

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Ю. НЕЙМАН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть 2

Линейные электрические цепи
однофазного синусоидального тока

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

2-е издание, переработанное и дополненное

НОВОСИБИРСК
2015

УДК 621.3.011.071(075.8)
Н 46

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *А.В. Сансалев*,
канд. техн. наук, доц. *Ю.В. Петренко*

Работа подготовлена на кафедре теоретических основ электротехники
для студентов дневного и заочного отделений
электротехнических специальностей

Нейман В.Ю.

Н 46 Теоретические основы электротехники в примерах и задачах.
Ч. 2. Линейные электрические цепи однофазного синусоидально-
го тока: учеб. пособие / В.Ю. Нейман. – 2-е изд., перераб. и доп. –
Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. – 166 с.

ISBN 978-5-7782-2628-9

В пособии на значительном количестве примеров решения типовых задач рассматриваются методы расчета линейных электрических цепей однофазного синусоидального тока. Предлагаются аналогичные задачи для самостоятельного решения с ответами.

Показаны приемы использования персонального компьютера для автоматизации расчетов электрических цепей.

Структура и содержание пособия соответствуют программе курса «Теоретические основы электротехники» для электротехнических специальностей вузов.

Предназначено для самостоятельной работы студентов, а также может быть полезно преподавателям при организации учебного процесса.

УДК 621.3.011.071(075.8)

ISBN 978-5-7782-2628-9

© Нейман В.Ю., 2009, 2015
© Новосибирский государственный
технический университет, 2009, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Расчет по мгновенным значениям синусоидального тока, напряжения.....	5
2. Расчет по амплитудным и действующим значениям синусоидальных токов и напряжений с помощью векторных диаграмм и методом проводимостей.....	12
3. Основы символического (комплексного) метода	29
4. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока символическим (комплексным) методом	41
5. Методы расчета цепей синусоидального тока.....	56
6. Расчет резонансных режимов в цепях однофазного синусоидального тока	76
7. Расчет индуктивно связанных электрических цепей	88
8. Энергетические расчеты в цепях однофазного синусоидального тока	108
9. Применение математической программной среды MathCAD для расчета линейных цепей однофазного синусоидального тока	129
Контрольное задание № 1	145
Контрольное задание № 2	152
Контрольное задание № 3	156
Библиографический список	161
Приложение.....	162

ВВЕДЕНИЕ

Цель пособия – оказать помощь студентам, изучающим курс теоретических основ электротехники, в их самостоятельной работе.

Усвоение материала одного из разделов курса «Линейные электрические цепи однофазного синусоидального тока» становится возможным только с приобретением практических навыков, получаемых в процессе решения задач.

Так же как и первая часть пособия, вторая состоит из отдельных задач, разбитых по темам в соответствии с программой курса. Часть задач рассмотрена с решением. В задачах, приведенных для самостоятельного решения, даны только ответы.

По каждой из задач изложен подробный алгоритм расчета, который поясняется на примере четырех и более задач с решениями.

Приведенные примеры расчета электрических цепей соответствуют типовым задачам, которые могут оказаться полезными при подготовке к практическим занятиям и выполнении домашних заданий, а также при подготовке к экзаменам, обладают требуемой сложностью и трудоемкостью.

В помощь студентам в изучении дисциплины рассмотрены приемы работы на компьютере с целью автоматизации расчетов электрических цепей в среде MathCAD. Предполагается, что учащийся имеет начальное представление о математическом пакете MathCAD из пройденного курса информатики. Это позволяет переложить выполнение рутинных математических расчетов при решении систем алгебраических уравнений на компьютер.

При решении задач широко используются матричные методы.

1. РАСЧЕТ ПО МГНОВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА, НАПРЯЖЕНИЯ

Для электрических цепей, в которых значения и направления напряжения и тока периодически изменяются во времени по синусоидальному закону и имеют одинаковую частоту, операции сложения, вычитания, дифференцирования и интегрирования можно производить, пользуясь аналитическими формулами преобразования тригонометрических функций.

Задача 1.1

Мгновенные значения тока и напряжения на входе двухполюсника (рис. 1.1) равны:

$$u = 120 \sin(314t + 50^\circ) \text{ В,}$$

$$i = 60 \sin(314t - 35^\circ) \text{ А.}$$

Построить кривые изменения напряжения и тока во времени. Определить сдвиг фаз между напряжением и током, период, частоту, амплитудные и действующие значения величин. Определить мгновенные значения на момент времени $t = 0$.

Решение

1. Синусоиды напряжения и тока изображены на рис. 1.2.
2. Угол сдвига между фазами напряжения и тока

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 50^\circ - (-35^\circ) = 85^\circ.$$

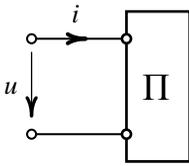


Рис. 1.1

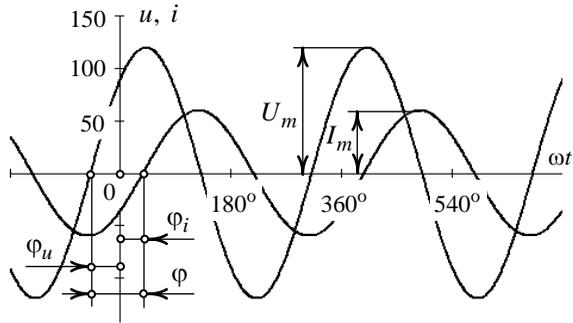


Рис. 1.2

3. Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314} = 0,02 \text{ с.}$$

4. Частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ Гц.}$$

5. Амплитудные значения величин:

$$U_m = 120 \text{ В, } I_m = 60 \text{ А.}$$

6. Действующие значения величин:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{120}{\sqrt{2}} = 84,9 \text{ В,}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 42,43 \text{ А.}$$

7. Мгновенные значения напряжения и тока в момент $t = 0$:

$$u = 120 \sin 50^\circ = 91,92 \text{ В,}$$

$$i = 60 \sin(-35^\circ) = -34,42 \text{ А.}$$

Задача 1.2

Токи в узле разветвленного участка схемы (рис. 1.3): $i_1 = 20,6 \sin(\omega t + 60^\circ)$ А, $i_2 = 15,3 \sin(\omega t - 45^\circ)$ А. Определить амплитудное значение и начальную фазу тока i_3 , записать выражение его мгновенного значения.

Решение

1. На основании первого закона Кирхгофа для узла схемы (рис. 1.3) мгновенное значение тока i_3

$$i_3 = i_1 + i_2 = 20,6 \sin(\omega t + 60^\circ) + 15,3 \sin(\omega t - 45^\circ) = I_{3m} \sin(\omega t + \psi_3).$$

Непосредственное суммирование гармонических функций времени связано с тригонометрическими преобразованиями. Выполним операцию сложения заданных токов i_1 и i_2 по правилу сложения векторов (рис. 1.4).

Результирующий вектор, соответствующий амплитуде тока I_{3m} , найдем как диагональ параллелограмма. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} I_{3m} &= \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m} \cos(\psi_1 - \psi_2)} = \\ &= \sqrt{20,6^2 + 15,3^2 + 2 \cdot 20,6 \cdot 15,3 \cos(60^\circ - (-45^\circ))} = 22,3 \text{ А.} \end{aligned}$$

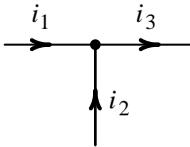


Рис. 1.3

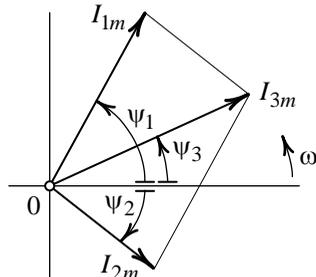


Рис. 1.4

2. Из диаграммы (рис. 1.4) начальная фаза тока

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2}{I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2} \right) = \\ &= \operatorname{arctg} \left[\frac{20,6 \sin 60^\circ + 15,3 \sin(-45^\circ)}{20,6 \cos 60^\circ + 15,3 \cos(-45^\circ)} \right] = \operatorname{arctg}(0,332) = 18,4^\circ.\end{aligned}$$

3. Мгновенное значение тока

$$i_3 = 22,3 \sin(\omega t + 18,4^\circ) \text{ А}.$$

Задача 1.3

По цепи (рис. 1.5) протекает синусоидальный ток с амплитудным значением $I_m = 2,5 \text{ А}$, частотой $f = 50 \text{ Гц}$ и начальной фазой $\psi_i = 15^\circ$. Определить мгновенные значения напряжений на резисторе $u_r(t)$, индуктивности $u_L(t)$ и конденсаторе $u_C(t)$, если $r = 100 \text{ Ом}$, $L = 0,064 \text{ Гн}$, $C = 53 \text{ мкФ}$. Построить кривые изменения напряжений во времени.

Решение

1. Расчет проведем по мгновенным значениям. Мгновенное значение тока в цепи

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 2,5 \sin(314t + 15^\circ) \text{ А},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$.

2. Напряжение на сопротивлении определим по закону Ома:

$$u_r(t) = ri(t) = 250 \sin(314t + 15^\circ) \text{ В}.$$

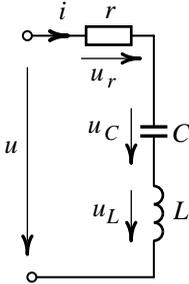


Рис. 1.5

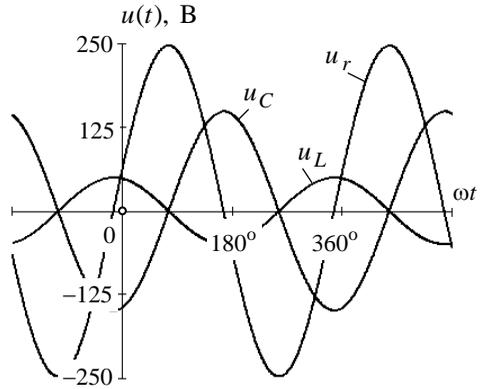


Рис. 1.6

3. Мгновенное значение напряжения на индуктивности:

$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \psi_i)] = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \\
 &= \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \psi_i\right) = 314 \cdot 0,064 \cdot 2,5 \sin\left(314t + \frac{\pi}{2} + 15^\circ\right) = \\
 &= 50,2 \sin(314t + 105^\circ) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

4. Мгновенное значение напряжения на конденсаторе:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \\
 &= -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) + C_1 = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \psi_i\right) + C_1 = \\
 &= \frac{1}{314 \cdot 53 \cdot 10^{-6}} 2,5 \sin\left(314t - \frac{\pi}{2} + 15^\circ\right) = 150,2 \sin(314t - 75^\circ) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования $C_1 = 0$, так как при синусоидальном токе и установившемся процессе напряжение на конденсаторе не имеет постоянной составляющей.

5. Кривые изменения напряжений $u_r(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$ приведены на рис. 1.6.

Задача 1.4

Мгновенное значение напряжения на индуктивности составляет $u_L = 141 \sin(\omega t + 20^\circ)$ В (рис. 1.7). Записать выражение мгновенного значения входного напряжения, если частота источника $f = 100$ Гц, $r = 42$ Ом, $L = 0,05$ Гн.

1. Мгновенное значение тока в цепи (рис. 1.7):

$$\begin{aligned} i(t) &= i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_1) dt = \\ &= -\frac{1}{\omega L} U_{Lm} \cos(\omega t + \psi_1) + C_1 = \frac{1}{\omega L} U_{Lm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \psi_1\right) + C_1 = \\ &= \frac{1}{628 \cdot 0,05} 141 \sin\left(628t - \frac{\pi}{2} + 20^\circ\right) = 4,5 \sin(628t - 70^\circ) \text{ А,} \end{aligned}$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ с}^{-1}$, $C_1 = 0$, так как при синусоидальном напряжении и установившемся процессе ток через индуктивность не имеет постоянной составляющей.

Обозначим $\psi_2 = -70^\circ$ начальную фазу при токе.

2. Мгновенное значение напряжения на сопротивлении:

$$u_r(t) = r i(t) = 42 \cdot 4,5 \sin(628t - 70^\circ) = 189 \sin(628t - 70^\circ) \text{ В.}$$

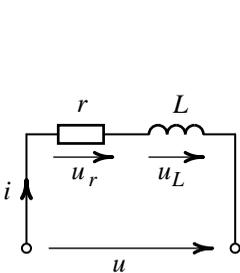


Рис. 1.7

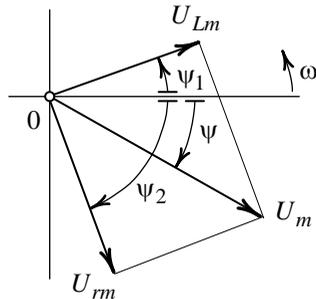


Рис. 1.8

По правилу сложения векторов (рис. 1.8) с использованием тригонометрических преобразований результирующий вектор, соответствующий амплитуде входного напряжения U_m , полагая, что угол между векторами составляет 90° , определим как

$$U_m = \sqrt{U_{rm}^2 + U_{Lm}^2} = \sqrt{189^2 + 141^2} = 235,8 \text{ В.}$$

Из диаграммы (рис. 1.8) получаем начальную фазу входного напряжения

$$\begin{aligned} \psi &= \arctg \left(\frac{U_{Lm} \sin \psi_1 + U_{rm} \sin \psi_2}{U_{Lm} \cos \psi_1 + U_{rm} \cos \psi_2} \right) = \\ &= \arctg \left[\frac{141 \sin 20^\circ + 189 \sin(-70^\circ)}{141 \cos 20^\circ + 189 \cos(-70^\circ)} \right] = \arctg(-0,656) = -33,3^\circ. \end{aligned}$$

Выражение для мгновенного значения входного напряжения

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) = 235,8 \sin(628t - 33,3^\circ) \text{ В.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. В последовательной цепи переменного тока действует два напряжения: $u_1 = 20 \sin(\omega t + 80^\circ)$ В, $u_2 = 40 \sin(\omega t + 15^\circ)$ В. Определить мгновенное значение напряжения на входе цепи.

О т в е т: $u = 51,7 \sin(\omega t + 35,5^\circ)$ В.

Задача 1.6. Мгновенные значения токов в разветвленных ветвях схемы равны $i_1 = 1,6 \sin(\omega t - 15^\circ)$ А, $i_2 = 0,6 \sin(\omega t + 60^\circ)$ А, $i_3 = 1,2 \sin(\omega t + 40^\circ)$ А. Записать выражение для мгновенного значения тока в неразветвленной части схемы.

О т в е т: $i = 2,9 \sin(\omega t + 17,6^\circ)$ А.

Задача 1.7. Мгновенное значение напряжения на конденсаторе $u_C = 168 \sin(628t - 60^\circ)$ В. Определить мгновенное значение напряжения на индуктивности (рис. 1.9), если $L = 0,08$ Гн, $C = 15$ мкФ.

О т в е т: $u_L = 79,4 \sin(628t + 120^\circ)$ В.

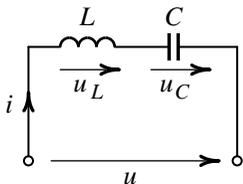


Рис. 1.9

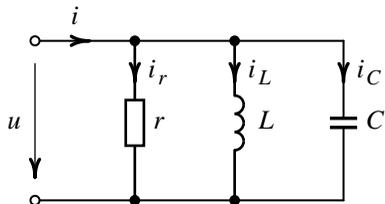


Рис. 1.10

Задача 1.8. Мгновенное значение напряжения на входе цепи (рис. 1.10) равно $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 135^\circ)$ В. Определить мгновенные значения токов i_r , i_L , i_C , i , если $r = 120$ Ом, $L = 0,2$ Гн, $C = 5$ мкФ.

О т в е т: $i_r = 2,59 \sin(314t + 135^\circ)$ А, $i_L = 4,95 \sin(314t + 45^\circ)$ А,
 $i_C = 0,49 \sin(314t + 225^\circ)$ А, $i = 5,16 \sin(314t + 75,1^\circ)$ А.

2. РАСЧЕТ ПО АМПЛИТУДНЫМ И ДЕЙСТВУЮЩИМ ЗНАЧЕНИЯМ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ И МЕТОДОМ ПРОВОДИМОСТЕЙ

Для упрощения анализа и расчета цепей переменного тока синусоидальные величины изображают векторами. Длины векторов эквивалентны амплитудам синусоидальных функций, а углы поворота векто-

ров – их начальным фазам. Таким образом, вектор учитывает все значения, характеризующие синусоидальную величину, а векторная диаграмма цепи дает наглядное представление об их фазовом расположении. При расчете цепи суммирование изображающих векторов осуществляется намного проще, чем сложение мгновенных значений рассматриваемых синусоидальных величин, связанное к тому же с интегрированием и дифференцированием синусоидальных функций.

Построение векторных диаграмм может осуществляться как для амплитудных, так и для действующих значений величин.

Основное преимущество метода проводимостей состоит в том, что расчет токов в цепи может осуществляться без дополнительных графических построений.

Задача 2.1

Определить действующее и мгновенное значения тока в последовательной цепи, схема которой приведена на рис. 2.1 для двух значений частот питающего источника $f = 50$ Гц и $f = 100$ Гц, если $u = 127\sqrt{2} \sin \omega t$ В, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 30$ Ом, $L = 0,12$ Гн, $C = 130$ мкФ.

Решение

1. Расчет цепи для частоты питающего источника $f = 50$ Гц. Реактивное сопротивление индуктивности

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0,12 = 37,68 \text{ Ом},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$.

Реактивное сопротивление емкости

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 130 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \text{ Ом}.$$

2. Действующее значение входного напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{127\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 127 \text{ В}.$$

3. Качественная (не в масштабе) векторная диаграмма цепи (см. рис. 2.1) для действующих значений тока и напряжений приведена на рис. 2.2.

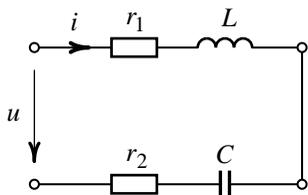


Рис. 2.1

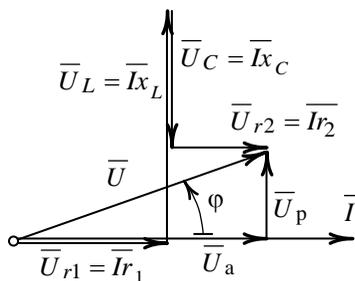


Рис. 2.2

Построение начнем в вектора тока \bar{I} , который является общим при последовательном соединении для всех элементов цепи. Вектор напряжения на активном сопротивлении \bar{U}_{r1} совпадает с вектором тока по фазе, вектор напряжения на индуктивности \bar{U}_L опережает по фазе вектор тока на 90° , вектор напряжения на емкости \bar{U}_C отстает по фазе от вектора тока на 90° . Аналогично вектор напряжения на активном сопротивлении \bar{U}_{r2} совпадает с вектором тока по фазе. Вектор входного напряжения \bar{U} складывается из напряжений на отдельных элементах при учете сдвига фаз.

4. Из треугольника напряжений (см. рис. 2.2) следует значение напряжения, приложенного к цепи:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{(U_{r1} + U_{r2})^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Выразив напряжения на элементах через ток и сопротивления, получим

$$U = \sqrt{(I r_1 + I r_2)^2 + (I x_L - I x_C)^2} = I \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

5. Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{127}{\sqrt{(20 + 30)^2 + (37,68 - 24,5)^2}} = 2,46 \text{ А}.$$

6. Из диаграммы (см. рис. 2.2) установим угол сдвига фаз между напряжением на входе цепи и током:

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctg} \frac{U_p}{U_a} = \operatorname{arctg} \left(\frac{Ix_L - Ix_C}{Ir_1 + Ir_2} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_L - x_C}{r_1 + r_2} \right) = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{37,68 - 24,5}{20 + 30} \right) = \operatorname{arctg}(0,264) = 14,8^\circ.\end{aligned}$$

7. Мгновенное значение тока в цепи для $f = 50$ Гц, учитывая активно-индуктивный характер цепи ($x_L > x_C$):

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = 2,46\sqrt{2} \sin(314t - 14,8^\circ) \text{ А}.$$

8. Расчет цепи при частоте источника $f = 100$ Гц.

Реактивное сопротивление индуктивности

$$x_L = \omega L = 628 \cdot 0,12 = 75,36 \text{ Ом},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ с}^{-1}$.

Реактивное сопротивление емкости

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{628 \cdot 130 \cdot 10^{-6}} = 12,25 \text{ Ом}.$$

9. Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{127}{\sqrt{(20 + 30)^2 + (75,36 - 12,5)^2}} = 1,58 \text{ А}.$$

10. Угол сдвига фаз между напряжением на входе цепи и током

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctg} \frac{U_p}{U_a} = \operatorname{arctg} \left(\frac{Ix_L - Ix_C}{Ir_1 + Ir_2} \right) = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x_L - x_C}{r_1 + r_2} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{75,36 - 12,25}{20 + 30} \right) = \operatorname{arctg}(1,262) = 51,6^\circ.\end{aligned}$$

11. Мгновенное значение тока в цепи для $f = 100$ Гц, учитывая активно-индуктивный характер цепи ($x_L > x_C$):

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = 1,58\sqrt{2} \sin(628t - 51,6^\circ) \text{ А.}$$

Задача 2.2

Определить действующие значения токов цепи (рис. 2.3), активную, реактивную и полную мощность всей цепи. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Дано: $u = 226 \sin 314t$, $r_1 = 9$ Ом, $r_2 = 16$ Ом, $L = 0,034$ Гн, $C = 260$ мкФ.

Решение

С п о с о б 1. Расчет цепи с помощью построения векторных диаграмм.

1. Реактивные сопротивления элементов цепи:

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0,034 = 10,68 \text{ Ом,}$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 260 \cdot 10^{-6}} = 12,25 \text{ Ом.}$$

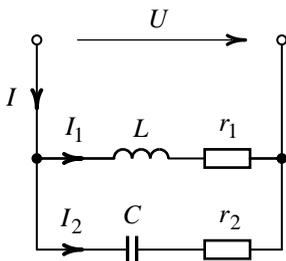


Рис. 2.3

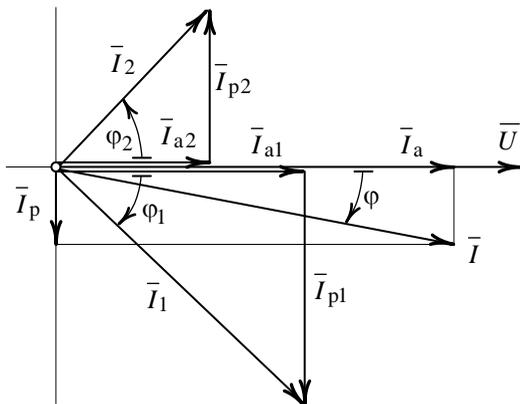


Рис. 2.4

2. Действующее значение напряжения на входе цепи:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{226}{\sqrt{2}} = 159,8 \text{ В.}$$

3. Расчет цепи (см. рис. 2.3) сопровождаем построением векторной диаграммы для действующих значений токов и напряжений. Качественно (не в масштабе) построенная векторная диаграмма цепи приведена на рис. 2.4.

За исходный вектор принят вектор напряжения \bar{U} , а затем нанесены векторы тока в каждой ветви, причем направления токов \bar{I}_1 , \bar{I}_2 относительно вектора напряжения выбраны в соответствии с характером сопротивлений ветвей.

Из векторной диаграммы видно, что все активные составляющие токов ветвей \bar{I}_{a1} , \bar{I}_{a2} направлены одинаково и параллельно вектору напряжения. Следовательно, активная составляющая общего тока

$$I_a = I_{a1} + I_{a2}.$$

Реактивные составляющие токов ветвей \bar{I}_{p1} , \bar{I}_{p2} имеют противоположные направления и перпендикулярны вектору напряжения. Следовательно, реактивная составляющая общего тока определяется алгебраической суммой:

$$I_p = I_{p1} - I_{p2}.$$

Как видно из диаграммы, изображенной на рис. 2.4, векторы активной I_a , реактивной I_p составляющих тока и вектор полного тока I образуют прямоугольный треугольник. Из треугольника следует:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

4. Полные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_L^2} = \sqrt{9^2 + 10,68^2} = 13,97 \text{ Ом,}$$

$$Z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_C^2} = \sqrt{16^2 + 12,25^2} = 20,15 \text{ Ом.}$$

5. Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{159,8}{13,97} = 11,44 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{159,8}{20,15} = 7,93 \text{ A}.$$

6. Активные составляющие токов ветвей (см. рис. 2.4):

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = I_1 \frac{r_1}{Z_1} = 11,44 \frac{9}{13,97} = 7,37 \text{ A},$$

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = I_2 \frac{r_2}{Z_2} = 7,93 \frac{16}{20,15} = 6,29 \text{ A}.$$

7. Реактивные составляющие токов ветвей (см. рис. 2.4):

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = I_1 \frac{x_L}{Z_1} = 11,44 \frac{10,68}{13,97} = 8,75 \text{ A},$$

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = I_2 \frac{x_C}{Z_2} = 7,93 \frac{12,25}{20,15} = 4,82 \text{ A}.$$

8. Активная и реактивная составляющие общего тока:

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = 7,37 + 6,29 = 13,66 \text{ A},$$

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = 8,75 - 4,82 = 3,93 \text{ A}.$$

9. Действующее значение полного тока всей цепи:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{13,66^2 + 3,93^2} = 14,21 \text{ A}.$$

10. Для определения мощности предварительно вычислим фазный угол сдвига φ между напряжением и током на входе цепи. Из векторной диаграммы (см. рис. 2.4) найдем:

$$\varphi = \arctg \frac{I_p}{I_a} = \arctg \left(\frac{3,93}{13,66} \right) = 16,1^\circ.$$

11. Активная мощность цепи:

$$P = UI \cos \varphi = 159,8 \cdot 14,21 \cos 16,1^\circ = 2181,7 \text{ Вт}.$$

11. Реактивная мощность цепи:

$$Q = UI \sin \varphi = 159,8 \cdot 14,21 \sin 16,1^\circ = 629,7 \text{ вар}.$$

13. Полная мощность цепи:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2181,7^2 + 629,7^2} = 2270,8 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

С п о с о б 2. Расчет цепи методом проводимостей.

1. Полные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{9^2 + 10,68^2} = 13,97 \text{ Ом},$$

$$Z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{16^2 + 12,25^2} = 20,15 \text{ Ом}.$$

2. Активная и реактивная проводимости первой ветви:

$$g_1 = \frac{r_1}{Z_1^2} = \frac{9}{13,97^2} = 0,0461 \text{ См},$$

$$b_1 = \frac{x_{L1}}{Z_1^2} = \frac{10,68}{13,97^2} = 0,0548 \text{ См}.$$

3. Активная и реактивная проводимости второй ветви:

$$g_2 = \frac{r_2}{Z_2^2} = \frac{16}{20,15^2} = 0,0394 \text{ См},$$

$$b_2 = \frac{x_{C2}}{Z_2^2} = \frac{12,25}{20,15^2} = 0,0302 \text{ См}.$$

4. Полные проводимости первой и второй ветвей:

$$y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0,0461^2 + 0,0548^2} = 0,0716 \text{ См},$$

$$y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2} = \sqrt{0,0394^2 + 0,0302^2} = 0,0496 \text{ См}.$$

5. Полная проводимость всей цепи:

$$y = \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = \\ = \sqrt{(0,0461 + 0,0394)^2 + (0,0548 - 0,0302)^2} = 0,089 \text{ См.}$$

Знак минус перед b_2 указывает на емкостный характер реактивной проводимости второй ветви.

6. Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = Uy_1 = 159,8 \cdot 0,0716 = 11,44 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = Uy_2 = 159,8 \cdot 0,0496 = 7,93 \text{ А,}$$

$$I = Uy = 159,8 \cdot 0,089 = 14,22 \text{ А.}$$

7. Активная мощность цепи:

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = 11,44^2 \cdot 9 + 7,93^2 \cdot 16 = 2184 \text{ Вт.}$$

8. Реактивная мощность:

$$Q = I_1^2 x_{L1} - I_2^2 x_{C2} = 11,44^2 \cdot 10,68 - 7,93^2 \cdot 12,25 = 627,4 \text{ вар.}$$

9. Полная мощность цепи:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2184^2 + 627,4^2} = 2272,3 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Задача 2.3

Определить действующие значения токов в ветвях схемы (рис. 2.5), если действующее значение напряжения на входе цепи $U = 100 \text{ В}$.

Дано: $r_1 = 6 \text{ Ом}$, $r_2 = 15 \text{ Ом}$, $r_3 = 8 \text{ Ом}$ $x_{L1} = 10 \text{ Ом}$, $x_{L3} = 12 \text{ Ом}$, $x_{C2} = 30 \text{ Ом}$.

Решение

Расчет цепи получим методом проводимостей. Заменяем параллельные ветви одной эквивалентной (рис. 2.6).

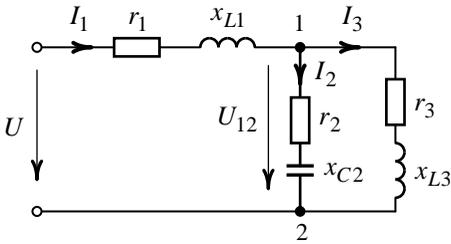


Рис. 2.5

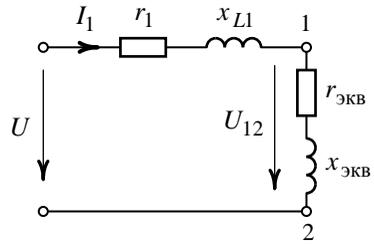


Рис. 2.6

1. Полные сопротивления параллельных ветвей:

$$Z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{15^2 + 30^2} = 33,54 \text{ Ом},$$

$$Z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_{L3}^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14,42 \text{ Ом}.$$

2. Активная и реактивная проводимость второй ветви (r_2 , x_{C2}):

$$g_2 = \frac{r_2}{Z_2^2} = \frac{15}{33,54^2} = 0,0133 \text{ См},$$

$$b_2 = \frac{x_{C2}}{Z_2^2} = \frac{30}{33,54^2} = 0,0267 \text{ См}.$$

3. Активная и реактивная проводимость третьей ветви (r_3 , x_{L3}):

$$g_3 = \frac{r_3}{Z_3^2} = \frac{8}{14,42^2} = 0,0385 \text{ См},$$

$$b_3 = \frac{x_{L3}}{Z_3^2} = \frac{12}{14,42^2} = 0,0577 \text{ См}.$$

4. Полная активная проводимость параллельных ветвей:

$$g_{23} = g_2 + g_3 = 0,0133 + 0,0385 = 0,0518 \text{ См}.$$

5. Полная реактивная проводимость параллельных ветвей:

$$b_{23} = b_3 - b_2 = 0,0577 - 0,0267 = 0,031 \text{ См}.$$

Знак минус перед b_2 указывает на емкостный характер реактивной проводимости второй ветви.

6. Полная проводимость параллельных ветвей:

$$y_{23} = \sqrt{g_{23}^2 + b_{23}^2} = \sqrt{0,0518^2 + 0,031^2} = 0,0604 \text{ См.}$$

7. Определяем эквивалентные параметры схемы (рис. 2.6): эквивалентное активное сопротивление

$$r_{\text{экв}} = \frac{g_{23}}{y_{23}^2} = \frac{0,0518}{0,0604^2} = 14,2 \text{ Ом,}$$

эквивалентное реактивное (индуктивное) сопротивление

$$x_{\text{экв}} = \frac{b_{23}}{y_{23}^2} = \frac{0,031}{0,0604^2} = 8,5 \text{ Ом.}$$

8. Ток в неразветвленной части схемы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{Z_{\text{вх}}} = \frac{U}{\sqrt{(r_1 + r_{\text{экв}})^2 + (x_{L1} + x_{\text{экв}})^2}} = \\ &= \frac{100}{\sqrt{(6 + 14,2)^2 + (10 + 8,5)^2}} = 3,65 \text{ А.} \end{aligned}$$

9. Напряжение U_{12} в разветвленной части цепи:

$$U_{12} = I_1 Z_{\text{экв}} = I_1 \sqrt{r_{\text{экв}}^2 + x_{\text{экв}}^2} = 3,65 \sqrt{14,2^2 + 8,5^2} = 60,4 \text{ В.}$$

10. Токи в параллельных ветвях схемы (см. рис. 2.5):

$$I_2 = \frac{U_{12}}{Z_2} = \frac{60,4}{33,54} = 1,8 \text{ А,}$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{Z_3} = \frac{60,4}{14,42} = 4,19 \text{ А.}$$

Задача 2.4

В цепи (рис. 2.7) показание амперметра A_3 соответствует току $I_3 = 1,3 \text{ А}$. Определить показания остальных приборов, если $r = 25 \text{ Ом}$, $L = 0,065 \text{ Гн}$, $C = 34 \text{ мкФ}$. Частота источника питания $f = 50 \text{ Гц}$.

Решение

1. Расчет реактивных сопротивлений цепи:

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0,065 = 20,4 \text{ Ом},$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 34 \cdot 10^{-6}} = 93,7 \text{ Ом},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$.

2. Показание вольтметра V равно действующему значению напряжения на входе цепи:

$$U = I_3 Z_3 = I_3 \sqrt{r^2 + x_L^2} = 1,3 \sqrt{25^2 + 20,4^2} = 42 \text{ В}.$$

3. Показание амперметра A_2 определится:

$$I_2 = \frac{U}{x_C} = \frac{42}{93,7} = 0,45 \text{ А}.$$

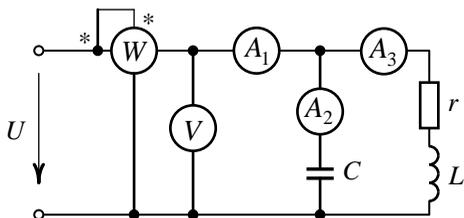


Рис. 2.7

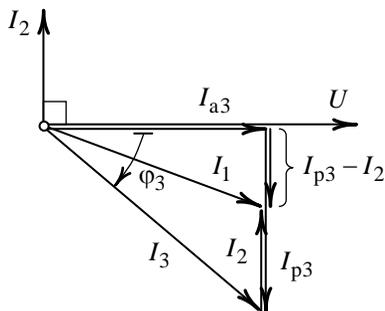


Рис. 2.8

4. Показание амперметра A_1 определим по векторной диаграмме цепи (рис. 2.8), из которой следует:

$$I_1 = \sqrt{I_{a3}^2 + (I_{p3} - I_2)^2} = \sqrt{(I_3 \cos \varphi_3)^2 + (I_3 \sin \varphi_3 - I_2)^2} = \\ = \sqrt{(1,3 \cos 39,2^\circ)^2 + (1,3 \sin 39,2^\circ - 0,45)^2} = 1,1 \text{ A},$$

где $\varphi_3 = \arctg \frac{x_L}{r} = \arctg \left(\frac{20,4}{25} \right) = 39,2^\circ$.

5. Показание ваттметра W будет определяться активной мощностью, выделяемой в резистивном сопротивлении:

$$P = I_3^2 r = 1,3^2 \cdot 25 = 42,3 \text{ Вт}.$$

Задача 2.5

Для цепи (рис. 2.9) известны показания ваттметра $P = 25 \text{ Вт}$ и амперметра $I = 2,5 \text{ А}$. Определить индуктивность катушки, ее активное сопротивление и действующее значение напряжения на входе цепи, если полное сопротивление катушки $Z_k = 5 \text{ Ом}$ и емкость конденсатора $C = 160 \text{ мкФ}$. Частота источника $f = 200 \text{ Гц}$. Построить векторную диаграмму цепи.

Решение

1. Активное сопротивление катушки:

$$r_k = \frac{P}{I^2} = \frac{25}{2,5^2} = 4 \text{ Ом}.$$

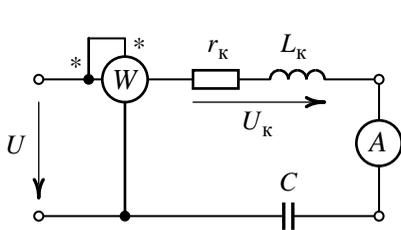


Рис. 2.9

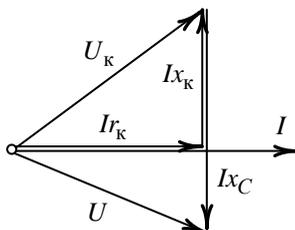


Рис. 2.10

2. Индуктивное сопротивление катушки:

$$x_k = \sqrt{Z_k^2 - r_k^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ Ом}.$$

Индуктивность катушки:

$$L_k = \frac{x_k}{\omega} = \frac{3}{1256,6} = 2,39 \cdot 10^{-3} \text{ Гн},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 = 1256,6 \text{ с}^{-1}$.

