Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра технологии машиностроения

Составитель
М. С. Махалов

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «CALS- и CASE-технологии в машиностроении» и «Жизненный цикл изделий машиностроения»

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки 15.04.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств в качестве электронного издания для использования в учебном процессе

Кемерово 2019

Рецензенты

Кречетов А. А. – кандидат технических наук, доцент кафедры технологии машиностроения

Клепцов А. А. – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой технологии машиностроения

Махалов Максим Сергеевич

Метод конечных элементов в инженерных расчетах: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам **«CALS- и CASE-технологии в машиностроении» и «Жизненный цикл изделий машиностроения»** [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 15.04.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств всех форм обучения / сост.: М. С. Махалов; КузГТУ. – Кемерово, 2019.

В методических указаниях изложен материал для выполнения практических работ по дисциплинам «CALS- и CASE-технологии в машиностроении» и «Жизненный цикл изделий машиностроения».

1. Введение

Практические занятия проводятся с целью освоения и закрепления методов экспериментального исследования, а также приобретения навыков самостоятельной постановки научного исследования по теме учебной исследовательской работы.

Описание практических работ дается в сжатом виде, так как их содержание тесно увязано с содержанием лекций и лабораторных работ, выполняемых студентами по другим учебным дисциплинам.

По результатам выполнения практической работы необходимо составить и оформить отчет в соответствии с требованиями ГОСТ 2.105–95. Оформленный отчет студент сдает для проверки преподавателю перед началом следующего практического занятия.

2. Содержание практических занятий

Работа № 1

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ (НДС). СЛОЖНОЕ НДС. МОДЕЛИРОВАНИЕ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Напряженно-деформированное состояние

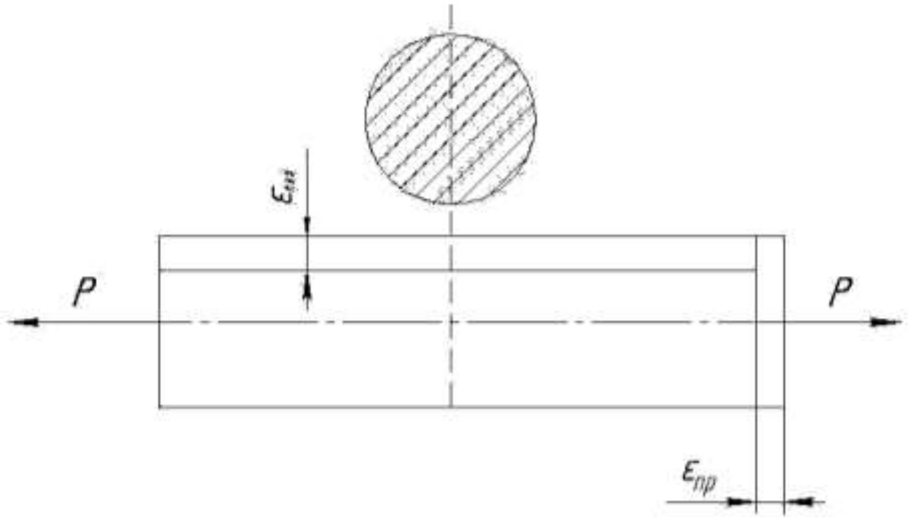


Рис. 1.

Напряжение – удельные внутренние силы, возникающие в теле при приложении внешних нагрузок.

$$\sigma = \frac{P}{F},$$

где P – приложенная сила; F – площадь.

Деформация изменение формы или размеров тела под действием внешних нагрузок.

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

где l – конечный размер; l_0 – первоначальный размер.

Деформация бывает упругой и пластической. Упругая деформация исчезает при снятии нагрузки. Пластическая деформация не исчезает при снятии нагрузки.

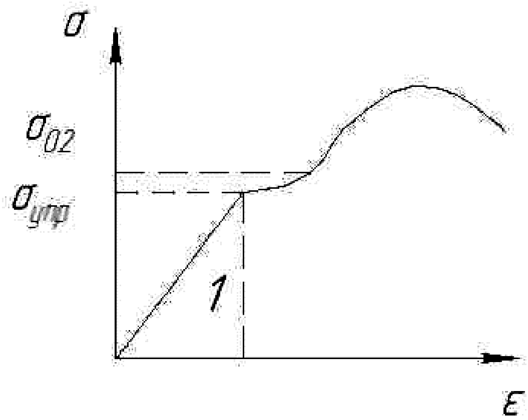


Рис. 2.

Предел упругости ($\sigma_{упр}$) – максимальное напряжение, при котором возникает упругая деформация.

Предел текучести ($\sigma_{02}(\sigma_{т})$) – напряжение при котором начинается пластическое течение металла.

Для расчета реальных конструкций используется область 1 на кривой течения.

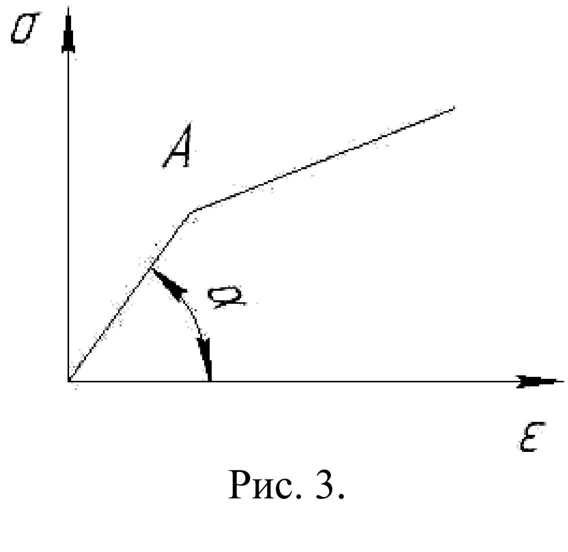


Рис. 3.

Прямолинейный участок упругой деформации 0-А расположен под некоторым углом α. Чем больше этот угол тем меньше возникающая деформация при одном и том же уровне напряжения. Этот угол характеризует модуль упругости первого рода материала (модуль Юнга) (E):

$$E = tg\alpha .$$

На участке 0-А напряжение и деформация связываются между собой соотношением:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon .$$

Для стали 45 модуль Юнга E составляет $2 \cdot 10^{11}$ Па.

При растяжении помимо продольных деформаций возникают и поперечные, так как объем тела не изменяется. Отношение поперечной деформации к продольной оценивается с помощью коэффициента Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon_{поп}}{\varepsilon_{пр}} .$$

Сложное напряженно-деформированное состояние (НДС)

Под действием внешних сил на реальное тело в нем как правило возникает сложное НДС (напряжения и деформации возникают по всем трем координатам).

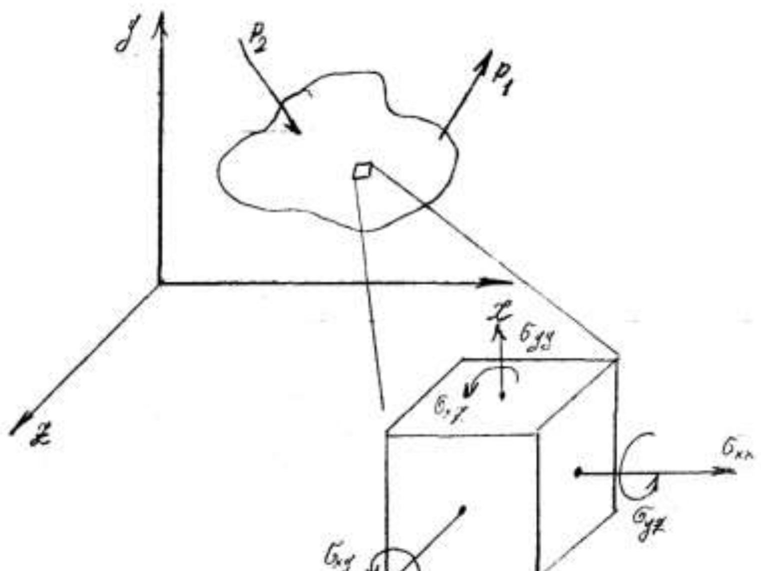


Рис. 4

$\sigma_{yy};\sigma_{xx};\sigma_{zz}$ – нормальные напряжения (на растяжение);

$\sigma_{xz};\sigma_{yz};\sigma_{xy}$ – касательные напряжения (на поворот граней);

$\varepsilon_{yy};\varepsilon_{xx};\varepsilon_{zz}$ – нормальные деформации (на растяжение);

$\varepsilon_{yy};\varepsilon_{xx};\varepsilon_{zz}$ – касательные деформации (на поворот граней);

Совокупность напряжений и деформаций образует тензоры напряжений и деформаций.

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}; \quad T_\sigma = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

При изменении положения кубика компоненты тензоров изменяются.

Существуют собственные значения тензоров, которые не изменяются при изменении положения кубика: интенсивность напряжений и деформаций.

$$\sigma_i = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{3}; \quad \varepsilon_i = \frac{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}{3}.$$

Моделирование

При проектировании конструкции необходимо оценить ее сопротивление внешним воздействиям и исходя из этого выбрать материал, форму и размеры конструкции. Для этого всегда создается модель прочностной надежности элементов конструкции.

Модель – система представлений зависимости условий и ограничений, описывающих исследуемый процесс или явление. Модель представляет собой отображение объективной реальности и может иметь различную структуру и форму представления.

Надежность – это свойство изделия выполнять свою функцию в заданных пределах в течение заданного промежутка времени.

Прочностная надежность – это отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми формациями.

