leq 21.\end{aligned}$$

По смыслу задачи переменные неотрицательны:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции $P1$ и $3 x_2$ руб. – от реализации продукции $P2$, т. е.:

$$f(x) = 2 x_1 + 3 x_2 \rightarrow \max.$$

2. (Задача о раскрое материалов)

Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить математическую модель задачи.

Решение: Определим всевозможные способы распила бревен.

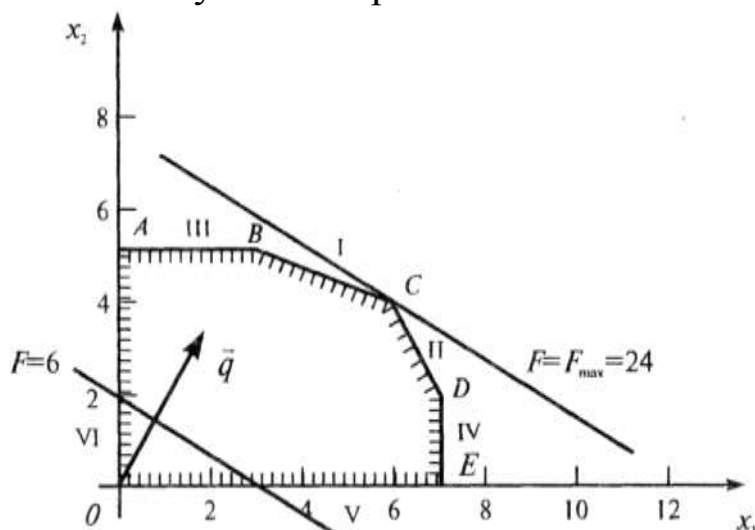
Способ распила	Число получаемых брусьев длиной, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

при ограничениях:

3. Определить точку максимума, вычислить ее координаты и значение целевой функции в ней:

Изобразим многоугольник решений:



Очевидно, что при $f = 0$ линия уровня $2x_1 + 3x_2 = 0$ проходит через начало координат. Зададим, например, $f = 6$ и построим линию уровня $2x_1 + 3x_2 = 6$. Ее расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор q). Так как рассматриваемая задача – на отыскание максимума, то оптимальное решение – в угловой точке C , находящейся на пересечении прямых I и II, т. е. координаты точки C определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases},$$

откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, т. е. $C(6; 4)$.

Максимальное значение функции $f_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$.

1. (Бесконечное множество решений):

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение: Особенность данной задачи, состоит в том, что линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей ограничению:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5.$$

Это, вместе с направлением градиента, обуславливает наличие альтернативных оптимальных решений. Таким образом, $x^* = (3 - 3\alpha; 1 + 1,5\alpha)$ где $\alpha \in [0,1]$, $f(x^*) = 10$, т. е. в каждой из этих точек целевая функция имеет одно и тоже значение.

2. (Целевая функция не ограничена на допустимом множестве):

$$\begin{aligned} f(x) &= 20x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 &\leq 10, \\ x_1 &\leq 20, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение: При параллельном переносе линии уровня в направлении градиента, эта прямая всегда пересекает многогранник решений (крайнюю точку найти не удастся), при этом значение целевой функции $f(x)$ может быть сделано сколь угодно большим. Таким образом, данная задача решения не имеет, вследствие неограниченности сверху целевой функции на допустимом множестве.

3. (Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует):

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение: Очевидно, что фактором, определяющим, будет ли существовать решение в случае неограниченности допустимого множества, является направление градиента целевой функции. $x^* = (4, 6)$ – точка максимума, $f(x^*) = 12$.

4. (Отсутствие допустимых решений):

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение: Полуплоскости, соответствующие неравенствам системы ограничений не имеют общих точек пересечения, следовательно, нет ни одной допустимой точки.

Допустимое множество пусто, задача не имеет решения.

Итак, при решении задачи ЛП возможны следующие исходы:

1. Допустимое множество – ограниченный многогранник, оптимальное решение – единственная вершина допустимого множества.

