

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра технологии машиностроения

Составители
М. С. Махалов
А. С. Сивушкин

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.
Моделирование систем упругих элементов**

**Методические указания к лабораторной работе
по дисциплинам «САС и CASE технологии
в машиностроении» и «Жизненный цикл
изделий машиностроения»**

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления
подготовки 15.04.05 Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств
в качестве электронного издания
для использования в учебном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

Кречетов А. А. – кандидат технических наук, доцент кафедры технологии машиностроения

Клепцов А. А. – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой технологии машиностроения

Махалов Максим Сергеевич

Сивушкин Александр Сергеевич

Метод конечных элементов. Моделирование систем упругих элементов: методические указания к лабораторной работе [Электронный ресурс] по дисциплинам «CALS и CASE технологии в машиностроении» и «Жизненный цикл изделий машиностроения» для обучающихся направления подготовки 15.04.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств всех форм обучения / сост.: М. С. Махалов, А. С. Сивушкин; КузГТУ. – Кемерово, 2019.

В методических указаниях изложены основные цели и принципы построения систем упругих элементов при моделировании методом конечных элементов (МКЭ). Даны примеры моделей и варианты заданий для выполнения лабораторной работы по дисциплинам «CALS и CASE технологии в машиностроении» и «Жизненный цикл изделий машиностроения».

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы: овладение практическими навыками моделирования и решения систем упругих элементов методом конечных элементов.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

2.1. Типы конечных элементов

На приведенном ниже рис. 1 все элементы имеют прямые стороны, а узлы помещены на концах элемента (рис. 1, а) или в вершинах углов (рис. 1 б, в). Таким образом, каждый элемент (или его сторона) ограничен соседними узлами и вся область будет аппроксимирована линейными элементами. Это наиболее простые элементы.

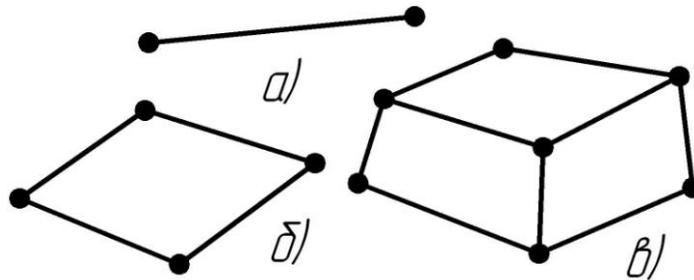


Рис. 1. Конечные элементы

Можно образовывать элементы с числом узлов вдоль одной стороны более двух (рис. 2). В этом случае введение одного или нескольких дополнительных узлов позволяет сделать стороны элементов криволинейными. Такие элементы являются более точными, т. к. функции элементов будут строиться уже не по двум, а по трем (рис. 2 а, б) или четырем (рис. 2, в) точкам и, следовательно, будут являться полиномами второй или третьей степени.

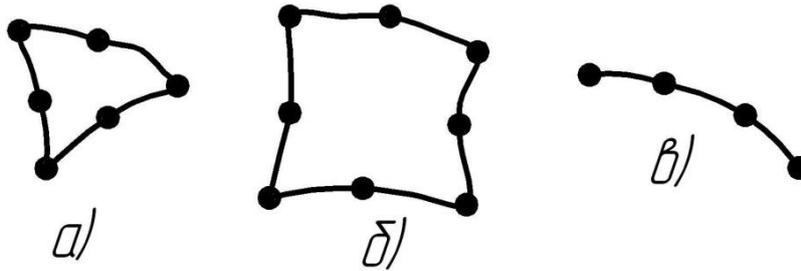


Рис. 2. Конечные элементы

В данной лабораторной работе будем рассматривать только линейный упругий элемент.

2.2. Линейный упругий элемент и его матрица жесткости

Линейный упругий элемент (например, упругая пружина) является одним из простейших типов элементов. Его модель представлена на рис. 3.