3. Полное сопротивление цепи и действующее значение напряжения на входе цепи:

$$Z = \sqrt{r_k^2 + (x_k - x_C)^2} = \sqrt{4^2 + (3 - 4,97)^2} = 4,46 \text{ Ом},$$

где $x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 200 \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = 4,97 \text{ Ом};$

$$U = IZ = 2,5 \cdot 4,46 = 11,15 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма цепи изображена на рис. 2.10.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.6. В цепи (рис. 2.11) действующее значение напряжения на входе цепи составляет $U = 300 \text{ В}$. Определить действующее значение входного тока и угол сдвига фаз между напряжением и током, построить векторную диаграмму цепи. Дано: $r = 150 \text{ Ом}$, $L = 0,191 \text{ Гн}$, $C = 10,6 \text{ мкФ}$, $f = 50 \text{ Гц}$.

Ответ: $I = 4,47 \text{ А}$, $\varphi = -63,4^\circ$.

Задача 2.7. Определить действующие значения токов и записать выражения для мгновенных значений токов в ветвях схемы (рис. 2.12),

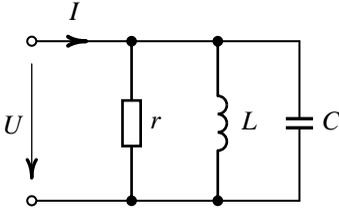


Рис. 2.11

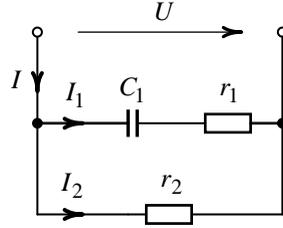


Рис. 2.12

если $u = 170 \sin(628t + 18^\circ)$ В, $r_1 = 26$ Ом, $r_2 = 42$ Ом, $C_1 = 80$ мкФ.

Построить векторную диаграмму цепи.

О т в е т: $I_1 = 3,67$ А, $I_2 = 2,86$ А, $I = 6,19$ А,

$i_1 = 5,19 \sin(628t + 55,4^\circ)$ А, $i_2 = 4,05 \sin(628t + 18^\circ)$ А,

$i = 8,76 \sin(628t + 39,1^\circ)$ А.

Задача 2.8. Для схемы (рис. 2.13) определить активную, реактивную и полную проводимости цепи. Рассчитать действующие значения токов, если $U = 76$ В, $r_1 = 12$ Ом, $r_3 = 21$ Ом, $x_{L2} = 26$ Ом, $x_{C3} = 34$ Ом.

О т в е т: $g = 0,0136$ См, $b = 0,0124$ См, $y = 0,0184$ См,

$I_1 = 1,4$ А, $I_2 = 2,5$ А, $I_3 = 1,6$ А.

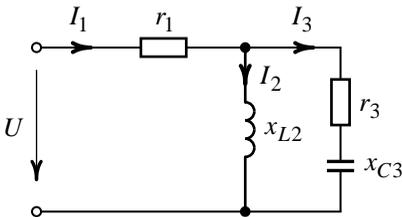


Рис. 2.13

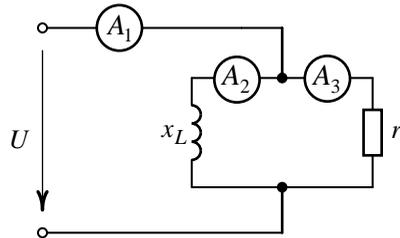


Рис. 2.14

Задача 2.9. Определить показание амперметра A_3 в схеме (рис. 2.14), если амперметр A_1 показывает ток $I_{A1} = 50 \text{ A}$, а амперметр A_2 показывает ток $I_{A2} = 30 \text{ A}$.

О т в е т: $I_{A3} = 40 \text{ A}$.

Задача 2.10. Для схемы (рис. 2.15) определить показание амперметра A_1 , если показания остальных амперметров соответствуют токам: $I_{A2} = 1,5 \text{ A}$, $I_{A3} = 1,2 \text{ A}$, $I_{A4} = 0,5 \text{ A}$.

О т в е т: $I_{A1} = 0,4 \text{ A}$.

Задача 2.11. В схеме (рис. 2.16) показания вольтметров, соответствующие напряжениям на элементах цепи, распределились следующим образом: $U_{V2} = 130 \text{ В}$, $U_{V3} = 50 \text{ В}$, $U_{V4} = 100 \text{ В}$. Определить показание вольтметра V_1 .

О т в е т: $U_{V1} = 60 \text{ В}$.

Задача 2.12. Определить показание вольтметра V_1 в схеме (рис. 2.17), если вольтметр V_2 показывает напряжение $U_{V2} = 96 \text{ В}$. Дано: $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $r_2 = 16 \text{ Ом}$, $x_C = 12 \text{ Ом}$.

О т в е т: $U_{V1} = 200 \text{ В}$.

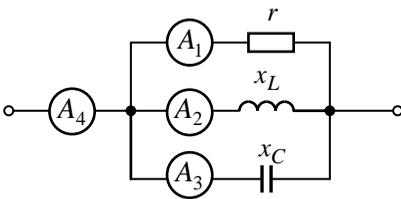


Рис. 2.15

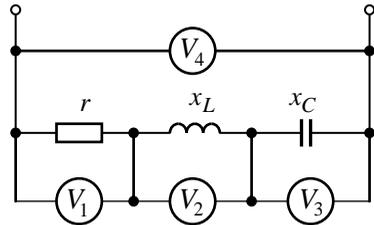


Рис. 2.16

Задача 2.13. Показание амперметра A_1 , установленного в цепи (рис. 2.18), соответствует току $I_{A1} = 3 \text{ А}$. Определить напряжение на вольтметре V_1 , если $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 45 \text{ Ом}$, $x_{C1} = 30 \text{ Ом}$, $x_{C2} = 6 \text{ Ом}$.

О т в е т: $U_{V1} = 30 \text{ В}$.

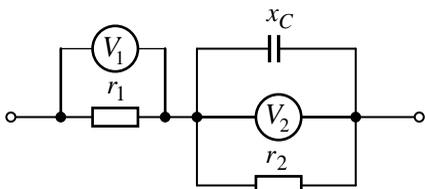


Рис. 2.17

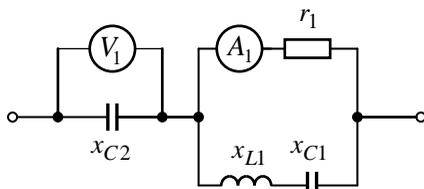


Рис. 2.18

Задача 2.14. Показание вольтметра V_2 в схеме (рис. 2.19) равно $U_{V2} = 30 \text{ В}$. Определить показание вольтметра V_1 на входе последовательной цепи, если $r = 15 \text{ Ом}$, $x_L = 10 \text{ Ом}$, $x_C = 30 \text{ Ом}$.

О т в е т: $U_{V1} = 50 \text{ В}$.

Задача 2.15. Определить показание амперметра A_1 на входе цепи (рис. 2.20), если ток амперметра A_2 в разветвленной части схемы составляет $I_{A2} = 3 \text{ А}$. Дано: $r = 24 \text{ Ом}$, $x_L = 48 \text{ Ом}$, $x_C = 36 \text{ Ом}$.

О т в е т: $I_{A1} = 5 \text{ А}$.

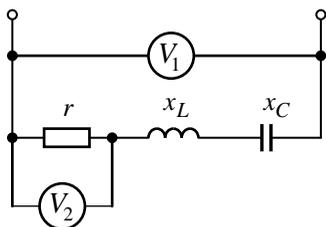


Рис. 2.19

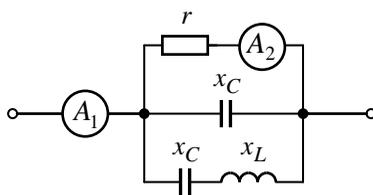


Рис. 2.20

3. ОСНОВЫ СИМВОЛИЧЕСКОГО (КОМПЛЕКСНОГО) МЕТОДА

Символический метод расчета основан на использовании комплексных чисел, что при расчете электрических цепей переменного синусоидального тока позволяет заменить графические действия над векторами алгебраическими действиями над комплексными числами. Геометрическому сложению и вычитанию векторов соответствует алгебраическое сложение и вычитание их проекций на оси комплексной плоскости.

Для ускорения расчетов в приложении приведены приемы использования многофункциональных калькуляторов при работе с комплексными числами.

Задача 3.1

Напряжение и ток на входе пассивного двухполюсника (рис. 3.1): $u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$ В, $i = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ)$ А. Записать комплексы действующих значений синусоидальных функций в показательной, алгебраической и полярной формах. Построить векторную диаграмму на комплексной плоскости.

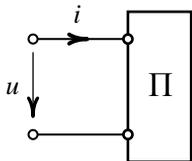


Рис. 3.1

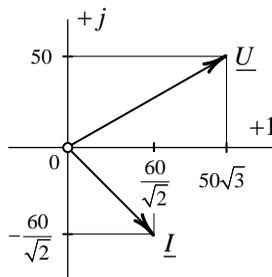


Рис. 3.2

Решение

1. Комплексы действующих значений напряжения и тока в показательной форме:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 100 e^{j30^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = 60 e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

2. Комплексы действующих значений напряжения и тока в алгебраической форме:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} (\cos \psi_u + j \sin \psi_u) = 100 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 50\sqrt{3} + j50 \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos \psi_i + j \sin \psi_i) = 60 [\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)] = \frac{60}{\sqrt{2}} - j \frac{60}{\sqrt{2}} \text{ А.}$$

3. Комплексы действующих значений напряжения и тока в полярной форме:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} |\underline{\psi}_u = 100 \underline{|30^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} |\underline{\psi}_i = 60 \underline{|-45^\circ} \text{ А.}$$

4. Векторная диаграмма на комплексной плоскости для действующих значений величин представлена на рис. 3.2.

Задача 3.2

Заданы комплексы действующих значений напряжений в показательной форме: $\underline{U}_1 = 120 e^{j60^\circ} \text{ В}$, $\underline{U}_2 = 240 e^{-j20^\circ} \text{ В}$, $\underline{U}_3 = -360 e^{j35^\circ} \text{ В}$.

Записать выражения для мгновенных значений напряжений.

Решение

$$1. u_1 = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В.}$$

$$2. u_2 = 240\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ В.}$$

$$3. u_3 = 360\sqrt{2} \sin(\omega t - 145^\circ) \text{ В,}$$

здесь $\underline{U}_3 = -360e^{j35^\circ} = 360e^{j35^\circ} \cdot 1e^{-j180^\circ} = 360e^{j(35^\circ - 180^\circ)}$, так как $(-1) = 1e^{\pm j180^\circ}$.

Задача 3.3

Заданы комплексы действующих значений токов в алгебраической форме:

$$\underline{I}_1 = 4 + j3 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = 4 - j3 \text{ A}, \quad \underline{I}_3 = -4 + j3 \text{ A}, \quad \underline{I}_4 = -4 - j3 \text{ A}.$$

Записать выражения для мгновенных значений токов.

Решение

1. $\underline{I}_1 = 4 + j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{4}} = 5e^{j36,9^\circ} \text{ A}$ (рис. 3.3). Мгновенное значение тока: $i_1 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 36,9^\circ) \text{ A}$.

2. $\underline{I}_2 = 4 - j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \left(-\frac{3}{4}\right)} = 5e^{-j36,9^\circ} \text{ A}$ (рис. 3.4). Мгновенное значение тока: $i_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,9^\circ) \text{ A}$.

3. $\underline{I}_3 = -4 + j3 = -(4 - j3) = -\left(\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \left(-\frac{3}{4}\right)}\right) = -5e^{-j36,9^\circ} =$
 $= 5e^{j143,1^\circ} \text{ A}$ (рис. 3.5). Мгновенное значение тока:
 $i_3 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 143,1^\circ) \text{ A}$.

4. $\underline{I}_4 = -4 - j3 = -(4 + j3) = -\left(\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{4}}\right) = -5e^{j36,9^\circ} =$
 $= 5e^{-j143,1^\circ} \text{ A}$ (рис. 3.6). Мгновенное значение тока:
 $i_4 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 143,1^\circ) \text{ A}$.

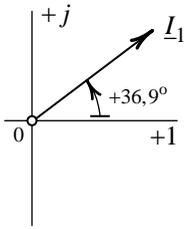


Рис. 3.3

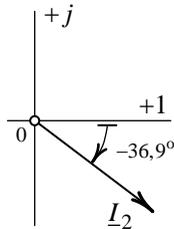


Рис. 3.4

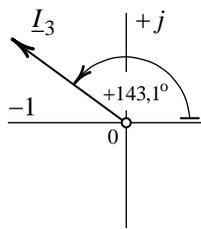


Рис. 3.5

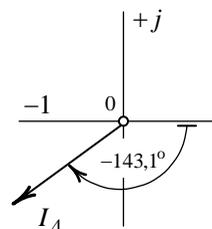


Рис. 3.6

Задача 3.4

Напряжения представлены комплексами действующих значений $\underline{U}_1 = (5 + j12)4e^{j30^\circ}$ В, $\underline{U}_2 = (4 - j3)(16 - j12)$ В. Записать выражения для мгновенных значений напряжений.

Решение

$$\begin{aligned}
 1. \underline{U}_1 &= (5 + j12)4e^{j30^\circ} = \sqrt{5^2 + 12^2} \cdot e^{j \arctg \frac{12}{5}} \cdot 4e^{j30^\circ} = \\
 &= 13e^{j67,4^\circ} \cdot 4e^{j30^\circ} = 52e^{j97,4^\circ} \text{ В,}
 \end{aligned}$$

тогда $u_1 = 52\sqrt{2} \sin(\omega t + 97,4^\circ)$ В.

$$\begin{aligned}
 2. \underline{U}_2 &= (4 - j3)(16 - j12) = 28 - j96 = \\
 &= \sqrt{28^2 + 96^2} \cdot e^{j \arctg \left(-\frac{96}{28}\right)} = 100e^{-j73,7^\circ} \text{ В,}
 \end{aligned}$$

тогда $u_2 = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 73,7^\circ)$ В.

Задача 3.5

Комплексы действующих значений напряжения и тока равны: $\underline{U} = 12,5 + j30$ В, $\underline{I} = 1,6 + j1,2$ А. Определить сдвиг фаз между напряжением и током.

Решение

1. Комплексы действующих значений напряжения и тока в показательной форме:

$$\underline{U} = \sqrt{12,5^2 + 30^2} \cdot e^{j \arctg \frac{30}{12,5}} = 32,5 e^{j67,4^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1,2}{1,6}} = 2 e^{j36,9^\circ} \text{ А.}$$

2. Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 67,4^\circ - 36,9^\circ = 30,5^\circ.$$

Задача 3.6

Определить комплекс амплитудного значения и мгновенное значение падения напряжения на участке цепи с комплексным сопротивлением $\underline{Z} = 26 + j42 \text{ Ом}$, если мгновенное значение тока через элементы цепи составляет $i = 1,25 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ А}$.

Решение

1. Согласно закону Ома напряжение на участке: $\underline{U}_m = \underline{I}_m \underline{Z}$.

Комплекс амплитудного значения тока:

$$\underline{I}_m = 1,25 e^{j25^\circ} \text{ А.}$$

Комплекс амплитудного значения падения напряжения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m = \underline{I}_m \underline{Z} &= 1,25 e^{j25^\circ} (26 + j42) = 1,25 e^{j25^\circ} \sqrt{26^2 + 42^2} \cdot e^{j \arctg \frac{42}{26}} = \\ &= 1,25 e^{j25^\circ} \cdot 49,4 e^{j58,2^\circ} = 61,75 e^{j83,2^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

2. Мгновенное значение падения напряжения на участке:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 61,75 \sin(\omega t + 83,2^\circ) \text{ В.}$$

Задача 3.7

Определить комплексное сопротивление и комплексную проводимость двухполюсника, если напряжение и ток на входе двухполюсника:

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 40^\circ) \text{ В}, \quad i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 10^\circ) \text{ А}.$$

Решение

1. Согласно закону Ома комплексное сопротивление двухполюсника $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$.

Комплексы амплитудных значений напряжения и тока:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = 220\sqrt{2} \cdot e^{j40^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j10^\circ} \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{220\sqrt{2} \cdot e^{j40^\circ}}{5\sqrt{2} \cdot e^{j10^\circ}} = 44 e^{j30^\circ} = 38,1 + j22 \text{ Ом}.$$

2. Комплексная проводимость:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{44 e^{j30^\circ}} = 0,023 e^{-j30^\circ} =$$

$$= (19,68 - j11,36) 10^{-3} \text{ См}.$$

Задача 3.8

В узле цепи (рис. 3.7) соединены три ветви. Определить комплекс действующего значения тока \underline{I}_3 , если $\underline{I}_1 = 1,4 e^{-j43^\circ}$ А, $\underline{I}_2 = 3,6 e^{j60^\circ}$ А.

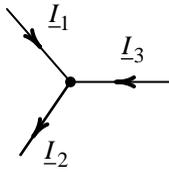


Рис. 3.7

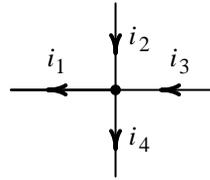


Рис. 3.8

Решение

На основании первого закона Кирхгофа согласно рис. 3.7:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = 3,6e^{j60^\circ} - 1,4e^{-j43^\circ} = \\ &= (1,8 + j3,12) - (1,02 - j0,95) = 0,78 + j4,07 = 4,14e^{j79,2^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Задача 3.9

В узле цепи (рис. 3.8) соединены четыре ветви. Определить мгновенное значение тока i_1 , если мгновенные значения остальных токов следующие: $i_2 = 15 \sin(\omega t - 15^\circ)$ А, $i_3 = 25 \sin(\omega t + 35^\circ)$ А, $i_4 = 12 \sin(\omega t - 60^\circ)$ А.

Решение

На основании первого закона Кирхгофа согласно рис. 3.8 для комплексов амплитудных значений токов

$$\underline{I}_{1m} = \underline{I}_{2m} + \underline{I}_{3m} - \underline{I}_{4m}.$$

Найдем:

$$\underline{I}_{2m} = 15e^{-j15^\circ} = 14,5 - j3,9 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{3m} = 25e^{j35^\circ} = 20,5 + j14,3 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{4m} = 12e^{-j60^\circ} = 6 - j10,4 \text{ А.}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \underline{I}_{lm} &= 14,5 - j3,9 + 20,5 + j14,3 - (6 - j10,4) = \\ &= 29 + j20,8 = 35,7 e^{j35,7^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Мгновенное значение тока i_1 :

$$i_1 = 35,7 \sin(\omega t + 35,7^\circ) \text{ А.}$$

Задача 3.10

Найти комплексные сопротивления и комплексные проводимости участков цепи (рис. 3.9–3.11), если $r = 25 \text{ Ом}$, $x_L = 60 \text{ Ом}$, $x_C = 30 \text{ Ом}$.

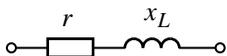


Рис. 3.9



Рис. 3.10



Рис. 3.11

Решение

1. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи, рис. 3.9:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= r + jx_L = 25 + j60 = 65 e^{j67,4^\circ} \text{ Ом,} \\ \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{25 + j60} = \frac{1}{65 e^{j67,4^\circ}} = 0,0154 e^{-j67,4^\circ} = \\ &= 0,0059 - j0,0142 \text{ См.} \end{aligned}$$

2. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи, рис. 3.10:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= r - jx_C = 25 - j30 = 39,1 e^{-j50,2^\circ} \text{ Ом,} \\ \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{25 - j30} = \frac{1}{39,1 e^{-j50,2^\circ}} = 0,0256 e^{j50,2^\circ} = \\ &= 0,0164 + j0,0196 \text{ См.} \end{aligned}$$

3. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи, рис. 3.11:

$$\underline{Z}_3 = r + jx_L - jx_C = 25 + j60 - j30 = 25 + j30 = 39,1e^{j50,2^\circ} \text{ Ом},$$

$$\begin{aligned}\underline{Y}_3 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{25 + j30} = \frac{1}{39,1e^{j50,2^\circ}} = 0,0256e^{-j50,2^\circ} = \\ &= 0,0164 - j0,0196 \text{ См}.\end{aligned}$$

Задача 3.11

Определить параметры элементов и характер цепи, состоящей из двух последовательно включенных сопротивлений r и x , если мгновенное значение напряжения на входе и ток соответственно равны: $u = 100\sqrt{2} \sin(100t + 15^\circ) \text{ В}$, $i = 3,8\sqrt{2} \sin(100t - 38^\circ) \text{ А}$.

Решение

1. Комплексы амплитудных значений напряжения и тока:

$$\underline{U}_m = 100\sqrt{2} \cdot e^{j15^\circ} \text{ В}, \quad \underline{I}_m = 3,8\sqrt{2} \cdot e^{-j38^\circ} \text{ А}.$$

2. Комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{100\sqrt{2} \cdot e^{j15^\circ}}{3,8\sqrt{2} \cdot e^{-j38^\circ}} = 26,3e^{j53^\circ} = 15,8 + j21 \text{ Ом}.$$

3. Активное сопротивление является действительной составляющей (вещественной частью) комплексного сопротивления:

$$r = \text{Re}(\underline{Z}) = \text{Re}(15,8 + j21) = 15,8 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление является мнимой составляющей комплексного сопротивления:

$$x = x_L = \text{Im}(\underline{Z}) = \text{Im}(15,8 + j21) = 21 \text{ Ом}.$$

Индуктивность

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{21}{100} = 0,21 \text{ Гн}.$$

4. Характер цепи ($r - L$) активно-индуктивный, что определяется положительным знаком перед мнимой частью комплексного сопротивления \underline{Z} цепи.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.12. Мгновенные значения напряжения и тока: $u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ В}$, $i = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ А}$. Записать комплексы для действующих значений синусоидальных функций в показательной, алгебраической и полярной формах.

- О т в е т:* 1) $\underline{U} = 220e^{-j20^\circ} \text{ В}$, $\underline{I} = 3e^{j15^\circ} \text{ А}$;
2) $\underline{U} = 206,7 - j75,2 \text{ В}$, $\underline{I} = 2,9 + j0,78 \text{ А}$;
3) $\underline{U} = 220 \angle -20^\circ \text{ В}$, $\underline{I} = 3 \angle 15^\circ \text{ А}$.

Задача 3.13. Записать выражения для мгновенных значений напряжений. Комплексы для амплитудных значений напряжений заданы в полярной форме: $\underline{U}_{1m} = 280 \angle 0^\circ \text{ В}$, $\underline{U}_{2m} = 115 \angle 36^\circ \text{ В}$, $\underline{U}_{3m} = 36 \angle -120^\circ \text{ В}$, $\underline{U}_{4m} = -127 \angle 43^\circ \text{ В}$.

- О т в е т:* $u_1 = 280 \sin \omega t \text{ В}$, $u_2 = 115 \sin(\omega t + 36^\circ) \text{ В}$,
 $u_3 = 36 \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ В}$, $u_4 = 127 \sin(\omega t + 223^\circ) \text{ В}$.

Задача 3.14. Записать выражения для мгновенных значений напряжений. Комплексы действующих значений напряжений заданы в

алгебраической форме: $\underline{U}_1 = 25 + j60 \text{ В}$, $\underline{U}_2 = 60 - j25 \text{ В}$,
 $\underline{U}_3 = -25 + j60 \text{ В}$, $\underline{U}_4 = -60 - j25 \text{ В}$.

Ответ: $u_1 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t + 67,4) \text{ В}$, $u_2 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t - 22,6^\circ) \text{ В}$,
 $u_3 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t + 112,6^\circ) \text{ В}$,
 $u_4 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t - 157,4^\circ) \text{ В}$.

Задача 3.15. Токи представлены комплексными выражениями для действующих значений: $\underline{I}_1 = \frac{40 - j36}{50 + j60} \text{ А}$, $\underline{I}_2 = \frac{230 \angle -64^\circ}{320 - j280} \text{ А}$,
 $\underline{I}_3 = \frac{(24 - j30)(4 - j12)}{260e^{-j60^\circ}} \text{ А}$, $\underline{I}_4 = \frac{120 - j150}{(3 + j6)65 \angle 43^\circ} \text{ А}$. Записать выражения для мгновенных значений токов.

Ответ: $i_1 = 0,69\sqrt{2} \sin(\omega t - 92,2^\circ) \text{ А}$,
 $i_2 = 0,54\sqrt{2} \sin(\omega t - 22,8^\circ) \text{ А}$,
 $i_3 = 1,87\sqrt{2} \sin(\omega t - 62,9^\circ) \text{ А}$,
 $i_4 = 0,44\sqrt{2} \sin(\omega t - 157,8^\circ) \text{ А}$.

Задача 3.16. Определить комплексное сопротивление участка цепи в полярной и алгебраической формах, если падение напряжения на участке и ток соответственно равны: $u_1 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ В}$,
 $i_1 = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ) \text{ А}$.

Ответ: $\underline{Z}_1 = 110 \angle -84^\circ \text{ Ом}$, $\underline{Z}_1 = 11,5 - j109,4 \text{ Ом}$.

Задача 3.17. Мгновенное значение тока задано суммой $i_1 = i_2 - i_3 + i_4$. Записать выражение для комплексной амплитуды этого

тока в показательной, полярной и алгебраической формах, если $i_2 = 1,6 \sin(\omega t + 120^\circ)$ А, $i_3 = 2,4 \sin(\omega t - 15^\circ)$ А, $i_4 = 1,2 \sin(\omega t + 30^\circ)$ А.

О т в е т: $I_{1m} = 3,3 e^{j128,6^\circ}$ А, $I_{1m} = 3,3 \sqrt{128,6^\circ}$ А,
 $I_{1m} = -2,1 + j2,6$ А.

Задача 3.18. Определить ток i , равный разности токов $i_2 - i_1$. Дано: $i_1 = 3,2 \sin(\omega t + 60^\circ)$ А и $i_2 = 4,6 \sin(\omega t + 45^\circ)$ А.

О т в е т: $i = 1,72 \sin(\omega t + 16,2^\circ)$ А.

Задача 3.19. Определить закон изменения тока через элемент цепи с комплексным сопротивлением $\underline{Z} = 112 - j58$ Ом, если закон изменения напряжения на элементе $u = 124 \sin(\omega t - 90^\circ)$ В.

О т в е т: $i = 0,98 \sin(\omega t - 62,6^\circ)$ А.

Задача 3.20. Вычислить параметры схемы из двух последовательно включенных сопротивлений, если напряжение и ток соответственно равны: $u = 300 \sin(628t + 45^\circ)$ В, $i = 1,24 \sin(628t + 86^\circ)$ А.

О т в е т: $r = 182,6$ Ом, $x = x_C = 158,7$ Ом, $C = 10$ мкФ.

Задача 3.21. Записать закон изменения напряжения на входе цепи с последовательным соединением сопротивлений, если мгновенное значение тока равно $i = 4,6 \sin(314t + 64^\circ)$ А. Дано: $r = 2,5$ Ом, $L = 4,5 \cdot 10^{-2}$ Гн, $C = 600$ мкФ.

О т в е т: $u = 42,2 \sin(314t + 138,2^\circ)$ В.

4. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА СИМВОЛИЧЕСКИМ (КОМПЛЕКСНЫМ) МЕТОДОМ

Рассматриваются приемы расчета цепей синусоидального тока, содержащих один источник напряжения или тока и смешанное соединение сопротивлений. При расчете таких цепей целесообразно использовать символический метод, основанный на использовании комплексных чисел.

Задача 4.1

Определить комплексное сопротивление цепи (рис. 4.1) относительно входных зажимов, если $r_1 = 24 \text{ Ом}$, $r_2 = 32 \text{ Ом}$, $r_3 = 15 \text{ Ом}$, $L_2 = 7,91 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$, $C_1 = 120 \text{ мкФ}$, $C_3 = 50 \text{ мкФ}$, $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$.

Решение

1. Расчет сопротивлений реактивных элементов цепи (рис. 4.1) для $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$:

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{628 \cdot 120 \cdot 10^{-6}} = 13,27 \text{ Ом},$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{628 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 31,85 \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 628 \cdot 7,91 \cdot 10^{-2} = 49,68 \text{ Ом}.$$

2. Для упрощения расчетов преобразуем схему (см. рис. 4.1) к виду, показанному на рис. 4.2. Комплексные сопротивления участков схемы, изображенной на рис. 4.2:

$$\underline{Z}_1 = r_1 - jx_{C1} = 24 - j13,27 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_{L2} = 32 + j49,68 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_{C3} = 15 - j31,85 \text{ Ом}.$$

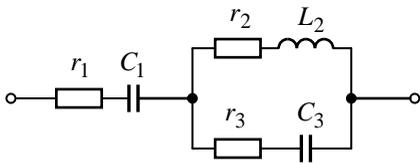


Рис. 4.1

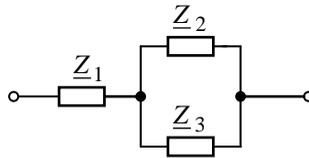


Рис. 4.2

3. Полное комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 24 - j13,27 + \frac{(32 + j49,68)(15 - j31,85)}{32 + j49,68 + 15 - j31,85} = \\ &= 24 - j13,27 + \frac{2062,3 - j274}{47 + j17,83} = 24 - j13,27 + \frac{2080,4 \angle -7,6^\circ}{50,27 \angle 20,8^\circ} = \\ &= 24 - j13,7 + 41,38 \angle -28,4^\circ = 24 - j13,27 + 36,43 - j19,64 = \\ &= 60,43 - j32,92 = 68,81 \angle -28,6^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Задача 4.2

Определить действующие и мгновенные значения токов в ветвях схемы (рис. 4.3), если $u = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ)$ В, $r_1 = 30$ Ом, $r_2 = 40$ Ом, $r_3 = 120$ Ом, $L_1 = 0,34$ Гн, $C_3 = 60$ мкФ, $\omega = 314$ с⁻¹.

Решение

1. Расчет сопротивлений реактивных элементов цепи для частоты $\omega = 314$ с⁻¹:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,34 = 106,8 \text{ Ом,}$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 60 \cdot 10^{-6}} = 53,1 \text{ Ом.}$$

2. Комплекс действующего значения напряжения на входе:

$$\underline{U} = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ} = 200 \underline{|-120^\circ} \text{ В.}$$

3. Преобразуем сопротивления отдельных последовательных участков цепи (см. рис. 4.3). Расчет токов выполним для преобразованной эквивалентной комплексной цепи (рис. 4.4).

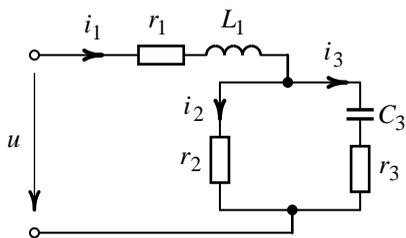


Рис. 4.3

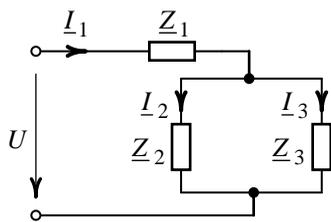


Рис. 4.4

Комплексы полных сопротивлений отдельных последовательных участков цепи:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_{L1} = 30 + j106,8 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 = 40 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_{C3} = 120 - j53,1 \text{ Ом.}$$

4. Полное комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 30 + j106,8 + \frac{40(120 - j53,1)}{40 + 120 - j53,1} = \\ &= 30 + j106,8 + \frac{5248,9 \underline{|-23,9^\circ}}{168,6 \underline{|-18,4^\circ}} = 30 + j106,8 + 31 - j3 = \\ &= 61 + j103,8 = 120,4 \underline{|59,6^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

5. Определяем комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи:

$$I_1 = \frac{U}{Z} = \frac{200 \angle -120^\circ}{120,4 \angle 59,6^\circ} = 1,66 \angle -179,6^\circ \text{ А.}$$

6. Токи I_2 и I_3 в параллельных ветвях могут быть найдены через ток I_1 в неразветвленной части:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot \frac{120 - j53,1}{160 - j53,1} = \\ &= 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot 0,78 \angle -5,5^\circ = 1,29 \angle 174,9^\circ \text{ А,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot \frac{40}{160 - j53,1} = \\ &= 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot 0,24 \angle 18,4^\circ = 0,4 \angle -161,2^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

7. Действующие значения токов:

$$I_1 = 1,66 \text{ А, } I_2 = 1,29 \text{ А, } I_3 = 0,4 \text{ А.}$$

8. Мгновенные значения токов:

$$i_1 = 1,66\sqrt{2} \sin(\omega t - 179,6^\circ) \text{ А,}$$

$$i_2 = 1,29\sqrt{2} \sin(\omega t + 174,9^\circ) \text{ А,}$$

$$i_3 = 0,4\sqrt{2} \sin(\omega t - 161,2^\circ) \text{ А.}$$

Задача 4.3

Определить действующие значения токов в ветвях схемы (рис. 4.5) и мощность, отдаваемую источником. Дано: $e = 120\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}$, $r_1 = 26 \text{ Ом}$, $r_2 = 32 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 18 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 15 \text{ Ом}$, $x_{C1} = 36 \text{ Ом}$, $x_{C2} = 12 \text{ Ом}$.

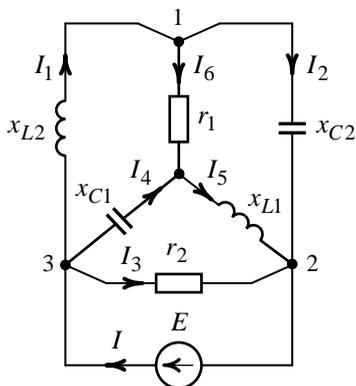


Рис. 4.5

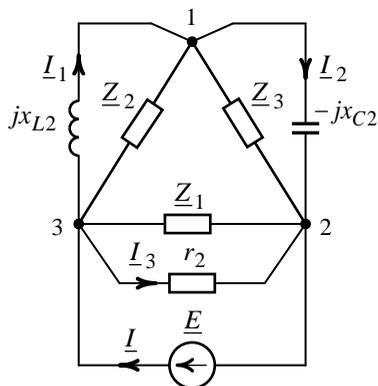


Рис. 4.6

Решение

1. Определим комплекс действующего значения источника ЭДС:

$$\underline{E} = \frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 120 \angle 0^\circ \text{ В.}$$

2. Преобразуем звезду сопротивлений r_1 , x_{C1} , x_{L1} , подключенную к точкам 1, 2 и 3 в эквивалентный треугольник (рис. 4.6).