Основной мерой надежности является вероятность безотказной работы. Другой величиной оценки надежности является запас прочности:

$$n = \frac{P_{кр}}{P_{\max}},$$

где n – коэффициент запаса прочности; P – какой-либо эксплуатационный параметр (действующее усилие, давление, возникающие напряжения и т. д.); $P_{кр}$ – критическое значение, приводящее к отказу; $P_{\max}$ – максимальное значение, возникающее в процессе эксплуатации. Принимают n в зависимости от характера нагрузок обычно от 1,3 (статическое нагружение) до 5 и более (динамическое сложное нагружение).

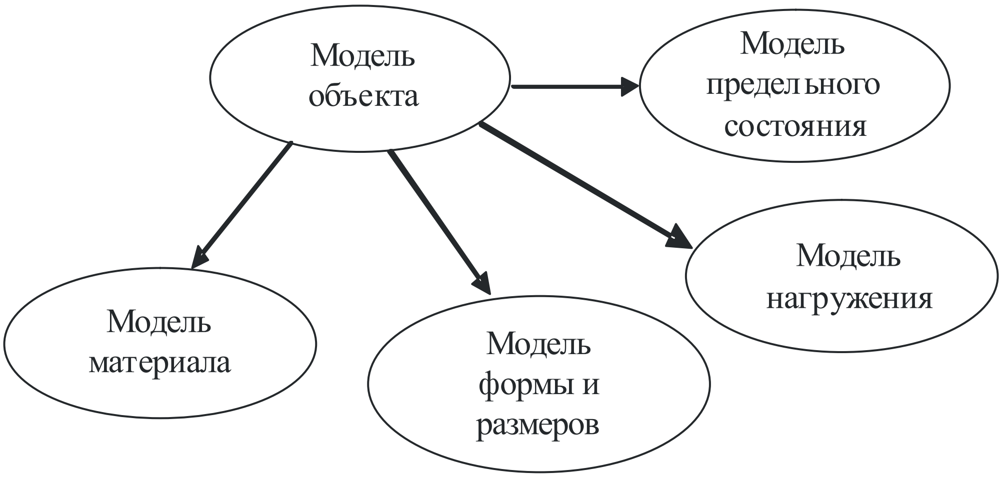


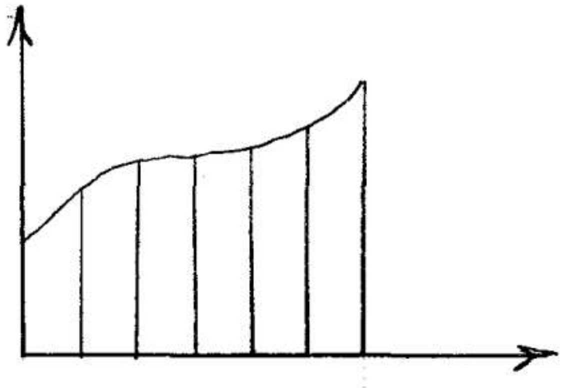
Рис. 5.

1. Модель материала. В основном используется модель однородного тела. Применяется **изотропная модель –** свойства материала постоянны (пример – металл); **ортотропная модель** – характеристики свойств материала различаются по осям, но не изменяются (пример – дерево); **анизотропная модель –** свойства разные и изменяются по координатным осям (пример – бетон).
2. Модель формы и размеров. В модель включаются только характерные размеры и элементы.
3. Модель нагружения – учитываются только характерные нагрузки.
4. Модель предельного состояния. Предельное состояние – состояние, при котором дальнейшая эксплуатация не возможна.

Аналитические и численные методы моделирования

Аналитические методы – методы, основанные на математических методах решения краевых задач.

Численные методы основаны на разбиении всей области задачи на подзадачи и совместное решение этих подзадач.



$$F = \int_0^x y(x)dx$$ – аналитическое решение

$$F = \sum f_{mp}$$ – численные методы

Рис. 6.

Аналитические методы дают точное решение, однако для сложных случаев аналитического решения не существует.

Численные методы дают приближенное решение, однако ограничение на сложность задачи отсутствует (с определенными оговорками).

Численные методы для оценки прочностной надежности:

1. Метод конечных разностей для решения систем дифференциальных уравнений, частных производных.
2. Метод граничных интегральных уравнений. Для решения систем интегральных уравнений.
3. Метод граничных элементов.
4. Метод конечных элементов.

Численные методы являются единственно возможным средством решения задач со значительными геометрическими и физическими нелинейностями, так как такие задачи требуют интегрального решения.

Основное уравнение теории упругости

В результате воздействия на тело внешних нагрузок и температуры его точки перемещаются относительно друг друга в новое положение. В этом случае вектор перемещений точек для трехмерной задачи записывается следующим образом:

$$U = \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}.$$

Для двумерной задачи:

$$U = \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix}.$$

Разность перемещений двух соседних точек вызывает деформации в материале и связанные с ними напряжения. В общем случае деформации и напряжения в материале состоят из 6 элементов.

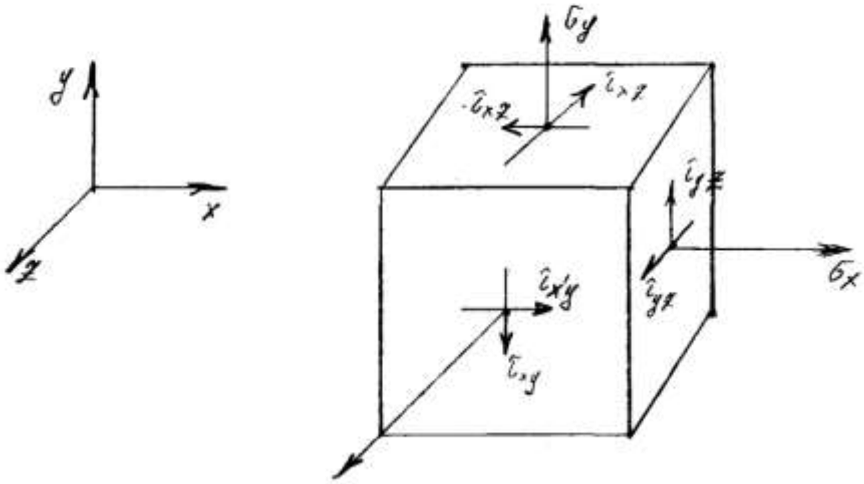


Рис. 7.

Работа № 2

ПЛОСКИЕ ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ, ДЕФОРМАЦИЯМИ И ТЕМПЕРАТУРАМИ. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И СМЕЩЕНИЯМИ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

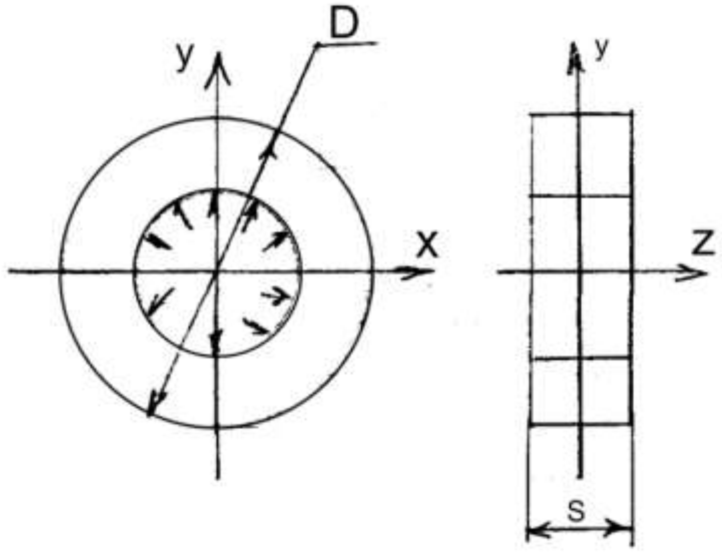
Плоские двумерные задачи

Это частный случай НДС. Использование такой постановки позволяет значительно упростить решение задачи при небольших погрешностях.

Существует 2 варианта:

1) Плоско-напряженное состояние – это случай, когда $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$; $(\varepsilon_z \neq 0)$ – поперечная деформация.

Пример:



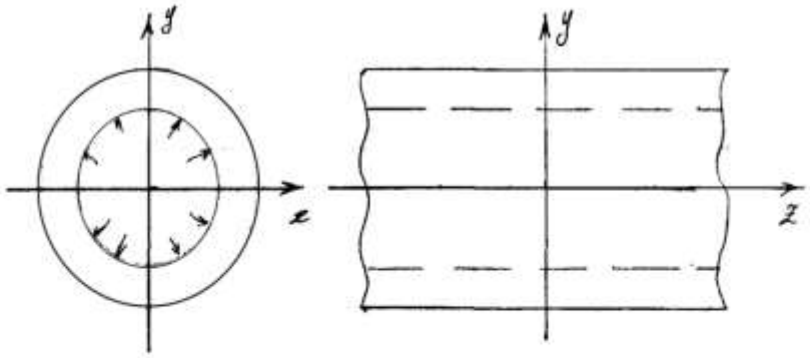
S<<D

Рис. 8.

Такое кольцо постоянной толщины, нагружено внутренним давлением.

2) Плоско-деформированное состояние $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$; $(\sigma_z \neq 0)$.

Пример:



S>>D
Рис. 9.

Длинный толстостенный цилиндр с постоянной площадью сечения находящийся под действием постоянного по оси Z внутреннего давления.

Основные соотношения между напряжениями, деформациями и температурами

Деформация определяется по напряжению:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/E & -\mu/E & 0 \\ -\mu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix},$$

$$[\varepsilon] = [E]^{-1}[\sigma] + [\varepsilon_0],$$

где E – Модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; ε_0 – начальные деформации; G – модуль сдвига (модуль упругости 2-го рода):

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Анализ зависимости показывает, что в упругой области для однородных изотропных материалов существует всего 2 характеристики материала.