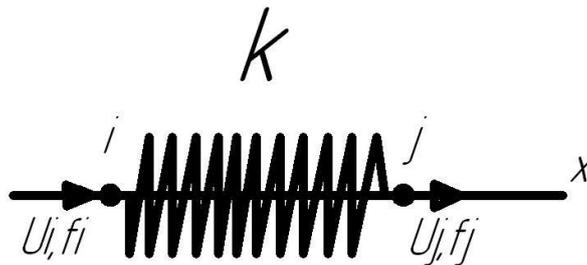


Рис. 3. Схема упругого элемента

Элемент ограничен двумя узлами i и j . В этих узлах приложены силы f_i и f_j [Н], соответственно. Эти силы вызывают смещения узлов U_i и U_j [м] (или [мм]). Элемент характеризуется жесткостью k [Н/м], т. е. силой, необходимой для его деформации на единицу длины. Таким образом, зависимость силы от деформации запишется как $f_j = k\Delta$, где $\Delta = U_j - U_i$. (удлинение элемента).

Рассмотрим силы, действующие в узлах данного элемента:

$$\begin{aligned} \text{в узле } i: f_i &= k(u_i - u_j); \\ \text{в узле } j: f_j &= k(u_j - u_i), \end{aligned}$$

то же в матричной форме

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad ku = f. \quad (1)$$

Здесь k – матрица жесткости; u – вектор смещений; f – вектор сил. Заметим, что матрица жесткости k – симметричная матрица.

2.3. Система упругих элементов. Матрица жесткости системы элементов

Рассмотрим систему из двух последовательно соединенных упругих элементов, схема которой приведена на рис. 4.

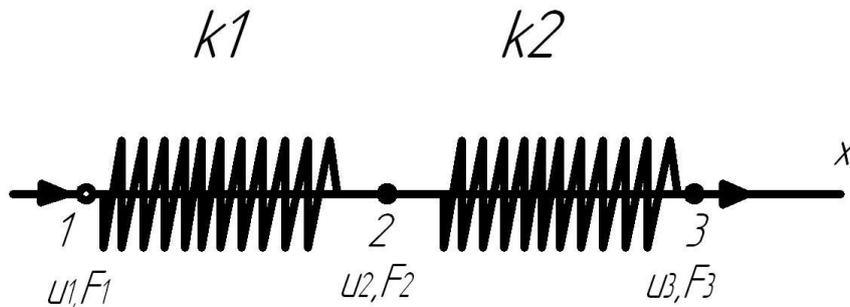


Рис. 4. Система упругих элементов

Для элементов 1 и 2, согласно (1), можно записать:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^2 \\ f_3^2 \end{pmatrix}$$

Здесь f_1^m – внутренняя сила, действующая на 1-й узел элемента.

Для составления матрицы жесткости системы элементов рассмотрим равновесие сил действующих на каждый из узлов:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 u_1 - k_1 u_2 && \text{(узел 1)} \\ F_2 &= -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 && \text{(узел 2)} \\ F_3 &= -k_2 u_2 + k_2 u_3 && \text{(узел 3)} \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad \text{или } \underline{ku} = \underline{f}, \quad (2)$$

где k – матрица жесткости системы элементов.

Из условий равновесия ясно, что если в узле нет внешней силы (или реакции опоры) то для него $F = 0$. Одновременно укажем, что сумма сил в столбце F уравнений (2) равна нулю.

Для наглядного представления о способе получения матрицы жесткости системы элементов, в приведенном выше матричном уравнении пунктирными линиями выделены матрицы жесткости 1 и 2 упругих элементов в отдельности. Видно, что так же, как и элементы в конструкции, матрицы жесткости элементов «сцеплены» в общем узле 2. Таким образом, главные диагонали матриц жесткости элементов совпадают с главной диагональю общей матрицы жесткости. Видно, что на диагонали стоят суммы жесткостей элемента примыкающих к данному узлу.