Комплексные сопротивления эквивалентного треугольника:

$$\underline{Z}_1 = jx_{L1} - jx_{C1} + \frac{jx_{L1}(-jx_{C1})}{r_1} = j18 - j36 + \frac{j18(-j36)}{26} = 25 - j18 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_2 = r_1 - jx_{C1} + \frac{r_1(-jx_{C1})}{jx_{L1}} = 26 - j36 + \frac{26(-j36)}{j18} = -26 - j36 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_3 = r_1 + jx_{L1} + \frac{r_1 jx_{L1}}{-jx_{C1}} = 26 + j18 + \frac{26 \cdot j18}{-j36} = 13 + j18 \text{ Ом.}$$

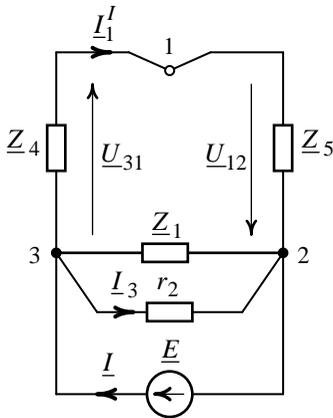


Рис. 4.7

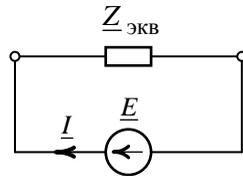


Рис. 4.8

3. Сопротивление x_{L2} соединено параллельно с Z_2 , а сопротивление x_{C2} параллельно с Z_3 (см. рис. 4.6), их общие комплексные сопротивления равны (рис. 4.7):

$$\underline{Z}_4 = \frac{jx_{L2}Z_2}{jx_{L2} + Z_2} = \frac{j15(-26 - j36)}{j15 - 26 - j36} = -5,2 + j19,2 = 19,9 \angle 105,2^\circ \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = \frac{-jx_{C2}Z_3}{-jx_{C2} + Z_3} = \frac{-j12(13 + j18)}{-j12 + 13 + j18} = 9,1 - j16,2 = 18,5 \angle -60,7^\circ \text{ Ом}.$$

4. Комплекс тока \underline{I} (см. рис. 4.7):

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \frac{120 \angle 0^\circ}{3,9 + j3} = \frac{120 \angle 0^\circ}{4,9 \angle 37,6^\circ} = 24,4 \angle -37,6^\circ \text{ А}.$$

Комплексы напряжений \underline{U}_{31} и \underline{U}_{12} :

$$\underline{U}_{31} = \underline{I} \underline{Z}_4 = 24,4 \angle -37,6^\circ \cdot 19,9 \angle 105,2^\circ = 485,6 \angle 67,6^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{I} \underline{Z}_5 = 24,4 \angle -37,6^\circ \cdot 18,5 \angle -60,7^\circ = 451,4 \angle -98,3^\circ \text{ В}.$$

5. Комплексы действующих токов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 найдем через комплексы напряжений \underline{U}_{31} и \underline{U}_{12} (см. рис. 4.6):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{31}}{jx_{L2}} = \frac{485,6 \angle 67,6^\circ}{j15} = 32,4 \angle -22,4^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{12}}{-jx_{C2}} = \frac{451,4 \angle -98,3^\circ}{-j12} = 37,6 \angle -8,3^\circ \text{ А}.$$

6. Комплекс действующего тока \underline{I}_3 :

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}}{r_2} = \frac{120 \angle 0^\circ}{32} = 3,8 \angle 0^\circ \text{ А}.$$

7. Комплекс полного сопротивления $\underline{Z}_{\text{ЭКВ}}$ всей цепи и комплекс действующего тока \underline{I} (рис. 4.8).

Согласно рис. 4.7 для $\underline{Z}_{\text{ЭКВ}}$ запишем:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} + \frac{1}{r_2},$$

откуда получим, что

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ЭКВ}} &= \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)r_2}{r_2\underline{Z}_1 + r_2(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) + \underline{Z}_1(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)} = \\ &= \frac{(25 - j18)(3,9 + j3)32}{32(25 - j18) + 32(3,9 + j3) + (25 - j18)(3,9 + j3)} = \\ &= \frac{4,9 \cdot 10^3 \angle 1,8^\circ}{1,2 \cdot 10^3 \angle -23,8^\circ} = 4,1 \angle 25,6^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Комплекс действующего тока:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{ЭКВ}}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{4,1 \angle 25,6^\circ} = 29,3 \angle -25,6^\circ \text{ А}.$$

7. Комплексы действующих значений токов звезды сопротивлений (см. рис. 4.5) определим из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3:

$$\underline{I}_4 = \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 29,3 \angle -25,6^\circ - 32,4 \angle -22,4^\circ - 3,8 \angle 0^\circ = 7,4 \angle -176,6^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I} - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 29,3 \angle -25,6^\circ - 37,6 \angle -8,3^\circ - 3,8 \angle 0^\circ = 16,3 \angle -153,6^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_6 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 32,4 \angle -22,4^\circ - 37,6 \angle -8,3^\circ = 10 \angle -136,3^\circ \text{ А}.$$

8. Окончательно для действующих значений токов имеем:

$$I = 29,3 \text{ А}, \quad I_1 = 32,4 \text{ А}, \quad I_2 = 37,6 \text{ А}, \quad I_3 = 3,8 \text{ А},$$

$$I_4 = 7,4 \text{ А}, \quad I_5 = 16,3 \text{ А}, \quad I_6 = 10 \text{ А}.$$

9. Мощность, отдаваемая источником.

Комплекс полной мощности источника:

$$\underline{S} = \underline{E} \bar{I} = 120 \angle 0^\circ \cdot 29,3 \angle +25,6^\circ = 3516 \angle 25,6^\circ = 3170,8 + j1519,2 \text{ В} \cdot \text{А},$$

где $\bar{I} = 29,3 \angle +25,6^\circ \text{ А}$ – сопряженный комплекс тока.

Активная мощность источника:

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = \text{Re}(3170,8 + j1519,2) = 3170,8 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность источника:

$$Q = \text{Im}(\underline{S}) = \text{Im}(3170,8 + j1519,2) = 1519,2 \text{ вар}.$$

Задача 4.4

Определить показания приборов электромагнитной системы в схеме (рис. 4.9), если показание амперметра A_5 соответствует току $I_5 = 1,72 \text{ А}$. Сопротивления элементов цепи заданы: $r_1 = 5 \text{ Ом}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, $r_4 = 20 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 12 \text{ Ом}$, $x_{L3} = 6 \text{ Ом}$, $x_{C4} = 15 \text{ Ом}$.

Решение

1. Обозначим токи в ветвях цепи в соответствии с установленными в схеме приборами (см. рис. 4.9).

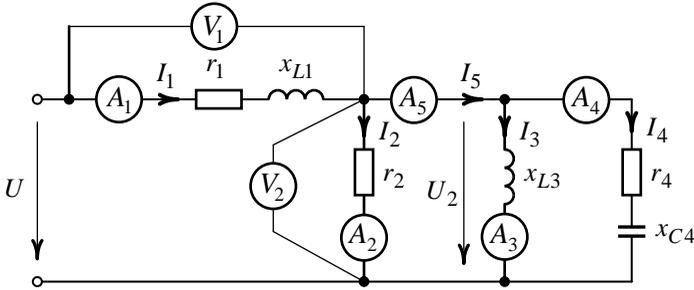


Рис. 4.9

2. Комплексы действующих значений токов \underline{I}_3 , \underline{I}_4 и показания амперметров A_3 и A_4 определим через ток $\underline{I}_5 = 1,72 \underline{0}^\circ$ А в неразветвленной части:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_5 \frac{r_4 - jx_{C4}}{r_4 - jx_{C4} + jx_{L3}} = 1,72 \underline{0}^\circ \frac{20 - j15}{20 - j15 + j6} = \\ &= 1,72 \underline{0}^\circ \cdot 1,14 \underline{-12,6}^\circ = 1,96 \underline{-12,6}^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_5 - \underline{I}_3 = 1,72 \underline{0}^\circ - 1,96 \underline{-12,6}^\circ = -0,19 + j0,42 = 0,47 \underline{114,3}^\circ \text{ А.}$$

Показания амперметров A_3 и A_4 будут соответствовать действующим значениям токов: $I_{A3} = I_3 = 1,96$ А, $I_{A4} = I_4 = 0,47$ А.

3. Комплекс действующего значения тока \underline{I}_2 и показание амперметра A_2 найдем через напряжение параллельных ветвей \underline{U}_2 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2}{r_2} = \frac{\underline{I}_3 jx_{L3}}{r_2} = \frac{1,96 \underline{-12,6}^\circ \cdot j6}{10} = \frac{1,96 \underline{-12,6}^\circ \cdot 6 \underline{90}^\circ}{10} = \\ &= 1,18 \underline{77,4}^\circ \text{ А,} \end{aligned}$$

где $\underline{U}_2 = \underline{I}_3 jx_{L3}$.

Показание амперметра A_2 будет соответствовать действующему значению тока I_2 :

$$I_{A2} = I_2 = 1,18 \text{ А}.$$

4. Комплекс действующего значения тока \underline{I}_1 и показание амперметра A_1 найдем на основании первого закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = 1,18 \underline{77,4^\circ} + 1,72 \underline{0^\circ} = \\ &= 1,98 + j1,15 = 2,29 \underline{30,2^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Показание амперметра A_1 будет соответствовать действующему значению тока I_1 :

$$I_{A1} = I_1 = 2,29 \text{ А}.$$

5. Показание вольтметра V_1 определим по закону Ома через комплекс напряжения \underline{U}_{V1} :

$$\underline{U}_{V1} = \underline{I}_1 (r_1 + jx_{L1}) = 2,29 \underline{30,2^\circ} \cdot (5 + j12) = 29,8 \underline{97,6^\circ} \text{ В}.$$

Следовательно, показание вольтметра V_1 будет соответствовать действующему значению напряжения $U_{V1} = 29,8 \text{ В}$ участка цепи.

6. Показание вольтметра V_2 равно действующему значению напряжения параллельных ветвей. По закону Ома

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_3 jx_{L3} = 1,96 \underline{-12,6^\circ} \cdot j6 = 11,8 \underline{77,4^\circ} \text{ В},$$

откуда $U_{V2} = U_2 = 11,8 \text{ В}$.

Задача 4.5

Определить действующие значения токов и напряжений всех участков цепи (рис. 4.10), применив метод пропорционального пересчета, если действующее напряжение на входе цепи $U = 230 \text{ В}$.

Дано: $r_2 = 20 \text{ Ом}$, $r_4 = 15 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 25 \text{ Ом}$, $x_{L4} = 40 \text{ Ом}$,
 $x_{L5} = 30 \text{ Ом}$, $x_{C2} = 20 \text{ Ом}$, $x_{C3} = 60 \text{ Ом}$.

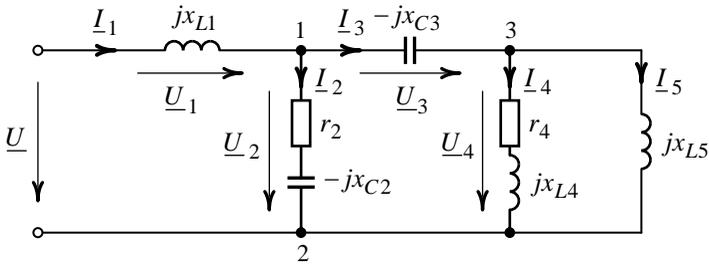


Рис. 4.10

Решение

1. Задаемся комплексным током в удаленной от источника ветви

$$\underline{I}'_5 = 1 \angle 0^\circ \text{ А.}$$

2. Напряжение параллельных ветвей на участке 3, 2:

$$\underline{U}'_4 = \underline{I}'_5 jx_{L5} = 1 \angle 0^\circ \cdot j30 = 30 \angle 90^\circ \text{ В.}$$

3. Комплекс тока \underline{I}'_4 :

$$\underline{I}'_4 = \frac{\underline{U}'_4}{r_4 + jx_{L4}} = \frac{30 \angle 90^\circ}{15 + j40} = \frac{30 \angle 90^\circ}{42,7 \angle 69,4^\circ} = 0,7 \angle 20,6^\circ \text{ А.}$$

4. Комплекс тока \underline{I}'_3 найдем по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_4 + \underline{I}'_5 = 0,7 \angle 20,6^\circ + 1 \angle 0^\circ = 1,66 + j0,25 = 1,67 \angle 8,46^\circ \text{ А.}$$

5. Напряжение на участке 1, 3:

$$\underline{U}'_3 = \underline{I}'_3 (-jx_{C3}) = 1,67 \angle 8,46^\circ \cdot (-j60) = 100,2 \angle -81,5^\circ \text{ В.}$$

6. Напряжение на участке 1, 2:

$$\underline{U}'_2 = \underline{U}'_3 + \underline{U}'_4 = 100,2 \angle -81,5^\circ + 30 \angle 90^\circ = 14,8 - j69,1 = 70,7 \angle -77,9^\circ \text{ В.}$$

7. Комплекс тока \underline{I}_2^I :

$$\underline{I}_2^I = \frac{\underline{U}_2^I}{r_2 - jx_{C2}} = \frac{70,7 \angle -77,9^\circ}{20 - j20} = \frac{70,7 \angle -77,9^\circ}{28,3 \angle -45^\circ} = 2,5 \angle -32,9^\circ \text{ А.}$$

8. Комплекс тока \underline{I}_1^I на входе цепи:

$$\underline{I}_1^I = \underline{I}_2^I + \underline{I}_3^I = 2,5 \angle -32,9^\circ + 1,67 \angle 8,46^\circ = 3,75 - j1,11 = 3,91 \angle -16,5^\circ \text{ А.}$$

9. Напряжение \underline{U}_1^I :

$$\underline{U}_1^I = \underline{I}_1^I jx_{L1} = 3,91 \angle -16,5^\circ \cdot j25 = 97,8 \angle 73,5^\circ \text{ В.}$$

10. Напряжение на входе цепи:

$$\begin{aligned} \underline{U}^I &= \underline{U}_1^I + \underline{U}_2^I = 97,8 \angle 73,5^\circ + 70,7 \angle -77,9^\circ = \\ &= 42,6 + j24,6 = 49,2 \angle 30^\circ \text{ В.} \end{aligned}$$

11. Для определения действительных значений токов и напряжений участков схемы определим коэффициент пересчета как отношение модулей действующего напряжения на входе цепи, заданного по условию задачи $U = 230 \text{ В}$, к найденному $U^I = 49,2 \text{ В}$:

$$k_{\text{пер}} = \frac{U}{U^I} = \frac{230}{49,2} = 4,67.$$

12. Действительные значения токов и напряжений участков схемы для действующих значений:

$$I_1 = I_1^I k_{\text{пер}} = 3,91 \cdot 4,67 = 18,26 \text{ А,}$$

$$I_2 = I_2^I k_{\text{пер}} = 2,5 \cdot 4,67 = 11,67 \text{ А,}$$

$$I_3 = I_3^I k_{\text{пер}} = 1,67 \cdot 4,67 = 7,8 \text{ А,}$$

$$I_4 = I_4^I k_{\text{пер}} = 0,7 \cdot 4,67 = 3,27 \text{ А,}$$

$$I_5 = I_5^I k_{\text{пер}} = 1 \cdot 4,67 = 4,67 \text{ A},$$

$$U_1 = U_1^I k_{\text{пер}} = 97,8 \cdot 4,67 = 456,7 \text{ В},$$

$$U_2 = U_2^I k_{\text{пер}} = 70,7 \cdot 4,67 = 330,2 \text{ В},$$

$$U_3 = U_3^I k_{\text{пер}} = 100,2 \cdot 4,67 = 467,9 \text{ В},$$

$$U_4 = U_4^I k_{\text{пер}} = 30 \cdot 4,67 = 140,1 \text{ В}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.6. Определить комплексное сопротивление всей цепи, схема которой показана на рис. 4.11. Дано: $r_1 = 120 \text{ Ом}$, $r_2 = 60 \text{ Ом}$, $r_3 = 200 \text{ Ом}$, $C_1 = 20 \text{ мкФ}$, $L_1 = 0,14 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

О т в е т: $\underline{Z}_{\text{вх}} = 321,2 \angle 23,8^\circ \text{ Ом}$.

Задача 4.7. Определить комплексное сопротивление всей цепи (рис. 4.12), если сопротивления элементов цепи при заданной частоте источника питания: $r_1 = 3 \text{ Ом}$, $r_2 = 6 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 2 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 4 \text{ Ом}$, $x_{L3} = 8 \text{ Ом}$, $x_{C1} = 5 \text{ Ом}$.

О т в е т: $\underline{Z}_{\text{вх}} = 6,2 \angle -46,4^\circ \text{ Ом}$.

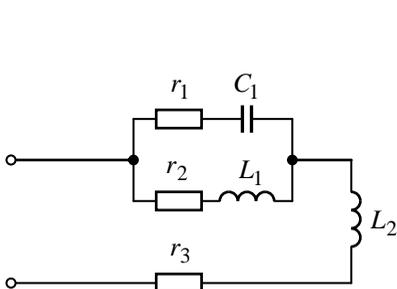


Рис. 4.11

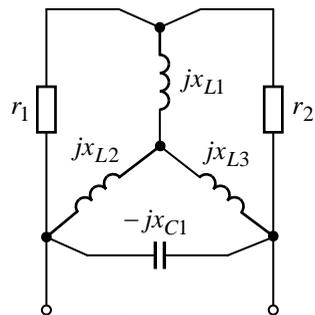


Рис. 4.12

Задача 4.8. Определить комплексы действующих значений токов цепи (рис. 4.13), если мгновенное значение напряжения на входе схемы составляет $u = 60\sqrt{2} \sin(\omega t + 32^\circ)$ В. Дано: $r_1 = 28$ Ом, $x_{L1} = 16$ Ом, $x_{L2} = 36$ Ом, $x_{C1} = 12$ Ом.

О т в е т: $I_1 = 1,52 \angle -15,5^\circ$ А, $I_2 = 1,26 \angle -79,3^\circ$ А, $I_3 = 1,48 \angle 33,9^\circ$ А.

Задача 4.9. Определить показания приборов электромагнитной системы и активную мощность всей цепи, схема которой изображена на рис. 4.14, если $U = 36$ В, $r_1 = 21$ Ом, $r_2 = 15$ Ом, $x_{L1} = 10$ Ом, $x_{C1} = 26$ Ом.

О т в е т: $I_{A1} = 1,2$ А, $I_{A2} = 0,82$ А, $I_{A3} = 0,87$ А, $P = 41,8$ Вт.

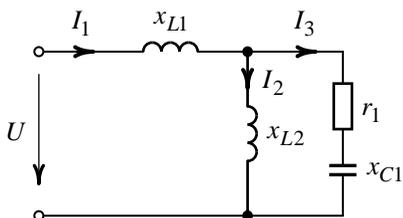


Рис. 4.13

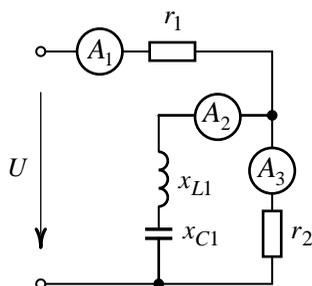


Рис. 4.14

Задача 4.10. В схеме (рис. 4.15) включены приборы электромагнитной системы. Определить показания приборов, если вольтметр V_2 показывает напряжение $U_{V2} = 24,5$ В. Дано: $r_1 = 120$ Ом, $x_{L1} = 60$ Ом, $x_{C1} = 90$ Ом, $x_{C2} = 30$ Ом.

О т в е т: $I_{A1} = 0,82$ А, $I_{A2} = 0,66$ А, $I_{A3} = 0,49$ А, $U_{V1} = 41,9$ В.

Задача 4.11. Определить комплекс действующего значения источника ЭДС на входе цепи (рис. 4.16), если комплекс тока $I_3 = 6 + j8$ А. Дано: $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 3$ Ом, $x_{L1} = 6$ Ом, $x_{C1} = 12$ Ом.

О т в е т: $\underline{E} = 68,1 \angle 125^\circ$ В.

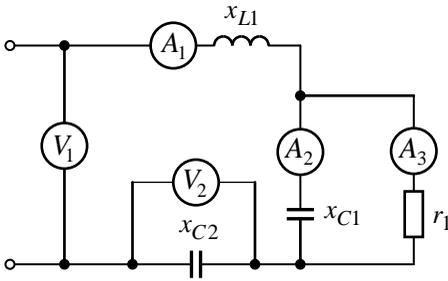


Рис. 4.15

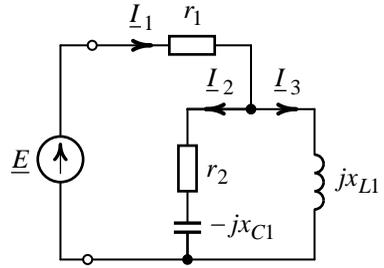


Рис. 4.16

Задача 4.12. Установить мгновенное значение тока источника, питающего схему (рис. 4.17), если комплекс действующего значения тока через емкость составляет $\underline{I}_C = 3 + j3$ А. Дано: $r = 100$ Ом, $x_L = 120$ Ом, $x_C = 200$ Ом.

О т в е т: $i_k = 8,94\sqrt{2} \sin(\omega t - 63,4^\circ)$ А.

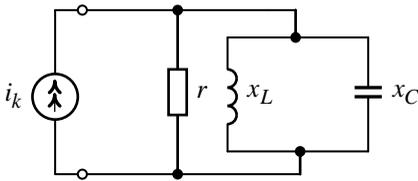


Рис. 4.17

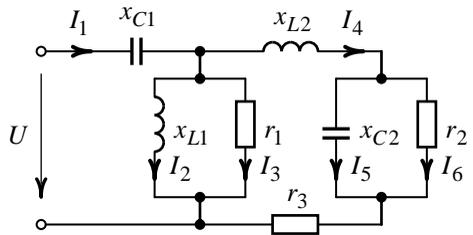


Рис. 4.18

Задача 4.13. Методом пропорционального пересчета найти действующие значения токов в ветвях схемы, рис. 4.18 (задаться током в ветви с сопротивлением r_2 , равным 1 А). Дано: $U = 300$ В, $r_1 = 125$ Ом, $r_2 = 200$ Ом, $r_3 = 160$ Ом, $x_{L1} = 100$ Ом, $x_{L2} = 110$ Ом, $x_{C1} = 60$ Ом, $x_{C2} = 130$ Ом.

О т в е т: $k_{\text{пер}} = 0,882$, $I_1 = 5,81$ А, $I_2 = 3,57$ А, $I_3 = 2,86$ А,
 $I_4 = 1,62$ А, $I_5 = 1,36$ А, $I_6 = 0,88$ А.

5. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Все известные способы расчета резистивных цепей на постоянном токе применимы в комплексной форме к расчету цепей синусоидального тока. Сущность символического (комплексного) метода состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений цепи, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями, к алгебраическим уравнениям относительно комплексных токов, напряжений и ЭДС.

Задача 5.1

По законам Кирхгофа рассчитать действующие и мгновенные значения токов в ветвях схемы цепи, изображенной на рис. 5.1. Выполнить проверку расчетов по балансу мощностей и построить топографическую диаграмму.

Дано: $e_1 = 130\sqrt{2} \sin(200t + 90^\circ)$ В, $e_2 = 200\sqrt{2} \sin(200t + 180^\circ)$ В,
 $e_3 = 100\sqrt{2} \sin 200t$ В, $r_1 = 101$ Ом, $r_2 = 139$ Ом, $L_1 = 0,5$ Гн,
 $L_2 = 1,0$ Гн, $C_1 = 25$ мкФ, $C_2 = 50$ мкФ.

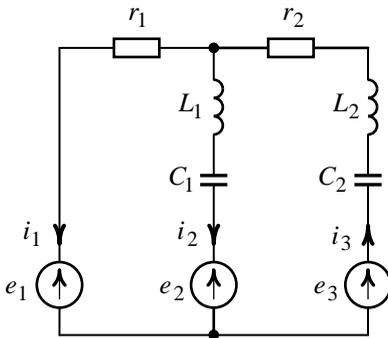


Рис. 5.1

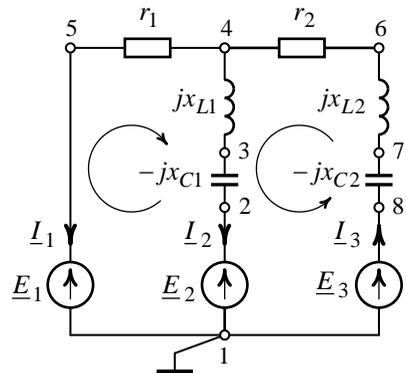


Рис. 5.2

Решение

1. Решение получим для схемы (рис. 5.2), приведенной относительно комплексных значений величин. Положительные направления комплексов действующих значений токов выбраны по направлению их мгновенных значений (см. рис. 5.1).

2. Сопротивления реактивных элементов для частоты питающих схему источников $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 200 \cdot 0,5 = 100 \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 200 \cdot 1 = 200 \text{ Ом},$$

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{200 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ Ом},$$

$$x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{200 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

3. Комплексы действующих значений источников ЭДС:

$$\underline{E}_1 = \frac{130\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = 130 \underline{90^\circ} = j130 \text{ В},$$

$$\underline{E}_2 = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j180^\circ} = 200 \underline{180^\circ} = -200 \text{ В},$$

$$\underline{E}_3 = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 100 \underline{0^\circ} = 100 \text{ В}.$$

4. Схема (см. рис. 5.2) содержит три ветви ($m_b = 3$), два узла ($n_y = 2$).

Достаточное количество уравнений для расчета цепи по законам Кирхгофа равно трем.

По первому закону Кирхгофа: $N_1 = n_y - 1 = 1$.

По второму закону Кирхгофа: $N_2 = m_b - (n_y - 1) = 2$.

Положительные направления обхода независимых контуров указаны на рис. 5.2.

5. Система уравнений, составленных по законам Кирхгофа в символической форме для цепи (см. рис. 5.2), имеет вид

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \\ -\underline{I}_1 r_1 + \underline{I}_2 (jx_{L1} - jx_{C1}) = \underline{E}_1 - \underline{E}_2, \\ \underline{I}_2 (jx_{L1} - jx_{C1}) + \underline{I}_3 (r_2 + jx_{L2} - jx_{C2}) = \underline{E}_3 - \underline{E}_2. \end{cases}$$

6. После подстановки числовых значений сопротивлений и ЭДС получим:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \\ -\underline{I}_1 \cdot 101 + \underline{I}_2 (-j100) = 200 + j130, \\ \underline{I}_2 (-j100) + \underline{I}_3 (139 + j100) = 300. \end{cases}$$

7. Решение системы получим с помощью определителей по методу Крамера.

Главный определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -101 - j100 & 0 & 0 \\ 0 & -j100 & (139 + j100) \end{vmatrix} = \\ &= (2,404 - j1,39)10^4. \end{aligned}$$

Дополнительные определители системы:

$$\begin{aligned} \Delta_1(j\omega) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ (200 + j130) - j100 & 0 & 0 \\ 300 & -j100 & (139 + j100) \end{vmatrix} = \\ &= (-2,78 - j4,807)10^4, \end{aligned}$$

$$\Delta_2(j\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -101(200 + j130) & 0 & 0 \\ 0 & 300 & (139 + j100) \end{vmatrix} =$$

$$=(4,51 + j3,807)10^4.$$

$$\Delta_3(j\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -101 - j100 & (200 + j130) & \\ 0 & -j100 & 300 \end{vmatrix} =$$

$$=(1,73 - j1,0)10^4.$$

8. Комплексы действующих токов ветвей:

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \frac{-(2,78 + j4,807)10^4}{(2,404 - j1,39)10^4} = 2 \angle_{-90^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \frac{(4,51 + j3,807)10^4}{(2,404 - j1,39)10^4} = 2,125 \angle_{70^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\Delta_3(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \frac{(1,73 - j1,0)10^4}{(2,404 - j1,39)10^4} = 0,72 \angle_{0^\circ} \text{ A}.$$

9. Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = 2 \text{ A}, \quad I_2 = 2,125 \text{ A}, \quad I_3 = 0,72 \text{ A}.$$

10. Мгновенные значения токов ветвей:

$$i_1 = 2\sqrt{2} \sin(200t - 90^\circ) \text{ A}, \quad i_2 = 2,125\sqrt{2} \sin(200t + 70^\circ) \text{ A},$$

$$i_3 = 0,72\sqrt{2} \sin 200t \text{ A}.$$

11. Проверка решения по балансу мощностей:
мощность, развиваемая источниками:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = -\underline{E}_1 \bar{I}_1 - \underline{E}_2 \bar{I}_2 + \underline{E}_3 \bar{I}_3 =$$

$$= -130 \angle_{90^\circ} \cdot 2 \angle_{+90^\circ} - 200 \angle_{180^\circ} \cdot 2,125 \angle_{-70^\circ} + 100 \angle_{0^\circ} \cdot 0,72 \angle_{0^\circ} =$$

$$= 622,4 \angle_{-39,9^\circ} = 477,4 - j399,4 \text{ B} \cdot \text{A};$$

потребляемая мощность:

$$\begin{aligned}\underline{S}_{\text{потр}} &= I_1^2 r_1 + I_2^2 (jx_{L1} - jx_{C1}) + I_3^2 (r_2 + jx_{L2} - jx_{C2}) = \\ &= 2^2 \cdot 101 + 2,125^2 (-j100) + 0,72^2 (139 + j100) = \\ &= 476,1 - j399,7 \text{ В} \cdot \text{А}.\end{aligned}$$

Баланс мощностей примерно сходится: $\underline{S}_{\text{ист}} \approx \underline{S}_{\text{потр}}$.

12. Топографическая диаграмма напряжений.

Для построения данной диаграммы необходимо определить геометрическое место потенциала каждой точки на комплексной плоскости.

Пусть в схеме (см. рис. 5.2) потенциал узловой точки 1 равен $\underline{\varphi}_1 = 0 \text{ В}$.

Тогда комплексные потенциалы обозначенных в схеме точек:

$$\underline{\varphi}_2 = \underline{\varphi}_1 + \underline{E}_2 = 0 - 200 = -200 \text{ В},$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_3 &= \underline{\varphi}_2 + \underline{I}_2 (-jx_{C1}) = -200 + 2,125 \underline{70^\circ} \cdot (-j200) = \\ &= 246,7 \underline{-36,1^\circ} = 199,4 - j145,4 \text{ В},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_4 &= \underline{\varphi}_3 + \underline{I}_2 jx_{L1} = 199,4 - j145,4 + 2,125 \underline{70^\circ} \cdot j100 = \\ &= 72,7 \underline{-90^\circ} = -j72,7 \text{ В},\end{aligned}$$

$$\underline{\varphi}_5 = \underline{\varphi}_4 - \underline{I}_1 r_1 = -j72,7 - 2 \underline{-90^\circ} \cdot 101 = 129,3 \underline{90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{\varphi}_1 = \underline{\varphi}_5 - \underline{E}_1 = 129,3 \underline{90^\circ} - 130 \underline{90^\circ} \approx 0 \text{ В}.$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_6 &= \underline{\varphi}_4 + \underline{I}_3 r_2 = -j72,7 + 0,72 \underline{0^\circ} \cdot 139 = 123,7 \underline{-36^\circ} = \\ &= 100 - j72,7 \text{ В},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_7 &= \underline{\varphi}_6 + \underline{I}_3 jx_{L2} = 100 - j72,7 + 0,72 \underline{0^\circ} \cdot j200 = \\ &= 122,8 \underline{35,5^\circ} = 100 + j71,3 \text{ В},\end{aligned}$$

$$\underline{\varphi}_8 = \underline{\varphi}_7 + \underline{I}_3(-jx_{C2}) = 100 + j71,3 + 0,72 \underline{0}^\circ \cdot (-j100) = 100 \underline{0}^\circ \text{ В},$$

$$\underline{\varphi}_1 = \underline{\varphi}_8 - \underline{E}_3 = 100 \underline{0}^\circ - 100 \underline{0}^\circ = 0 \text{ В}.$$

Топографическая диаграмма напряжений, построенная на комплексной плоскости, изображена на рис. 5.3.

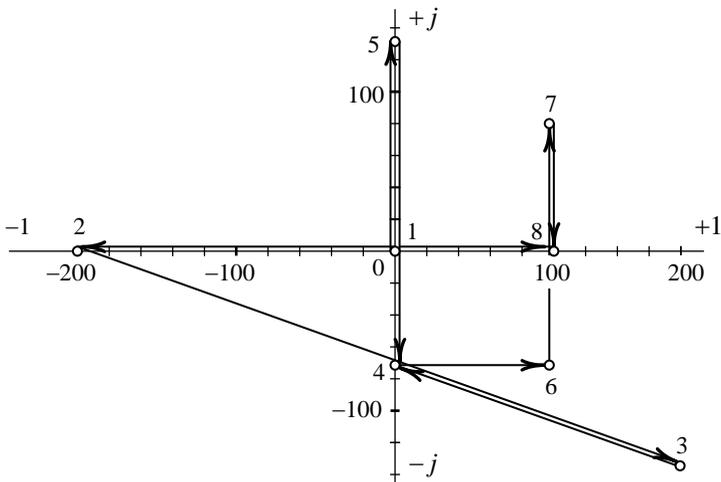


Рис. 5.3

Задача 5.2

Определить комплексы действующих значений токов в схеме цепи (рис. 5.4) методом наложения, если $\underline{E} = 200 \underline{160}^\circ \text{ В}$, $\underline{I}_k = 4 \underline{-30}^\circ \text{ А}$, $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $r_2 = 60 \text{ Ом}$, $x_C = 100 \text{ Ом}$, $x_L = 30 \text{ Ом}$.

Решение

1. За положительные направления комплексов действующих токов в ветвях цепи принимаем направления, указанные на рис. 5.4.

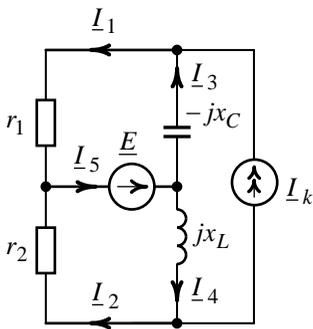


Рис. 5.4

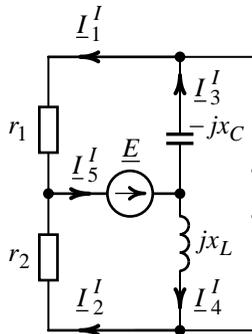


Рис. 5.5

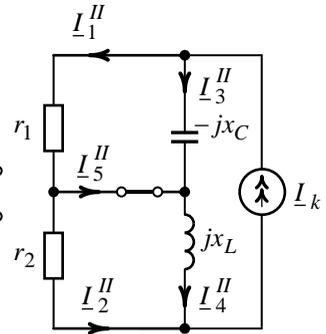


Рис. 5.6

2. Определяем комплексы частичных токов $\underline{I}_1^I - \underline{I}_5^I$ от действия источника ЭДС $\underline{E} = 200 \angle 160^\circ$ В при $\underline{I}_k = 0$ (рис. 5.5):

$$\underline{I}_1^I = \underline{I}_3^I = \frac{\underline{E}}{r_1 - jx_C} = \frac{200 \angle 160^\circ}{20 - j100} = 1,96 \angle -121,3^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2^I = \underline{I}_4^I = \frac{\underline{E}}{r_2 + jx_L} = \frac{200 \angle 160^\circ}{60 + j30} = 2,98 \angle 133,4^\circ \text{ А.}$$

По первому закону Кирхгофа найдем \underline{I}_5^I :

$$\underline{I}_5^I = \underline{I}_1^I + \underline{I}_2^I = 1,96 \angle -121,3^\circ + 2,98 \angle 133,4^\circ = 3,1 \angle 170,9^\circ \text{ А.}$$

3. Определим комплексы частичных токов $\underline{I}_1^{II} - \underline{I}_5^{II}$ от действия источника тока $\underline{I}_k = 4 \angle -30^\circ$ А при $\underline{E} = 0$ (рис. 5.6):

$$\underline{I}_1^{II} = \underline{I}_k \frac{-jx_C}{r_1 - jx_C} = 4 \angle -30^\circ \frac{-j100}{20 - j100} = 3,92 \angle -41,3^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2^{II} = \underline{I}_k \frac{jx_L}{r_2 + jx_L} = 4 \angle -30^\circ \frac{j30}{60 + j30} = 1,79 \angle 33,4^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_3^H = \underline{I}_k \frac{r_1}{r_1 - jx_C} = 4 \angle -30^\circ \frac{20}{20 - j100} = 0,78 \angle 48,7^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_4^H = \underline{I}_k \frac{r_2}{r_2 + jx_L} = 4 \angle -30^\circ \frac{60}{60 + j30} = 3,58 \angle -56,6^\circ \text{ A}.$$

По первому закону Кирхгофа для тока \underline{I}_5^H получим:

$$\underline{I}_5^H = \underline{I}_1^H - \underline{I}_2^H = 3,92 \angle -41,3^\circ - 1,79 \angle 33,4^\circ = 3,85 \angle -67,9^\circ \text{ A}.$$

4. Комплексы действующих значений токов исходной схемы (рис. 5.4) от действия обоих источников определим, как алгебраическую сумму частичных токов от действия каждого источника в отдельности (см. рис. 5.5 и 5.6):

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_1^I + \underline{I}_1^H = 1,96 \angle -121,3^\circ + 3,92 \angle -41,3^\circ = 1,93 - j4,26 = \\ &= 4,68 \angle -65,7^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_2^I - \underline{I}_2^H = 2,98 \angle 133,4^\circ - 1,79 \angle 33,4^\circ = -3,54 + j1,18 = \\ &= 3,73 \angle 161,6^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_3^I - \underline{I}_3^H = 1,96 \angle -121,3^\circ - 0,78 \angle 48,7^\circ = -1,53 - j2,26 = \\ &= 2,73 \angle -124,1^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_4 &= \underline{I}_4^I + \underline{I}_4^H = 2,98 \angle 133,4^\circ + 3,58 \angle -56,6^\circ = -0,08 - j0,82 = \\ &= 0,83 \angle -95,3^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_5 &= \underline{I}_5^I + \underline{I}_5^H = 3,1 \angle 170,9^\circ + 3,85 \angle -67,9^\circ = -1,61 - j3,08 = \\ &= 3,47 \angle -117,7^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

Задача 5.3

Методом контурных токов определить показания амперметров, установленных в ветвях цепи (рис. 5.7).