Напряжения определяются по деформациям в случае плоско-деформированного состояния.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{1-\mu}\!/_{2} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \right).$$

В сокращенном виде:

$$[\sigma] = [E][\varepsilon] + [\sigma_0],$$

где σ_0 – начальные напряжения

$$\sigma_0 = -[E][\varepsilon_0].$$

Для плоско-деформированного состояния необходимо заменить входящие в матрицы величины на следующие:

$$E \to \frac{E}{1-\mu^2},$$

$$\mu \to \frac{\mu}{1-\mu},$$

$$G \to G,$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{(1-2\mu)(1+2\mu)} \begin{vmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & {}^{1-2\mu}\!/_{2} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \right).$$

Выражение для определения температурных деформаций (в зависимости от изменения температуры):

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{vmatrix},$$

где α – коэффициент температурного расширения; ΔT – изменение температуры.

Нормальные температурные деформации равны между собой. Касательные температурные деформации равны нулю. Если вследствие нагрева тело расширяется свободно, температурных напряжений не возникает.

Соотношение между деформациями и смещениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}.$$

Эти соотношения справедливы только для малых перемещений и деформаций:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix},$$

$$[\varepsilon] = [D][U].$$

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0,$$

где f_x, f_y – объемная сила на единицу объема, приложена ко всему объему тела. Например, сила тяжести.

Граничные условия

Описывают, каким образом нагружается тело.

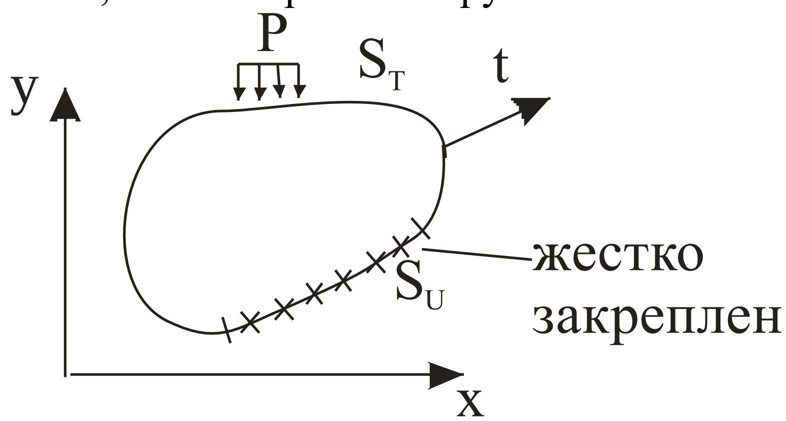


Рис. 10.

Граничные условия записываются:

$$u_x = u_y = 0 \text{ на } S_u;$$
$$\text{P, t на } S_t.$$

В методе конечных элементов все виды нагрузок (объемные силы, распределенные нагрузки) приводят к сосредоточенным нагрузкам – силам, действующим в узлах конечно-элементной модели.

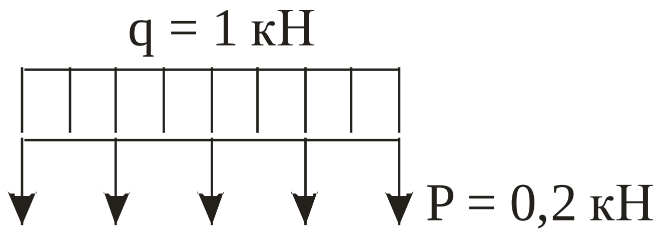


Рис. 11.

Работа № 3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РЕАЛИЗАЦИИ МКЭ. ПРИЛОЖЕНИЕ МКЭ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ (КЭ). СООТНОШЕНИЕ СТОРОН ЭЛЕМЕНТОВ

Основные понятия метода конечных элементов (МКЭ)

С математической точки зрения, МКЭ представляет собой вариационно-разностный метод решения систем дифференциальных уравнений (ДУ). Иногда этот метод называют методом поиска функционала по взвешенным невязкам.

Метод возник в 50-е годы XX века. Вначале применялся для решения строительных задач упругой постановки. В дальнейшем было доказано, что с помощью метода можно решать почти любые системы ДУ. После этого, метод стал применяться для расчета аэро- и гидродинамических задач, тепловых задач, электромагнитных и специальных.

В процессе решения формируются очень большие матрицы, поэтому широкое распространение этот метод получил с развитием ЭВМ.

Основные этапы реализации МКЭ

I. Область определения непрерывной величины, распределение которой надо найти, разбивается на конечное число подобластей, которые называются элементами. Эти элементы имеют общие точки (узлы) и в совокупности аппроксимируют форму области.

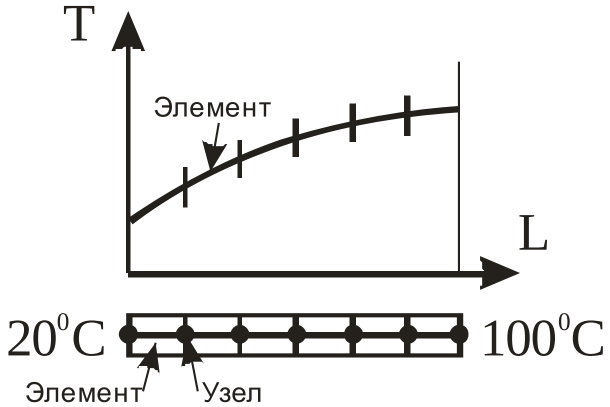


Рис. 12.

II. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми или просто узлами. Узел – общая точка для соседних элементов.

III. Значение искомой непрерывной величины в каждой узловой точке условно считается известным.

IV. Используя значение искомой непрерывной величины в узловых точках и задавая аппроксимирующую функцию в пределах элемента, можно вычислить значение в любой точке.

V. Формируется система уравнений, в которую входят уравнения распределения искомой величины и граничные условия. Решения производятся таким образом, чтобы минимизировать значения некоторой целевой функции, которая связана с физической сущностью задачи.

В результате решения будут получены значения только в узлах модели. Чтобы рассчитать значения в элементе, задаются аппроксимирующей функцией и рассчитывают значение по этой функции. Например, линейная аппроксимация:

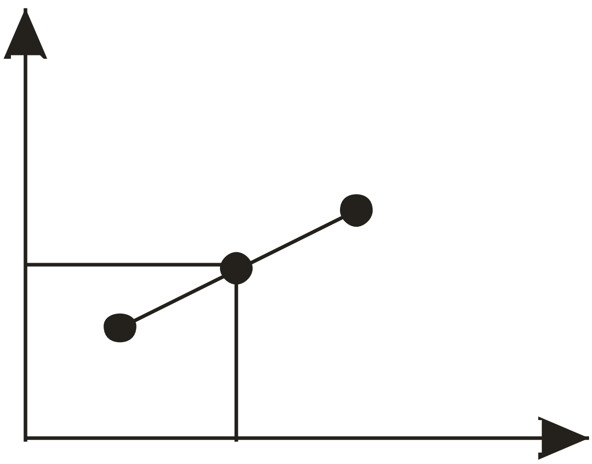


Рис. 13.

Аппроксимирующая функция может быть еще и полиномной. В задачах механики, в которых определяются напряжения, деформации и перемещения, минимизируется потенциальная энергия деформируемого тела. В реальном теле количество точек бесконечно. Это осложняет использование численных методов теории упругости. Использование конечных элементов представляет собой попытку преодоления этой трудности путем разбиения сплошного тела на отдельные элементы, взаимодействующие между собой только в узловых точках.

Приложение МКЭ к задачам механики

В соответствии с положениями метода, модель конструкции сложной формы подразделяется на простые составляющие (конечные элементы). Решение получается в узлах конечно-элементной модели.

Основные этапы реализации МКЭ применительно к задачам механики:

1. Анализ задачи

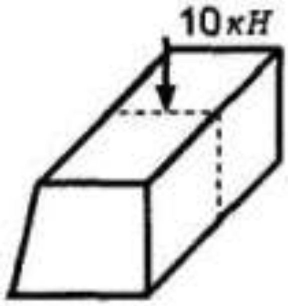


Рис. 14.

2. Построение геометрии конечно-элементной модели

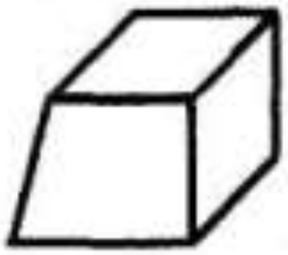


Рис. 15.

3. Разбиение модели на конечные элементы

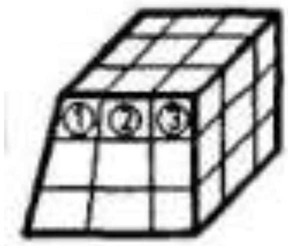


Рис. 16.

4. Приложение ограничений и нагрузок

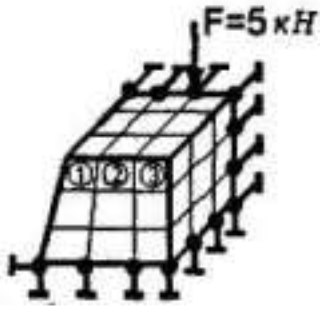


Рис. 17.

5. Составление и решение систем уравнений:

$$[\Delta]=[k]^{-1}[F];$$

$$\varepsilon=\frac{\partial x}{\partial y},\ G=E\cdot\varepsilon.$$

Сначала рассчитываются перемещения узлов (Δ), затем деформации, затем напряжения. Как правило, этот этап в современных системах полностью автоматизирован.

6. Анализ полученных результатов.

Наиболее трудоемким является этап создания геометрии конечной модели.

Неизвестными, при решении задач механики, являются перемещения в узлах.

В трехмерных задачах каждый узел имеет 3 степени свободы, а с учетом поворотов все 6.