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1: Для показанной на рис. 5 системы трех последовательно соединенных упругих элементов дано: $k_1 = 200 \text{ Н/мм}$; $k_2 = 200 \text{ Н/мм}$; $k_3 = 100 \text{ Н/мм}$; $P = 500 \text{ Н}$; $U_1 = U_4 = 0$. Определить: а) глобальную матрицу жесткости; б) смещения узлов 2 и 3; в) реакции опор; г) усилие в элементе 2.

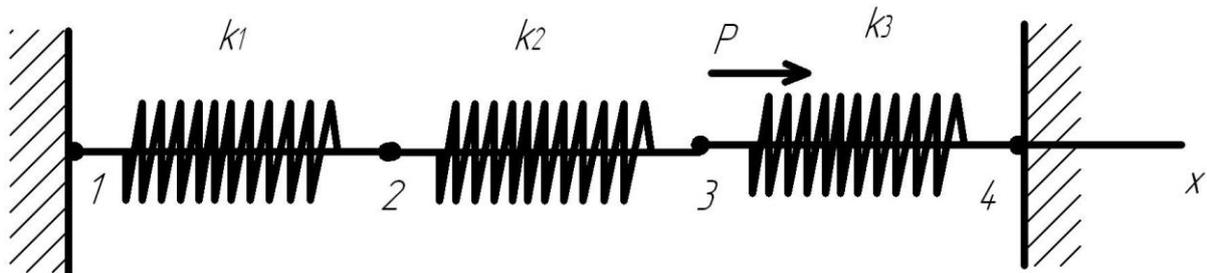


Рис. 5. Схема линейных конечных элементов

Решение: А. Запишем матрицы жесткости для каждого из элементов в отдельности:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} && \text{Н/мм} \\
 k_2 &= \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} && \text{Н/мм} \\
 k_3 &= \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} && \text{Н/мм}
 \end{aligned}$$

Применяя принцип суперпозиции (сложения), получим глобальную матрицу жесткости:

$$K = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Заметим, что полученная матрица является симметричной и ленточной.

Уравнением равновесия в матричной форме для всей системы конечных элементов будет:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Б. Для того, чтобы учесть в этом уравнении граничные условия ($u_1 = u_4 = 0$), вычеркиваем 1 и 4 строчку и столбец. Тогда получим:

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$$

Решение этого уравнения дает:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ мм.}$$

В. Реакции опор находим из первого и четвертого уравнений в (3):

$$F_1 = -100u_2 = -200 \text{ Н}, F_4 = -100u_3 = -300 \text{ Н}.$$

Г. Конечно-элементным уравнением для элемента 2 будет:

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \end{pmatrix}$$

Здесь для элемента 2 $i = 2, j = 3$. Тогда силу, действующую на элемент 2, можно вычислить следующим образом:

$$F = f_3 = -f_2 = [-200 \quad 200] \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = [-200 \quad 200] \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 200 \text{ Н}$$

Задача решена полностью.

Пример 2: для показанной на рис. 7 системы линейных конечных элементов построить глобальную матрицу жесткости.