Дано: $e_1 = 118\sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ)$ В, $e_2 = 76\sqrt{2} \sin(1000t - 90^\circ)$ В,
 $i_k = 5\sqrt{2} \sin(1000t + 180^\circ)$ А, $r_1 = 3$ Ом, $L_1 = 0,008$ Гн, $L_2 = 0,005$ Гн,
 $C_1 = 250$ мкФ, $C_2 = 500$ мкФ.

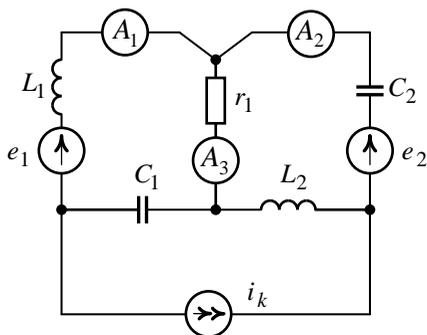


Рис. 5.7

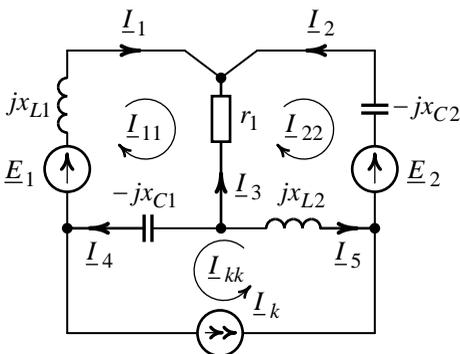


Рис. 5.8

Решение

1. Для решения воспользуемся расчетной схемой (рис. 5.8), приведенной в комплексных величинах, где комплексные сопротивления реактивных элементов для $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ соответственно равны:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 1000 \cdot 0,008 = 8 \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 1000 \cdot 0,005 = 5 \text{ Ом},$$

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{1000 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 4 \text{ Ом},$$

$$x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{1000 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ Ом}.$$

Комплексы действующих значений источников:

$$\underline{E}_1 = \frac{118\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = 118 \underline{90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_2 = \frac{76\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} = 76 \underline{-90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I}_k = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j180^\circ} = -5 \underline{0^\circ} \text{ А}.$$

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи по методу контурных токов равно двум:

$$N_2 = m_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) - n_{\text{т}} = 6 - (4 - 1) - 1 = 2.$$

Независимые контуры и направления протекания токов \underline{I}_{11} , \underline{I}_{22} обозначены на рис. 5.8. Для ветви с источником тока \underline{I}_k создадим дополнительный контур с контурным током \underline{I}_{kk} , совпадающим с направлением действия источника.

3. Система контурных уравнений, записанная относительно комплексов действующих значений контурных токов, в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(\underline{r}_1 - jx_{C1} + jx_{L1}) - \underline{I}_{22}\underline{r}_1 + \underline{I}_{kk}(-jx_{C1}) = \underline{E}_1, \\ \underline{I}_{22}(\underline{r}_1 - jx_{C2} + jx_{L2}) - \underline{I}_{11}\underline{r}_1 + \underline{I}_{kk}jx_{L2} = -\underline{E}_2. \end{cases}$$

4. После подстановки числовых значений система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(3 + j4) - \underline{I}_{22} \cdot 3 = j98, \\ -\underline{I}_{11} \cdot 3 + \underline{I}_{22}(3 + j3) = j101. \end{cases}$$

5. Решение системы получим с помощью определителей.

Главный определитель системы:

$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} (3 + j4) & -3 \\ -3 & (3 + j3) \end{vmatrix} = -12 + j21 = 24,19 \underline{119,7^\circ}.$$

Алгебраические дополнения:

$$\Delta_{11}(j\omega) = \begin{vmatrix} j98 & -3 \\ j101 & (3+j3) \end{vmatrix} = -294 + j597 = 665,47 \underline{116,2^\circ},$$

$$\Delta_{22}(j\omega) = \begin{vmatrix} (3+j4) & j98 \\ -3 & j101 \end{vmatrix} = -404 + j597 = 720,85 \underline{124,1^\circ}.$$

6. Комплексы действующих значений контурных токов:

$$\underline{I}_{11} = \frac{\Delta_{11}(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \frac{665,47 \underline{116,2^\circ}}{24,19 \underline{119,7^\circ}} = 27,51 \underline{-3,5^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_{22} = \frac{\Delta_{22}(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \frac{720,85 \underline{124,1^\circ}}{24,19 \underline{119,7^\circ}} = 29,8 \underline{4,4^\circ} \text{ A}.$$

7. Комплексы действующих значений действительных токов в местах установки амперметров:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 27,51 \underline{-3,5^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{22} = 29,8 \underline{-175,6^\circ} \text{ A},$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_{22} - \underline{I}_{11} = 29,8 \underline{4,4^\circ} - 27,51 \underline{-3,5^\circ} = \\ &= 2,26 + j3,95 = 4,55 \underline{60,3^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

8. Показания амперметров A_1 , A_2 и A_3 будут соответствовать токам ветвей:

$$I_{A1} = |\underline{I}_1| = 27,51 \text{ A},$$

$$I_{A2} = |\underline{I}_2| = 29,8 \text{ A},$$

$$I_{A3} = |\underline{I}_3| = 4,55 \text{ A}.$$

Задача 5.4

Определить мгновенное напряжение между узловыми точками 1 и 3 цепи (рис. 5.9) методом узловых потенциалов, если $e_1 = 400 \sin 250t$ В, $e_2 = 600 \sin(250t + 90^\circ)$ В, $r_1 = 250$ Ом, $r_2 = 200$ Ом, $L_1 = 0,5$ Гн, $L_2 = 0,2$ Гн, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 40$ мкФ.

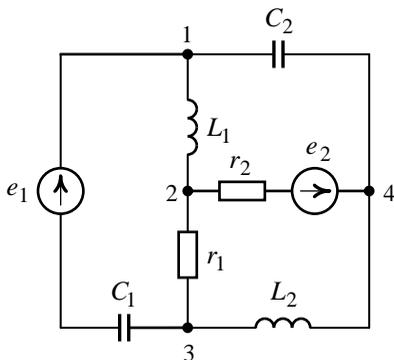


Рис. 5.9

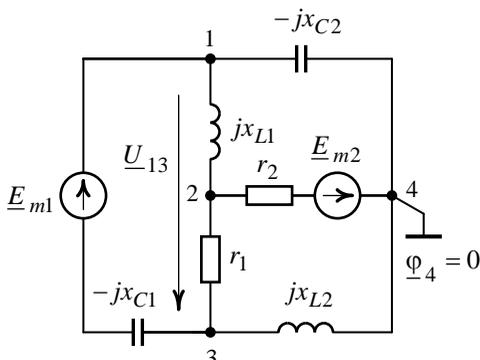


Рис. 5.10

Решение

1. Расчет цепи целесообразно выполнить для комплексов амплитудных значений потенциалов узлов. Воспользуемся расчетной схемой (рис. 5.10), приведенной в комплексных величинах. Сопротивления реактивных элементов расчетной схемы для $\omega = 250 \text{ с}^{-1}$:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 250 \cdot 0,5 = 125 \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 250 \cdot 0,2 = 50 \text{ Ом},$$

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{250 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ Ом},$$

$$x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{250 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

Комплексы амплитудных значений источников:

$$\underline{E}_{m1} = 400e^{j0^\circ} = 400 \text{ В},$$

$$\underline{E}_{m2} = 600e^{j90^\circ} = j600 \text{ В}.$$

2. Цепь содержит четыре узла ($n_y = 4$). Достаточное количество уравнений для расчета цепи по методу узловых потенциалов равно трем:

$$N_1 = n_y - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Потенциал узла 4 (см. рис. 5.10) принимаем равным нулю ($\varphi_{m4} = 0$).

3. Система уравнений для определения комплексов амплитудных значений потенциалов φ_{m1} , φ_{m2} и φ_{m3} (узлы 1, 2 и 3) будет иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_{m1} \left(\frac{1}{-jx_{C1}} + \frac{1}{jx_{L1}} + \frac{1}{-jx_{C2}} \right) - \varphi_{m2} \frac{1}{jx_{L1}} - \varphi_{m3} \frac{1}{-jx_{C1}} = \frac{\underline{E}_{m1}}{-jx_{C1}}, \\ \varphi_{m2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{jx_{L1}} \right) - \varphi_{m1} \frac{1}{jx_{L1}} - \varphi_{m3} \frac{1}{r_1} = \frac{-\underline{E}_{m2}}{r_2}, \\ \varphi_{m3} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{jx_{L2}} + \frac{1}{-jx_{C1}} \right) - \varphi_{m1} \frac{1}{-jx_{C1}} - \varphi_{m2} \frac{1}{r_1} = \frac{-\underline{E}_{m1}}{-jx_{C1}}. \end{cases}$$

4. Приведем систему к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-jx_{C1}} + \frac{1}{jx_{L1}} + \frac{1}{-jx_{C2}} \right) & -\frac{1}{jx_{L1}} & \frac{1}{jx_{C1}} \\ -\frac{1}{jx_{L1}} & \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{jx_{L1}} \right) & -\frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{jx_{C1}} & -\frac{1}{r_1} & \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{jx_{L2}} + \frac{1}{-jx_{C1}} \right) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_{m1} \\ \underline{\varphi}_{m2} \\ \underline{\varphi}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{E}_{m1}}{-jx_{C1}} \\ -\frac{\underline{E}_{m2}}{r_2} \\ \frac{-\underline{E}_{m1}}{-jx_{C1}} \end{bmatrix}.$$

5. После подстановки числовых значений получим:

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{-j200} + \frac{1}{125} + \frac{1}{-100} \right) & -\frac{1}{j125} & \frac{1}{j200} \\ -\frac{1}{j125} & \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{250} + \frac{1}{j125} \right) & -\frac{1}{250} \\ -\frac{1}{j200} & -\frac{1}{250} & \left(\frac{1}{250} + \frac{1}{j50} + \frac{1}{-j200} \right) \end{array} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_{m1} \\ \underline{\varphi}_{m2} \\ \underline{\varphi}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400}{-j200} \\ -\frac{j600}{200} \\ \frac{400}{j200} \end{bmatrix}.$$

6. Из решения системы относительно комплексов амплитудных значений потенциалов узлов получим:

$$\underline{\varphi}_{m1} = 145,95 \angle 68,3^\circ \text{ В}, \quad \underline{\varphi}_{m2} = 318,68 \angle -22,6^\circ \text{ В}, \quad \underline{\varphi}_{m3} = 146,53 \angle -2,3^\circ \text{ В}.$$

7. Комплекс амплитудного значения напряжения между узловыми точками 1 и 3 найдем как разность комплексных потенциалов $\underline{\varphi}_{m1}$ и $\underline{\varphi}_{m3}$:

$$\underline{U}_{m13} = \underline{\varphi}_{m1} - \underline{\varphi}_{m3} = 145,95 \angle 68,3^\circ - 146,53 \angle -2,3^\circ = 168,93 \angle 123,2^\circ \text{ В}.$$

8. Мгновенное напряжение между узловыми точками 1 и 3:

$$u_{13} = 168,93 \sin(\omega t + 123,2^\circ) \text{ В.}$$

Задача 5.5

Определить комплекс действующего тока \underline{I} в ветви с сопротивлением r_3 схемы (рис. 5.11) методом эквивалентного генератора.

Дано: $I_k = 10 \angle 115^\circ \text{ А}$, $r_1 = 120 \text{ Ом}$, $r_2 = 260 \text{ Ом}$, $r_3 = 210 \text{ Ом}$, $x_C = 110 \text{ Ом}$, $x_L = 320 \text{ Ом}$.

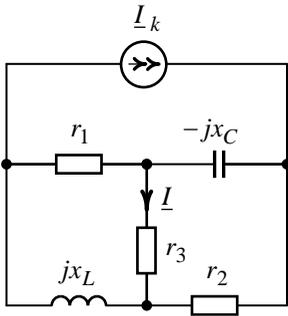


Рис. 5.11

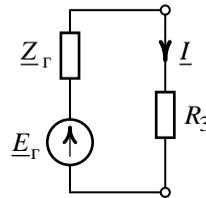


Рис. 5.12

Решение

1. Выделим ветвь с сопротивлением r_3 , а всю оставшуюся цепь относительно выделенной ветви с током заменим эквивалентным генератором с комплексным источником ЭДС, равным \underline{E}_Γ , и комплексным сопротивлением \underline{Z}_Γ (рис. 5.12).

Согласно схеме (см. рис. 5.12) ток в интересующей ветви определится как

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_\Gamma}{\underline{Z}_\Gamma + r_3}.$$

2. Комплексную ЭДС генератора (\underline{E}_r) найдем как комплекс действующего напряжения \underline{U}_x в разомкнутой ветви с сопротивлением r_3 (рис. 5.13):

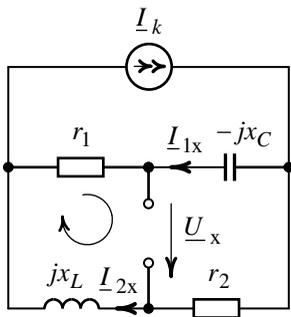


Рис. 5.13

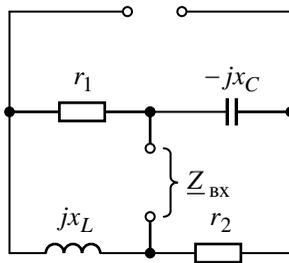


Рис. 5.14

Предварительно рассчитаем токи \underline{I}_{1x} , \underline{I}_{2x} (см. рис. 5.13):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1x} &= \underline{I}_k \frac{r_2 + jx_L}{r_1 - jx_C + r_2 + jx_L} = 10 \angle 115^\circ \frac{260 + j320}{120 - j110 + 260 + j320} = \\ &= 10 \angle 115^\circ \frac{412,31 \angle 50,9^\circ}{434,17 \angle 28,9^\circ} = 9,5 \angle 137^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{2x} = \underline{I}_k - \underline{I}_{1x} = 10 \angle 115^\circ - 9,5 \angle 137^\circ = 3,75 \angle 43,5^\circ \text{ A.}$$

На основании второго закона Кирхгофа для обозначенного в схеме (см. рис. 5.13) контура получим:

$$-\underline{I}_{1x}r_1 + \underline{U}_x + \underline{I}_{2x}jx_L = 0,$$

откуда определим напряжение \underline{U}_x , равное \underline{E}_r :

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= \underline{I}_{1x}r_1 - \underline{I}_{2x}jx_L = 9,5 \angle 137^\circ \cdot 120 - 3,75 \angle 43,5^\circ \cdot 320 \angle 90^\circ = \\ &= 93,29 \angle -94,7^\circ \text{ В.} \end{aligned}$$

3. Определим комплексное входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\Gamma}$ относительно выводов разомкнутой ветви (рис. 5.14), учитывая при этом, что внутреннее сопротивление идеального источника тока равно бесконечности:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{вх}} &= \frac{(r_1 + jx_L)(r_2 - jx_C)}{r_1 + jx_L + r_2 - jx_C} = \frac{(120 + j320)(260 - j110)}{380 + j210} = \\ &= 222,23 \angle 17,6^\circ \text{ Ом}.\end{aligned}$$

4. Заданный в ветви с сопротивлением r_3 ток:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_{\text{вх}} + r_3} = \frac{93,29 \angle -94,7^\circ}{222,23 \angle 17,6^\circ + 210} = 0,22 \angle -103,7^\circ \text{ А}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.6. Пользуясь законами Кирхгофа, определить показания приборов электромагнитной системы цепи (рис. 5.15), если $e_1 = 145\sqrt{2} \sin(500t + 60^\circ)$ В, $e_2 = 78\sqrt{2} \sin(500t - 15^\circ)$ В, $r_1 = 36$ Ом, $r_2 = 24$ Ом, $L = 0,064$ Гн, $C = 100$ мкФ.

О т в е т: $I_A = 2,38$ А, $U_V = 135,2$ В.

Задача 5.7. Рассчитать с использованием законов Кирхгофа комплексы действующих токов в ветвях схемы, изображенной на рис. 5.16. Дано: $\underline{E}_1 = 30 \angle 20^\circ$ В, $\underline{E}_2 = 110 \angle -120^\circ$ В, $\underline{I}_k = 1,2 \angle 90^\circ$ А, $x_L = 100$ Ом, $x_C = 150$ Ом.

О т в е т: $\underline{I}_1 = 2,86 \angle -137,5^\circ$ А, $\underline{I}_2 = 2,24 \angle 19,2^\circ$ А.

Задача 5.8. Методом наложения определить комплексы действующих значений токов цепи, изображенной на рис. 5.17, если $\underline{E} = 35 \angle 90^\circ$ В, $\underline{I}_k = 3 \angle -90^\circ$ А, $r = 24$ Ом, $x_L = 12$ Ом, $x_C = 36$ Ом.

О т в е т: $\underline{I}_1 = 4,42 \angle 34,8^\circ$ А, $\underline{I}_2 = 2,92 \angle 180^\circ$ А, $\underline{I}_3 = 0,85 \angle -33,7^\circ$ А,
 $\underline{I}_4 = 2,62 \angle 74,3^\circ$ А.

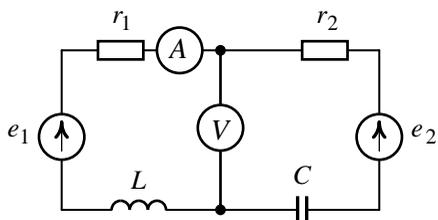


Рис. 5.15

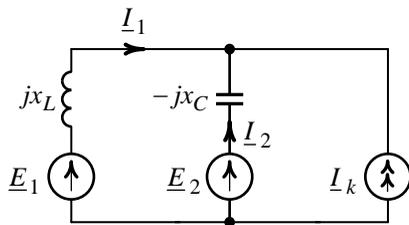


Рис. 5.16

Задача 5.9. Методом наложения определить ток амперметра, установленного в цепи, схема которой изображена на рис. 5.18, если $\underline{E}_1 = 200|0^\circ$ В, $\underline{E}_2 = 60|90^\circ$ В, $x_{L1} = 40$ Ом, $x_{L2} = 20$ Ом, $x_C = 15$ Ом.

О т в е т: $I_A = 46,65$ А.

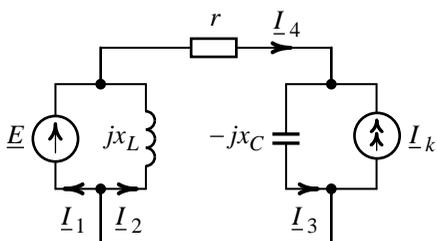


Рис. 5.17

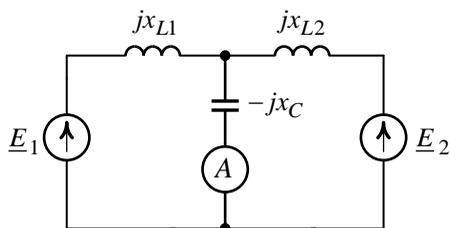


Рис. 5.18

Задача 5.10. Требуется рассчитать комплексы действующих значений контурных токов, обозначенных на схеме (рис. 5.19), если $\underline{E} = 450|45^\circ$ В, $\underline{I}_k = 12|-65^\circ$ А, $r = 24$ Ом, $x_{L1} = 18$ Ом, $x_{L2} = 36$ Ом, $x_C = 12$ Ом.

О т в е т: $\underline{I}_{11} = 19,22|63,5^\circ$ А, $\underline{I}_{22} = 16,71|92,3^\circ$ А.

Задача 5.11. Методом контурных токов рассчитать комплексы действующих значений токов в ветвях цепи, схема которой приведена на рис. 5.20. Выполнить проверку расчетов по балансу мощностей.

Дано: $\underline{E}_1 = 220 \angle 0^\circ$ В, $\underline{E}_2 = 380 \angle 120^\circ$ В, $\underline{I}_k = 2 \angle 45^\circ$ А, $r_1 = 50$ Ом, $r_2 = 25$ Ом, $x_{L1} = 60$ Ом, $x_{L2} = 10$ Ом, $x_{C1} = 30$ Ом, $x_{C2} = 20$ Ом.

О т в е т: $\underline{I}_1 = 24,67 \angle -114,1^\circ$ А, $\underline{I}_2 = 29,41 \angle -90,2^\circ$ А,
 $\underline{I}_3 = 22,81 \angle 67,7^\circ$ А, $\underline{I}_4 = 12,11 \angle -34,6^\circ$ А,
 $\underline{I}_5 = 28,03 \angle -87,3^\circ$ А, $P = 74,34 \cdot 10^2$ Вт, $Q = 114,6 \cdot 10^2$ вар.

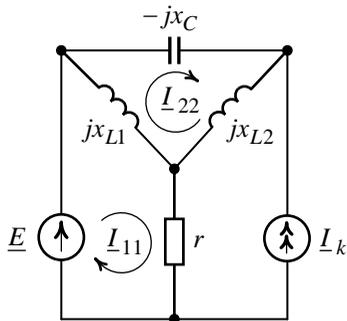


Рис. 5.19

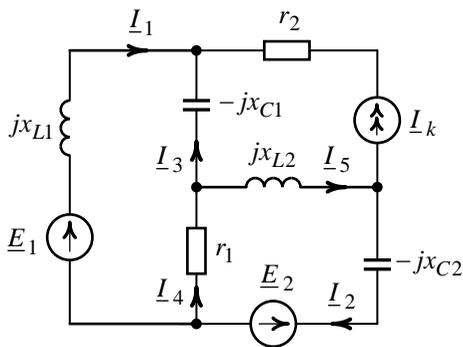


Рис. 5.20

Задача 5.12. Методом узловых потенциалов определить комплексные действующие значения токов в цепи, изображенной на рис. 5.21.

Дано: $\underline{E}_1 = 136 \angle -100^\circ$ В, $\underline{E}_2 = 72 \angle 30^\circ$ В, $\underline{I}_k = 0,5 \angle 90^\circ$ А, $r_1 = 100$ Ом, $x_{L1} = x_{L2} = 25$ Ом, $x_{C1} = x_{C2} = 50$ Ом. В расчетах принять $\varphi_1 = 0$.

О т в е т: $\varphi_1 = 0$ В, $\varphi_2 = 164,61 \angle 71,6$ В, $\varphi_3 = 108,51 \angle 27,3^\circ$ В;

$\underline{I}_1 = 6,0 \angle -14,6^\circ$ А, $\underline{I}_2 = 6,58 \angle 161,6^\circ$ А, $\underline{I}_3 = 2,17 \angle -62,7^\circ$ А,

$\underline{I}_4 = 1,15 \angle 112,7^\circ$ А, $\underline{I}_5 = 1,47 \angle 111,9^\circ$ А.

Задача 5.13. Методом узловых потенциалов для схемы, изображенной на рис. 5.22, определить действующие значения напряжений на резистивных сопротивлениях. Дано: $e = 215\sqrt{2} \sin(250t + 90^\circ)$ В, $i_k = 2,2\sqrt{2} \sin(250t - 90^\circ)$ А, $r_1 = 50$ Ом, $r_2 = 100$ Ом, $L = 0,04$ Гн, $C = 160$ мкФ.

О т в е т: $U_{r1} = 145$ В, $U_{r2} = 70$ В.

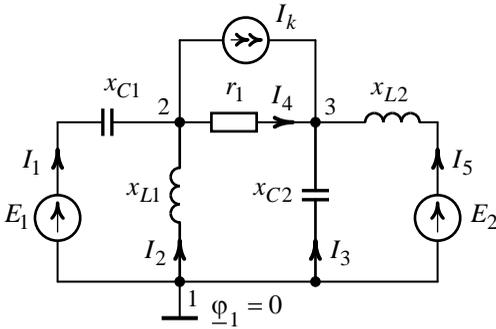


Рис. 5.21

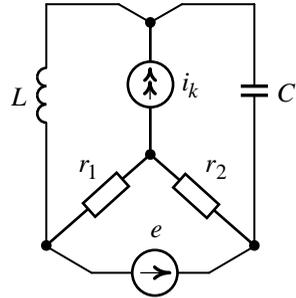


Рис. 5.22

Задача 5.14. Для цепи (рис. 5.23) методом эквивалентного генератора определить показание амперметра электромагнитной системы, если $e_1 = 160\sqrt{2} \sin(1000t + 120^\circ)$ В, $e_2 = 240\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ)$ В, $r_1 = 250$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $C = 20$ мкФ.

О т в е т: $I_A = 4$ А ($\underline{E}_r = 400 \angle 156,9^\circ$ В, $\underline{Z}_r = 100 \angle -90^\circ$ Ом).

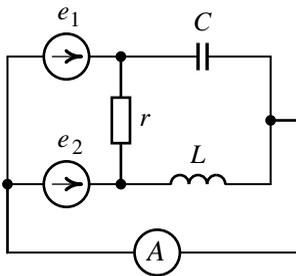


Рис. 5.23

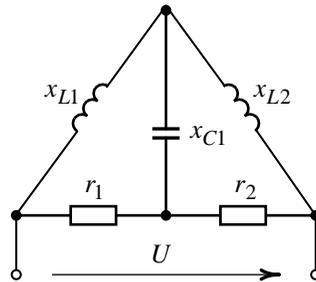


Рис. 5.24

Задача 5.15. Определить методом эквивалентного генератора ток в ветви с емкостью, включенной по схеме, изображенной рис. 5.24. Дано: $U = 240$ В, $r_1 = 15$ Ом, $r_2 = 25$ Ом, $x_{L1} = 10$ Ом, $x_{L2} = 20$ Ом, $x_{C1} = 5$ Ом.

О т в е т: $\underline{I} = 1,05 \angle 170^\circ$ А ($\underline{E}_r = 10 \angle 180^\circ$ В, $\underline{Z}_r = 11,5 \angle 35,4^\circ$ Ом).

6. РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ В ЦЕПЯХ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В цепях, содержащих участки индуктивного и емкостного характера, на определенных частотах возможны резонансные режимы, при которых входные ток и напряжение совпадают по фазе, а входное сопротивление является чисто активным.

Различают два основных вида резонанса: резонанс напряжений (при последовательном соединении элементов) и резонанс токов (при параллельном соединении элементов).

При расчете резонансных режимов следует рекомендовать два алгоритма решения задач. Если заданы параметры цепи, для решения необходимо использовать условие резонанса. Если известны токи и напряжения, при решении необходимо воспользоваться построением векторной диаграммы.

Задача 6.1

Определить значение емкости C , при которой в цепи (рис. 6.1) установится резонансный режим. Найти входное сопротивление цепи и ток в неразветвленной части схемы, соответствующие резонансному режиму. Дано: $U = 198$ В, $r_1 = 15$ Ом, $r_2 = 24$ Ом, $x_L = 12$ Ом, $\omega_0 = 500$ с⁻¹.

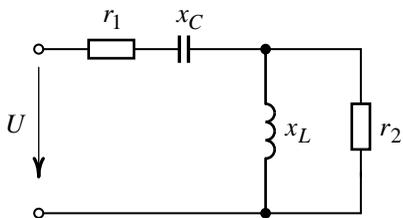


Рис. 6.1

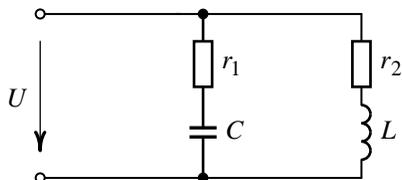


Рис. 6.2

Решение

1. В разветвленной цепи (см. рис. 6.1) конденсатор и индуктивность находятся на участках, имеющих последовательное соединение. Следовательно, в схеме имеет место резонанс напряжений.

Признаком резонанса считается условие $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{BX}}) = jx_{\text{BX}} = 0$ (условие равенства нулю входного реактивного сопротивления цепи).

2. Входное комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{BX}} &= r_1 - jx_C + \frac{r_2 jx_L}{r_2 + jx_L} = r_1 - jx_C + \frac{r_2 jx_L (r_2 - jx_L)}{(r_2 + jx_L)(r_2 - jx_L)} = \\ &= r_1 - jx_C + j \frac{r_2^2 x_L}{r_2^2 + x_L^2} + \frac{r_2 x_L^2}{r_2^2 + x_L^2}.\end{aligned}$$

3. Из условия резонанса $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{BX}}) = 0$ получим:

$$\text{Im}(\underline{Z}_{\text{BX}}) = -jx_C + j \frac{r_2^2 x_L}{r_2^2 + x_L^2} = 0,$$

откуда находим

$$x_C = \frac{r_2^2 x_L}{r_2^2 + x_L^2} = \frac{24^2 \cdot 12}{24^2 + 12^2} = 9,6 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{x_C \omega_0} = \frac{1}{9,6 \cdot 500} = 208,3 \text{ мкФ}.$$

4. Входное сопротивление цепи при резонансе является чисто активным и определяется вещественной частью (действительной составляющей) входного комплексного сопротивления цепи:

$$r_{\text{BX}} = \text{Re}(\underline{Z}_{\text{BX}}) = r_1 + \frac{r_2 x_L^2}{r_2^2 + x_L^2} = 15 + \frac{24 \cdot 12^2}{24^2 + 12^2} = 19,8 \text{ Ом}.$$

5. Ток в неразветвленной части (на входе цепи) при резонансе

$$I = \frac{U}{r_{\text{BX}}} = \frac{198}{19,8} = 10 \text{ А}.$$

Задача 6.2

Для цепи (рис. 6.2) определить резонансную частоту, если $C = 10 \text{ мкФ}$, $L = 0,01 \text{ Гн}$, $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $r_2 = 30 \text{ Ом}$.

Решение

1. В разветвленной цепи (см. рис. 6.2) конденсатор и индуктивность находятся на участках, которые между собой имеют параллельное соединение. Следовательно, в схеме имеет место резонанс токов. Условие резонанса токов $\text{Im}(\underline{Y}_{\text{вх}}) = jb_{\text{вх}} = 0$.

2. Входная комплексная проводимость цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{\text{вх}} &= \frac{1}{r_1 - j\frac{1}{\omega_0 C}} + \frac{1}{r_2 + j\omega_0 L} = \frac{r_1 + j\frac{1}{\omega_0 C}}{\left(r_1 - j\frac{1}{\omega_0 C}\right)\left(r_1 + j\frac{1}{\omega_0 C}\right)} + \\ &+ \frac{r_2 - j\omega_0 L}{(r_2 + j\omega_0 L)(r_2 - j\omega_0 L)} = \frac{r_1}{r_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} + j\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} + \\ &+ \frac{r_2}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} - j\frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} = \\ &= \left(\frac{r_1}{r_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} + \frac{r_2}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} \right) + j \left(\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} - \frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} \right). \end{aligned}$$

3. Из условия резонанса тока ($jb_{\text{вх}} = 0$) для параллельных участков получим:

$$b_{\text{вх}} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} - \frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L}{r_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}},$$

откуда

$$\omega_0^2 (L^2 - r_1^2 LC) = \frac{L}{C} - r_2^2.$$

Следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_2^2}{LC \left(\frac{L}{C} - r_1^2 \right)}} = \sqrt{\frac{\frac{0,01}{10 \cdot 10^{-6}} - 30^2}{0,01 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \left(\frac{0,01}{10 \cdot 10^{-6}} - 20^2 \right)}} = 1291 \text{ с}^{-1}.$$

Резонансная частота

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1291}{2\pi} = 205,5 \text{ Гц}.$$

Задача 6.3

В цепи (рис. 6.3) имеет место резонанс. Показания амперметров соответствуют токам $I_{A3} = 3 \text{ А}$, $I_{A1} = 4 \text{ А}$. Определить показание амперметра A_2 .

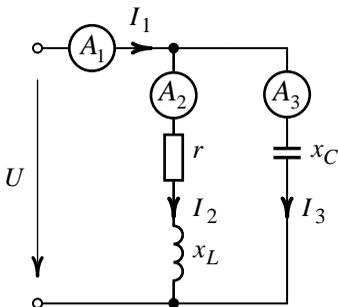


Рис. 6.3

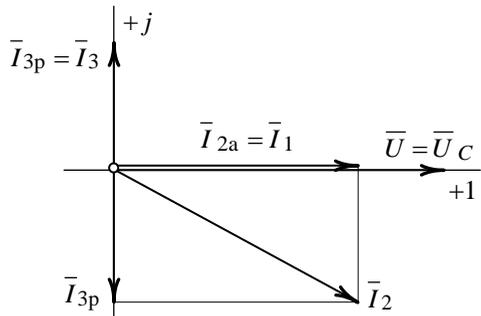


Рис. 6.4

Решение

1. В цепи (см. рис. 6.3) имеет место резонанс токов. При резонансе токов показание амперметра A_1 определяется только активной составляющей тока. Реактивные составляющие токов в ветвях с емкостью и индуктивностью скомпенсированы, и их сумма равна нулю.

2. Для решения воспользуемся построением векторной диаграммы токов (рис. 6.4), соответствующей резонансному режиму цепи.

По первому закону Кирхгофа $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$. Ток \bar{I}_3 по фазе опережает напряжение на емкости ($\bar{U}_C = \bar{U}$) на угол 90° . Реактивная составляющая тока \bar{I}_{2p} равна по модулю току $\bar{I}_{3p} = \bar{I}_3$ и отстает от напряжения \bar{U} на угол 90° .

Активная составляющая тока $\bar{I}_{2a} = \bar{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением \bar{U} .

3. Из диаграммы токов (см. рис. 6.4) следует:

$$I_{A2} = I_2 = \sqrt{I_{2a}^2 + I_{2p}^2} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ А.}$$

Задача 6.4

Для цепи (рис. 6.5) в режиме резонанса известны показания приборов $I_{A3} = 15 \text{ А}$, $U_V = 120 \text{ В}$. Определить показания первого и второго амперметров и параметры цепи, если $I_{A1} = I_{A2}$.

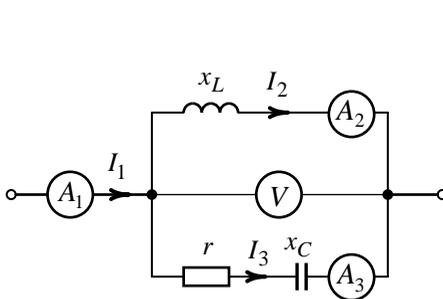


Рис. 6.5

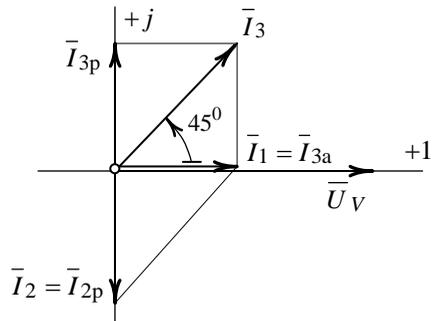


Рис. 6.6

Решение

1. В цепи (см. рис. 6.5) имеет место резонанс токов. Фаза тока I_1 (показание первого амперметра A_1) совпадает с фазой напряжения U_V (показание вольтметра V) и определяется активной составляющей тока. Реактивные составляющие токов I_2 и I_3 равны по модулю, но противоположны по знаку и в сумме составляют ноль.

2. Векторная диаграмма токов цепи в режиме резонанса показана на рис. 6.6. Согласно первому закону Кирхгофа $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$. Ток через индуктивность \bar{I}_2 по фазе отстает от напряжения \bar{U}_V на угол 90° . Реактивная составляющая тока \bar{I}_{3p} в ветви с емкостью по величине равна току $\bar{I}_2 = \bar{I}_{2p}$ (из условия резонанса).