В системе уравнений равновесия количество уравнений должно совпадать с количеством неизвестных. Поэтому размерность матриц может достигать 100000 и более, однако современные программы могут достаточно быстро решать такие системы.

Конечные элементы (КЭ)

Конечно-элементная модель состоит из конечных элементов. Соседние элементы имеют общие узлы. Силы действуют в узлах. Там же определяются перемещения, деформации и напряжения. В общем случае, конечный элемент не является жестким телом. Иными словами, его точки могут перемещаться под действием нагрузок.

Существует несколько типов КЭ. Каждый из них предназначен для определенного вида нагрузки:

1) брус, предназначен для случаев, когда в линейном элементе $l >> F$ (F – поперечное сечение, l – длина). В линейном элементе присутствует только сжатие или расширение, изгиб не учитывается. Этот тип подходит для расчета ферм или стрежневых конструкций, загруженных стержневой силой.

2) стержень, применяется для случаев, где необходимо учитывать изгиб. Одно из применений – расчет балок.

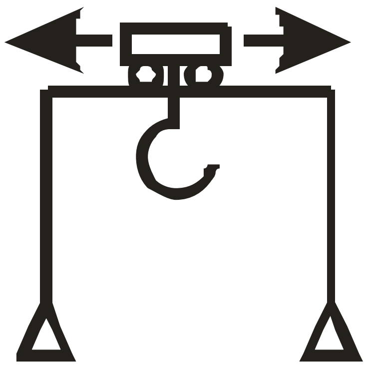


Рис. 18.

3) тонкая пластина или оболочка. Применяется для моделирования тонколистовых конструкций. Как правило, отсутствует деформация в направлении, перпендикулярном листу. Существуют многочисленные оболочковые элементы.

4) двумерное или трехмерное тело. Предназначено для расчета общих задач.

Все вышеперечисленные элементы можно смоделировать с помощью твердотельных элементов, однако это наиболее ресурсоемкая задача.

Специальные виды КЭ: точечные – для задания сосредоточенной массы; вязко-пластичные – для решения задач пластичного течения; контактные элементы – для моделирования контакта.

Точность решения МКЭ определяется рядом факторов. Одним из основных является размер КЭ. Чем меньше размер, тем точнее решение. Если на участке модели напряжения и деформации меняются незначительно, то размер элемента на этом участке на точность решения большого значения не оказывает.

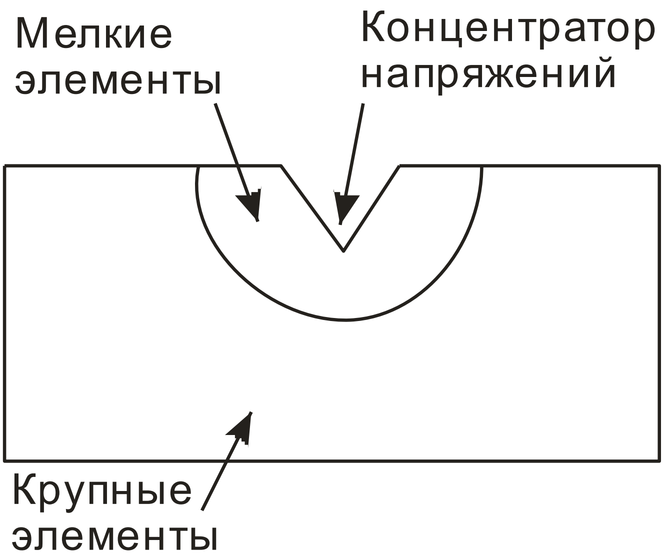


Рис. 19.

В случае значительных градиентов деформации, большой размер элементов может привести к неправильному решению.

Конечные элементы могут быть линейными или параболическими. Линейные элементы – элементы первого порядка, параболические – второго.

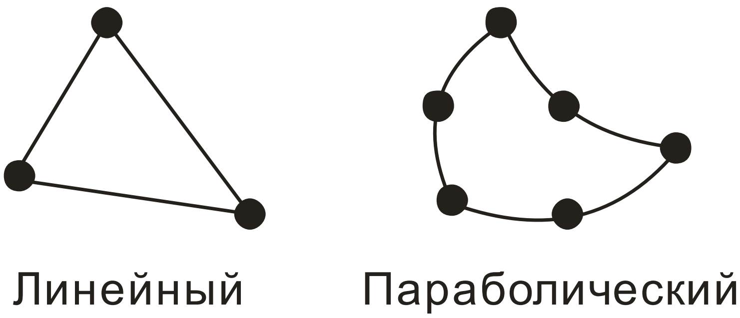


Рис. 20.

Линейные элементы имеют прямые стороны и узлы только в углах. Для двумерного случая, минимальное количество узлов – 3, для трехмерного – 4.

Элементы второго порядка могут иметь промежуточный узел на каждой из сторон. Элементы второго порядка позволяют более точно аппроксимировать форму поверхности и, как правило, дают более точное решение. Однако, использование параболических элементов более ресурсоемко.

Для расчета смещений необходимо вектор сил умножить на матрицу жесткости. В каждом узле существует 3 степени свободы. Значит для 8 узлов матрица жесткости будет иметь размер 24×24:

$$[k] = \begin{vmatrix} k_{11}...k_{124} \\ .... \\ k_{241}...k_{2124} \end{vmatrix}.$$

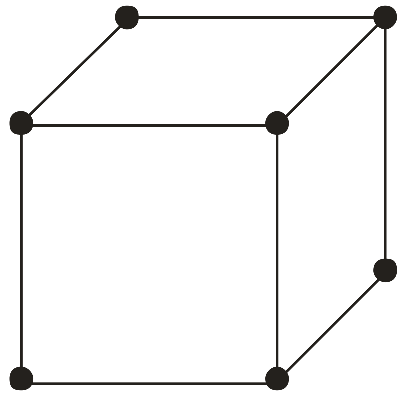


Рис. 21.

Компоненты матрицы жесткости обратно пропорциональны модулю упругости. Соответственно, нулевой или малый модуль упругости соответствует отсутствию КЭ. В этом случае деление на модуль Юнга приведет к значительным погрешностям. Поэтому таких случаев следует избегать. Бесконечно большой модуль Юнга означает, что данный элемент является абсолютно жестким.

Соотношение сторон элементов

Наиболее точное решение получается, если стороны элементов сопоставимы между собой. Элементы с соотношением сторон два и более (длинные) не дают точного решения особенно при значительных градиентах напряжений и деформаций. Если конструкция симметрична относительно некоторой оси, то она может быть решена с помощью плоских симметричных конечных элементов.

Работа № 4

РАЗБИЕНИЕ МОДЕЛИ НА КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ. СТЕРЖНЕВОЙ ЭЛЕМЕНТ. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Разбиение модели на конечные элементы

Точность и длительность решения зависит от правильности разбиения модели. В процессе автоматизированного разбиения тела на конечные элементы возможно построение либо свободной сетки или регулярной (mapped).

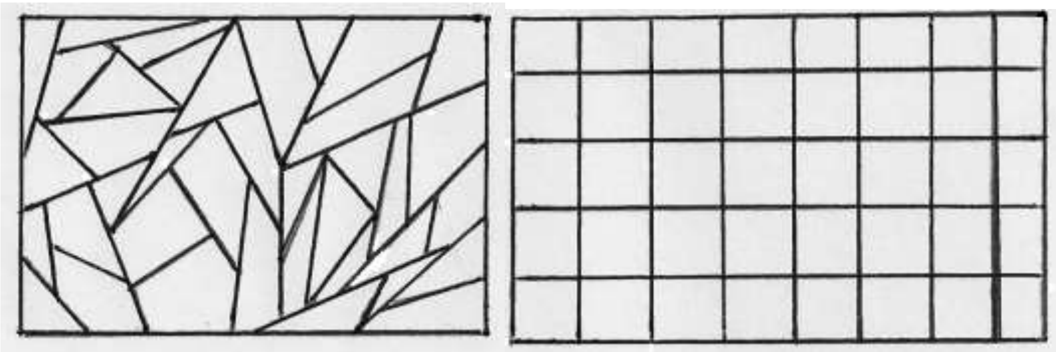


Рис. 22. Сетка свободная и регулярная

Регулярное разбиение дает более точные результаты, однако оно не всегда возможно. Необходимым условием является, то чтобы разбиваемая поверхность была ограничена 4-мя линиями. Чем меньше характерный размер элементов, тем больше количество элементов в модели, при этом время вычислений с ростом количества элементов экспоненциально растет. Ошибка решения уменьшается, но не до нуля. Это связано с ошибками округления, а так же с неустойчивостью численных алгоритмов решения системы.

Рекомендации по разбиению модели на конечные элементы:

1. Линейные элементы для получения сопоставимой точности требуют более частого разбиения, чем параболические элементы.

2. Упорядоченная сетка дает более точные результаты, чем не упорядоченная.

3. Сетка с прямоугольными элементами более предпочтительна, чем с треугольными элементами.

4. Сетка с промежуточными узлами треугольных элементов имеет не меньшую точность, чем сетка с элементами с 4-мя узлами.

5. Прямоугольная сетка с 8-ю узлами является более предпочтительной, чем треугольная сетка с промежуточными узлами.

6. В случае применения элементов с 2-мя промежуточными узлами не требует мелкой сетки.

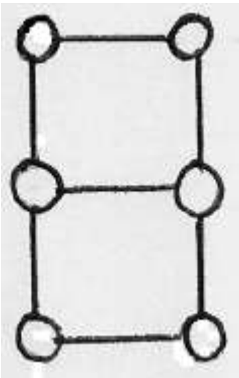


Рис. 23.