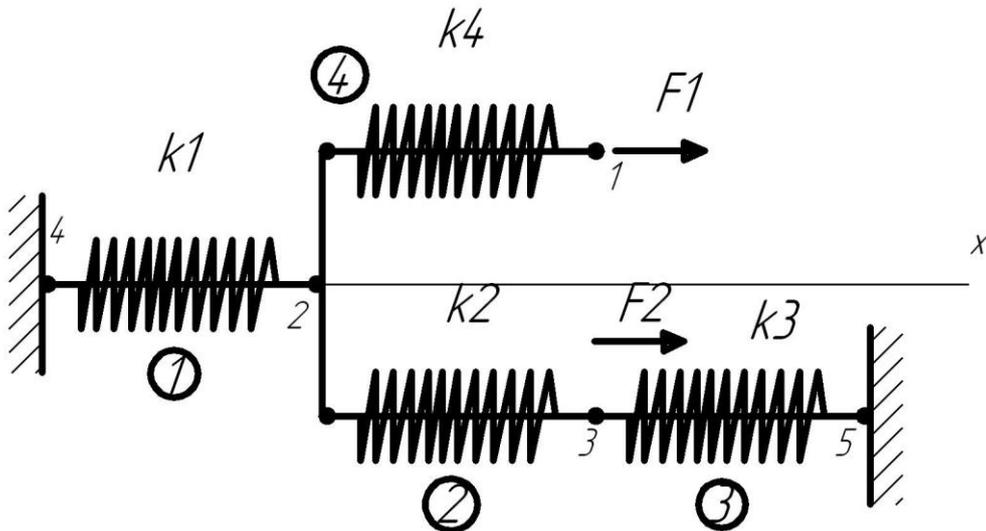


Рис. 6. Схема системы линейных конечных элементов

Решение: составим таблицу связи локальных и глобальных номеров узлов элементов:

Таблица 1

Элемент	Узел i	Узел j
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

Теперь мы можем составить матрицы жесткости для каждого элемента, указав при этом, перемещения каких узлов они связывают.

$$k_1 = \begin{matrix} & u_4 & u_2 \\ u_4 & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad k_2 = \begin{matrix} & u_2 & u_3 \\ u_2 & \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \\ u_3 & & \end{matrix}$$

$$k_3 = \begin{matrix} & u_3 & u_5 \\ u_3 & \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \\ u_5 & & \end{matrix} \qquad k_4 = \begin{matrix} & u_2 & u_1 \\ u_2 & \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \\ u_1 & & \end{matrix}$$

После этого, используя принцип суперпозиции, составим глобальную матрицу жесткости для системы элементов (то есть складываем значения в одноименных узлах). Например, в первом элементе k_1 есть узел u_2 - u_2 со значением k_1 и во втором элементе есть узел u_2 - u_2 со своим значением k_2 . Также такой узел есть и в четвертом элементе. Как видно из глобальной матрицы жесткости, в узле u_2 - u_2 их значения складываются, и мы получаем $k_1+k_2+k_4$:

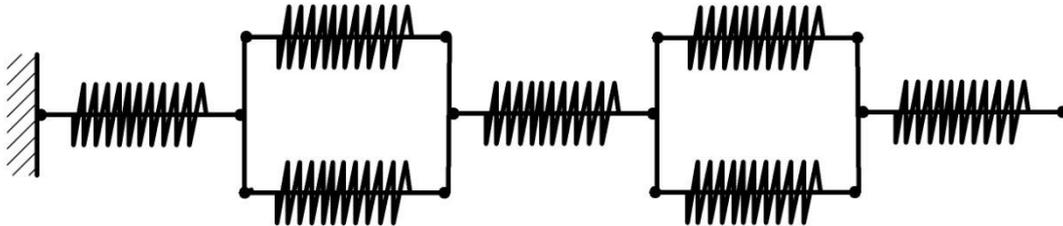
$$K = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1+k_2+k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является ленточной и симметричной. Задача решена.

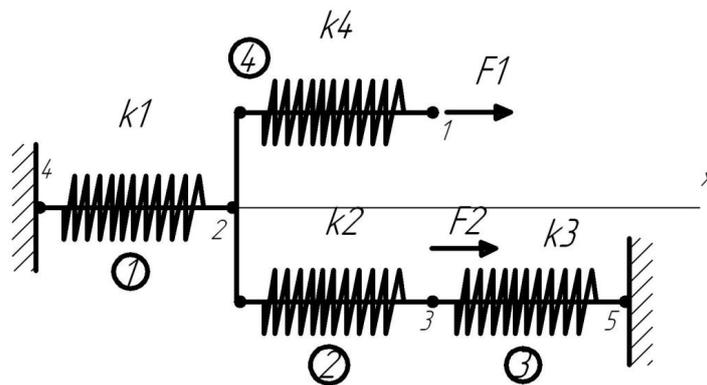
Заметим, что в приведенных выше зависимостях и примерах длина элементов не участвовала.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с теоретическими положениями.
2. Выбрать систему из семи линейных упругих конечных элементов из приложения 1. Например:



3. Пронумеровать узлы, упругие элементы и приложить усилия, как показано в примере 2.