2. Задача ЛП может иметь бесконечное множество решений – одна из граней многогранника решений (на плоскости – отрезок, луч)

3. Целевая функция не ограничена на допустимом множестве. Задача ЛП не имеет решения.

4. Пространство решений не ограничено, а оптимальное решение существует.

5. Допустимое множество пусто, задача ЛП не имеет решения.

Чтобы решить графическим методом задачу линейного программирования произвольной размерности, записанную в каноническом виде, необходимо выразить m неизвестных через какие-нибудь другие 2 или 1 переменные. После этого, пользуясь условиями неотрицательности, перейти к системе неравенств.

5. Найти оптимальный план задачи линейного программирования графическим методом:

$$x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max,$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\2x_1 + x_2 + x_4 &= 9, \\x_1 + 2x_2 + x_5 &= 7, \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.\end{aligned}$$

Решение: Система ограничений состоит из трех уравнений, число неизвестных $n = 5$, следовательно, задачу можно решить графически. Перейдем от исходной задачи к задаче с двумя переменными. Выразим переменные x_3 , x_4 , x_5 через свободные переменные x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned}x_3 &= 5 - x_1 - x_2, \\x_4 &= 9 - 2x_1 - x_2, \\x_5 &= 7 - x_1 - 2x_2.\end{aligned}$$

Тогда целевая функция принимает вид:

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x_1 + x_2 - 5 + x_1 + x_2 + 9 - 2x_1 - x_2 - 7 + x_1 + 2x_2 = \\&= 2x_1 + 3x_2 - 3.\end{aligned}$$

С учетом условий неотрицательности, получаем:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 3 \rightarrow \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 5, \\2x_1 + x_2 &\leq 9, \\x_1 + 2x_2 &\leq 7.\end{aligned}$$

Из графика следует $x^* = (3, 2)$. Из выражений для x_3, x_4, x_5 находим: $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$.

Таким образом, $x^* = (3, 2, 0, 1, 0)$ точка максимума, а значение целевой функции $f(x^*) = 9$.

Метод решения транспортной задачи рассмотрим на примере. В таблицу внесем данные:

$$\begin{aligned}a &= (60, 120, 100), \\b &= (20, 110, 40, 110), \\c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1. Найдем начальный план перевозок по методу минимальной стоимости: находим в таблице клетку с наименьшим тарифом, таких клеток две. Найдем максимально возможные поставки для этих клеток: $x_{11} = \min\{60, 20\} = 20$, $x_{21} = \min\{120, 20\} = 20$, заполним клетку (1, 1), т. е. спрос первого потребителя полностью удовлетворен, вычеркиваем соответствующий ему столбец. Затем в оставшейся части таблицы снова находим клетку с наименьшим тарифом и заполняем ее. Продолжаем до тех пор пока не будет распределен весь груз.

Пункты отправления	Пункты назначения				a_i
	1 ($v_1 = 1$)	2 ($v_2 = 2$)	3 ($v_3 = 6$)	4 ($v_4 = 6$)	
1 ($u_1 = 0$)	1 20	2 40	5 10	3	60
2 ($u_2 = -1$)	1	6	5 10	2 110	120
3 ($u_3 = 1$)	6	3 70	7 30	4	100
b_j	20	110	40	110	

2. Полученный план перевозок необходимо проверить на оптимальность. Для этого используем метод потенциалов. Обозначим $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, потенциалы потребителей и поставщиков соответственно. Чтобы рассчитать потенциалы, составляем систему уравнений для заполненных клеток:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Поскольку неизвестных больше, чем уравнений, произвольно полагают одно из значений $u_1 = 0$. Остальные находим из системы:

$$u_1 + v_1 = 1,$$

$$u_1 + v_2 = 2,$$

$$u_2 + v_3 = 5,$$

$$u_2 + v_4 = 2,$$

$$u_3 + v_2 = 3,$$

$$u_3 + v_3 = 7$$

Условие оптимальности записываются в виде:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Оно должно выполняться для пустых клеток.

Если условие оптимальности не выполнено выбирается переменная x_{ij} с наибольшим положительным значением величины $u_i + v_j - c_{ij}$.