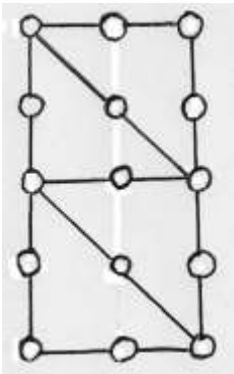


Рис. 24.

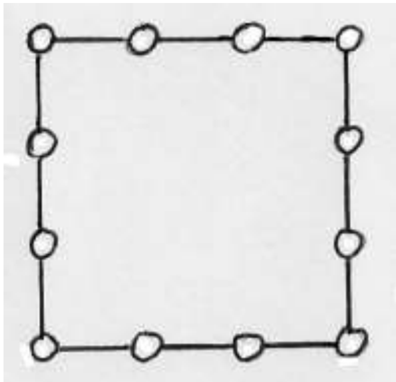


Рис. 25.

Следует отметить, что прямоугольники лучше треугольников.

МКЭ – это приближенный метод точность решения, которого зависит от правильного выбора типов и размеров конечных элементов.

На точность влияет не только размер элементов непосредственно около концентратора напряжения, но и соотношения размеров с соседними элементами.

Помимо размеров элементов большое влияние на точность оказывает форма конечного элемента. Элементы с приблизительно одинаковыми сторонами дают более точное решение, чем вытянутый элемент. При разбиении не допускается:

1. Несовпадение узлов элементов, то есть образование пустот.

2. Создание 4-узлового элемента с углами между сторонами более 180°.

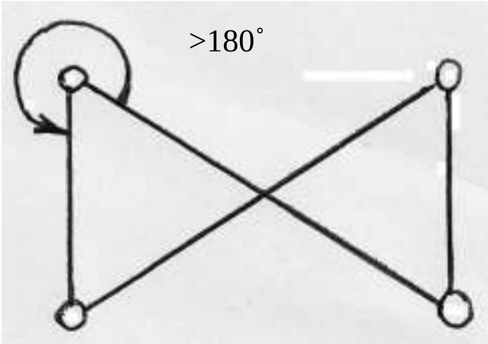
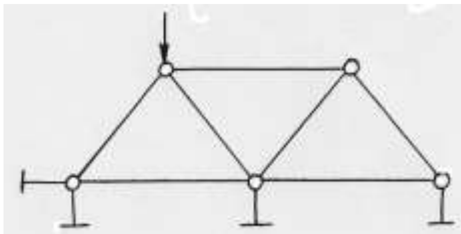


Рис. 26.

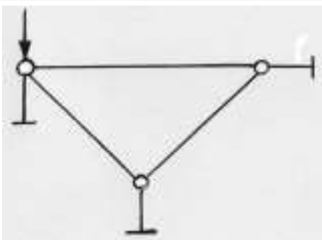
Граничные условия

Задание граничных условий является одним из главных условий получения корректного решения. Под граничными условиями понимаются все виды ограничений и нагружения модели. Ограничениями чаще всего являются перемещения (displasment). Нагрузки бывают точечными (сила и момент прикладываются в узлах), поверхностными (давление, конвекция и поток тепла прикладывается к поверхности) и объемные (температура и вес прикладываются ко всему объему тела). Не зависимо от типа нагрузки усилия рассчитываются только в узлах модели.

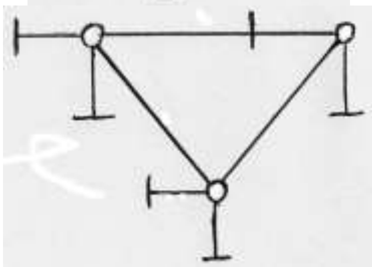
Максимальное количество граничных условий соответствует количеству степеней свободы для данного узла. Число граничных условий должно быть минимально необходимым.



В этом случае усилии совпадает с ограничением.



В данном случае все узлы закреплены, и задача лишена смысла.



В данном случае недостаточное ограничение модели. Возникает сдвиг модели по оси *X* вследствие ошибок округления.

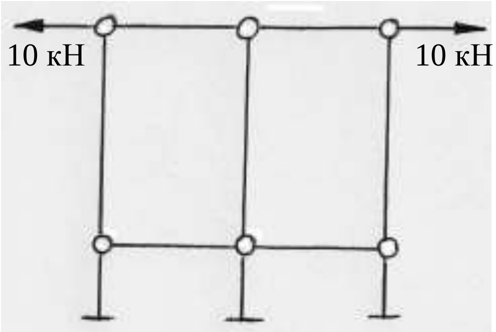
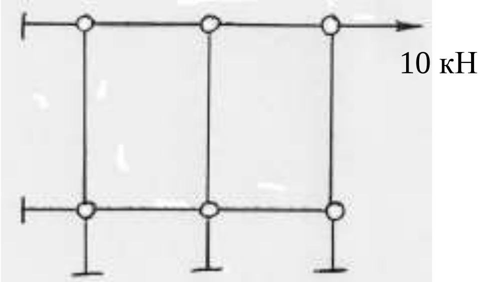
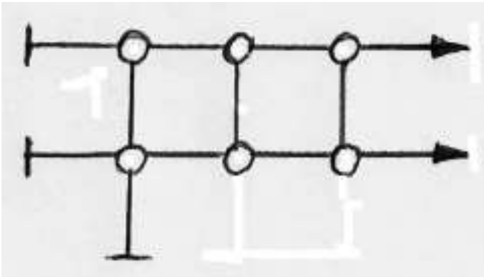


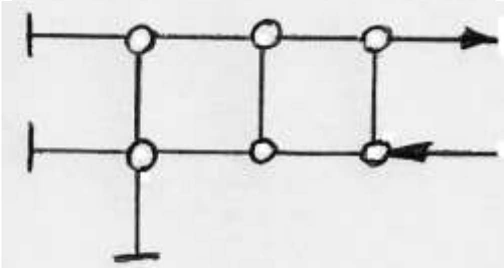
Схема размещения граничных условий зависит от вида нагружения.



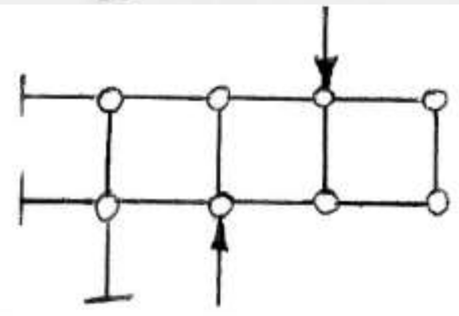
Растяжение



Изгиб



Сдвиг



В случае если моделируемая задача имеет плоскость симметрии, можно ограничиться рассмотрением части модели относительно плоскостей симметрии.

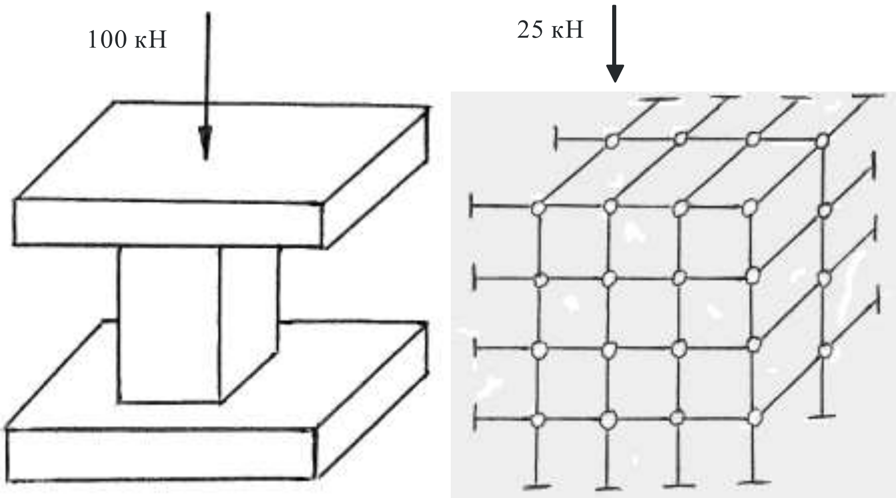


Рис. 27.

Точность решения

МКЭ как любой численный метод требует идеализации расчетной задача, что приводит к погрешностям решения. Как правило, ошибки МКЭ незначительны, однако в некоторых случаях возможны существенные ошибки. При построении модели необходимо четко представлять:

1)к какой области анализа относится задача;

2)какая часть конструкции должна исследоваться подробно;

3)какие упрощения можно допустить в данной задаче.

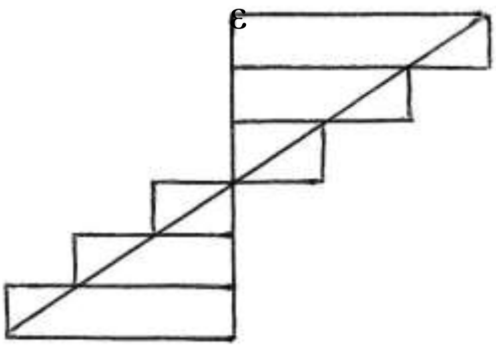


Рис. 28.

Типы ошибок при конечном элементном моделировании.

1. Ошибка постановки задачи:

1.1 тип конечного элемента не соответствует условиям задачи (использование стержневого элемента вместо балочного в задачах с изгибом);

1.2 размер конечных элементов не соответствует градиенту напряжений и деформаций. Эта ошибка может быть частично исправлена при автоматической генерации сетки;

1.3 некорректное задание граничных условий.

2. Ошибка дискретизации Nk появление связано с заменой реальной конструкции с конечным числом элементов. Эта ошибка уменьшается при уменьшении размеров элементов, а так же при замене линейных элементов параболическими.

3. Ошибка, связанная с численным решением уравнений не зависит от показателя, как правило, не велика (не более 1 % на больших задачах).