4. Составить таблицу локальных и глобальных номеров узлов элементов.

Элемент	Узел i	Узел j
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

5. Составить матрицы жесткости для всех отдельных элементов.

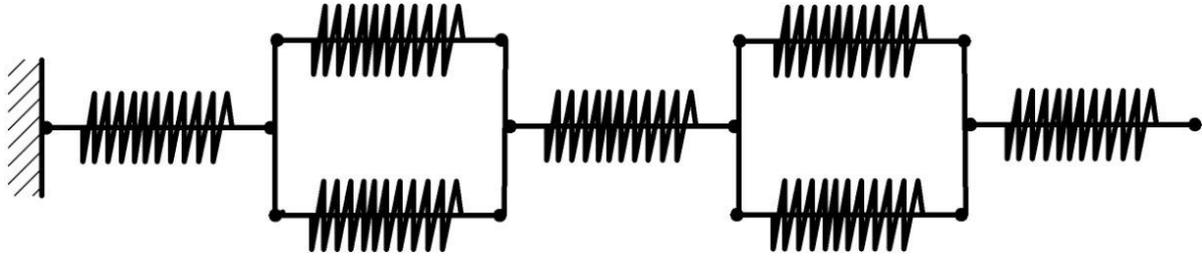
$$k_1 = \begin{matrix} u_4 & u_2 \\ u_4 & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \\ u_2 & \end{matrix}$$

6. Составить матрицу жесткости для системы упругих элементов.

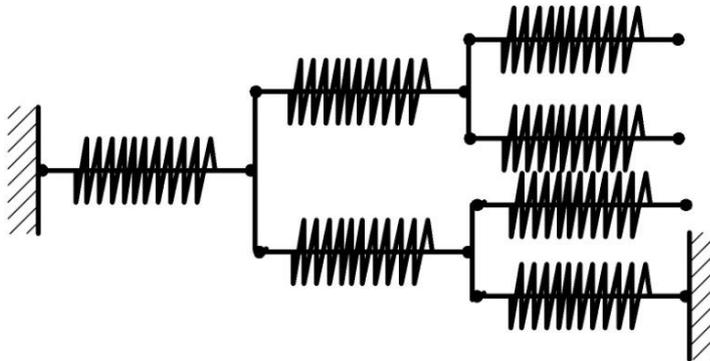
$$K = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1+k_2+k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

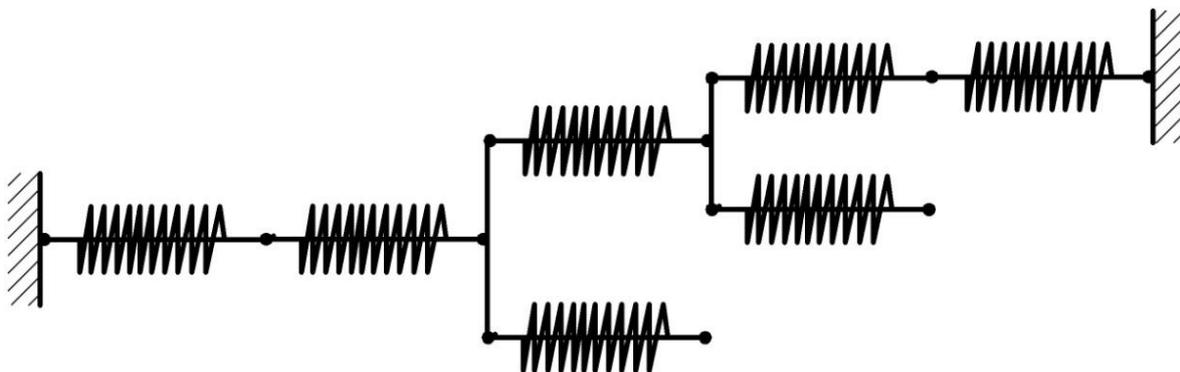
1.