Активная составляющая тока \bar{I}_{3a} совпадает по фазе с напряжением \bar{U}_V и определяет ток \bar{I}_1 . Из условия задачи $|I_1| = |I_2|$, тогда $|I_1| = |I_{2p}|$, поэтому следует полагать, что угол сдвига по фазе между векторами токов \bar{I}_3 и \bar{I}_1 составляет 45° (из диаграммы).

3. Из диаграммы токов (см. рис. 6.6) следует:

$$I_1 = I_{3a} = I_3 \cos 45^\circ = 15 \cos 45^\circ = 10,61 \text{ А},$$

$$I_2 = I_1 = 10,6 \text{ А},$$

$$x_L = \frac{U_V}{I_2} = \frac{120}{10,61} = 11,31 \text{ Ом}.$$

Из равенства токов $I_{3p} = I_{3a}$ следует, что $r = x_C$:

$$r = x_C = Z \cos 45^\circ = \frac{U_V}{I_3} \cos 45^\circ = \frac{120}{15} \cos 45^\circ = 5,66 \text{ Ом}.$$

Задача 6.5

Для цепи (рис. 6.7) в режиме резонанса показание ваттметра составляет $P = 600$ Вт. Определить величины сопротивлений r и x_C , если $U = 60$ В, $x_L = 12,4$ Ом.

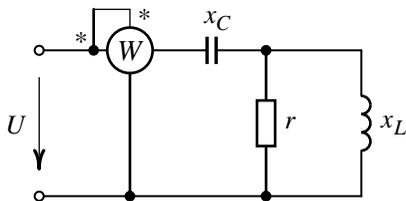


Рис. 6.7

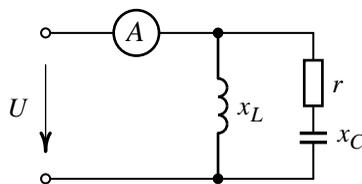


Рис. 6.8

Решение

1. В цепи (см. рис. 6.7) имеет место резонанс напряжений. Входное сопротивление цепи при резонансе является чисто активным, следовательно,

$$r_{\text{вх}} = \frac{U^2}{P} = \frac{60^2}{600} = 6 \text{ Ом}.$$

2. Выражение входного комплексного сопротивления цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= -jx_C + \frac{jx_L r}{r + jx_L} = -jx_C + \frac{jx_L r(r - jx_L)}{(r + jx_L)(r - jx_L)} = \\ &= -jx_C + j \frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} + \frac{rx_L^2}{r^2 + x_L^2}. \end{aligned}$$

3. При резонансе входное сопротивление определяется вещественной частью (действительной составляющей) входного комплексного сопротивления $r_{\text{вх}} = \text{Re}(\underline{Z}_{\text{вх}})$:

$$r_{\text{вх}} = \text{Re}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = \text{Re} \left(-jx_C + j \frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} + \frac{rx_L^2}{r^2 + x_L^2} \right) = \frac{rx_L^2}{r^2 + x_L^2}.$$

Из полученного условия следует уравнение

$$r^2 - \frac{x_L^2}{r_{\text{вх}}} r + x_L^2 = 0.$$

При $r_{\text{вх}} = 6 \text{ Ом}$ и $x_L = 12,4 \text{ Ом}$ уравнение приводится к виду

$$r^2 - 25,6r + 153,8 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно r , найдем его корни:

$$r_{1,2} = \frac{25,6 \pm \sqrt{25,6^2 - 4 \cdot 153,8}}{2} = \frac{25,6 \pm 6,3}{2},$$
$$r_1 = 16 \text{ Ом}, \quad r_2 = 9,7 \text{ Ом}.$$

Полученное решение означает, что резонанс напряжения возможен при двух значениях резистивных сопротивлений.

4. Из второго условия резонанса $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = 0$ определим значение x_C :

$$\text{Im } \underline{Z}_{\text{вх}} = \text{Im} \left(-jx_C + j \frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} + \frac{rx_L^2}{r^2 + x_L^2} \right) = -jx_C + j \frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} = 0,$$

следовательно,

$$-jx_C + j \frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} = 0,$$

откуда находим $x_C = \frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2}$.

Каждому значению сопротивления r цепи будет соответствовать значение резонансного сопротивления x_C :

$$\text{для } r_1 = 16 \text{ Ом: } x_{C1} = \frac{r_1^2 x_L}{r_1^2 + x_L^2} = \frac{16^2 \cdot 12,4}{16^2 + 12,4^2} = 7,8 \text{ Ом};$$

$$\text{для } r_2 = 9,7 \text{ Ом: } x_{C2} = \frac{r_2^2 x_L}{r_2^2 + x_L^2} = \frac{9,7^2 \cdot 12,4}{9,7^2 + 12,4^2} = 4,7 \text{ Ом}.$$

Задача 6.6

В режиме резонанса определить емкостное сопротивление x_C и показание амперметра в схеме (рис. 6.8), если $U = 30 \text{ В}$, $r = 2 \text{ Ом}$, $x_L = 5 \text{ Ом}$.

Решение

1. В схеме (см. рис. 6.8) имеет место резонанс токов. Входная комплексная проводимость цепи:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{\text{вх}} &= \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{r - jx_C} = -j\frac{1}{x_L} + \frac{r + jx_C}{(r - jx_C)(r + jx_C)} = \\ &= -j\frac{1}{x_L} + \frac{r}{r^2 + x_C^2} + j\frac{x_C}{r^2 + x_C^2}.\end{aligned}$$

2. Из условия резонанса токов $\text{Im } \underline{Y}_{\text{вх}} = 0$ получим:

$$\frac{1}{x_L} = \frac{x_C}{r^2 + x_C^2}.$$

Из выражения следует квадратное уравнение

$$x_C^2 - x_L x_C + r^2 = 0.$$

После подстановки значений x_L и r квадратное уравнение относительно x_C приводится к виду

$$x_C^2 - 5x_C + 4 = 0.$$

Из решения квадратного уравнения находим:

$$x_{C1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

$$x_{C1} = 4 \text{ Ом}, \quad x_{C2} = 1 \text{ Ом}.$$

Резонанс токов возможен при двух значениях емкостных сопротивлений x_{C1} и x_{C2} .

3. Показание амперметра определим как действующее значение тока в неразветвленной части схемы.

Ток в неразветвленной части схемы определим по закону Ома через полную входную проводимость $\underline{Y}_{\text{вх}}$, которая является чисто активной:

$$I_A = UY_{\text{вх}} = \frac{Ur}{r^2 + x_C^2}.$$

При $x_C = x_{C1} = 4$ Ом для тока получим:

$$I_A = \frac{30 \cdot 2}{2^2 + 4^2} = 3 \text{ А}.$$

При $x_C = x_{C2} = 1$ Ом для тока получим:

$$I_A = \frac{30 \cdot 2}{2^2 + 1} = 12 \text{ А}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.7. В цепи (рис. 6.9) последовательно включены катушка индуктивности с активным сопротивлением и конденсатор. Определить емкость конденсатора, при которой в цепи установится резонанс напряжений. Найти ток, мощность, выделяемую в цепи, напряжение на катушке и конденсаторе. Построить топографическую диаграмму напряжений. Дано: $U = 48$ В, $L_k = 0,06$ Гн, $r_k = 20$ Ом, $f = 100$ Гц.

О т в е т: $C = 42,3$ мкФ, $I = 2,4$ А, $P = 115,2$ Вт, $U_k = 102,4$ В, $U_C = 90,4$ В.

Задача 6.8. Цепь (рис. 6.10) настроена на резонанс. Показание ваттметра соответствует мощности $P = 200$ Вт, а показание амперметра току $I_A = 5$ А. Определить параметры цепи и приложенное к входу напряжение, если напряжение на конденсаторе $U_C = 160$ В, угловая частота $\omega_0 = 500$ с⁻¹.

О т в е т: $r = 8$ Ом, $L = 64 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 62,5$ мкФ, $U = 40$ В.

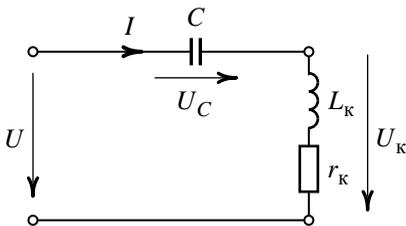


Рис. 6.9

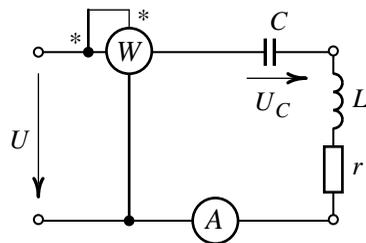


Рис. 6.10

Задача 6.9. При резонансе приборы электромагнитной системы, установленные в цепи (рис. 6.11), показали: $U_{V1} = 100$ В, $U_{V2} = 40$ В, $U_{V3} = 50$ В, $I_A = 0,5$ А. Определить параметры цепи, если угловая частота $\omega_0 = 500$ с⁻¹.

О т в е т: $r_1 = 60$ Ом, $r_2 = 140$ Ом, $L = 0,16$ Гн, $C = 25$ мкФ.

Задача 6.10. Определить значение сопротивления r_2 , при котором в цепи (рис. 6.12) установится резонанс напряжений на частоте $f = 100$ Гц. Рассчитать входное сопротивление цепи и ток в неразветвленной части схемы, соответствующие резонансному режиму. Дано: $U = 96$ В, $r_1 = 6$ Ом, $L = 0,015$ Гн, $C = 120$ мкФ.

О т в е т: $r_2 = 20,8$ Ом, $r_{\text{вх}} = 12$ Ом, $I = 8$ А.

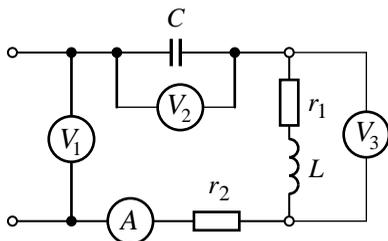


Рис. 6.11

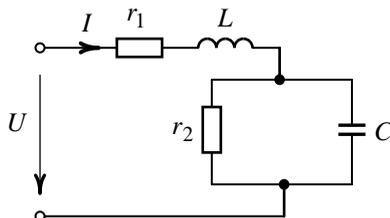


Рис. 6.12

Задача 6.11. Для цепи (рис. 6.13) определить резонансную частоту и эквивалентное сопротивление при резонансе токов, если $r = 16$ Ом, $L = 0,04$ Гн, $C = 5$ мкФ.

О т в е т: $\omega_0 = 2200$ с⁻¹, $r_{\text{экв}} = 500$ Ом.

Задача 6.12. Для схемы (рис. 6.14) рассчитать резонансные частоты и соответствующие частотам входные сопротивления, если $r_1 = 200$ Ом, $L_1 = 8 \cdot 10^{-3}$ Гн, $L_2 = 10 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C_2 = 25$ мкФ.

О т в е т: 1) резонанс токов: $\omega_0 = 2000$ с⁻¹, $Z_{\text{вх}} = \infty$ Ом;

2) резонанс напряжений: $\omega_0 = 3000$ с⁻¹, $Z_{\text{вх}} = 200$ Ом.

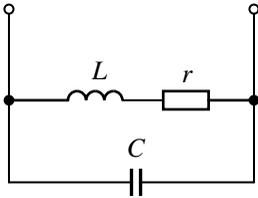


Рис. 6.13

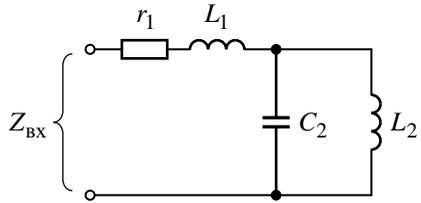


Рис. 6.14

Задача 6.13. Для цепи (рис. 6.15) определить показания амперметров, установленных в схеме, если $U = 200$ В, $x_L = x_C = 20$ Ом, $r = 40$ Ом.

О т в е т: $I_{A1} = I_{A4} = 0$, $I_{A2} = I_{A3} = I_{A6} = 5$ А, $I_{A5} = 10$ А.

Задача 6.14. Цепь (рис. 6.16) настроена на резонанс. Определить показания приборов, установленных в цепи, если $U = 24$ В, $r = 30$ Ом, $x_L = x_C = 10$ Ом.

О т в е т: $I_{A1} = 0,4$ А, $I_{A2} = 0$, $I_{A3} = 1,2$ А, $U_V = 12$ В.

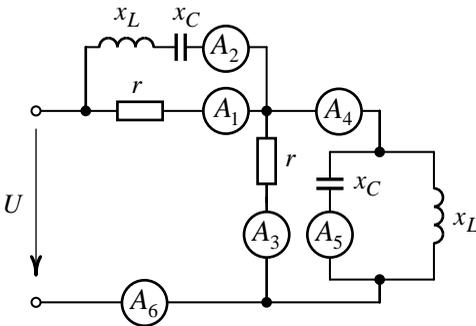


Рис. 6.15

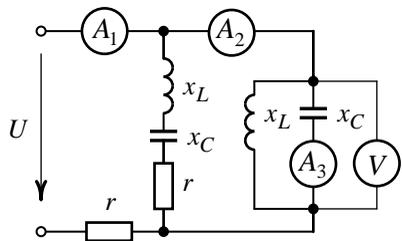


Рис. 6.16

Задача 6.15. В цепи (рис. 6.17) имеет место резонанс. Показание амперметра, установленного на входе цепи, соответствует току

$I_A = 2 \text{ A}$. Определить напряжение на входе цепи, если $r = 10 \text{ Ом}$, $x_C = 20 \text{ Ом}$.

О т в е т: $U = 100 \text{ В}$, ($x_L = 25 \text{ Ом}$).

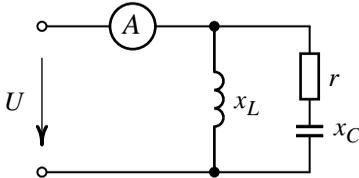


Рис. 6.17

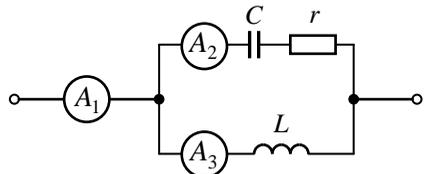


Рис. 6.18

Задача 6.16. В цепи (рис. 6.18) резонанс токов. Показания амперметров соответствуют токам $I_{A2} = 0,5 \text{ A}$, $I_{A3} = 0,4 \text{ A}$. Определить показание амперметра A_1 .

О т в е т: $I_{A1} = 0,3 \text{ A}$.

7. РАСЧЕТ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Приступая к расчету электрических цепей синусоидального тока при наличии индуктивно связанных элементов (элементов, обладающих взаимной индуктивностью), необходимо учитывать напряжения взаимной индукции. Чтобы учесть напряжения взаимной индукции при составлении уравнений цепи по второму закону Кирхгофа, необходимо знать их условные положительные направления на схеме, которые определяются согласным или встречным включением индуктивно связанных элементов.

Расчет сложных цепей при наличии взаимной индуктивности производится в основном методами уравнений Кирхгофа и контурных токов, записанных в комплексной форме. Метод узловых потенциалов, в котором используется первый закон Кирхгофа, не применяется.

В ряде случаев расчет индуктивно связанных цепей может быть упрощен, если осуществить переход к эквивалентной схеме без индук-

тивных связей (способ расчета с развязкой индуктивных связей). В этом случае снимаются все ограничения по использованию методов расчета по отношению к способу расчета, где развязка индуктивных связей не предусмотрена.

Задача 7.1

Две индуктивно связанные катушки включены по схеме, показанной на рис. 7.1. Найти комплекс действующего значения тока, протекающего в цепи, и комплекс полной мощности. Определить значение указанного тока при замене местами выводов обмотки катушки L_2 . Построить в масштабе векторную диаграмму. Параметры схемы: $U = 160 \text{ В}$, $r_1 = 12 \text{ Ом}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, $\omega L_1 = 10 \text{ Ом}$, $\omega L_2 = 8 \text{ Ом}$, $\omega M = 6 \text{ Ом}$, $1/\omega C = 10 \text{ Ом}$.

Решение

1. По схеме (см. рис. 7.1) определим характер включения обмоток катушек L_1 и L_2 . Из рис. 7.1 следует, что при заданном направлении тока в каждой из обмоток катушек потоки самоиндукции и взаимоиндукции одинаково направлены (действуют согласно). Следовательно, катушки включены согласно, и напряжения взаимоиндукции имеют положительные направления. Заданная схема после разметки одноименных зажимов обмоток катушек может быть представлена схемой замещения, показанной на рис. 7.2.

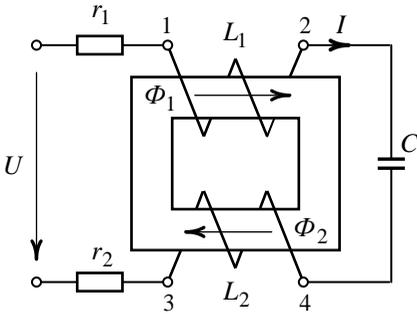


Рис. 7.1

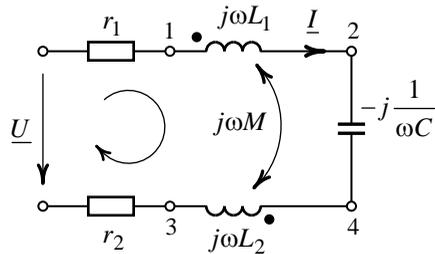


Рис. 7.2

2. На основании второго закона Кирхгофа для схемы замещения (см. рис. 7.2) запишем уравнение

$$r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I} - j \frac{1}{\omega C} \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I} + r_2 \underline{I} = \underline{U},$$

из которого найдем комплекс действующего тока

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{r_1 + r_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{160 \angle 0^\circ}{22 + j20} = 5,38 \angle -42,3^\circ \text{ А.}$$

Примечание. Если направления токов относительно одноименных зажимов индуктивно связанных элементов цепи совпадает, то включение этих элементов согласное, и напряжение взаимоиндукции учитывается в уравнении со знаком плюс, в противном случае включение элементов встречное, а напряжение взаимоиндукции учитывается в уравнении со знаком минус.

3. При замене местами выводов обмотки катушки L_2 индуктивно связанные катушки окажутся включенными по схеме, показанной на рис. 7.3.

Из рис. 7.3 следует, что при заданном направлении тока в каждой из обмоток катушек потоки самоиндукции и взаимоиндукции направлены противоположно друг другу (действуют встречно). Следовательно, катушки включены встречно, и напряжения взаимоиндукции имеют отрицательные направления. Схема замещения заданной цепи после

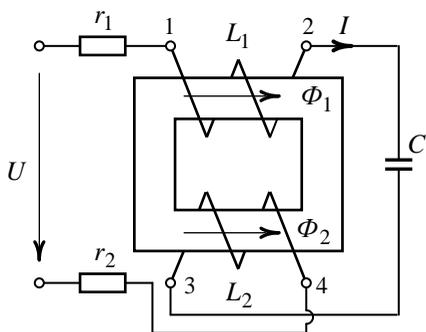


Рис. 7.3

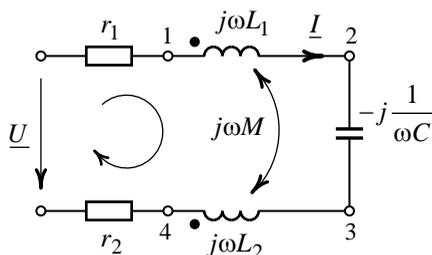


Рис. 7.4

разметки одноименных зажимов обмоток катушек может быть представлена схемой, изображенной на рис. 7.4.

4. Для схемы замещения цепи (см. рис. 7.4) на основании второго закона Кирхгофа запишем уравнение

$$r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I} - j \frac{1}{\omega C} \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I} + r_2 \underline{I} = \underline{U},$$

из которого найдем комплекс действующего тока:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{r_1 + r_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{160 \angle 0^\circ}{22 - j4} = 7,15 \angle 10,3^\circ \text{ A}.$$

5. Комплекс полной мощности для схемы соединения обмоток индуктивностей (см. рис. 7.1):

$$\underline{S} = \underline{U} \bar{\underline{I}} = 160 \angle 0^\circ \cdot 5,38 \angle 42,3^\circ = 637,7 + j579,3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Для схемы соединения обмоток индуктивностей (рис. 7.3):

$$\underline{S} = \underline{U} \bar{\underline{I}} = 160 \angle 0^\circ \cdot 7,15 \angle -10,3^\circ = 1125,6 - j204,5 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

6. На рис. 7.5 изображена (в масштабе) векторная диаграмма цепи для случая включения обмоток катушек по схеме рис. 7.1, на рис. 7.6 соответственно для случая включения обмоток катушек – по схеме рис. 7.3. По горизонтальной оси отложен вектор тока, затем под соответствующим к току углом отложены векторы падения напряжения на каждом элементе цепи.

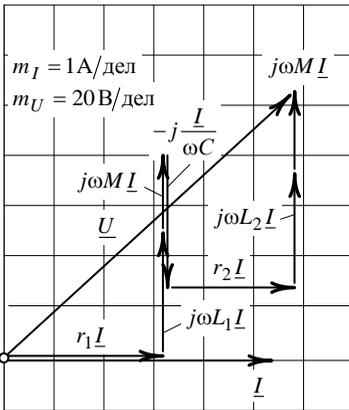


Рис. 7.5

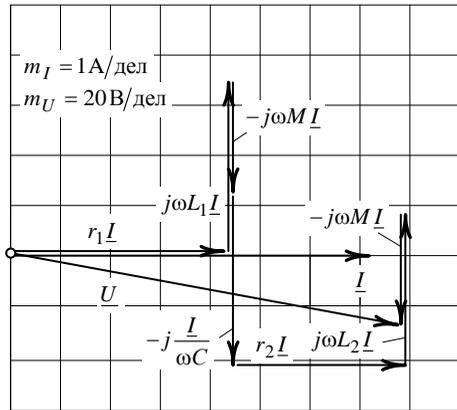


Рис. 7.6

Задача 7.2

Индуктивно связанные катушки, имеющие общий сердечник, включены по схеме, изображенной на рис. 7.7. Определить показания амперметров электромагнитной системы, установленных в схеме, если $U = 130 \text{ В}$, $r_1 = 2 \text{ Ом}$, $r_2 = 4 \text{ Ом}$, $\omega L_1 = 6 \text{ Ом}$, $\omega L_2 = 12 \text{ Ом}$, $\omega M = 4 \text{ Ом}$.

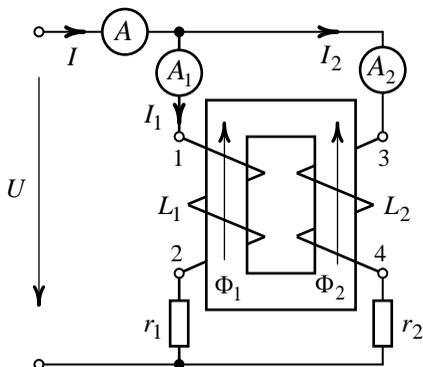


Рис. 7.7

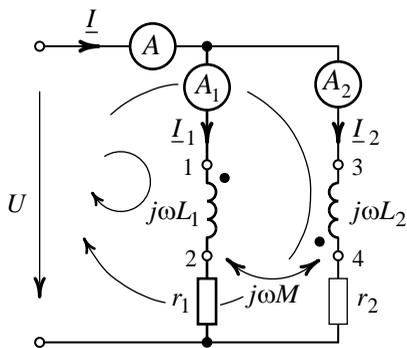


Рис. 7.8

Решение

1. Из рис. 7.7 следует, что при заданных направлениях токов I_1 , I_2 потоки самоиндукции и взаимоиндукции катушек индуктивностей L_1 , L_2 направлены противоположно друг другу, т.е. встречно. Следовательно, катушки индуктивностей имеют встречное включение, а напряжения взаимоиндукции в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа, будут иметь отрицательные значения. Схема замещения цепи после разметки одноименных зажимов катушек может быть представлена в комплексном виде, как это показано на рис. 7.8.

2. Схема (см. рис. 7.8) содержит $n_y = 2$ узлов, $m_b = 3$ ветвей. Достаточное количество уравнений для расчета данной цепи по законам Кирхгофа равно трем.

По первому закону Кирхгофа: $N_1 = n_y - 1 = 1$.

По второму закону Кирхгофа: $N_2 = m_b - (n_y - 1) = 2$.

3. Система уравнений по законам Кирхгофа с учетом заданных положительных направлений обходов контуров, обозначенных в схеме, изображенной на рис. 7.8, будет иметь вид

$$\begin{cases} \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0, \\ j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 + r_1 \underline{I}_1 = \underline{U}, \\ j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 + r_2 \underline{I}_2 = \underline{U}. \end{cases}$$

Примечание. При составлении уравнений цепи по второму закону Кирхгофа целесообразно положительные напряжения обходов контуров совмещать с направлениями токов в ветвях с индуктивно связанными элементами.

4. Приведем систему к матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ (r_1 + j\omega L_1) & -j\omega M & 0 \\ -j\omega M & (r_2 + j\omega L_2) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{U} \\ \underline{U} \end{bmatrix}.$$

5. После подстановки числовых значений из условия задачи получим:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ (2 + j6) & -j4 & 0 \\ -j4 & (4 + j12) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 130 \\ 130 \end{bmatrix}.$$

6. Решение матричной системы позволяет определить комплексы действующих значений токов в ветвях схемы:

$$\underline{I}_1 = 31,58 \angle -59,1^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = 19,53 \angle -56,3^\circ \text{ A}, \quad \underline{I} = 51,1 \angle -57,9^\circ \text{ A}.$$

7. Показания амперметров, установленных в схеме цепи (см. рис. 7.7), будут соответствовать токам:

$$I_{A1} = 31,58 \text{ A}, \quad I_{A2} = 19,53 \text{ A}, \quad I_A = 51,1 \text{ A}.$$

Задача 7.3

В связанной цепи (рис. 7.9) определить показание вольтметра электромагнитной системы, если ЭДС равны: $e_1 = 232\sqrt{2} \sin(200t + 60^\circ)$ В, $e_2 = 669\sqrt{2} \sin(200t - 20^\circ)$ В, коэффициент связи катушек индуктивностей $k = 0,567$, $r_1 = 8$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $L_1 = 0,05$ Гн, $L_2 = 0,025$ Гн, $C = 500$ мкФ.

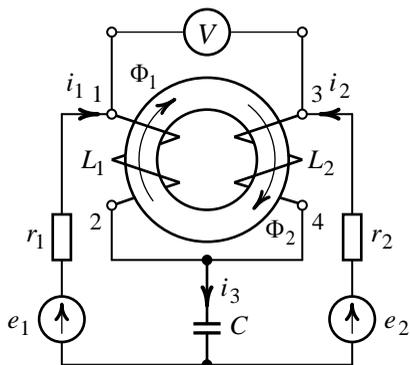


Рис. 7.9

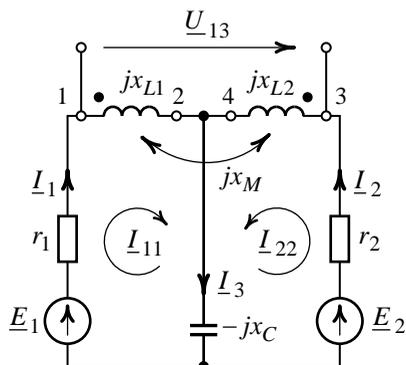


Рис. 7.10

Решение

1. Из рис. 7.9 следует, что при заданных направлениях токов i_1 , i_2 потоки самоиндукции и взаимоиндукции катушек индуктивностей L_1 , L_2 одинаково направлены. Следовательно, катушки индуктивностей включены согласно, а напряжения взаимоиндукции имеют положительные направления. Расчетная схема замещения цепи (рис. 7.9) после разметки одноименных зажимов катушек изображена на рис. 7.10.

2. Сопротивления реактивных элементов для частоты, питающих схему источников $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$, равны:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 200 \cdot 0,05 = 10 \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 200 \cdot 0,025 = 5 \text{ Ом},$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{200 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом}.$$

Сопротивление взаимной индукции

$$x_M = \omega M = 200 \cdot 0,02 = 4 \text{ Ом},$$

где $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,567\sqrt{0,05 \cdot 0,025} = 0,02 \text{ Гн}$.

3. Комплексы действующих значений источников ЭДС:

$$\underline{E}_1 = \frac{232\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 232 \underline{60^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_2 = \frac{669\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j20^\circ} = 669 \underline{-20^\circ} \text{ В}.$$

4. Расчет комплексов действующих значений токов схемы (рис. 7.10) выполним методом контурных токов. Схема содержит: $n_y = 2$ узла, $m_b = 3$ ветви. Достаточное количество уравнений равно двум:

$$N_2 = m_b - (n_y - 1) = 2.$$

Независимые контуры и направления протекания контурных токов \underline{I}_{11} , \underline{I}_{22} обозначены на рис. 7.10.

5. Система контурных уравнений, записанных относительно действующих значений контурных токов, будет иметь вид

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(r_1 + jx_{L1} - jx_C) + \underline{I}_{22}jx_M + \underline{I}_{22}(-jx_C) = \underline{E}_1, \\ \underline{I}_{22}(r_2 + jx_{L2} - jx_C) + \underline{I}_{11}jx_M + \underline{I}_{11}(-jx_C) = \underline{E}_2. \end{cases}$$

6. Приведем систему к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} (r_1 + jx_{L1} - jx_C) & (jx_M - jx_C) \\ (jx_M - jx_C) & (r_2 + jx_{L2} - jx_C) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \end{bmatrix}.$$

7. После подстановки числовых значений получим:

$$\begin{bmatrix} 8 & -j6 \\ -j6(6-j5) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 232 \angle 60^\circ \\ 669 \angle -20^\circ \end{bmatrix}.$$

8. Решение матричной системы позволяет определить комплексы действующих значений контурных токов (см. рис. 7.10):

$$\underline{I}_{11} = 57,66 \angle 80,5^\circ \text{ А}, \quad \underline{I}_{22} = 42,87 \angle 8,9^\circ \text{ А}.$$

9. Комплексы действующих значений действительных токов в ветвях схемы:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 57,66 \angle 80,5^\circ \text{ А}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{22} = 42,87 \angle 8,9^\circ \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22} = 57,66 \angle 80,5^\circ + 42,87 \angle 8,9^\circ = 82,01 \angle 50,8^\circ \text{ А}.$$

10. Показание вольтметра определим через комплекс действующего напряжения \underline{U}_{13} (см. рис. 7.10), составив предварительно уравнение по второму закону Кирхгофа, например, для контура, включающего в себя напряжения на индуктивных элементах:

$$\underline{U}_{13} + \underline{I}_2 jx_{L2} + \underline{I}_1 jx_M - \underline{I}_1 jx_{L1} - \underline{I}_2 jx_M = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \underline{U}_{13} &= \underline{I}_1 (jx_{L1} - jx_M) - \underline{I}_2 (jx_{L2} - jx_M) = \\ &= 57,66 \angle 80,5^\circ \cdot j6 - 42,87 \angle 8,9^\circ \cdot j1 = 334,9 \angle 177,5^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_V = U_{13} = 334,9 \text{ В}$.

Задача 7.4

Определить показания амперметров электромагнитной системы, включенных по схеме (рис. 7.11), параметры которой $U = 30 \text{ В}$, $r_1 = 3 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 6 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 8 \text{ Ом}$, $x_M = 4 \text{ Ом}$.

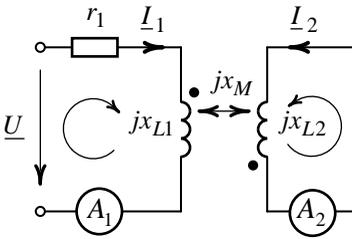


Рис. 7.11

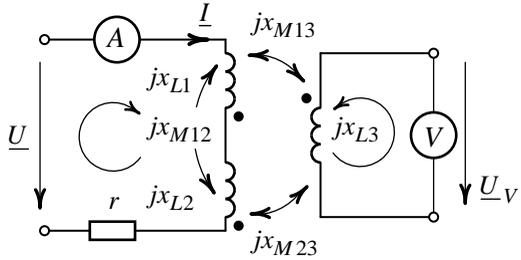


Рис. 7.12

Решение

1. При заданных направлениях токов (см. рис. 7.11) относительно одноименных зажимов катушек индуктивностей с сопротивлениями x_{L1} , x_{L2} потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены противоположно друг другу. Следовательно, катушки индуктивностей имеют встречное включение, и напряжение взаимной индукции необходимо учитывать со знаком минус.

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи по законам Кирхгофа равно двум ($n_y = 0$ узлов, $m_b = 2$ ветви).

Система расчетных уравнений, составленных на основании второго закона Кирхгофа с учетом заданных положительных направлений обходов контуров (рис. 7.11), будет иметь вид

$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_1 jx_{L1} - I_2 jx_M = \underline{U}, \\ I_2 jx_{L2} - I_1 jx_M = 0. \end{cases}$$

3. Из совместного решения системы для комплексов действующих значений токов получим:

$$I_1 = \frac{\underline{U}}{r_1 + jx_{L1} - j \frac{x_M^2}{x_{L2}}} = \frac{30 \angle 0^\circ}{3 + j6 - j \frac{4^2}{8}} = 6 \angle -53,1^\circ \text{ A},$$

$$I_2 = I_1 \frac{x_M}{x_{L2}} = 6 \angle -53,1^\circ \cdot \frac{4}{8} = 3 \angle -53,1^\circ \text{ A}.$$

4. Показания амперметров (см. рис. 7.11) будут соответствовать токам:

$$I_{A1} = I_1 = 6 \text{ А}, \quad I_{A2} = I_2 = 3 \text{ А}.$$

Задача 7.5

В цепи (рис. 7.12) каждая из трех катушек индуктивно связана с двумя другими. Выполнить расчет цепи и определить показания приборов электромагнитной системы: $U = 400 \text{ В}$, $r = 40 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 14 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 12 \text{ Ом}$, $x_{M12} = x_{M13} = x_{M23} = 2 \text{ Ом}$.

Решение

1. Катушки индуктивностей с сопротивлениями x_{L1} , x_{L2} (см. рис. 7.12) включены согласно.

В связи с тем что ток через индуктивность с сопротивлением x_{L3} не протекает, напряжение \underline{U}_V на зажимах катушки (вольтметра V) будет определяться только напряжением взаимоиנדукции индуктивно связанных элементов.

2. Расчетные уравнения, составленные на основании второго закона Кирхгофа для указанных положительных направлений обходов контуров (рис. 7.12), будут иметь вид

$$jx_{L1}\underline{I} + jx_{L2}\underline{I} + 2jx_{M12}\underline{I} + r\underline{I} = \underline{U},$$

$$\underline{U}_V = jx_{M13}\underline{I} + jx_{M23}\underline{I}.$$

3. Из совместного решения уравнений получим:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jx_{L1} + jx_{L2} + 2jx_{M12} + r} = \frac{400 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 8 \angle -36,9^\circ \text{ А},$$

$$\underline{U}_V = \underline{I}(jx_{M13} + jx_{M23}) = 8 \angle -36,9^\circ \cdot j4 = 32 \angle 53,1^\circ \text{ В}.$$

4. Показания приборов в цепи (см. рис. 7.12) будут соответственно равны действующим значениям величин: $I_A = 8 \text{ А}$, $U_V = 32 \text{ В}$.

Задача 7.6

Определить комплексы входного сопротивления и действующих значений токов в цепи (рис. 7.13), применив при решении эквивалентную замену индуктивных связей (развязку индуктивных связей), если $U = 150 \text{ В}$, $x_{L1} = 24 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 32 \text{ Ом}$, $x_M = 12 \text{ Ом}$, $r = 18 \text{ Ом}$.

Решение

1. Выполним развязку индуктивных связей. Так как одноименные зажимы индуктивно связанных элементов x_{L1} , x_{L2} (см. рис. 7.13) одинаково ориентированы по отношению к общему узлу (началами намоток к узлу 1), то эквивалентная схема заданной цепи с развязкой индуктивных связей может быть представлена в виде схемы, изображенной на рис. 7.14.