При МКЭ, как правило, неизвестным является перемещение. Перемещение вычисляют в узлах, далее вычисляются деформации, а по деформациям напряжения. Деформации вычисляются дифференцированием перемещений.

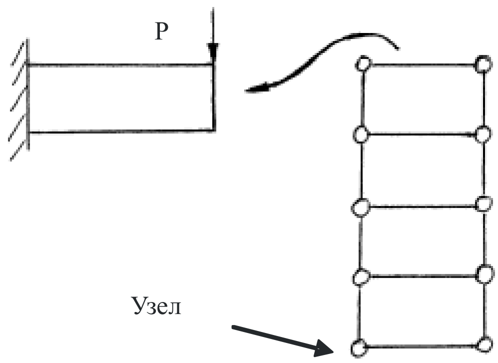


Рис. 29.

Сначала определяются смещения в узлах, затем с помощью аппроксимирующей функции (функции форм) элемента вычисляют смещения внутри элемента в промежуточной точке. Далее производится численное дифференцирование в этих точках.

В связи с дискретностью численного решения наибольшая точность достигается в центре конечного элемента.

Размеры конечных элементов и их форма существенно влияют на точность решения. Характерным является уменьшение погрешности определяемого параметра при уменьшении размера конечного элемента, а затем некоторая стабилизация значения.

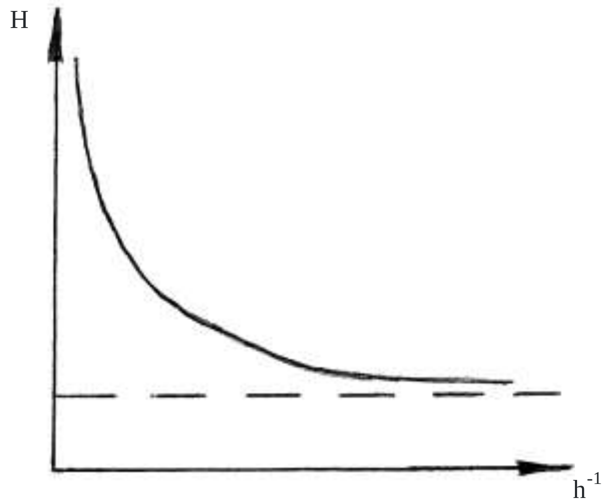
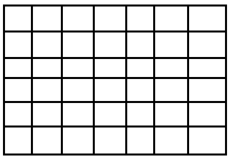
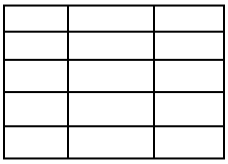


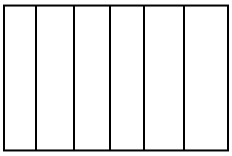
Рис. 30.



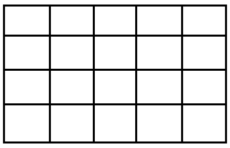
Много восьмиузловых элементов δ = 3 %



20-узловые элементы вытянутые горизонтально δ = 12 %



20-узловые элементы вытянутые вертикально δ = 3 %



Соотношение сторон равное δ = 0,5 %

Количество элементов для случаев Б, В, Г одинаково. Количество элементов в случаях В, Г в 8 раз меньше, чем в случае А.

Таким образом, точность решения задачи зависит не только от корректности граничных условий, но максимально от правильности ориентации элемента для каждой конкретной задачи.

Стержневой элемент

Рассмотрим стержневой элемент с площадью поперечного сечения A нагруженного только осевой силой.

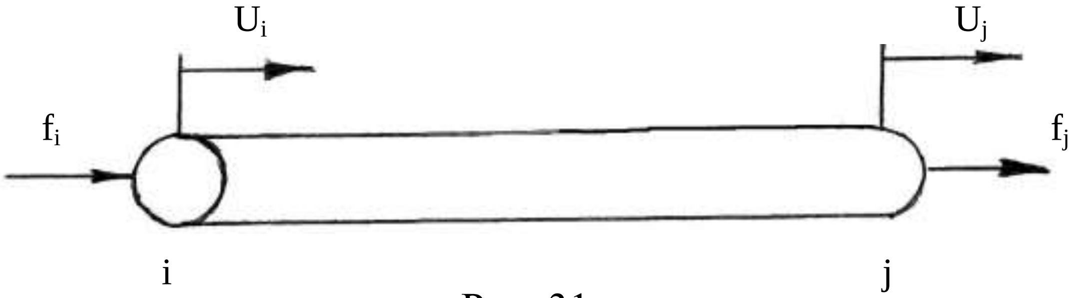


Рис. 31.

Перемещения вызывают деформации и напряжения, так как стержень имеет изотропные свойства по всей длине, перемещение каждой точки стержня по длине стержня является линейным и может быть выражена через узловые перемещения:

$$U(X) = (1 - \frac{X}{L})Ui + \frac{X}{L}Ui,$$

где L – длина стержня.

Деформация определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{Ui - Uj}{L} = \frac{\Delta}{L}$$

Напряжения, возникающие в стержне:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta}{L},$$

где E – модуль Юнга.

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

$$F = \frac{EA}{L}\Delta = k\Delta,$$

где k – жесткость стержня.

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ui \\ Uj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fi \\ fj \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости в произвольной системе координат

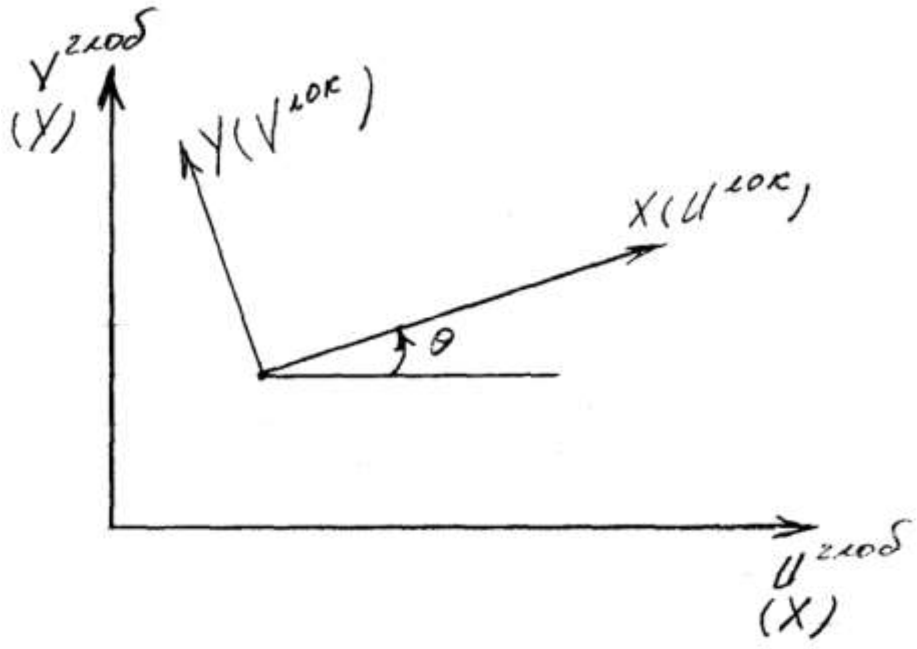


Рис. 32.

Для расчетов перемещений, деформаций и напряжений в глобальной системе координат рассчитывают эти параметры, в локальной системе, связанной со стержнем, а затем переводят результаты в глобальную систему.

Перемещения $V^{лок} = 0$, имеются только перемещения $U^{лок}$.

$$U_i^{лок} = U_i^{глоб}\cos(\theta) + V_i^{глоб}\sin(\theta),$$

$$V_i^{лок} = -U_i^{глоб}\sin(\theta) + V_i^{глоб}\cos(\theta).$$

$l=\cos(\theta)$, $m=\sin(\theta)$, тогда:

$$\begin{vmatrix} U_i^{лок} \\ V_i^{лок} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & m \\ -m & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_i^{глоб} \\ V_i^{глоб} \end{vmatrix},$$

где $\begin{vmatrix} l & m \\ -m & l \end{vmatrix}$ – матрица трансформации;

$$\begin{bmatrix} U_i^{лок} \\ V_i^{лок} \\ U_j^{лок} \\ V_j^{лок} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_i^{глоб} \\ V_i^{глоб} \\ U_i^{глоб} \\ V_i^{глоб} \end{vmatrix},$$

$$T = \begin{vmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{vmatrix},$$

$$f^{лок} = Tf^{глоб}.$$

где T – так же матрица, что и для перемещений.

Работа № 5

СВЯЗЬ ЛОКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ЛОКАЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА. ФУНКЦИИ ФОРМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПОЛУЧЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ. ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ. ЛИНЕЙНЫЙ ПЛОСКИЙ ТРЕУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Связь локальных перемещений с локальными шкалами для стержневого элемента

$$\frac{EA}{L}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} U_i^{лок} \\ V_i^{лок} \\ U_j^{лок} \\ V_j^{лок} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_i^{лок} \\ 0 \\ f_j^{лок} \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$K^{лок}U^{лок} = f^{лок},$$
$$K^{глоб}U^{глоб} = f^{глоб},$$
$$U^{лок} = TU^{глоб}.$$

$$K^{лок}TU^{глоб} = Tf^{глоб},$$
$$T^{T}K^{лок}TU^{глоб} = f^{глоб},$$
$$T^{T}K^{лок}T = K^{глоб}.$$

$$K^{глоб} = \frac{EA}{L}\begin{vmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{vmatrix}.$$

Направляющие коэффициенты вычисляются через начальные координаты узлов стержневого элемента:

$$l = \frac{X_j - X_i}{L}$$
$$m = \frac{Y_j - Y_i}{L}.$$

Пример конструкции требующей преобразования координат:

Рис. 33.