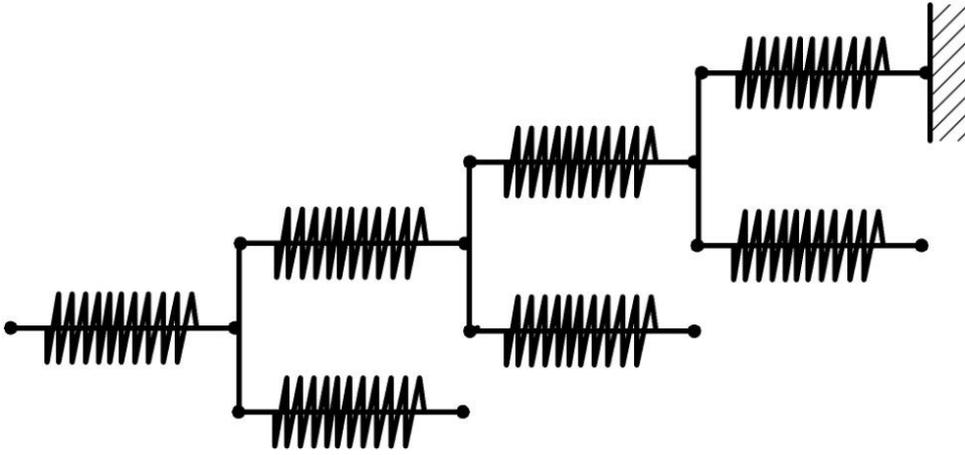
2.



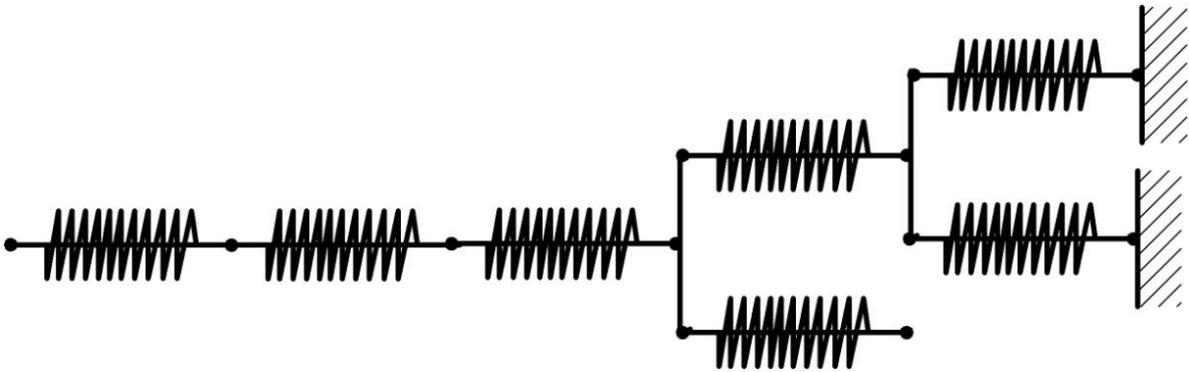
3.



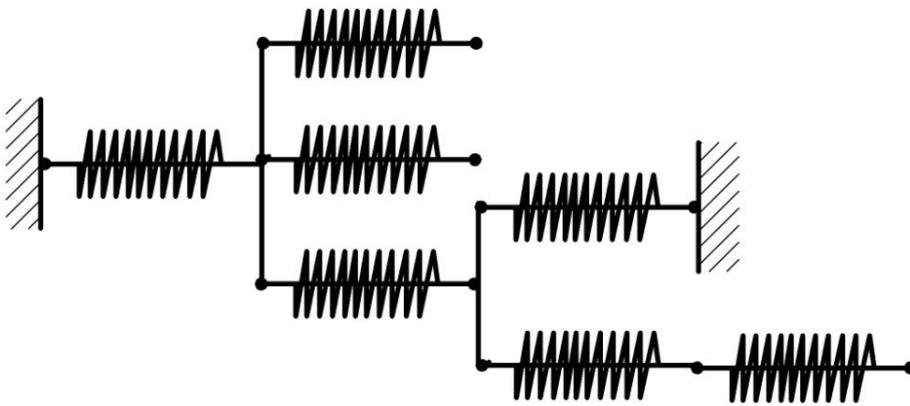
4.