Примечание. Если одноименные зажимы индуктивно связанных элементов цепи одинаково ориентированы по отношению к общему узлу (началом или концом намотки), то для развязки индуктивных связей в первую и вторую ветви с индуктивностями добавляют индуктивный элемент с сопротивлением $-x_M$, а в третью ветвь индуктивный элемент с сопротивлением $+x_M$. При разной ориентации одноименных зажимов индуктивно связанных элементов цепи по отношению к общему узлу достаточно изменить знаки добавочных индуктивных элементов на противоположные.

2. Комплекс входного сопротивления цепи (рис. 7.14):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= jx_{L1} - jx_M + \frac{(jx_{L2} - jx_M)(r + jx_M)}{r + jx_{L2} + jx_M - jx_M} = \\ &= j24 - j12 + \frac{(j32 - j12)(18 + j12)}{18 + j32} = 23,13 \angle 76,6^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

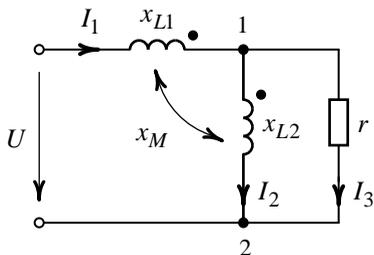


Рис. 7.13

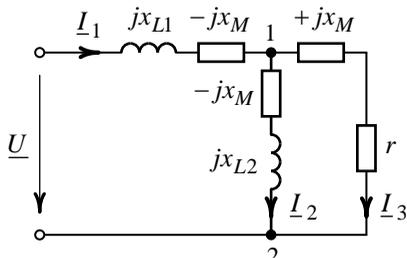


Рис. 7.14

3. Комплекс действующего тока на входе цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{150 \angle 0^\circ}{23,13 \angle 76,6^\circ} = 6,48 \angle -76,6^\circ \text{ А.}$$

4. Комплексы действующих значений токов \underline{I}_2 и \underline{I}_3 :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{r + jx_M}{r + jx_{L2}} = 6,48 \angle -76,6^\circ \cdot \frac{18 + j12}{18 + j32} = 3,82 \angle -103,5^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{jx_{L2} - jx_M}{r + jx_{L2}} = 6,48 \angle -76,6^\circ \cdot \frac{j32 - j12}{18 + j32} = 3,53 \angle -47,2^\circ \text{ А.}$$

Задача 7.7

Задана система из двух индуктивно связанных контуров (рис. 7.15). Определить показание вольтметра электромагнитной системы, используя при решении эквивалентную замену индуктивных связей. Дано: $U = 60 \text{ В}$, $r = 40 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 100 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 50 \text{ Ом}$, $x_C = 30 \text{ Ом}$, $x_M = 25 \text{ Ом}$.

Решение

1. Выполним развязку индуктивных связей. Так как одноименные зажимы индуктивно связанных элементов x_{L1} и x_{L2} (см. рис. 7.15) по-разному ориентированы по отношению к общему (условному) узлу 3 (x_{L1} — концом катушки, x_{L2} — началом катушки), то эквивалентная расчетная схема заданной цепи после развязки индуктивных связей может быть представлена в виде схемы, изображенной на рис. 7.16.

2. Комплекс действующего значения тока на входе:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} = \frac{60 \angle 0^\circ}{40 + j125 + \frac{-j25 \cdot j45}{j20}} =$$

$$= \frac{60 \angle 0^\circ}{79,54 \angle 59,8^\circ} = 0,75 \angle -59,8^\circ \text{ A},$$

где $\underline{Z}_1 = r + jx_{L1} + jx_M = 40 + j125 \text{ Ом}$,

$$\underline{Z}_2 = -jx_M = -j25 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = jx_{L2} + jx_M - jx_C = j45 \text{ Ом}.$$

3. Комплекс действующего значения тока \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 0,75 \angle -59,8^\circ \cdot \frac{-j25}{j20} = 0,94 \angle 120,2^\circ \text{ A}.$$

4. Напряжение на зажимах вольтметра $U_V = U_{12}$. На основании второго закона Кирхгофа для обозначенного в схеме, представленной на рис. 7.16, контура запишем:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \underline{I}_1 (jx_{L1} + jx_M) + \underline{I}_2 (jx_{L2} + jx_M) = \\ &= 0,75 \angle -59,8^\circ \cdot j125 + 0,94 \angle 120,2^\circ \cdot j75 = 23,25 \angle 30,2^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

5. Показание вольтметра будет соответствовать действующему значению напряжения

$$U_V = U_{12} = 23,25 \text{ В}.$$

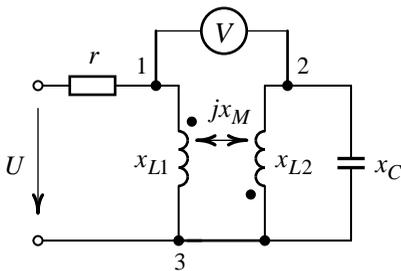


Рис. 7.15

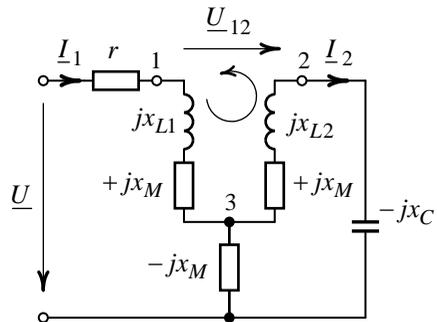


Рис. 7.16

Задача 7.8

Определить показания амперметров электромагнитной системы, сопротивление взаимоиндукции и коэффициент связи, при которых в цепи (рис. 7.17) наступит режим резонанса токов. Заданы параметры $U = 20 \text{ В}$, $x_{L1} = 45 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 20 \text{ Ом}$, $x_C = 35 \text{ Ом}$.

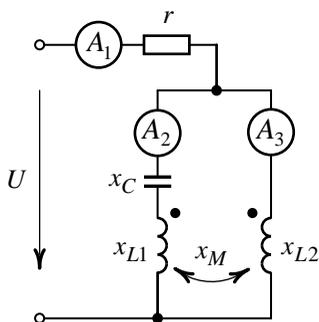


Рис. 7.17

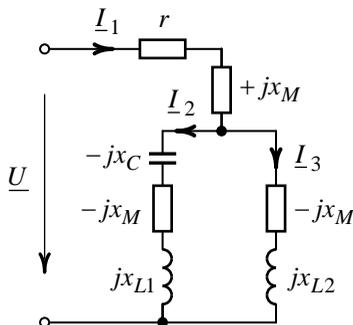


Рис. 7.18

Решение

1. Заданную схему, изображенную на рис. 7.17, заменим эквивалентной без индуктивных связей (рис. 7.18).

2. Из условия резонанса токов в параллельных ветвях для эквивалентной схемы (рис. 7.18) получим равенство

$$\frac{1}{jx_{L1} - jx_M - jx_C} + \frac{1}{jx_{L2} - jx_M} = 0.$$

Из равенства следует уравнение

$$2x_M - x_{L1} - x_{L2} + x_C = 0,$$

из которого находим сопротивление взаимоиндукции, соответствующее режиму резонанса токов:

$$x_M = \frac{x_{L1} + x_{L2} - x_C}{2} = \frac{45 + 20 - 35}{2} = 15 \text{ Ом}.$$

3. Коэффициент связи катушек индуктивностей

$$k = \frac{x_M}{\sqrt{x_{L1}x_{L2}}} = \frac{15}{\sqrt{45 \cdot 20}} = 0,5.$$

4. Показания амперметров будут определяться действующими значениями токов, обозначенных в схеме, изображенной на рис. 7.18.

При резонансе токов

$$\underline{I}_1 = 0,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{jx_{L1} - jx_M - jx_C} = \frac{20|0^\circ}{-j5} = 4|90^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{jx_{L2} - jx_M} = \frac{20|0^\circ}{j5} = 4|-90^\circ \text{ А}.$$

Окончательно запишем:

$$I_{A1} = I_1 = 0, \quad I_{A2} = I_2 = 4 \text{ А}, \quad I_{A3} = I_3 = 4 \text{ А}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.9. В цепи (рис. 7.19) каждая из трех катушек индуктивно связана с двумя другими. Определить одноименные зажимы катушек и рассчитать показание амперметра электромагнитной системы, установленного в последовательной цепи, если $U = 25 \text{ В}$, $r = 30 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,036 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,024 \text{ Гн}$, $L_3 = 0,032 \text{ Гн}$, $M_{12} = 0,006 \text{ Гн}$, $M_{23} = 0,004 \text{ Гн}$, $M_{31} = 0,008 \text{ Гн}$, $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$.

О т в е т: $I_A = 0,5 \text{ А}$.

Задача 7.10. Установить одноименные зажимы катушек и определить показания амперметров электромагнитной системы для цепи, схема которой изображена на рис. 7.20. Параметры схемы заданы: $U = 18 \text{ В}$, $L_1 = 0,01 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,006 \text{ Гн}$, $L_3 = 0,012 \text{ Гн}$, $L_4 = 0,016 \text{ Гн}$, $M_{12} = 0,002 \text{ Гн}$, $M_{34} = 0,004 \text{ Гн}$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

О т в е т: $I_{A1} = 2 \text{ А}$, $I_{A2} = 1,5 \text{ А}$, $I_{A3} = 0,5 \text{ А}$.

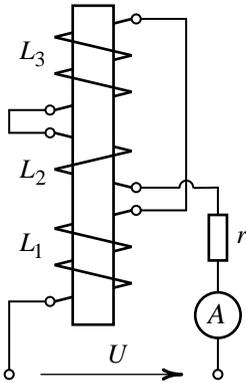


Рис. 7.19

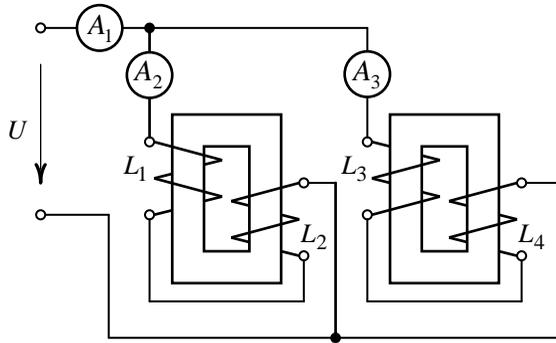


Рис. 7.20

Задача 7.11. Определить показание вольтметра электромагнитной системы в цепи (рис. 7.21), если $U = 102 \text{ В}$, $r_1 = 4,8 \text{ Ом}$, $r_2 = 2,2 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,045 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,025 \text{ Гн}$, $M_{12} = 0,013 \text{ Гн}$, $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$.

О т в е т: $U_V = 80 \text{ В}$.

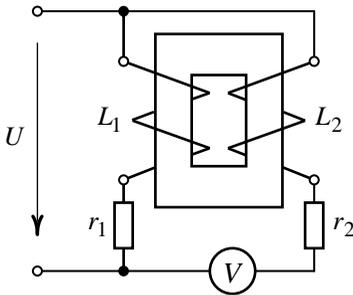


Рис. 7.21

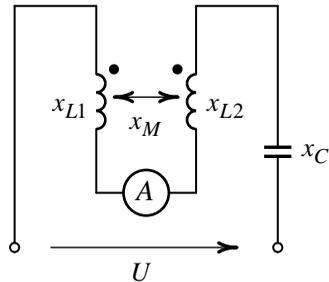


Рис. 7.22

Задача 7.12. Показание амперметра, установленного в цепи (рис. 7.22), соответствует току $I_A = 3 \text{ А}$. Определить сопротивление взаимной индукции и коэффициент связи катушек, если $U = 30 \text{ В}$, $x_{L1} = 32 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 24 \text{ Ом}$, $x_C = 20 \text{ Ом}$.

О т в е т: $x_M = 13 \text{ Ом}$, $k = 0,469$.

Задача 7.13. В цепи (рис. 7.23) определить показание амперметра электромагнитной системы, если $U = 25$ В, $r = 2$ Ом, $x_{L1} = 5$ Ом, $x_{L2} = 8$ Ом, $x_M = 4$ Ом, $x_C = 10$ Ом.

О т в е т: $I_A = 4$ А.

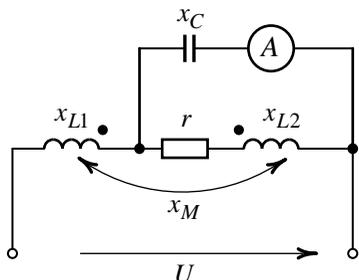


Рис. 7.23

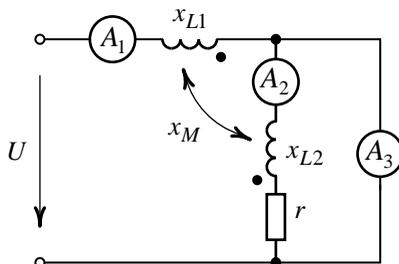


Рис. 7.24

Задача 7.14. Определить показания амперметров электромагнитной системы для цепи (рис. 7.24), если $U = 245$ В, $r = 12$ Ом, $x_{L1} = 21$ Ом, $x_{L2} = 26$ Ом, $x_M = 8$ Ом.

О т в е т: $I_{A1} = 12,9$ А, $I_{A2} = 3,6$ А, $I_{A3} = 16,2$ А.

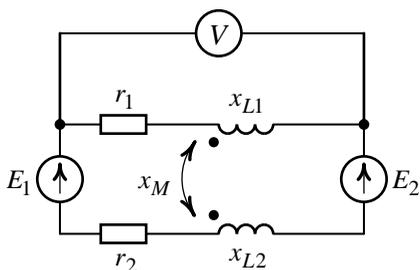


Рис. 7.25

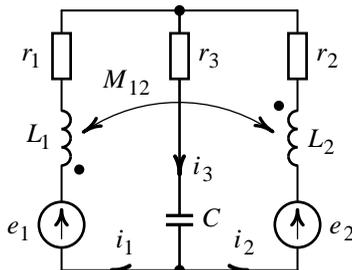


Рис. 7.26

Задача 7.15. Определить показание вольтметра электромагнитной системы, включенного по схеме (рис. 7.25), если $e_1 = 223\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)$ В, $e_2 = 141\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$ В, $r_1 = 8$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $x_{L1} = 25$ Ом, $x_{L2} = 20$ Ом, $x_M = 10$ Ом.

О т в е т: $U_V = 216$ В.

Задача 7.16. Рассчитать комплексы действующих значений токов в цепи (рис. 7.26), если $e_1 = 110\sqrt{2} \sin(1000t + 125^\circ)$ В, $e_2 = 280\sqrt{2} \sin(1000t - 45^\circ)$ В, $r_1 = 32$ Ом, $r_2 = 24$ Ом, $r_3 = 26$ Ом, $L_1 = 0,042$ Гн, $L_2 = 0,016$ Гн, $C = 50$ мкФ, коэффициент связи индуктивных обмоток $k_{12} = 0,54$.

О т в е т: $I_1 = 3,83 \angle 56,9^\circ$ А, $I_2 = 4,25 \angle -76,1^\circ$ А,
 $I_3 = 3,24 \angle -16,4^\circ$ А.

Задача 7.17. В цепи (рис. 7.27) каждая из трех катушек индуктивно связана с двумя другими. Определить комплексы действующих значений токов, если $U = 45$ В, $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, $x_{L1} = 12$ Ом, $x_{L2} = 8$ Ом, $x_{L3} = 16$ Ом, $x_{M12} = 3$ Ом, $x_{M13} = 5$ Ом, $x_{M32} = 2$ Ом.

О т в е т: $I_1 = 0,42 \angle -112,1^\circ$ А, $I_2 = 1,25 \angle -75,2^\circ$ А,
 $I_3 = 1,6 \angle -84,2^\circ$ А.

Задача 7.18. Для цепи (рис. 7.28) определить показания приборов электромагнитной системы. Дано: $U = 100$ В, $r = 24$ Ом, $x_{L1} = 32$ Ом, $x_{L2} = 16$ Ом, $x_{M12} = 8$ Ом, $x_{M13} = 12$ Ом.

О т в е т: $I_A = 2,5$ А, $U_V = 30$ В.

Задача 7.19. Вычислить комплекс входного сопротивления цепи (рис. 7.29), если $x_{L1} = 120$ Ом, $x_{L2} = 210$ Ом, $x_{L3} = 160$ Ом, $x_{M13} = 30$ Ом, $x_{M23} = 20$ Ом, $x_C = 50$ Ом.

О т в е т: $Z_{\text{вх}} = j280$ Ом.

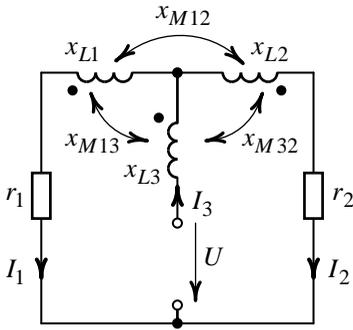


Рис. 7.27

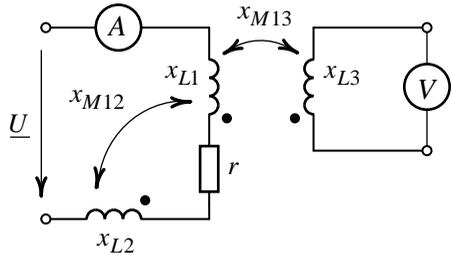


Рис. 7.28

Задача 7.20. Вычислить комплекс входного сопротивления цепи (рис. 7.30), если $x_{L1} = 16 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 36 \text{ Ом}$, $x_{L3} = 42 \text{ Ом}$, $x_M = 6 \text{ Ом}$, $x_C = 24 \text{ Ом}$.

О т в е т: $\underline{Z}_{\text{BX}} = j50 \text{ Ом}$.

Задача 7.21. Определить величину емкости конденсатора C_0 , при которой в цепи (рис. 7.31) возможен резонанс токов. Дано: $r = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,08 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,12 \text{ Гн}$, $M = 0,03 \text{ Гн}$, $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$.

О т в е т: $C_0 = 25,3 \text{ мкФ}$.

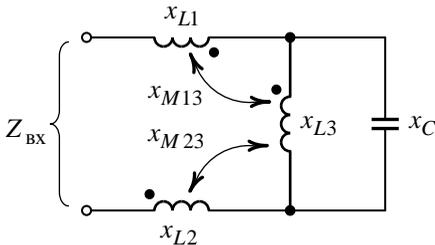


Рис. 7.29

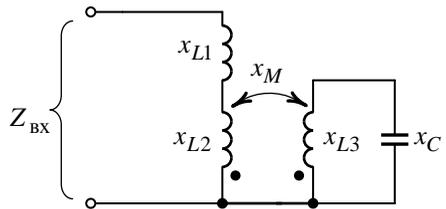


Рис. 7.30

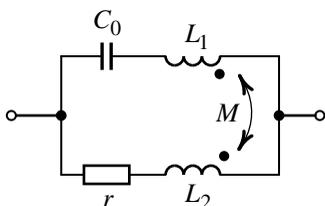


Рис. 7.31

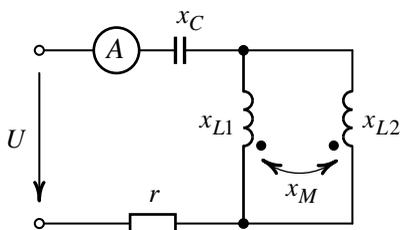


Рис. 7.32

Задача 7.22. Для схемы (рис. 7.32) определить емкостное сопротивление x_C и ток амперметра, установленного на входе цепи, при условии, что в цепи резонанс напряжений. Дано: $U = 12$ В, $r = 60$ Ом, $x_{L1} = 40$ Ом, $x_{L2} = 25$ Ом, $x_M = 10$ Ом

О т в е т: $x_C = 20$ Ом, $I_A = 0,2$ А.

8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ В ЦЕПЯХ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

При расчете электрических цепей синусоидального (переменного) тока интерес представляют характеристики, связанные с определением мощности и энергии, производимой или отдаваемой источниками и потребляемой в элементах цепи, режимов работы источников, определением коэффициента мощности и методов его повышения, условий передачи максимальной мощности от источника к нагрузке, направлений передачи энергии и т.д.

Задача 8.1

Для цепи (рис. 8.1) построить кривые мгновенных значений приложенного к цепи напряжения u , тока i , полной мощности p и энергии магнитного поля w_M . Дано: $u = 5 \sin \omega t$, $r = 1,2$ Ом, $L = 0,004$ Гн, $\omega = 400$ с⁻¹.

Решение

1. Мгновенное значение тока в цепи (рис. 8.1):

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{r}\right) = \\
 &= \frac{5}{\sqrt{1,2^2 + (400 \cdot 0,004)^2}} \sin\left(400t - \arctg \frac{400 \cdot 0,004}{1,2}\right) = \\
 &= 2,5 \sin(400t - 53,1^\circ) \text{ А.}
 \end{aligned}$$

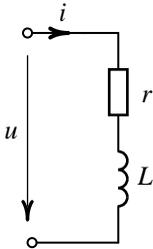


Рис. 8.1

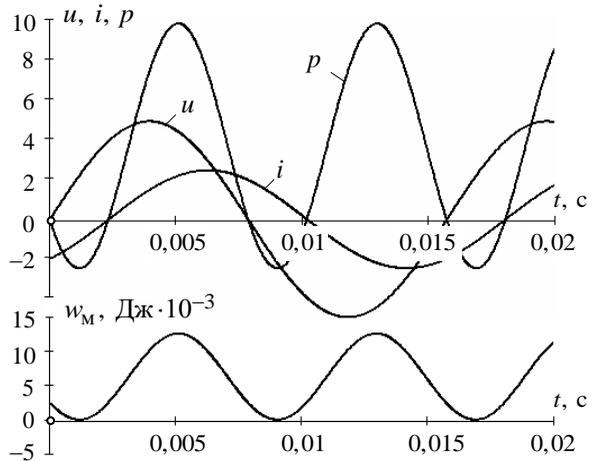


Рис. 8.2

2. Мгновенное значение полной мощности в цепи:

$$\begin{aligned}
 p &= ui = 5 \sin 400t \cdot 2,5 \sin(400t - 53,1^\circ) = \\
 &= \frac{5 \cdot 2,5}{2} [\cos(-53,1^\circ) - \cos(2 \cdot 400t - 53,1^\circ)] = \\
 &= 3,75 - 6,25 \cos(800t - 53,1^\circ) \text{ В} \cdot \text{А.}
 \end{aligned}$$

3. Мгновенное значение энергии магнитного поля

$$\begin{aligned}
 w_M &= \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{LI_m^2}{4} [1 - \cos(2\omega t + \psi_i)] = \\
 &= \frac{0,004 \cdot 2,5^2}{4} [1 - \cos(2 \cdot 400t - 53,1^\circ)] = \\
 &= 6,25 \cdot 10^{-3} [1 - \cos(800t - 53,1^\circ)] \text{ Дж.}
 \end{aligned}$$

4. Кривые зависимостей мгновенных значений u , i , p и w_M в функции от времени приведены на рис. 8.2.

Примечание. Отрицательный знак мгновенной мощности показывает, что источник не отдает энергию, а получает её от индуктивности.

Задача 8.2

Для цепи (рис. 8.3) построить кривые мгновенных значений приложенного к цепи напряжения u , тока i , полной мощности p , энергии электрического и магнитного полей. Дано: $u = 26 \sin \omega t$, $r = 2,5 \text{ Ом}$, $L = 0,02 \text{ Гн}$, $C = 500 \text{ мкФ}$, $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$.

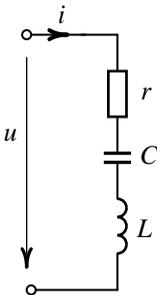


Рис. 8.3

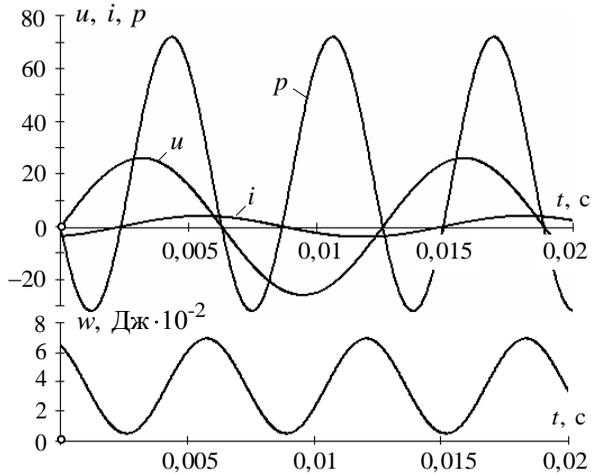


Рис. 8.4

Решение

1. Мгновенное значение тока в цепи (рис. 8.3):

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} \right) = \\ &= \frac{26}{\sqrt{2,5^2 + \left(500 \cdot 0,02 - \frac{1}{500 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} \sin \left(500t - \operatorname{arctg} \frac{10 - 4}{2,5} \right) = \\ &= 4 \sin(500t - 67,4^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

2. Мгновенное значение полной мощности в цепи:

$$\begin{aligned} p &= ui = 26 \sin 500t \cdot 4 \sin(500t - 67,4^\circ) = \\ &= \frac{26 \cdot 4}{2} \left[\cos(-67,4^\circ) - \cos(2 \cdot 500t - 67,4^\circ) \right] = \\ &= 20 - 52 \cos(1000t - 67,4^\circ) \text{ В} \cdot \text{А.} \end{aligned}$$

3. Мгновенное значение энергии электрического и магнитного полей установим, предварительно определив мгновенное значение напряжения на емкости:

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \psi_i \right) = \\ &= \frac{1}{500 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} 4 \sin(500t - 90^\circ - 67,4^\circ) = \\ &= 16 \sin(500t - 157,4^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 w = w_3 + w_M &= \frac{Cu_C^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{CU_{mC}^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_u) + \\
 &+ \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{CU_{mC}^2}{4} [1 - \cos(2\omega t + \psi_u)] + \\
 &+ \frac{LI_m^2}{4} [1 - \cos(2\omega t + \psi_i)] = \\
 &= \frac{500 \cdot 10^{-6} \cdot 16^2}{4} [1 - \cos(2 \cdot 500t - 157,4^\circ)] + \\
 &+ \frac{0,02 \cdot 4^2}{4} [1 - \cos(2 \cdot 500t - 67,4^\circ)] = \\
 &= 32 \cdot 10^{-3} [1 - \cos(1000t - 157,4^\circ)] + 5 \cdot 10^{-3} [1 - \cos(1000t - 67,4^\circ)] \text{ Дж.}
 \end{aligned}$$

4. Кривые зависимости мгновенных значений u , i , p и w в функции от времени показаны на рис. 8.4.

Задача 8.3

Графики изменения мгновенной мощности потребителей изображены на рис. 8.5 – 8.7. По кривой $p(\omega t)$ определить полную S , активную P , реактивную Q мощности и $\cos \varphi$ потребителя.

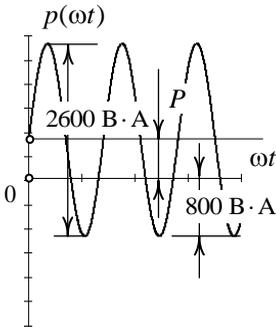


Рис. 8.5

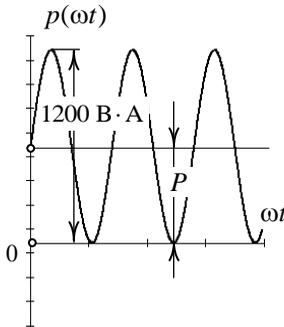


Рис. 8.6

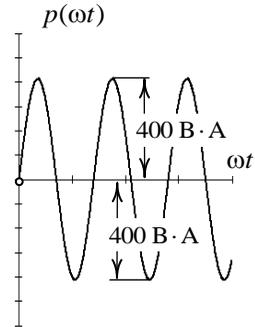


Рис. 8.7

Решение

1. Допустим, что напряжение и ток в цепи равны:

$$u = U_m \sin \omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t \pm \psi),$$

тогда мгновенная мощность цепи

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t \pm \psi) = \\ &= UI \cos \psi - UI \cos(2\omega t \pm \psi) = S \cos \psi - S \cos(2\omega t \pm \psi). \end{aligned}$$

Установленное выражение отражает графики изменения мгновенной мощности (см. рис. 8.5 – 8.7). Следовательно, величину полной мощности S на графике определяет амплитудное значение синусоиды, изменяющейся с двойной частотой, а величину активной мощности P – сдвиг синусоиды по оси ординат относительно оси симметрии.

2. Рассмотрим график мгновенной мощности (рис. 8.5). Полная мощность цепи $S = \frac{2600}{2} = 1300 \text{ В} \cdot \text{А}$, активная мощность $P = 1300 - 800 = 500 \text{ Вт}$, реактивная мощность

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{1300^2 - 500^2} = 1200 \text{ вар}.$$

По определению $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{500}{1300} = 0,385$.

3. Рассмотрим график мгновенной мощности (рис. 8.6). Полная мощность цепи $S = \frac{1200}{2} = 600 \text{ В} \cdot \text{А}$, активная мощность

$$P = S = 600 \text{ Вт}, \quad \text{реактивная мощность} \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0,$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{600}{600} = 1.$$

4. Рассмотрим график мгновенной мощности (рис. 8.7). Полная мощность цепи $S = 400 \text{ В} \cdot \text{А}$, активная мощность $P = 0$, реактивная

$$\text{мощность } Q = S = 400 \text{ вар}, \quad \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{0}{400} = 0.$$

Задача 8.4

Для цепи (рис. 8.8) установить режимы работы источников по активной мощности, составить уравнение баланса мощностей.

Дано: $\underline{E}_1 = 120e^{j20^\circ}$ В, $\underline{E}_2 = 230e^{-j260^\circ}$ В, $\underline{E}_3 = 100e^{j90^\circ}$ В,
 $r_1 = 140$ Ом, $r_2 = 160$ Ом, $x_{C1} = 110$ Ом, $x_{L1} = 190$ Ом.

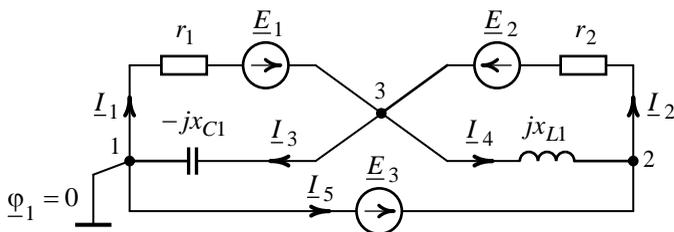


Рис. 8.8

Решение

Выполним расчет комплексов действующих значений токов. Для расчета цепи целесообразно воспользоваться методом узловых потенциалов.

Потенциал узла 1 (см. рис. 8.8) принимаем равным нулю ($\varphi_1 = 0$), следовательно, потенциал $\varphi_2 = \underline{E}_3$.

1. Расчетное уравнение для комплексного потенциала узла 3 будет иметь следующий вид:

$$\varphi_3 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{-jx_{C1}} + \frac{1}{jx_{L1}} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{jx_{L1}} \right) = \frac{\underline{E}_1}{r_1} + \frac{\underline{E}_2}{r_2},$$

откуда

$$\varphi_3 = \frac{\frac{\underline{E}_1}{r_1} + \frac{\underline{E}_2}{r_2} + \varphi_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{jx_{L1}} \right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{-jx_{C1}} + \frac{1}{jx_{L1}}} =$$

$$= \frac{\frac{120|20^\circ}{140} + \frac{230|-260^\circ}{160} + 100|90^\circ \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{j190} \right)}{\frac{1}{140} + \frac{1}{160} + \frac{1}{-j110} + \frac{1}{j190}} = 184,7|49,2^\circ \text{ В.}$$

2. Комплексы действующих значений токов ветвей:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3 + \underline{E}_1}{r_1} = \frac{-184,7|49,2^\circ + 120|20^\circ}{140} = 0,71|-94,6^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_3 + \underline{E}_2}{r_2} = \frac{100|90^\circ - 184,7|49,2^\circ + 230|-260^\circ}{160} =$$

$$= 1,54|130,7^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_1}{-jx_{C1}} = \frac{184,7|49,2^\circ}{-j110} = 1,68|139,2^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_2}{jx_{L1}} = \frac{184,7|49,2^\circ - 100|90^\circ}{j190} = 0,67|-71,7^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_3 - \underline{I}_1 = 1,68|139,2^\circ - 0,71|-94,6^\circ = 2,17|123,9^\circ \text{ А.}$$

3. Режимы работы источников по активной мощности

Мощность источника ЭДС E_1 :

$$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1 \bar{\underline{I}}_1 = 120|20^\circ \cdot 0,71|+94,6^\circ = -35,47 + j77,47 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Активная мощность $P_{E1} = -35,47$ Вт имеет отрицательное значение, что означает работу источника ЭДС E_1 в режиме приемника (потребителя).

Мощность источника ЭДС E_2 :

$$\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2 \bar{\underline{I}}_2 = 230|-260^\circ \cdot 1,54|-130,7^\circ = 304,56 - j180,83 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Активная мощность $P_{E2} = 304,56$ Вт имеет положительное значение, что означает работу источника в генераторном режиме (режим источника).

Мощность источника ЭДС E_3 :

$$\underline{S}_{E3} = \underline{E}_3 \bar{I}_5 = 100 \angle 90^\circ \cdot 2,17 \angle -123,9^\circ = 180,11 - j121,03 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Активная мощность $P_{E3} = 180,11$ Вт имеет положительное значение. Работа источника ЭДС E_3 также осуществляется в генераторном режиме (режим источника).

4. Уравнение баланса мощностей цепи

Мощность, развиваемая всеми источниками:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{S}_{E1} + \underline{S}_{E2} + \underline{S}_{E3} = \underline{E}_1 \bar{I}_1 + \underline{E}_2 \bar{I}_2 + \underline{E}_3 \bar{I}_5 = 449,21 - j224,4 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Мощность, потребляемая:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{пот}} &= I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 (-jx_{C1}) + I_4^2 jx_{L1} = \\ &= 0,71^2 \cdot 140 + 1,54^2 \cdot 160 + 1,68^2 (-j110) + 0,67^2 \cdot j190 = \\ &= 450,03 - j225,17 \text{ В} \cdot \text{А}. \end{aligned}$$

Относительная ошибка вычислений по активной и реактивной мощности:

$$\delta_P \% = \frac{450,03 - 449,21}{\frac{1}{2}(450,03 + 449,21)} 100 \% = 0,18 \%,$$

$$\delta_Q \% = \frac{225,17 - 224,4}{\frac{1}{2}(225,17 + 224,4)} 100 \% = 0,34 \%.$$

Задача 8.5

Для цепи (рис. 8.9) требуется определить показания ваттметров для различных схем включения его измерительных обмоток. Дано: $U = 120$ В, $r_1 = 12$ Ом, $r_2 = 16$ Ом, $x_L = 46$ Ом, $x_C = 34$ Ом.