Принципы построения матрицы для произвольных точек внутри элемента

Первый принцип – принцип равенства потенциальной энергии деформирования и работы, совершаемой внешними силами:

$$U = \int_V \sigma\varepsilon \, dv.$$

Это выражение связывает между собой напряжения (внутренние силы) и деформации (определяются дифференцированием перемещения точки):

$$[k]\cdot[u] = [F].$$

Для консервативных систем, энергия в процессе не выделяется. Энергия деформирования равна работе внешних сил.

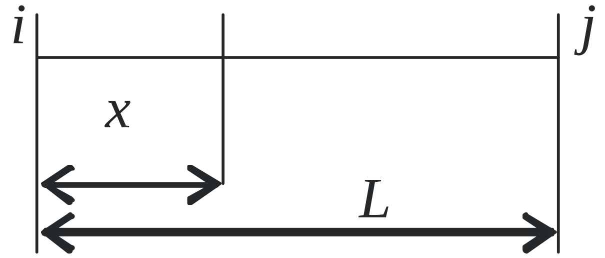
$$W = F \cdot u; \; U = W,$$

где F – внешняя сила; u – перемещение.

Второй принцип – принцип минимума потенциальной энергии тела. Всякая система стремится прийти к состоянию с минимальной потенциальной энергией. Этому принципу также соответствует поведение материала при деформировании.

Таким образом, получение матрицы жесткости в данном случае сводится к поиску минимума функционала потенциальной энергии.

Функции формы конечных элементов



$$Nj = \xi; \; Ni = 1 - \xi,$$

где ξ – относительная координата точки.

$$\xi = x / L \quad 0 \le \xi \le 1,$$

где x – координата.

Соответственно, перемещение произвольной точки внутри элемента:

$$u(x) = Ni\,(\xi)\,ui + Nj\,(\xi)\,uj,$$

$$u = \begin{bmatrix} Ni & Nj \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \xi = [N]\;[u].$$

В данном случае функции формы линейные.

Для этих функций соблюдаются следующие условия:

1. $\sum Nm = 1$

Сумма функций равна единице.

2. $N = \begin{cases} 1, если\ \xi = 0\ (\mathrm{x} = \mathrm{i}) \\ 0, если\ \xi = 1\ (\mathrm{x} = j) \end{cases}.$

Функция формы равна единице в узле, при этом другие функции формы равны нулю.

Функции формы называют ещё интерполяционными.

Помимо смещений, с помощью функций формы рассчитываются и координаты точки. Если и в том, и в другом случае используются одни и те же функции, то эти элементы называют изопараметрическими.

Получение матрицы жесткости

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{dx}[N] \right)[u] = [B][u],$$

где $[B]$ – матрица дифференцирования перемещений.

$$[B] = \frac{d}{dx}\Big[N_i(\xi)N_j(\xi)\Big] = \frac{d}{d\xi}\Big[N_i(\xi)N_j(\xi)\Big]\frac{d\xi}{dx} = \left[-\frac{1}{l}\,\frac{1}{l} \right],$$

$$\sigma = \varepsilon E = [B][u]E\,,$$

$$\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} = u\,,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

$$u = \frac{1}{2}\int_V [\sigma][\varepsilon]^T dv\,,$$

$$u = \frac{1}{2}\int_V [B][u]E[B]^T[u]^T dv = \frac{1}{2}\left(\int_V [B][u]E[B]^T dv \right)[u]^T,$$

$$W = \frac{1}{2}F_i u_i + \frac{1}{2}F_j u_j = \frac{1}{2}[u]^T[F],$$

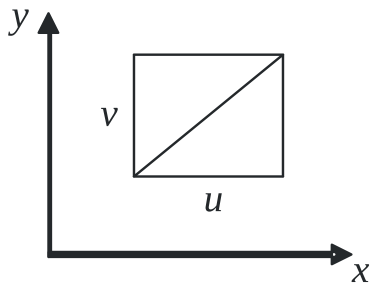
$$U = W,$$

$$[F] = \int_V [B][u]E[B]^T dv = [u]\int_V [B][B]^T E\, dv\,,$$

$$\int_0^l \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{l} \\ \dfrac{1}{l} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обобщенная матрица жесткости для плоской задачи

$$[u] = [N]\,[d]$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

перемещение в узлах

перемещение в произвольной точке элемента

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

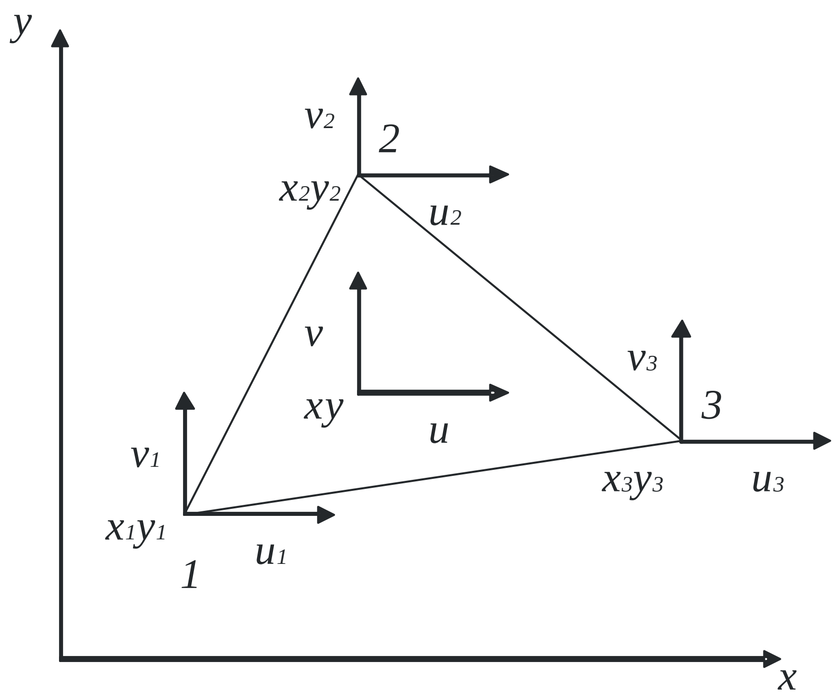
$$[\varepsilon] = [D]\,[u],$$

$$[\varepsilon] = [D]\,[N]\,[d],$$

где [*d*] – перемещение в узлах.

$$[D]\,[N] = [B],$$
$$[k] = \int_V [B]^T E\,[B]\,dv.$$

Линейный плоский треугольный элемент



Предполагается, что смещения любой точки внутри элемента являются линейными функциями координаты этой точки.

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y$$
$$v = b_4 + b_5 x + b_6 y\,,$$
(*)

где $b1 \ldots 6$ – const.

$$\varepsilon_x = b_2 \quad \varepsilon_y = b_6 \quad \gamma_{xy} = b_2 + b_6\,.$$

Деформации не зависят от координаты точек; деформации и напряжения постоянны во всем элементе.

Перемещения узлов так же описываются уравнениями (*). Подставляя значения *x, y, u* и *v* в уравнения (*) получаются константы *b1…6.*

В связи с тем, что деформации и напряжения внутри элемента постоянны, этот элемент нельзя использовать в областях со значительным градиентом напряжений и деформаций.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left((x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right)$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left((x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right) \ ,$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{23} & 0 & x_{31} & 0 & x_{12} & 0 \\ 0 & y_{32} & 0 & y_{13} & 0 & y_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \, .$$

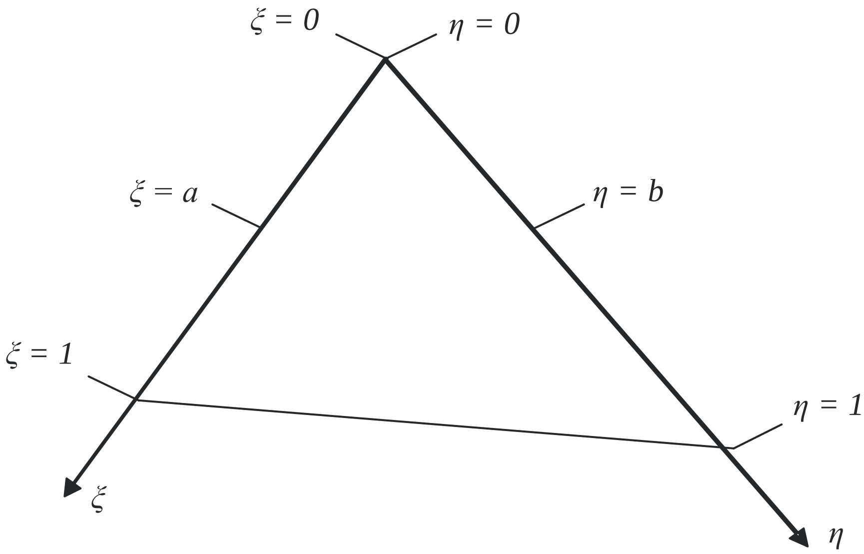
Используя эту матрицу дифференцирования перемещений, можно получить матрицу жесткости:

$$k = \int_V [B]^T [E][B] dv = tA([B]^T [E][B])\, dv ,$$

где t – толщина элемента;

$$[E] - столбец = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}.$$

Функции формы можно существенно упростить, если описывать их в локальной системе координат элементов.



$$N_1 = \xi; \quad N_2 = \eta; \quad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

Эти функции формы удовлетворяют соответствующим условиям (их сумма = 1; в случае, если рассматривается точка в каком-то узле, то соответствующая функция = 1, остальные = 0).

$$x = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3$$
$$y = y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3$$

.

$$x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$
$$y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

Библиотека конечных элементов

В каждой программе, реализующей конечно-элементный анализ, описывается совокупность используемых элементов. Чем шире набор и функциональные свойства элементов, тем большими возможностями обладает тот или иной программный комплекс.