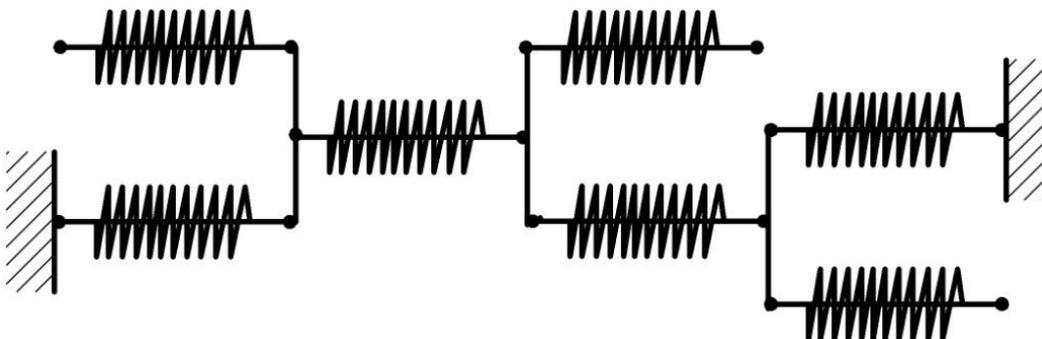
5.



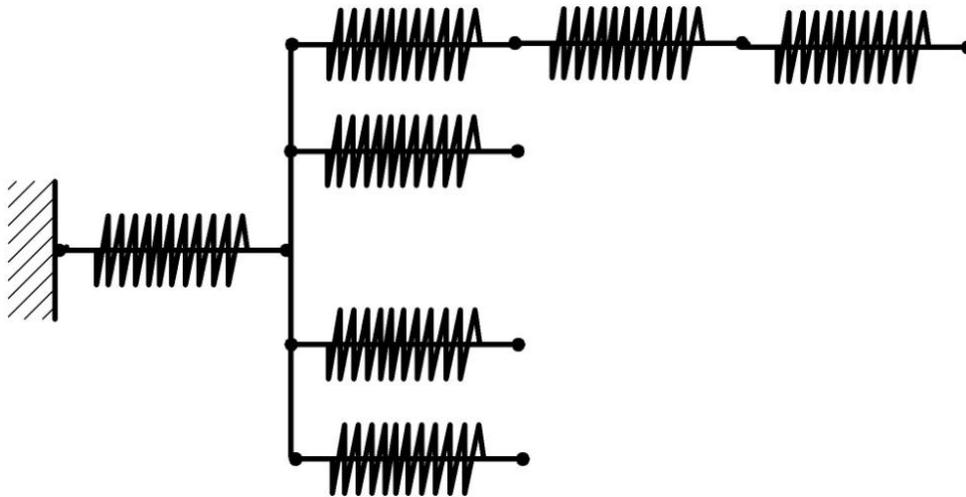
6.