Вычислим значения критерия:

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 1,$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0,$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1,$$

$$u_2 + v_2 - c_{22} = -5,$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = -6,$$

$$u_3 + v_4 - c_{34} = 0.$$

Отсюда следует, что переменную x_{13} следует заполнить.

Далее строится замкнутый цикл, состоящий из горизонтальных и вертикальных линий, который начинается в клетке (1, 3), а остальные узлы находятся в заполненных клетках таблицы.

Клетку (1, 3) будем заполнять, поэтому в ней ставим «+». Для сохранения объемов перевозок в соседних к ней узлах цикла клетках значения x_{ij} должны убывать пометим их знаком «-». Общая величина убывания определяется минимальным значением заполненных клеток, которые убывают. Обозначим эту величину d . После определения величины d производится изменение переменных в соответствии со знаком, поставленным при обходе цикла. Результаты сводятся в новую таблицу.

	1 ($v_1 = 2$)	2 ($v_2 = 3$)	3 ($v_3 = 6$)	4 ($v_4 = 3$)
1 ($u_1 = -1$)	1 20	2 10	5 30	3
2 ($u_2 = -1$)	1	6	5 10	2 110
3 ($u_3 = 0$)	6	3 100	7	4

Полученный план перевозок снова проверяется на оптимальность:

$$\begin{aligned}u_1 + v_3 - c_{13} &= 0, \\u_1 + v_4 - c_{14} &= -1, \\u_2 + v_1 - c_{21} &= 0, \\u_2 + v_2 - c_{22} &= -4, \\u_3 + v_1 - c_{31} &= -4, \\u_3 + v_3 - c_{33} &= -1, \\u_3 + v_4 - c_{34} &= -1.\end{aligned}$$

На этом процесс вычислений заканчивается, решение найдено.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(X) = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 100 = 760$$

— минимальная стоимость перевозок.

Практическое занятие:

1. Фирма производит 2 вида продукции: А и В, объём сбыта продукции вида А составляет не менее 60 % общего объёма реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырьё, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В – 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 \$ соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

2. Процесс изготовления 2 видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объёмы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин.			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 \$
2	5	20	15	3 \$

3. В трёх хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т. бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$c = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

4. Решить задачу линейного программирования

Практическое занятие:

1) $f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max,$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 0,$$

$$3x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

3) $f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$2x_1 - x_2 \geq -1,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

4) $f(x) = 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \max,$

$$2x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

5. Решить транспортную задачу:

$$a = (160, 400, 240),$$

$$b = (170, 190, 140, 180, 120),$$

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа:

1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 \$ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 \$, а каждая минута телерекламы – в 100 \$. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу между радио и телерекламой.

2. У врача диетолога имеется пять видов продуктов. Из них он должен составить наиболее экономную диету. Требуется, чтобы меню содержало 20 единиц белка и 20 единиц жиров. Содержание белков и жиров в единице каждого вида продукта, а также стоимость единицы продукта заданы таблицей:

	Виды продуктов				
	I	II	III	IV	V
Белки	1	2	1	1	3
Жиры	2	1	1	2	4
Стоимость	12	10	9	18	7

3. Фирма получила заказ на n разных блоков, которые могут изготовить n фирм. Каждый блок настолько велик, что фирма – поставщик не может выполнить более одного заказа. Известна цена изготовления разных блоков в каждой фирме. Фирма должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом общие затраты на приобретение блоков.

4. Найти такие значения параметров p и q , при которых задача:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\
 x_1 + p x_2 &\leq 1, \\
 x_1 - x_2 &\geq q, \\
 x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

- а) имеет пустое допустимое множество;
- б) имеет единственное решение;
- в) имеет бесконечно много решений;
- г) не имеет решений, так как функция бесконечно возрастает.

5. Решить транспортную задачу:

$$\begin{aligned}
 a &= (200, 250, 150), \\
 b &= (120, 180, 105, 90, 105), \\
 c &= \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу, при изучении данной дисциплины выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.