Примеры некоторых конечных элементов, их графическое представление и краткое описание приведены в табл. 1. Эти и многие другие сведения об элементах можно найти в специальной литературе.

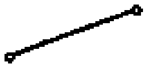
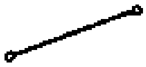
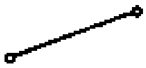
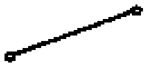
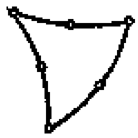
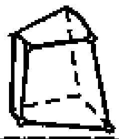
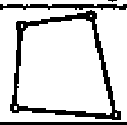
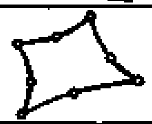
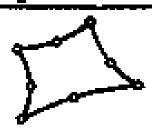
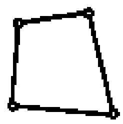
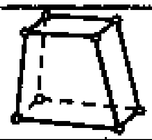
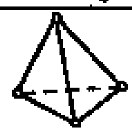
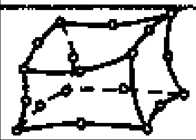
Конечные элементы группируются по назначению, например:

- стационарного и нестационарного теплообмена;
- для моделирования вязкоупругих и вязкопластичных материалов;
- сплошной среды для анализа движения потоков жидкости и газа, решения задач гидроаэромеханики, акустики и течения сред в каналах;
- для расчета статических и динамических напряжений;
- для анализов, включающих как тепловые, так и электрические эффекты;
- для анализа произвольно меняющихся во времени магнитных полей;
- элементы связанной задачи для расчетов, в которых учитывается взаимовлияние результатов двух или более видов анализа (прочностного, теплового, магнитного, сплошной среды, электрического);
- элементы для моделирования нелинейного контакта;
- элементы комбинированные, матричные, поверхностные и др.

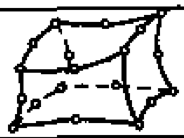
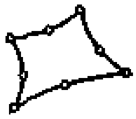
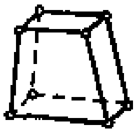
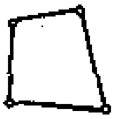
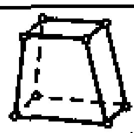
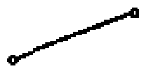
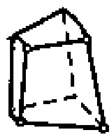
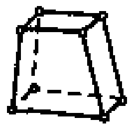
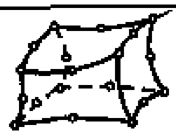
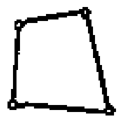
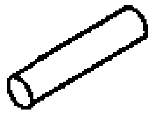
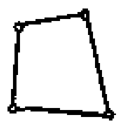
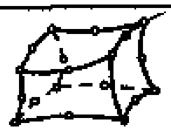
Конечные элементы предназначены для формализации задач в двумерной (2D) или трехмерной (3D) постановке. Графическими примитивами элементов являются «узел», «связь», «грань».

Элементы могут быть линейными или нелинейными (с промежуточными узлами в середине связи). Нелинейные элементы позволяют получать более достоверные результаты.

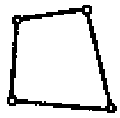
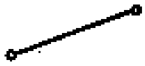
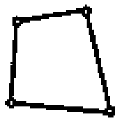
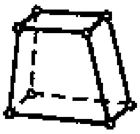
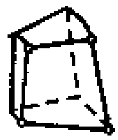
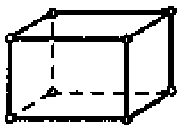
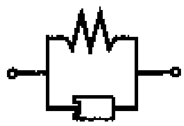
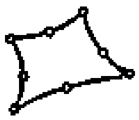
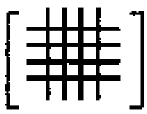
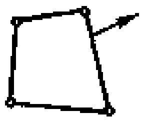
Таблица 1

Название элемента	Графическое представление	Количество узлов	Размерность пространства	Степени свободы
Стержень		2	2D	Перемещения (X, Y)
Упругая балка		2	2D	Перемещения (X, Y), вращение (Z)
Гибкая нить		2	3D	Перемещения (X, Y), вращение (Z)
Упругая балка		2	3D	Перемещения (X, Y, Z), вращение (X, Y, Z)
Треугольный твердотельный элемент		6	2D	Перемещения (X, Y)
Осесимметричный твердотельный элемент для гармонического анализа		4	2D	Перемещения (X, Y, Z)
Прочностной твердотельный элемент		4	2D	Перемещения (X, Y)
Прочностной твердотельный элемент		8	3D	Перемещения (X, Y)
Прочностной оболочечный элемент		8	3D	Перемещения (X, Y, Z), вращение (X, Y, Z)
Оболочечный элемент с конечными деформациями		4	3D	Перемещения (X, Y, Z), вращение (X, Y, Z)
Прочностной твердотельный элемент		8	3D	Перемещения (X, Y, Z)
Твердотельный элемент со степенями поворота		4	3D	Перемещения (X, Y, Z), вращение (X, Y, Z)
Прочностной твердотельный элемент		20	3D	Перемещения (X, Y, Z)

Продолжение таблицы 1

Вязкоупругий твердотельный элемент		20	3D	Перемещения (X, Y, Z)
Твердотельный элемент с конечными деформациями		8	2D	Перемещения (X, Y, Z)
Прочностной твердотельный элемент		8	3D	Перемещения (X,Y, Z) скорости (X, Y, Z), вектор магнитных потенциалов (X, Y, Z)
Гиперупругий смешанный *U–P*-твердотельный элемент		4	3D	Перемещения (X, Y, Z)
Гиперупругий твердотельный элемент		8	3D	Перемещения (X, Y, Z)
Теплопроводящий стержень		2	3D	Температура
Осесимметричный тепловой твердотельный элемент для гармонического анализа		4	2D	Температура
Тепловой твердотельный элемент		8	3D	Температура
Прочностной твердотельный элемент		20	3D	Температура
Акустический элемент сплошной среды		4	3D	Перемещения (X, Y), давление
Трубчатый элемент тепло-массообмена		2	3D	Температура, давление
Элемент контакта		4	3D	Перемещения (X, Y, Z)
Электро-статический твердотельный элемент		20	3D	Напряжение

Продолжение таблицы 1

Твердотельный элемент связанной задачи (тепло+ электричество)		4	2D	Температура, напряжение
Источник тока		2	2D	Скалярный магнитный потенциал
Твердотельный элемент связанной задачи		4	2D	Перемещения (X, Y), температура, напряжение, вектор магнитных потенциалов (Z)
Твердотельный элемент связанной задачи		8	3D	Перемещения (X, Y, Z), температура, напряжение, скалярный магнитный потенциал
Осесимметричный гармонический элемент для анализа течения среды в каналах		4	2D	Перемещения (X, Y, Z)
Элемент тепломассообмена модуля FLOTRAN		8	3D	Перемещения (X, Y, Z), давление, температура, кинетическая энергия турбулентного потока, параметр рассеяния турбулентной энергии
Амортизатор		2	3D	Перемещения (X, Y, Z), вращение (X, Y, Z) давление, температура
Элемент пограничного эффекта		8	3D	Перемещения (X, Y, Z), температура
Матричный элемент жесткости, массы или сопротивления		2	3D	Перемещения (X, Y, Z), вращение (X, Y, Z)
Элемент условий на бесконечность		4	3D	Вектор магнитных потенциалов (Z), напряжение, температура

3. Перечень вопросов для устного опроса

1. Что такое напряженно-деформированное состояние (НДС)? Его виды.
2. Что такое сложное НДС?
3. Понятие моделирования.
4. Аналитические и численные методы моделирования.
5. Основное уравнение теории упругости.
6. Плоские двумерные задачи.
7. Основные соотношения между напряжениями, деформациями и температурами.
8. Соотношение между деформациями и смещениями.
9. Уравнения равновесия.
10. Что такое граничные условия? Как они задаются?
11. Основные понятия метода конечных элементов (МКЭ).
12. Основные этапы реализации МКЭ.
13. Приложение МКЭ к задачам механики.
14. Конечные элементы (КЭ).
15. Соотношение сторон КЭ.
16. Разбиение модели на КЭ.
17. Граничные условия.
18. Как задать необходимую точность решения.
19. Особенности стержневого элемента.
20. Матрица жесткости в произвольной системе координат.
21. Связь локальных перемещений с локальными шкалами для стержневого элемента.
22. Функции формы конечных элементов.
23. Как построить матрицу жесткости?
24. Обобщенная матрица жесткости для плоской задачи.
25. Особенности линейного плоского треугольного элемента.

4. Список рекомендуемой литературы

1. Махалов М. С. Метод конечных элементов в инженерных расчетах: учеб. пособие [Электронный ресурс]: для студентов направления подготовки 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» / М. С. Махалов; КузГТУ. – Электрон. дан. – Кемерово, 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); зв.; цв.; 12 см. – Систем. требования: Pentium IV; ОЗУ 8 Мб; Windows 95; (CD-ROM-дисковод); мышь. – Режим доступа: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90808&type=utchposob:common. – загл. с экрана.

2. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

3. Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов. – Москва: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.

4. Чигарев А. В. Ansys для инженеров: справ. пособие / А. В. Чигарев, А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк. – Москва: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.

5. Янукьян, З. А. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния несущих конструкций антенн: учебное пособие [Электронный ресурс] / З. А. Янукьян. – Москва: МАИ, 2006. – 88 с.

6. Шимкович, Д. Г. Расчет конструкций в MSC.visualNastran for Windows: учебник [Электронный ресурс] / Д. Г. Шимкович. – Москва: ДМК Пресс, 2012. – 704 с.

7. Содержание