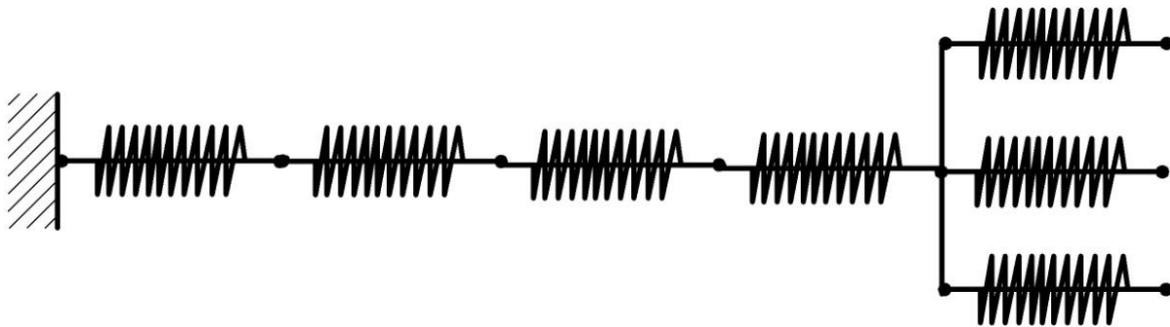
7.



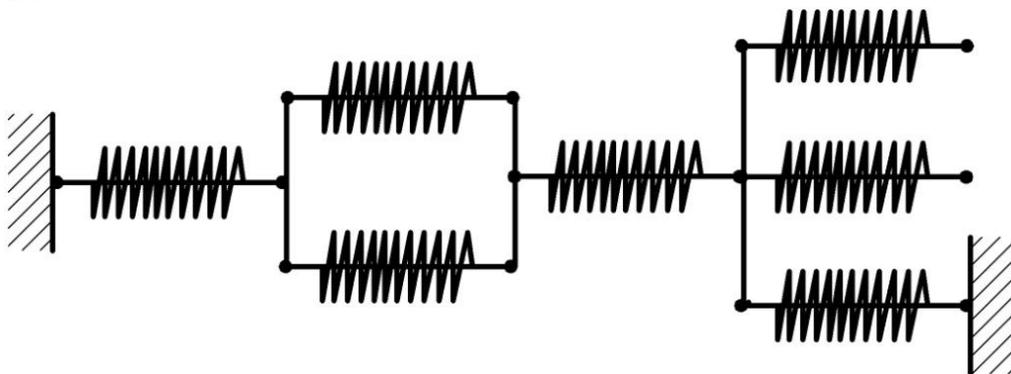
8.



9.



10.



Нумерацию элементов и узлов, а также приложение и направление сил выполнить самостоятельно.

6. СОДЕРЖАНИЕ И ФОРМА ОТЧЕТА

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Выбранную систему упругих линейных элементов.
3. Матрицы жесткости отдельных элементов.
4. Общую глобальную матрицу жесткости системы упругих элементов.

Список рекомендуемой литературы

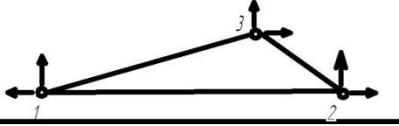
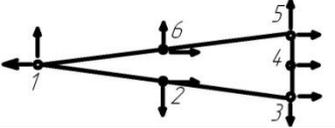
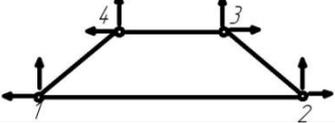
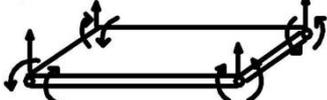
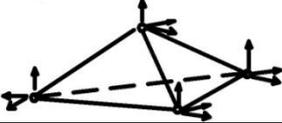
1. Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах. – Москва: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.

2. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

3. Чигарев А. В. Ansys для инженеров: справ. пособие / А. В. Чигарев, А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк. – Москва: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.

Приложение 1

Типы конечных элементов

Название элемента	Форма элемента	Возможное применение для анализа	Число степеней свободы
Стержень		Стержни, фермы	2
Балка		Балки, рамы, стержни	6
Плоский треугольник		Плоская задача	6
Треугольник с 6 узлами		Плоская задача	12
Плоский прямоугольник		Плоская задача	8
Треугольная пластина		Изгиб плит	9
Прямоугольная пластина		Изгиб плит, оболочек	12
Тетраэдр		Объемная задача	12
Треугольник в полярных координатах		Плоская задача	6