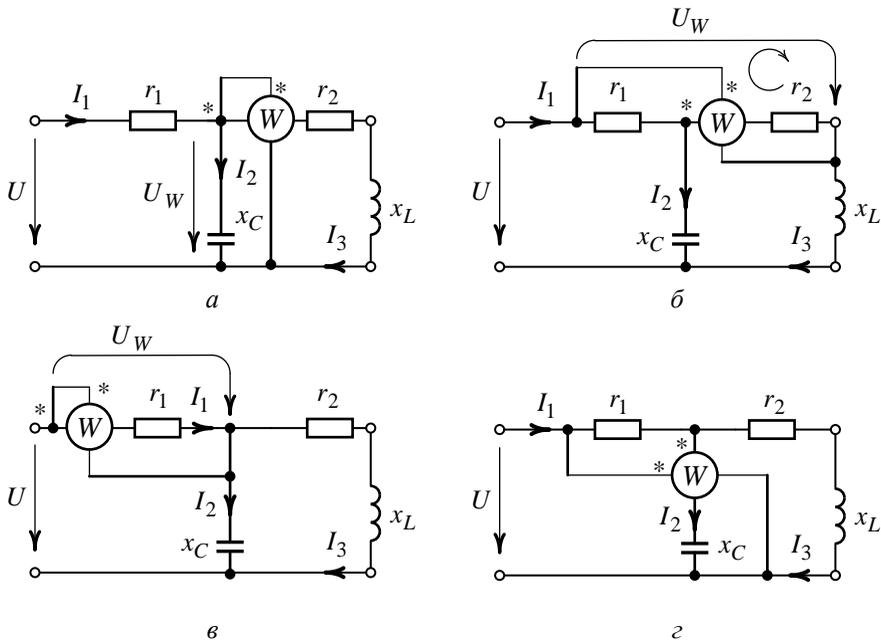


Рис. 8.9

Решение

1. Выполним расчет токов в ветвях цепи комплексным методом. Комплекс действующего значения тока на входе цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{U}}{r_1 + \frac{-jx_C(r_2 + jx_L)}{r_2 + jx_L - jx_C}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{12 + \frac{-j34(16 + j46)}{16 + j12}} = 1,33 \angle 49,7^\circ \text{ A}.$$

2. Комплексы действующих значений токов в разветвленной части цепи:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{r_2 + jx_L}{r_2 + jx_L - jx_C} = 1,33 \angle 49,7^\circ \frac{16 + j46}{16 + j12} = 3,24 \angle 83,6^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{-jx_C}{r_2 + jx_L - jx_C} = 1,33 \angle 49,7^\circ \frac{-j34}{16 + j12} = 2,26 \angle -77,2^\circ \text{ A}.$$

3. Показание ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.9, а), найдем, предварительно определив комплекс действующего напряжения:

$$\underline{U}_W = \underline{I}_2 (-jx_C) = 3,24 \underline{[83,6^\circ]} (-j34) = 110,16 \underline{[-6,4^\circ]} \text{ В.}$$

Показание ваттметра соответствует мощности

$$P_1 = \operatorname{Re}[\underline{S}_1] = \operatorname{Re}[\underline{U}_W \bar{I}_3] = \operatorname{Re}[110,16 \underline{[-6,4^\circ]} \cdot 2,26 \underline{[+77,2^\circ]}] = 81,76 \text{ Вт.}$$

4. Показание ваттметра, включенного по схеме, изображенной на рис. 8.9, б.

Напряжение, приложенное к измерительной обмотке ваттметра, найдем по второму закону Кирхгофа для указанного на схеме (см. рис. 8.9, б) контура:

$$\underline{U}_W - \underline{I}_3 r_2 - \underline{I}_1 r_1 = 0,$$

откуда

$$\underline{U}_W = \underline{I}_3 r_2 + \underline{I}_1 r_1 = 2,26 \underline{[-77,2^\circ]} \cdot 16 + 1,33 \underline{[49,7^\circ]} \cdot 12 = 29,48 \underline{[-51,5^\circ]} \text{ В.}$$

Показание ваттметра соответствует активной мощности:

$$P_2 = \operatorname{Re}[\underline{S}_2] = \operatorname{Re}[\underline{U}_W \bar{I}_3] = \operatorname{Re}[29,48 \underline{[-51,5^\circ]} \cdot 2,26 \underline{[+77,2^\circ]}] = 60,03 \text{ Вт.}$$

5. Показание ваттметра, включенного по схеме, изображенной на рис. 8.9, в.

Напряжение, приложенное к измерительной обмотке:

$$\underline{U}_W = \underline{I}_1 r_1 = 1,33 \underline{[49,7^\circ]} \cdot 12 = 15,96 \underline{[49,7^\circ]} \text{ В.}$$

Показание ваттметра будет соответствовать активной мощности

$$P_3 = \operatorname{Re}[\underline{S}_3] = \operatorname{Re}[\underline{U}_W \bar{I}_1] = \operatorname{Re}[15,96 \underline{[49,7^\circ]} \cdot 1,33 \underline{[-49,7^\circ]}] = 21,23 \text{ Вт.}$$

6. Показание ваттметра, включенного по схеме, изображенной на рис. 8.9, г.

Напряжение, приложенное к измерительной обмотке $\underline{U}_W = \underline{U}$.

Ваттметр покажет активную мощность:

$$P_4 = \operatorname{Re}[\underline{S}_4] = \operatorname{Re}[\underline{U}_W \bar{I}_2] = \operatorname{Re}[120 \underline{[0^\circ]} \cdot 3,24 \underline{[-83,6^\circ]}] = 43,34 \text{ Вт.}$$

Задача 8.6

Определить полную, активную, реактивную мощности и коэффициент мощности цепи (рис. 8.10) при разомкнутом положении ключа SA . Рассчитать емкость конденсатора, которую необходимо включить параллельно цепи, чтобы повысить коэффициент мощности до $\cos \varphi^I = 0,851$. Дано: $U = 36 \text{ В}$, $r_1 = 0,2 \text{ Ом}$, $r_2 = 0,4 \text{ Ом}$, $r_3 = 4,6 \text{ Ом}$, $L = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$.

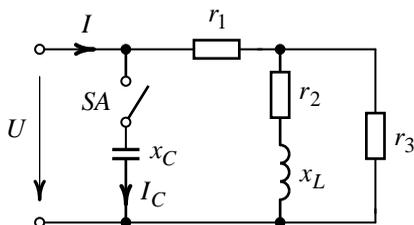


Рис. 8.10

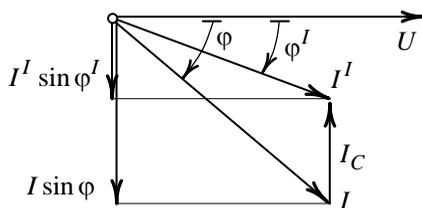


Рис. 8.11

Решение

1. Комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи при разомкнутом ключе SA (см. рис. 8.10).

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{U}}{r_1 + \frac{(r_2 + j\omega L)r_3}{r_2 + r_3 + j\omega L}} = \\ &= \frac{36 \underline{0}^\circ}{0,2 + \frac{(0,4 + j314 \cdot 4 \cdot 10^{-3})4,6}{0,4 + 4,6 + j314 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} = 27,85 \underline{-50,7}^\circ \text{ А}. \end{aligned}$$

2. Полная мощность цепи:

$$\underline{S} = \underline{U} \bar{\underline{I}} = 36 \underline{0}^\circ \cdot 27,85 \underline{+50,7}^\circ = 1002,6 \underline{50,7}^\circ = 635 + j775,8 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Активная мощность:

$$P = \operatorname{Re}[\underline{S}] = \operatorname{Re}[635 + j775,8] = 635 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность:

$$Q = \operatorname{Im}[\underline{S}] = \operatorname{Im}[635 + j775,8] = 775,8 \text{ вар}.$$

Таким образом, $S = 1002,6 \text{ В} \cdot \text{А}$, $P = 635 \text{ Вт}$, $Q = 775,8 \text{ вар}$.

3. Коэффициент мощности:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{635}{1002,6} = 0,633.$$

4. Для повышения коэффициента мощности от $\cos \varphi = 0,633$ до $\cos \varphi = 0,851$ (ключ SA в замкнутом положении) ток I_C через емкость согласно векторной диаграмме (рис. 8.11) должен иметь величину

$$I_C = I \sin \varphi - I^I \sin \varphi^I.$$

Ток в неразветвленной части найдем из соотношения (см. рис. 8.11)

$$I \cos \varphi = I^I \cos \varphi^I,$$

откуда

$$I^I = I \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi^I} = 27,85 \frac{0,633}{0,851} = 20,72 \text{ А}.$$

По известным $\cos \varphi = 0,633$ и $\cos \varphi^I = 0,851$ находим $\sin \varphi = 0,774$ и $\sin \varphi^I = 0,525$.

Ток через емкость

$$I_C = I \sin \varphi - I^I \sin \varphi^I = 27,85 \cdot 0,774 - 20,72 \cdot 0,525 = 10,68 \text{ А}.$$

Согласно схеме (рис. 8.10) $I_C = \frac{U}{1/\omega C}$, откуда емкость конденсатора должна составлять

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{10,68}{314 \cdot 36} = 945 \text{ мкФ}.$$

Задача 8.7

Для цепи (рис. 8.12) определить ток в нагрузочном сопротивлении Z_H при условии выделения в нем максимальной мощности, установить максимально возможную мощность. Определить КПД системы передачи электрической энергии от источника в нагрузку. Дано: $E = 110$ В, $r = 2$ Ом, $x_L = 3$ Ом, $r_0 = 2$ Ом, $x_0 = 4$ Ом, $x_C = 6$ Ом.

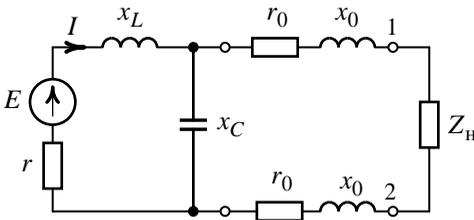


Рис. 8.12

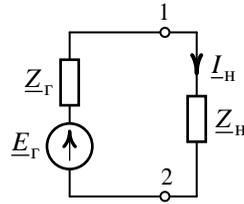


Рис. 8.13

Решение

1. Применим теорему об эквивалентном генераторе, и согласно схеме, изображенной на рис. 8.13, выполним расчет тока I_H в нагрузочном сопротивлении Z_H как

$$I_H = \frac{E_G}{Z_G + Z_H}.$$

2. Определим ЭДС генератора E_G , которая равна комплексу действующего напряжения \underline{U}_{12} относительно зажимов разомкнутой ветви с нагрузочным сопротивлением Z_H (рис. 8.14):

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}^I (-jx_C) = \frac{E(-jx_C)}{r + jx_L - jx_C} = \frac{110 \angle 0^\circ (-j6)}{2 + j3 - j6} = 183,05 \angle -33,7^\circ \text{ В}.$$

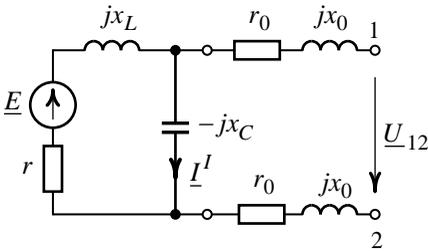


Рис. 8.14

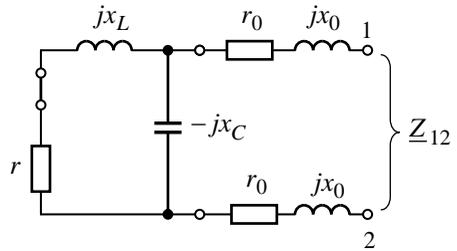


Рис. 8.15

3. Определим сопротивление генератора $\underline{Z}_Г$, которое равно комплексному сопротивлению \underline{Z}_{12} относительно зажимов разомкнутой ветви с сопротивлением \underline{Z}_H (рис. 8.15):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_Г = \underline{Z}_{12} &= 2r_0 + 2jx_0 + \frac{-jx_C(r + jx_L)}{r + jx_L - jx_C} = \\ &= 4 + j8 + \frac{-j6(2 + j3)}{2 + j3 - j6} = 14,04 \angle 47,2^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

4. Найдем сопротивление нагрузки \underline{Z}_H . Максимум мощности выделится в нагрузке \underline{Z}_H при условии, что сопротивление нагрузки комплексно сопряжено с сопротивлением эквивалентного генератора

$$\underline{Z}_H = \bar{\underline{Z}}_{12} = 14,04 \angle -47,2^\circ = 9,54 - j10,3 \text{ Ом.}$$

5. Комплекс действующего значения тока в нагрузочном сопротивлении:

$$\begin{aligned} \underline{I}_H &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_Г + \underline{Z}_H} = \frac{183,05 \angle -33,7^\circ}{14,04 \angle 47,2^\circ + 14,04 \angle -47,2^\circ} = \frac{183,05 \angle -33,7^\circ}{19,08} = \\ &= 9,59 \angle -33,7^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

6. Максимально возможная мощность, выделяемая в нагрузке, составит

$$P_{H \max} = I_H^2 \operatorname{Re}(Z_H) = 9,59^2 \operatorname{Re}(9,54 - j10,3) = 877,4 \text{ Вт.}$$

7. Рассчитаем мощность, доставляемую источником \underline{E} (см. рис. 8.12):

$$P_E = \operatorname{Re}[\underline{E}\bar{I}] = \operatorname{Re}[110|0^\circ \cdot 25,4|-24,8^\circ] = 2536 \text{ Вт,}$$

где
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{r + jx_L + \frac{-jx_C(2r_0 + 2jx_0 + Z_H)}{2r_0 + 2jx_0 + Z_H - jx_C}} =$$

$$= \frac{110|0^\circ}{2 + j3 + \frac{-j6(4 + j8 + 9,54 - j10,3)}{4 + j8 + 9,54 - j10,3 - j6}} = 25,4|24,8^\circ \text{ А.}$$

8. КПД системы передачи электрической энергии от источника к нагрузке

$$\eta = \frac{P_{H \max}}{P_E} 100\% = \frac{877,4}{2536} 100\% = 34,6\% .$$

Задача 8.8

Источники ЭДС E_1 и E_2 с присоединенной нагрузкой Z_{H1} и Z_{H2} образуют две части схемы, соединенные двухпроводной линией (рис. 8.16). Определить направление передачи энергии через линию от одной части схемы к другой. Дано: $\underline{E}_1 = 240e^{j230^\circ} \text{ В}$, $\underline{E}_2 = 240e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $r_1 = r_2 = 2 \text{ Ом}$, $x_{L1} = x_{L2} = 4 \text{ Ом}$, $Z_{H1} = 25 \text{ Ом}$, $Z_{H2} = 15 \text{ Ом}$.

Решение

1. Допустим, что в применении к схеме (см. рис. 8.16) мощность передается по двухпроводной линии от левой части схемы к правой. Этим определен выбор положительного направления тока в линии \underline{I}_L

и соответствующее включение ваттметра для измерения активной мощности, передаваемой слева направо (рис. 8.16).

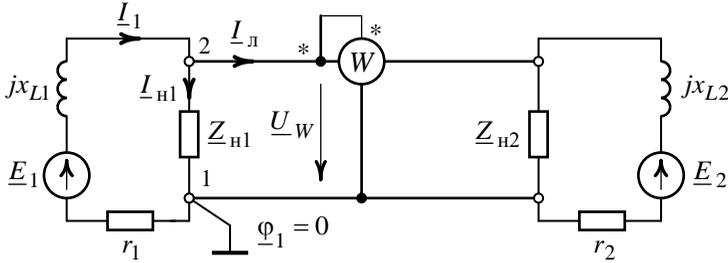


Рис. 8.16

Ваттметр измеряет активную мощность, передаваемую в линии

$$P = \operatorname{Re}[\underline{U}_W \bar{I}_л].$$

2. Расчет схемы выполним методом двух узлов. Пусть $\varphi_1 = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\frac{\underline{E}_1}{r_1 + jx_{L1}} + \frac{\underline{E}_2}{r_2 + jx_{L2}}}{\frac{1}{r_1 + jx_{L1}} + \frac{1}{r_2 + jx_{L2}} + \frac{1}{Z_{H1}} + \frac{1}{Z_{H2}}} = \\ &= \frac{\frac{240 \angle 230^\circ}{2 + j4} + \frac{240 \angle -120^\circ}{2 + j4}}{\frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{15}} = 212,14 \angle -135,9^\circ \text{ В.} \end{aligned}$$

3. Интересующие в схеме (см. рис. 8.16) комплексы действующих значений токов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \underline{E}_1}{r_1 + jx_{L1}} = \frac{-212,14 \angle -135,9^\circ + 240 \angle 230^\circ}{2 + j4} = 8,11 \angle -156,5^\circ \text{ А,} \\ I_{H1} &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{Z_{H1}} = \frac{212,14 \angle -135,9^\circ}{25} = 8,49 \angle -135,9^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

По первому закону Кирхгофа через узел 2 найдем \underline{I}_L :

$$\underline{I}_L = \underline{I}_1 - \underline{I}_{H1} = 8,11 \angle -156,5^\circ - 8,49 \angle -135,9^\circ = 2,99 \angle 116,6^\circ \text{ A}.$$

4. Напряжение на зажимах ваттметра (напряжение в линии):

$$\underline{U}_W = \underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1 = 212,14 \angle -135,9^\circ \text{ В}.$$

5. Показание ваттметра

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re}[\underline{U}_W \bar{I}_L] = \operatorname{Re}[212,14 \angle -135,9^\circ \cdot 2,99 \angle -116,6^\circ] = \\ &= \operatorname{Re}(-190,1 + j602,92) = -190,1 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Активная мощность имеет отрицательное значение, следовательно, направление передачи энергии через линию осуществляется от правой части схемы (см. рис. 8.16) к левой.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.9. Для последовательной r , C цепи (рис. 8.17) получить зависимости для мгновенных значений полной мощности p , активной мощности p_a и энергии электрического поля w_3 . Дано: $u = 65 \sin \omega t$. $r = 30 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $\omega = 800 \text{ с}^{-1}$.

$$\text{О т в е т: } p = 60 - 65 \cos(1600t + 22,6^\circ) \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$p_a = 60 [1 - \cos(1600t + 45,2^\circ)] \text{ Вт},$$

$$w_3 = 15,62 \cdot 10^{-3} [1 - \cos(1600t - 134,8^\circ)] \text{ Дж}.$$

Задача 8.10. По кривой изменения мгновенной мощности (рис. 8.18) определить полную S , активную P , реактивную Q мощности и $\cos \varphi$ потребителя.

$$\text{О т в е т: } S = 200 \text{ В} \cdot \text{А}, P = 120 \text{ Вт}, Q = 160 \text{ вар}, \cos \varphi = 0,6.$$

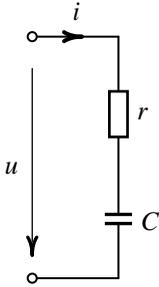


Рис. 8.17

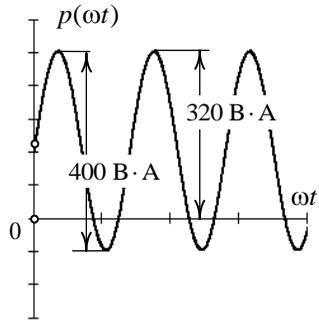


Рис. 8.18

Задача 8.11. По показаниям ваттметров (рис. 8.19) определить режимы работы источников энергии, если $e_1 = 52\sqrt{2} \sin(\omega t + 70^\circ)$ В, $e_2 = 104\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ)$ В, $r = 100$ Ом, $x_L = 150$ Ом, $x_C = 120$ Ом.

О т в е т: $R_{W1} = 46,21$ Вт – генераторный режим работы источника E_1 ,
 $R_{W2} = 76,41$ Вт – генераторный режим работы источника E_2 .

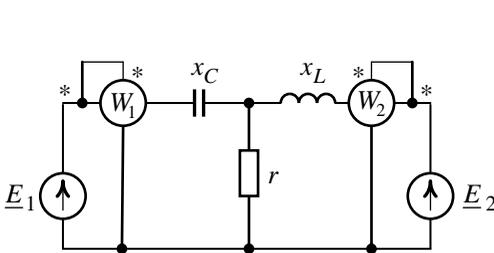


Рис. 8.19

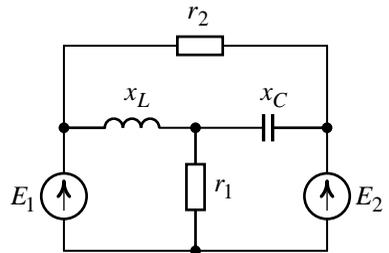


Рис. 8.20

Задача 8.12. Для цепи (рис. 8.20) установить режимы работы источников по активной мощности и составить уравнение баланса мощностей.

Дано: $\underline{E}_1 = 240e^{-j25^\circ}$ В, $\underline{E}_2 = 180e^{j15^\circ}$ В, $r_1 = 40$ Ом, $r_2 = 60$ Ом, $x_L = 50$ Ом, $x_C = 20$ Ом.

О т в е т: $P_{E1} = -302,6$ Вт – режим приемника; $P_{E2} = 1320$ Вт – генераторный режим, $\underline{S} = 1017 + j276,7$ В·А.

Задача 8.13. Вычислить показания ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.21), если $U = 164$ В, $r_1 = 120$ Ом, $r_2 = 160$ Ом, $x_L = 60$ Ом, $x_C = 150$ Ом.

О т в е т: $P_W = 36,1$ Вт.

Задача 8.14. Вычислить показания ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.22), если $U = 80$ В, $r = 32$ Ом, $x_{L1} = x_{L2} = 42$ Ом, $x_M = 24$ Ом, $x_C = 18$ Ом.

О т в е т: $P_W = 128$ Вт.

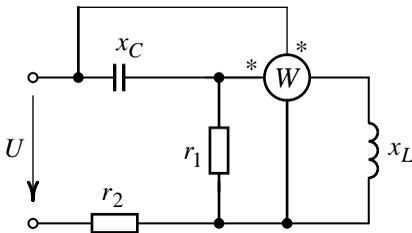


Рис. 8.21

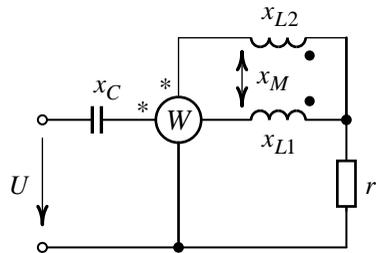


Рис. 8.22

Задача 8.15. Определить показание ваттметра и коэффициент мощности цепи (рис. 8.23). Дано: $U = 210$ В, $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 15$ Ом, $x_{L1} = 40$ Ом, $x_{L2} = 30$ Ом, $x_{C1} = 25$ Ом.

О т в е т: $P_W = 722,4$ Вт, $\cos \varphi = 0,75$.

Задача 8.16. Определить емкость конденсатора, которую необходимо включить параллельно цепи (рис. 8.24), чтобы повысить коэф-

коэффициент мощности до $\cos \varphi^I = 0,93$. Дано: $u = 127\sqrt{2} \sin \omega t \hat{A}$, $r = 21 \text{ Ом}$, $x_L = 36 \text{ Ом}$.

О т в е т: $C \approx 50 \text{ мкФ}$.

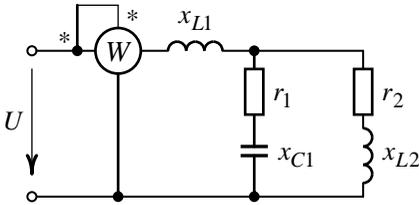


Рис. 8.23

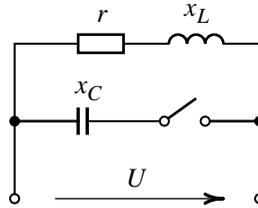


Рис. 8.24

Задача 8.17. Для цепи (рис. 8.25) определить нагрузочное сопротивление \underline{Z}_H при условии выделения в нем максимальной мощности. Определить величину этой мощности. Дано: $\underline{E}_1 = 34e^{j110^\circ} \text{ В}$, $\underline{E}_2 = 26e^{-j30^\circ} \text{ В}$, $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 15 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 8 \text{ Ом}$, $x_{L2} = 12 \text{ Ом}$.

О т в е т: $\underline{Z}_H = 6 - j4,8 \text{ Ом}$, $P_{H \max} = 8,4 \text{ Вт}$.

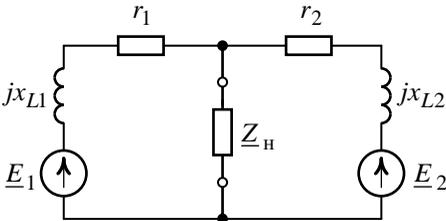


Рис. 8.25

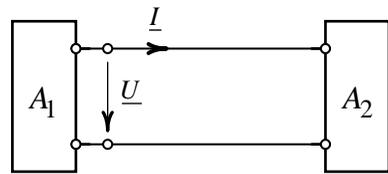


Рис. 8.26

Задача 8.18. В цепи, образованной двумя активными двухполосниками, положительные направления тока и напряжения в соединяющей их двухпроводной линии определены в соответствии с рис. 8.26. Определить направление передачи энергии через линию и величину

передаваемой полной и активной мощности, если $\underline{U} = 125 + j300$ В, $\underline{I} = 1,2 + j1,6$ А.

О т в е т: передача энергии от A_1 к A_2 ; $S = 650$ В·А, $P = 630$ Вт.

9. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ MathCAD ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

С целью автоматизации и ускорения процесса расчета рассмотрим основные возможности и приемы работы в математической программной среде MathCAD при анализе линейных электрических цепей однофазного синусоидального тока.

Задача 9.1

Мгновенные значения напряжения и тока на выходе цепи равны: $u = 90\sin(628t + 25^\circ)$ В, $i = 30\sin(628t - 115^\circ)$ В. Построить кривые изменения напряжения и тока. Определить значения величин на момент времени $t = 0$.

Решение

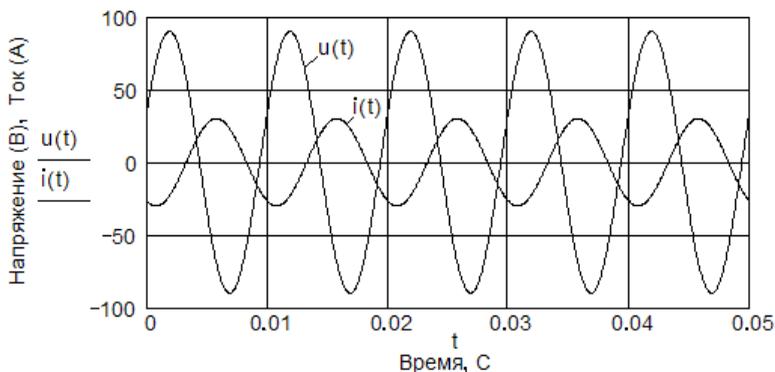
Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Задание мгновенных значений величин:

$$u(t) := 90 \cdot \sin(628 \cdot t + 25 \text{deg})$$

$$i(t) := 30 \cdot \sin(628 \cdot t - 115 \text{deg})$$

2. Задание зависимостей в декартовой системе координат (X-Y Plot) :



3. Значения величин при $t = 0$:

Напряжение, В : $u(0) = 38.04$

Ток, А : $i(0) = -27.19$

Примечание. Чтобы аргумент тригонометрической функции был представлен в градусах (град), необходимо после записи значения аргумента в MathCAD добавить deg.

Задача 9.2

Мгновенные значения напряжения источника и тока изменяются по закону $u(t) = 6\sqrt{2} \sin 314t$ В, $i(t) = 1,8\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ)$ А. Построить график изменения полной мгновенной мощности цепи.

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Задание мгновенных значений величин:

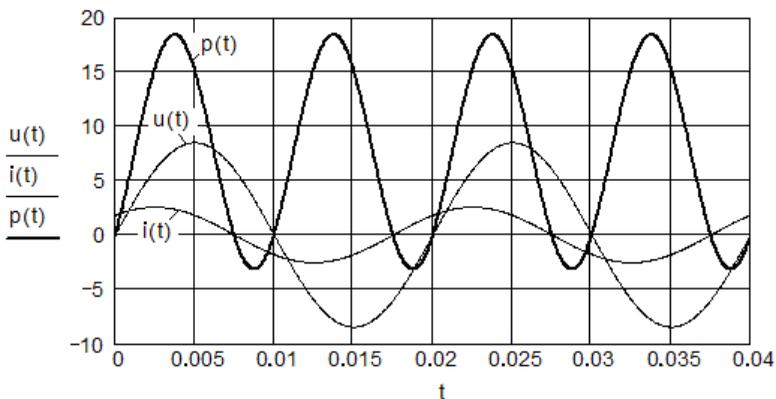
$$u(t) := 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t)$$

$$i(t) := 1.8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 45 \text{deg})$$

2. Мгновенное значение мощности, ВА :

$$p(t) := u(t) \cdot i(t)$$

3. Задание зависимостей в декартовой системе координат (X-Y Plot):



Задача 9.3

Комплекс действующего значения тока равен $\underline{I}_1 = 12 + j16$ А. Определить модуль, аргумент комплексного тока и комплексно-сопряженное ему число.

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Комплексный ток, А :

$$\underline{I}_1 := 12 + 16j$$

2. Модуль комплексного тока, А :

$$|\underline{I}_1| = 20$$

3. Аргумент комплексного тока, рад :

$$\arg(\underline{I}_1) = 0.927$$

4. Аргумент комплексного тока, град :

$$\frac{\arg(\underline{I}_1)}{\text{deg}} = 53.13$$

5. Комплексно-сопряженное току число :

$$\overline{\underline{I}_1} = 12 - 16j$$

Примечание. Чтобы перевести радианы (рад) в электрические градусы (град), необходимо задаваемую функцию аргумента (arg) в MathCAD разделить на deg.

Задача 9.4

Комплекс действующего значения напряжения задан в показательной форме $\underline{U}_1 = 420e^{-j120^\circ}$ В. Записать комплекс действующего значения напряжения в алгебраической форме. Выделить действительную и мнимую части комплексного числа.

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Комплекс действующего напряжения в показательной форме, В :

$$U_1 := 420 \cdot e^{-120 \cdot \text{deg} \cdot j}$$

2. Комплекс действующего напряжения в алгебраической форме, В :

$$U_1 = -210 - 363.73j$$

3. Действительная часть числа :

$$\text{Re}(U_1) = -210$$

4. Мнимая часть числа :

$$\text{Im}(U_1) = -363.73$$

Задача 9.5

В результате расчета электрической цепи были получены комплексы действующих токов для узла (рис. 9.1) $\underline{I}_1 = 2,4 - j1,8$ А, $\underline{I}_2 = 0,8 - j1,6$ А, $\underline{I}_3 = -0,4 + j0,7$ А. Определить комплекс действующего значение тока \underline{I}_4 , модуль и начальную фазу.

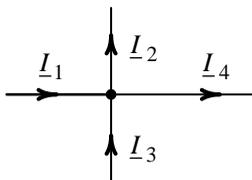


Рис. 9.1

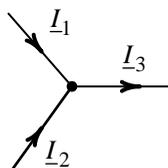


Рис. 9.2

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

1. Комплексы действующих токов, А :

$$I_1 := 2.4 - 1.8j \quad I_2 := 0.8 - 1.6j \quad I_3 := -0.4 + 0.7j$$

2. Комплекс действующего тока I_4 (рис. 9.1):

$$I_4 := I_1 - I_2 + I_3$$

$$I_4 = 1.2 + 0.5j$$

3. Модуль комплексного тока, А :

$$|I_4| = 1.3$$

4. Аргумент комплексного тока (начальная фаза), град :

$$\frac{\arg(I_4)}{\text{deg}} = 22.62$$

Задача 9.6

Для узла цепи (рис. 9.2) определить комплекс действующего тока I_3 , модуль и начальную фазу, если $I_1 = 21,4e^{j56,3^\circ}$ А, $I_2 = 16,8e^{-j25,8^\circ}$ А.

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

1. Комплексы действующих токов, А :

$$I_1 := 21.4 \cdot e^{56.3 \cdot \text{deg} \cdot j} \quad I_2 := 16.8 \cdot e^{-25.8 \cdot \text{deg} \cdot j}$$

2. Комплекс действующего тока I_3 :

$$I_3 := I_1 + I_2$$

$$I_3 = 27 + 10.49j$$

3. Модуль комплексного тока, А :

$$|I_3| = 28.97$$

4. Аргумент комплексного тока (начальная фаза), град :

$$\frac{\arg(I_3)}{\text{deg}} = 21.24$$

Задача 9.7

Определить эквивалентное комплексное сопротивление цепи (рис. 9.3), если $r_1 = 120$ Ом, $r_2 = 160$ Ом, $r_3 = 110$ Ом, $L_1 = 0,45$ Гн, $L_2 = 0,25$ Гн, $C_3 = 50$ мкФ, $\omega = 200$ с⁻¹.

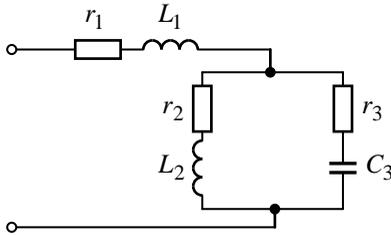


Рис. 9.3

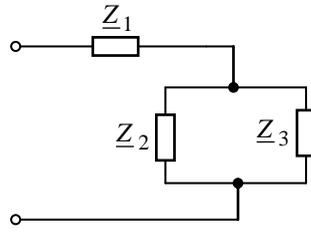


Рис. 9.4

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Ввод исходных данных: $j := \sqrt{-1}$ $\omega := 200$

Активные сопротивления, Ом: $r_1 := 120$ $r_2 := 160$ $r_3 := 110$

Индуктивности, Гн: $L_1 := 0.45$ $L_2 := 0.25$

Емкость, Ф: $C_3 := 50 \cdot 10^{-6}$

2. Расчет сопротивлений реактивных элементов, Ом:

$$X_{L1} := \omega \cdot L_1 \quad X_{L2} := \omega \cdot L_2 \quad X_{C3} := \frac{1}{\omega \cdot C_3}$$

$$X_{L1} = 90 \quad X_{L2} = 50 \quad X_{C3} = 100$$

3. Комплексные сопротивления ветвей, Ом (рис. 9.4):

$$Z_1 := r_1 + X_{L1} \cdot j \quad Z_2 := r_2 + X_{L2} \cdot j \quad Z_3 := r_3 - X_{C3} \cdot j$$

$$Z_1 = 120 + 90j \quad Z_2 = 160 + 50j \quad Z_3 = 110 - 100j$$

4. Расчет эквивалентного комплексного сопротивления, Ом:

$$Z_{\text{ЭКВ}} := Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{\text{ЭКВ}} = 207.9 + 67.4j$$

Модуль, Ом : $|Z_{\text{ЭКВ}}| = 218.54$

Аргумент, град : $\frac{\arg(Z_{\text{ЭКВ}})}{\text{deg}} = 17.96$

Задача 9.8

Определить показания приборов электромагнитной и электродинамической системы (рис. 9.5), если $u = 100\sin(314t + 50^\circ)$ В, $r_1 = 26$ Ом, $r_2 = 32$ Ом, $r_3 = 12$ Ом, $x_{L2} = 28$ Ом, $x_{C1} = 16$ Ом, $x_{C3} = 24$ Ом.

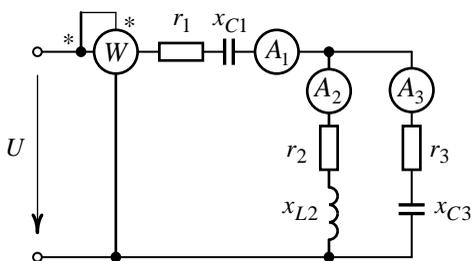


Рис. 9.5

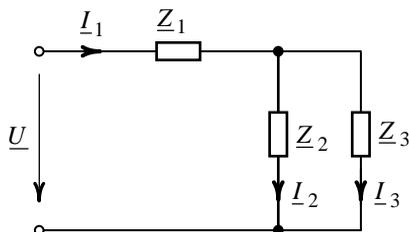


Рис. 9.6

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

1. Ввод исходных данных : $j := \sqrt{-1}$

Напряжение, В : $U := \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 50 \text{deg}}$

Сопротивления, Ом : $r_1 := 26$ $r_2 := 32$ $r_3 := 12$

$X_{L2} := 28$ $X_{C1} := 16$ $X_{C3} := 24$

2. Комплексные сопротивления ветвей, Ом (рис.9.6) :

$Z_1 := r_1 - X_{C1} \cdot j$ $Z_2 := r_2 + X_{L2} \cdot j$ $Z_3 := r_3 - X_{C3} \cdot j$

$Z_1 = 26 - 16j$ $Z_2 = 32 + 28j$ $Z_3 = 12 - 24j$

3. Расчет эквивалентного комплексного сопротивления всей цепи, Ом :

$$Z_{\text{ЭКВ}} := Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$$
$$Z_{\text{ЭКВ}} = 48.918 - 27.902j$$

4. Комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи, А :

$$I_1 := \frac{U}{Z_{\text{ЭКВ}}}$$
$$I_1 = 0.225 + 1.235j$$

5. Комплексы действующих значений токов в разветвленной части цепи, А :

$$I_2 := I_1 \cdot \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad I_3 := I_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$
$$I_2 = 0.748 + 0.146j \quad I_3 = -0.524 + 1.089j$$

6. Показания амперметров, установленных в ветвях цепи, А :

$$A_1 := |I_1| \quad A_2 := |I_2| \quad A_3 := |I_3|$$
$$A_1 = 1.256 \quad A_2 = 0.763 \quad A_3 = 1.208$$

7. Показание ваттметра, Вт : $P_W := \text{Re}(U \cdot \bar{I}_1)$

$$P_W = 77.122$$

Задача 9.9

Определить показания ваттметров, установленных в цепи (рис. 9.7), если $\underline{E}_1 = 94e^{j150^\circ}$ В, $\underline{E}_2 = 126e^{-j60^\circ}$ В, $r_1 = 30$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $x_{L1} = 15$ Ом, $x_{L2} = 25$ Ом, $x_{L3} = 60$ Ом, $x_{C3} = 45$ Ом.

Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Ввод исходных данных : $j := \sqrt{-1}$

Напряжения источников ЭДС, В : $E_1 := 94 \cdot e^{j \cdot 150 \text{deg}}$ $E_2 := 126 \cdot e^{-j \cdot 60 \text{deg}}$

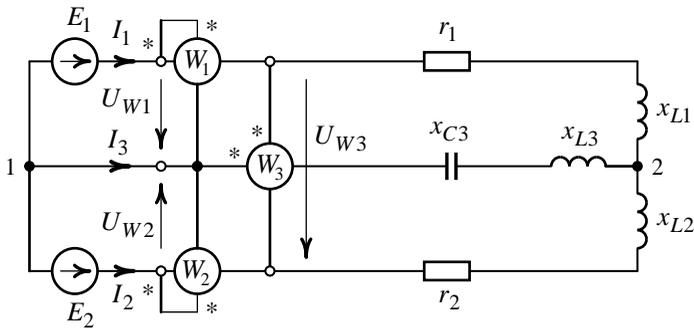


Рис. 9.7

Сопротивления, Ом: $r_1 := 30$ $r_2 := 50$ $X_{L1} := 15$

$X_{L2} := 25$ $X_{L3} := 60$ $X_{C3} := 45$

2. Напряжение между узловыми точками 2 и 1, В (рис. 9.7):

$$\phi_1 := 0$$

$$\phi_2 := \frac{\frac{E_1}{r_1 + X_{L1} \cdot j} + \frac{E_2}{r_2 + X_{L2} \cdot j}}{\frac{1}{r_1 + X_{L1} \cdot j} + \frac{1}{r_2 + X_{L2} \cdot j} + \frac{1}{X_{L3} \cdot j - X_{C3} \cdot j}}$$

$$U_{21} := \phi_2 - \phi_1$$

$$U_{21} = -7.103 - 12.569j$$

3. Комплексы действующих значений токов, А (рис.9.7):

$$I_1 := \frac{-U_{21} + E_1}{r_1 + X_{L1} \cdot j} \quad I_2 := \frac{-U_{21} + E_2}{r_2 + X_{L2} \cdot j} \quad I_3 := \frac{-U_{21}}{X_{L3} \cdot j - X_{C3} \cdot j}$$

$$I_1 = -1.187 + 2.579j$$

$$I_2 = 0.349 - 2.106j$$

$$I_3 = 0.838 - 0.474j$$

4. Показания первого ваттметра (W1), Вт:

$$\text{Напряжение } U_{W1}: U_{W1} := E_1$$

$$\text{Мощность, Вт: } P_1 := \operatorname{Re}(U_{W1} \cdot \bar{I}_1)$$

$$P_1 = 217.87$$

5. Показания второго ваттметра (W2), Вт :

$$\text{Напряжение } U_{W2}: U_{W2} := E_2$$

$$\text{Мощность, Вт: } P_2 := \operatorname{Re}(U_{W2} \cdot \bar{I}_2)$$

$$P_2 = 251.77$$

6. Показания третьего ваттметра (W3), Вт :

$$\text{Напряжение } U_{W3}: U_{W3} := E_1 - E_2$$

$$\text{Мощность, Вт: } P_3 := \operatorname{Re}(U_{W3} \cdot \bar{I}_3)$$

$$P_3 = -194.93$$

Задача 9.10

Определить показания амперметров, установленных в ветвях цепи (рис. 9.8). Выполнить проверку по балансу мощностей.

Дано: $\underline{E}_1 = 25e^{j90^\circ}$ В, $\underline{E}_2 = 15e^{-j90^\circ}$ В, $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $x_{L1} = 5$ Ом, $x_{L2} = 3$ Ом, $x_{C1} = 8$ Ом.

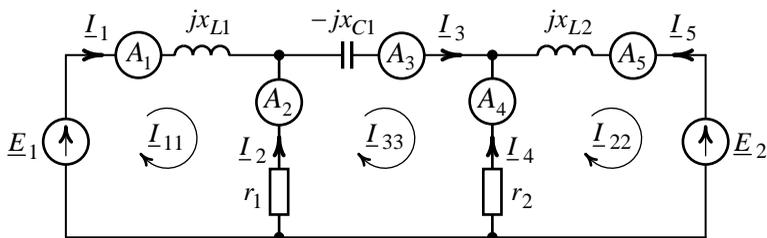


Рис. 9.8

Решение

1. Система уравнений, составленная относительно комплексов действующих значений контурных токов, имеет вид

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(r_1 + jx_{L1}) - \underline{I}_{33}r_1 = \underline{E}_1, \\ \underline{I}_{22}(r_2 + jx_{L2}) - \underline{I}_{33}r_2 = -\underline{E}_2, \\ \underline{I}_{33}(r_1 + r_2 - jx_{C1}) - \underline{I}_{11}r_1 - \underline{I}_{22}r_2 = 0. \end{cases}$$

2. Приведем систему к матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} (r_1 + jx_{L1}) & 0 & -r_1 \\ 0 & (r_2 + jx_{L2}) & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & (r_1 + r_2 - jx_{C1}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{22} \\ \underline{I}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ -\underline{E}_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Действительные токи определяются как алгебраическая сумма комплексов действующих значений контурных токов смежных контуров:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11}, \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_{11} + \underline{I}_{33}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{33}, \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{33}, \quad \underline{I}_5 = -\underline{I}_{22}.$$

Расчет получим с помощью определителей по формулам Крамера. Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Ввод исходных данных: $j := \sqrt{-1}$

Напряжения источников ЭДС, В: $E_1 := 25 \cdot e^{j \cdot 90 \text{deg}}$ $E_2 := 15 \cdot e^{-j \cdot 90 \text{deg}}$

Сопrotивления, Ом: $r_1 := 4$ $r_2 := 6$ $X_{L1} := 5$ $X_{L2} := 3$ $X_{C1} := 8$

2. Главный определитель системы:

$$\Delta := \begin{bmatrix} (r_1 + jX_{L1}) & 0 & -r_1 \\ 0 & (r_2 + jX_{L2}) & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & (r_1 + r_2 - jX_{C1}) \end{bmatrix}$$
$$|\Delta| = 186 + 120j$$

Дополнительные определители системы :

$$\Delta_{11} := \begin{bmatrix} E_1 & 0 & -r_1 \\ -E_2 & (r_2 + jX_{L2}) & -r_2 \\ 0 & -r_2 & (r_1 + r_2 - jX_{C1}) \end{bmatrix}$$

$$|\Delta_{11}| = 450 + 1560j$$

$$\Delta_{22} := \begin{bmatrix} (r_1 + jX_{L1}) & E_1 & -r_1 \\ 0 & -E_2 & -r_2 \\ -r_1 & 0 & (r_1 + r_2 - jX_{C1}) \end{bmatrix}$$

$$|\Delta_{22}| = -270 + 1560j$$

$$\Delta_{33} := \begin{bmatrix} (r_1 + jX_{L1}) & 0 & E_1 \\ 0 & (r_2 + jX_{L2}) & -E_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta_{33}| = -750 + 960j$$

3. Решение для комплексов действующих значений контурных токов, A :

$$I_{11} := \frac{|\Delta_{11}|}{|\Delta|} \quad I_{22} := \frac{|\Delta_{22}|}{|\Delta|} \quad I_{33} := \frac{|\Delta_{33}|}{|\Delta|}$$

$$I_{11} = 5.53 + 4.82j \quad I_{22} = 2.8 + 6.58j \quad I_{33} = -0.5 + 5.48j$$

4. Комплексы действующих значений действительных токов, A :

$$I_1 := I_{11} \quad I_2 := -I_{11} + I_{33} \quad I_3 := I_{33} \quad I_4 := I_{22} - I_{33} \quad I_5 := -I_{22}$$

$$I_1 = 5.53 + 4.82j \quad I_4 = 3.29 + 1.1j$$

$$I_2 = -6.02 + 0.66j \quad I_5 = -2.8 - 6.58j$$

$$I_3 = -0.5 + 5.48j$$

5. Показания амперметров, установленных в ветвях схемы (рис. 9.8), A :

$$A_1 := |I_1| \quad A_2 := |I_2| \quad A_3 := |I_3| \quad A_4 := |I_4| \quad A_5 := |I_5|$$

$$A_1 = 7.34 \quad A_2 = 6.06 \quad A_3 = 5.5 \quad A_4 = 3.47 \quad A_5 = 7.15$$

6. Проверка по балансу мощностей :

Мощность, развиваемая источниками, ВА:

$$S_{\text{ист}} := E_1 \cdot \bar{I}_1 + E_2 \cdot \bar{I}_5$$

$$S_{\text{ист}} = 219.25 + 180.16j$$

Мощность, потребляемая, ВА:

$$S_{\text{потр}} := (|I_1|)^2 \cdot jX_{L1} + (|I_2|)^2 \cdot r_1 + (|I_3|)^2 \cdot (-jX_{C1}) + (|I_4|)^2 \cdot r_2 + (|I_5|)^2 \cdot jX_{L2}$$

$$S_{\text{потр}} = 219.25 + 180.16j$$

Задача 9.11

Определить показания вольтметров, установленных в цепи (рис. 9.9), если параметры: $\underline{E}_1 = 40e^{j15^\circ}$ В, $\underline{E}_2 = 80e^{-j150^\circ}$ В, $\underline{E}_3 = 60e^{j60^\circ}$ В, $\underline{I}_k = 1,5e^{j210^\circ}$ А, $r_1 = 34$ Ом, $r_2 = 21$ Ом, $r_3 = 16$ Ом, $r_4 = 28$ Ом, $x_{L1} = 52$ Ом, $x_{L2} = 36$ Ом, $x_{L3} = 18$ Ом, $x_{L4} = 42$ Ом, $x_{C1} = 21$ Ом, $x_{C3} = 12$ Ом, $x_{C4} = 29$ Ом.

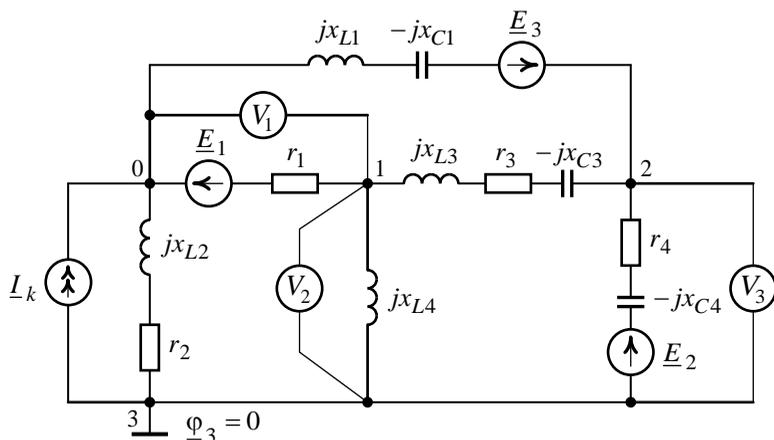


Рис. 9.9

Решение

1. Расчет выполним по методу узловых потенциалов.

Введем обозначения комплексных сопротивлений ветвей:

$$\underline{Z}_1 = jx_{L1} - jx_{C1}, \quad \underline{Z}_2 = r_2 + jx_{L2}, \quad \underline{Z}_3 = r_3 + jx_{L3} - jx_{C3},$$

$$\underline{Z}_4 = r_4 - jx_{C4}, \quad \underline{Z}_5 = r_1, \quad \underline{Z}_6 = jx_{L4}.$$

Комплексный потенциал узловой точки 3 примем равным нулю ($\underline{\varphi}_3 = 0$).

Система уравнений для расчета действующих значений комплексных потенциалов $\underline{\varphi}_0$, $\underline{\varphi}_1$ и $\underline{\varphi}_2$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_0 \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) - \underline{\varphi}_1 \frac{1}{\underline{Z}_5} - \underline{\varphi}_2 \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{E_1}{\underline{Z}_5} - \frac{E_3}{\underline{Z}_1} + I_k, \\ \underline{\varphi}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_5} + \frac{1}{\underline{Z}_6} \right) - \underline{\varphi}_0 \frac{1}{\underline{Z}_5} - \underline{\varphi}_2 \frac{1}{\underline{Z}_3} = -\frac{E_1}{\underline{Z}_5}, \\ \underline{\varphi}_2 \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} \right) - \underline{\varphi}_0 \frac{1}{\underline{Z}_1} - \underline{\varphi}_1 \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{E_2}{\underline{Z}_4} + \frac{E_3}{\underline{Z}_1}. \end{cases}$$

2. Приведем систему к матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}_5} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_5} & \left(\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_5} + \frac{1}{\underline{Z}_6} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}_3} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{\underline{Z}_3} & \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} \right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_0 \\ \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{E_1}{Z_5} - \frac{E_3}{Z_1} + I_k \\ -\frac{E_1}{Z_5} \\ \frac{E_2}{Z_4} + \frac{E_3}{Z_1} \end{bmatrix}.$$

3. Показания вольтметров определим через разность потенциалов узловых точек:

$$\underline{U}_{V1} = \varphi_0 - \varphi_1, \quad \underline{U}_{V2} = \varphi_1 - \varphi_3, \quad \underline{U}_{V3} = \varphi_2 - \varphi_3.$$

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD.

1. Ввод исходных данных: $j := \sqrt{-1}$

Напряжения источников ЭДС, В:

$$E_1 := 40 \cdot e^{j \cdot 15 \text{deg}}$$

$$E_2 := 80 \cdot e^{-j \cdot 150 \text{deg}}$$

$$E_3 := 60 \cdot e^{j \cdot 60 \text{deg}}$$

Ток источника тока, А: $I_k := 1.5 \cdot e^{j \cdot 210 \text{deg}}$

Сопrotивления, Ом: $r_1 := 34 \quad r_2 := 21 \quad r_3 := 16 \quad r_4 := 28$

$$X_{L1} := 52 \quad X_{L2} := 36 \quad X_{L3} := 18 \quad X_{L4} := 42$$

$$X_{C1} := 21 \quad X_{C3} := 12 \quad X_{C4} := 29$$

2. Комплексные сопротивления ветвей:

$$Z_1 := jX_{L1} - jX_{C1} \quad Z_2 := r_2 + jX_{L2} \quad Z_3 := r_3 + jX_{L3} - jX_{C3}$$

$$Z_4 := r_4 - jX_{C4} \quad Z_5 := r_1 \quad Z_6 := jX_{L4}$$

3. Матрица коэффициентов системы :

$$Y := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_5} \right) & -\frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_5} & \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \right) & -\frac{1}{Z_3} \\ -\frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_3} & \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) \end{bmatrix}$$

Вектор свободных членов :

$$V := \begin{pmatrix} \frac{E_1}{Z_5} - \frac{E_3}{Z_1} + I_k \\ -\frac{E_1}{Z_5} \\ \frac{E_2}{Z_4} + \frac{E_3}{Z_1} \end{pmatrix}$$

Вектор искомых потенциалов : $\phi := Y^{-1} \cdot V$

Решение для комплексных потенциалов узловых точек, В :

$$\phi = \begin{pmatrix} -8.66 - 79.42j \\ 19.99 - 92.55j \\ 19.75 - 102.81j \end{pmatrix}$$

$$\phi_0 = -8.66 - 79.42j$$

$$\phi_1 = 19.99 - 92.55j$$

$$\phi_2 = 19.75 - 102.81j$$

4. Напряжения в местах установки вольтметров, В : $\phi_3 := 0$

$$U_{V1} := \phi_0 - \phi_1 \quad U_{V2} := \phi_1 - \phi_3 \quad U_{V3} := \phi_2 - \phi_3$$

$$U_{V1} = -28.66 + 13.13j \quad U_{V2} = 19.99 - 92.55j \quad U_{V3} = 19.75 - 102.81j$$

Показания вольтметров, В

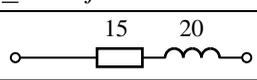
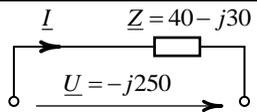
$$V_1 := |U_{V1}| \quad V_2 := |U_{V2}| \quad V_3 := |U_{V3}|$$

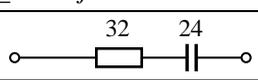
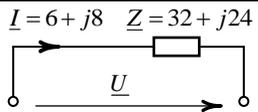
$$V_1 = 31.52 \quad V_2 = 94.68 \quad V_3 = 104.69$$

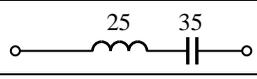
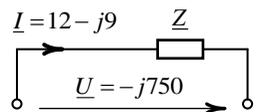
Контрольное задание № 1

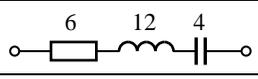
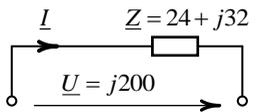
Способы представления синусоидальных электрических величин

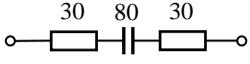
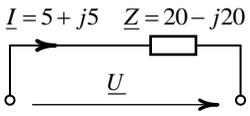
Таблица 1

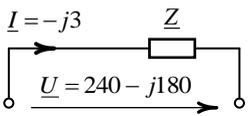
Вариант 1		
Дано		Опред.
1	$u = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 60^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I}_m = 3 - j3$	i, I
3	$\underline{U}_m = 120\sqrt{2} \angle 30^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = j2\sqrt{2}$	i, I_m
5	$\underline{I} = (2 - j2)5 \angle 90^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 3 + j4$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

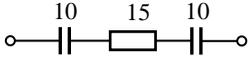
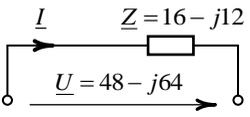
Вариант 2		
Дано		Опред.
1	$i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$	\underline{I}, I_m
2	$\underline{U} = 24 + j10$	u, U
3	$\underline{I} = 3 \angle -60^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U} = 220\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{U}_m = (12 - j9)(3 - j4)$	u
6	$\underline{Z} = 8 + j6$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

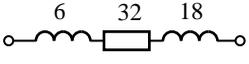
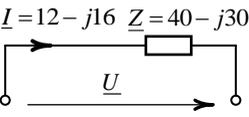
Вариант 3		
Дано		Опред.
1	$i = \sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U} = -15 + j15$	u, U_m
3	$\underline{I}_m = 4\sqrt{2} \angle -30^\circ$	i, I
4	$\underline{U} = -j150\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{U}_m = (6 + j8)(12 + j9)$	u
6	$\underline{Z} = 16 + j12$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

Вариант 4		
Дано		Опред.
1	$u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = 3 + j3\sqrt{3}$	i, I
3	$\underline{U} = -100 \angle 45^\circ$	u, U
4	$\underline{I}_m = -3\sqrt{2}$	i, I
5	$\underline{I}_m = (3\sqrt{3} + j3)4 \angle -60^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 4 + j8$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

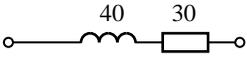
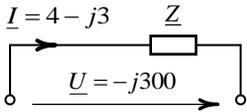
Вариант 5		
Дано		Опред.
1	$u = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I}_m = -5 - j5$	i, I
3	$\underline{U} = 250 \angle -90^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = 5\sqrt{2}$	i, I_m
5	$\underline{U}_m = (16 - j12)(12 - j16)$	u
6	$\underline{Z} = 30 - j40$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8	$\underline{I} = 5 + j5$ $\underline{Z} = 20 - j20$ 	\underline{U}, U

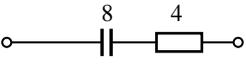
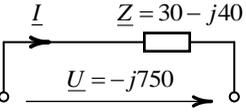
Вариант 6		
Дано		Опред.
1	$i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ)$	\underline{I}, I_m
2	$\underline{U} = 25\sqrt{3} - j25$	u, U
3	$\underline{I} = -2\sqrt{2} \angle 130^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U}_m = -200\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I}_m = (2\sqrt{3} + j2)5 \angle -50^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 24 - j32$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8	$\underline{I} = -j3$ \underline{Z} 	\underline{Z}, Z

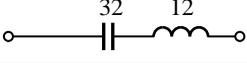
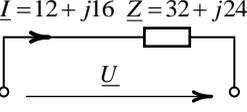
Вариант 7		
Дано		Опред.
1	$i = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U} = 10 - j24$	u, U
3	$\underline{I}_m = -\sqrt{2} \angle 120^\circ$	i, I
4	$\underline{U} = 100$	u, U_m
5	$\underline{I} = (-3\sqrt{3} + j3)4 \angle -35^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 15 + j20$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8	\underline{I} $\underline{Z} = 16 - j12$ 	\underline{I}, I

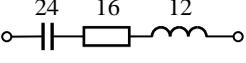
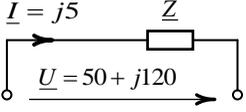
Вариант 8		
Дано		Опред.
1	$u = 25\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ)$	\underline{U}, U_m
2	$\underline{I} = -2 + j2\sqrt{3}$	i, I
3	$\underline{U}_m = 60\sqrt{2} \angle -180^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = j12$	i, I
5	$\underline{U}_m = (5 - j12)(4 - j3)$	u
6	$\underline{Z} = 60 - j80$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8	$\underline{I} = 12 - j16$ $\underline{Z} = 40 - j30$ 	\underline{U}, U

Продолжение табл. 1

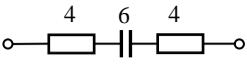
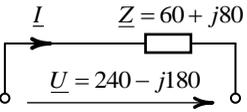
Вариант 9		
Дано		Опред.
1	$u = 30\sqrt{2} \sin(\omega t + 150^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = -2 - j2\sqrt{3}$	i, I
3	$\underline{U} = -150 \angle -30^\circ$	u, U
4	$\underline{I}_m = -j3\sqrt{2}$	i, I_m
5	$\underline{U}_m = (10 - j10)(-6 + j6)$	u
6	$\underline{Z} = 4 - j3$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

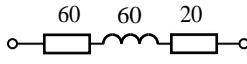
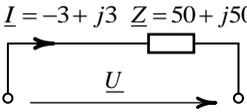
Вариант 10		
Дано		Опред.
1	$i = \sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$	\underline{I}, I_m
2	$\underline{U}_m = 100 - j100$	u, U
3	$\underline{I} = 10\sqrt{2} \angle 25^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U} = -60$	u, U_m
5	$\underline{I} = (-2 - j2)2 \angle 45^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 6 - j8$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

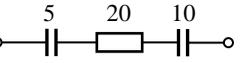
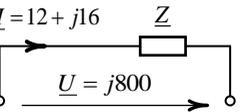
Вариант 11		
Дано		Опред.
1	$i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 130^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U} = -40 - j30$	u, U
3	$\underline{I} = -6\sqrt{2} \angle 30^\circ$	i, I
4	$\underline{U}_m = j130\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I} = (6\sqrt{3} + j6)2 \angle 30^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 12 - j16$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

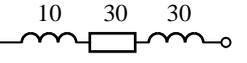
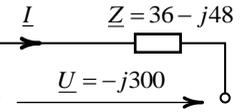
Вариант 12		
Дано		Опред.
1	$u = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = 6\sqrt{3} - j6$	i, I
3	$\underline{U}_m = 40\sqrt{2} \angle -60^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = 10\sqrt{2}$	i, I
5	$\underline{U}_m = (32 + j24)(3 + j4)$	u
6	$\underline{Z} = 8 - j6$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

Продолжение табл. 1

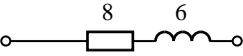
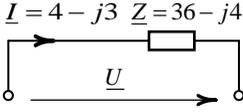
Вариант 13		
Дано		Опред.
1	$u = 15\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = -6 + j6\sqrt{3}$	i, I
3	$\underline{U} = -30 \angle -90^\circ$	u, U
4	$\underline{I}_m = j15\sqrt{2}$	i, I_m
5	$\underline{U}_m = (20 - j15)(3 - j4)$	u
6	$\underline{Z} = 40 + j30$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

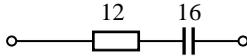
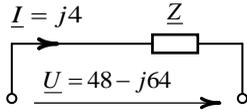
Вариант 14		
Дано		Опред.
1	$i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 150^\circ)$	\underline{I}, I_m
2	$\underline{U}_m = 50 + j50$	u, U
3	$\underline{I}_m = -12\sqrt{2} \angle 90^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U} = j120$	u, U_m
5	$\underline{I} = (6 - j6) \angle 120^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 32 + j24$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

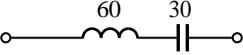
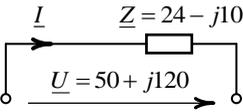
Вариант 15		
Дано		Опред.
1	$i = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U} = -12 + j5$	u, U
3	$\underline{I} = 5\sqrt{2} \angle -90^\circ$	i, I
4	$\underline{U}_m = -24\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I} = (4 + j4) \angle 90^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 20 - j15$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

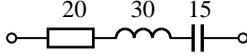
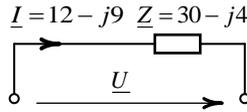
Вариант 16		
Дано		Опред.
1	$u = 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 60^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = 2\sqrt{3} - j2$	i, I
3	$\underline{U} = -200 \angle 180^\circ$	u, U
4	$\underline{I}_m = j\sqrt{2}$	i, I
5	$\underline{U}_m = (12 - j12)(5 - j5)$	u
6	$\underline{Z} = 80 + j60$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

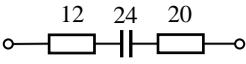
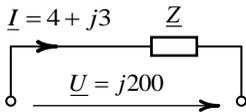
Продолжение табл. 1

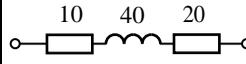
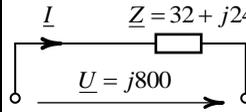
Вариант 17		
Дано		Опред.
1	$u = 25\sqrt{2} \sin(\omega t - 15^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I}_m = 4 - j4$	i, I
3	$\underline{U}_m = 30\sqrt{2} \angle -90^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = 25$	i, I_m
5	$\underline{U}_m = (12 - j12)(5 - j5)$	u
6	$\underline{Z} = 3 - j4$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

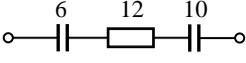
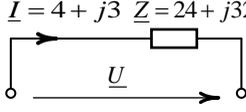
Вариант 18		
Дано		Опред.
1	$i = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 150^\circ)$	I, I_m
2	$\underline{U} = 30 - j30$	u, U
3	$\underline{I} = -15\sqrt{2} \angle 90^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U}_m = 300\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I}_m = (5\sqrt{3} - j5)2 \angle 90^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 8 - j6$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

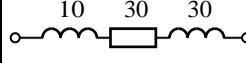
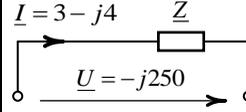
Вариант 19		
Дано		Опред.
1	$i = 3\sqrt{2} \sin(\omega t - 15^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U}_m = -150 + j150$	u, U
3	$\underline{I}_m = 2\sqrt{2} \angle 240^\circ$	i, I
4	$\underline{U} = -j30\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I}_m = (5 - j5\sqrt{3})3 \angle -60^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 16 - j12$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

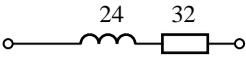
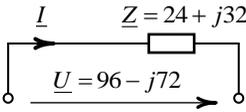
Вариант 20		
Дано		Опред.
1	$u = 35\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = 1 - j\sqrt{3}$	i, I
3	$\underline{U} = 300\sqrt{2} \angle -45^\circ$	u, U
4	$\underline{I}_m = -j5\sqrt{2}$	i, I
5	$\underline{U}_m = (15 + j15)(2 + j2)$	u
6	$\underline{Z} = 4 - j8$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

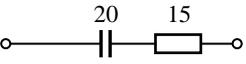
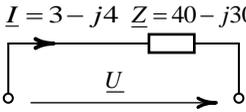
Вариант 21		
Дано		Опред.
1	$u = 40\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = -4\sqrt{3} + j4$	i, I
3	$\underline{U}_m = 200\sqrt{2} \angle -120^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = j16\sqrt{2}$	i, I_m
5	$\underline{U}_m = (6 + j8)(4 + j3)$	u
6	$\underline{Z} = 30 + j40$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

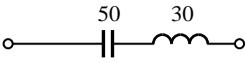
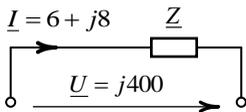
Вариант 22		
Дано		Опред.
1	$i = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$	\underline{I}, I_m
2	$\underline{U} = 20 - j15$	u, U
3	$\underline{I}_m = 12\sqrt{2} \angle -90^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U} = j45$	u, U_m
5	$\underline{I}_m = (5 - j5\sqrt{3})3 \angle -60^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 24 + j32$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

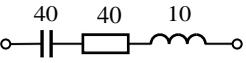
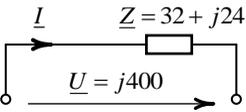
Вариант 23		
Дано		Опред.
1	$i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U} = 40 - j30$	u, U
3	$\underline{I} = -2\sqrt{2} \angle 150^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U}_m = 45\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I} = (-2 + j2)6 \angle -60^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 15 - j20$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

Вариант 24		
Дано		Опред.
1	$u = 24\sqrt{2} \sin(\omega t + 180^\circ)$	\underline{U}, U_m
2	$\underline{I}_m = 3 + j3$	i, I
3	$\underline{U} = 45\sqrt{2} \angle -135^\circ$	u, U_m
4	$\underline{I} = -15\sqrt{2}$	i, I
5	$\underline{U}_m = (-3 + j4)(16 + j12)$	u
6	$\underline{Z} = 60 + j80$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

Вариант 25		
Дано		Опред.
1	$u = 36\sqrt{2} \sin(\omega t - 15^\circ)$	\underline{U}, U
2	$\underline{I} = 5\sqrt{3} + j5$	i, I
3	$\underline{U}_m = -25\sqrt{2} 30^\circ$	u, U
4	$\underline{I} = j25$	i, I_m
5	$\underline{U}_m = (-6 + j8)(-4 + j3)$	u
6	$\underline{Z} = 4 + j3$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

Вариант 26		
Дано		Опред.
1	$i = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ)$	\underline{I}, I_m
2	$\underline{U}_m = -200 + j200$	u, U
3	$\underline{I} = 12\sqrt{2} -180^\circ$	i, I_m
4	$\underline{U} = -j30\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I}_m = (1 + j\sqrt{3})5 30^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 6 + j8$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{U}, U

Вариант 27		
Дано		Опред.
1	$i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$	\underline{I}, I
2	$\underline{U} = 24 - j32$	u, U
3	$\underline{I} = -15 -60^\circ$	i, I
4	$\underline{U} = 220\sqrt{2}$	u, U_m
5	$\underline{I}_m = (3 - j3\sqrt{3})5 120^\circ$	i
6	$\underline{Z} = 32 - j24$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{Z}, Z

Вариант 28		
Дано		Опред.
1	$u = 50\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$	\underline{U}, U_m
2	$\underline{I} = -4 + j4\sqrt{3}$	i, I
3	$\underline{U} = -100 25^\circ$	u, U
4	$\underline{I}_m = -12\sqrt{2}$	i, I
5	$\underline{U}_m = (3 - j4)(8 - j6)$	u
6	$\underline{Z} = 15 + j20$	Z, \underline{Y}
7		\underline{Z}, Z
8		\underline{I}, I

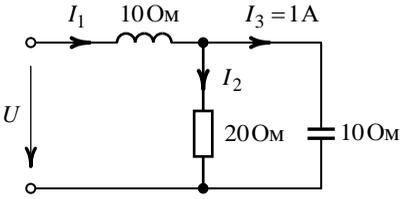
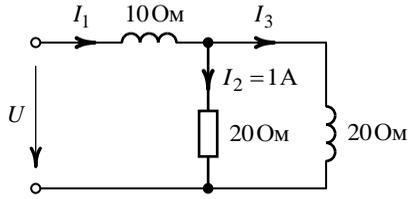
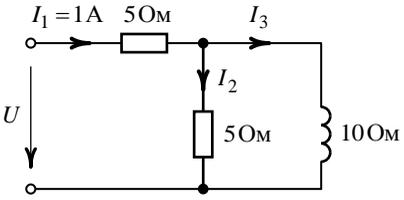
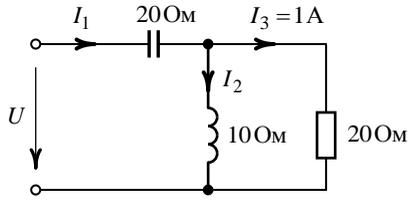
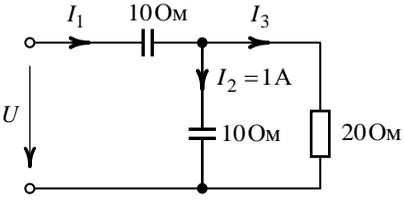
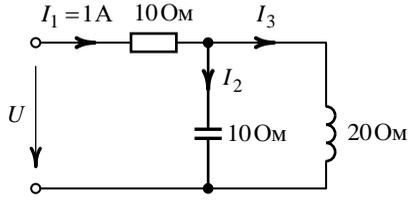
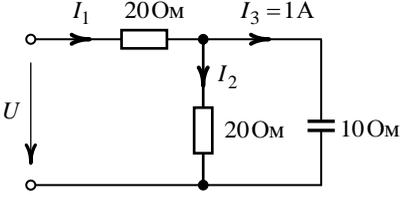
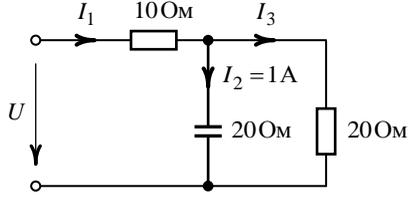
Контрольное задание № 2

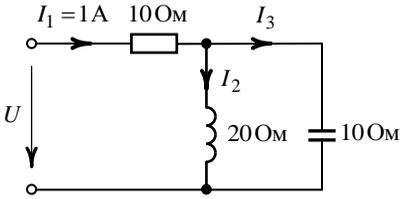
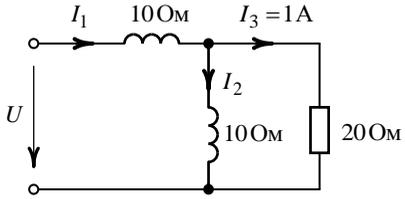
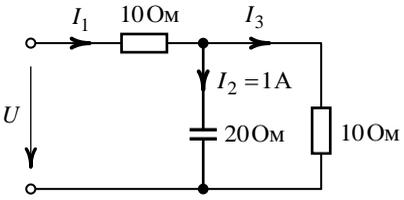
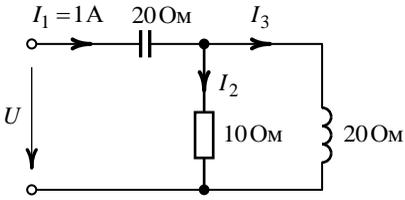
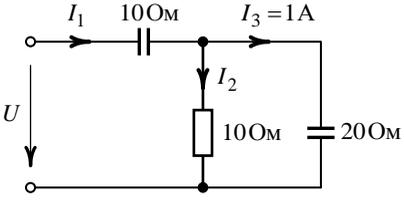
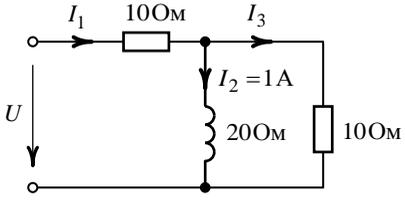
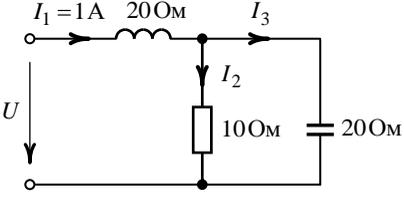
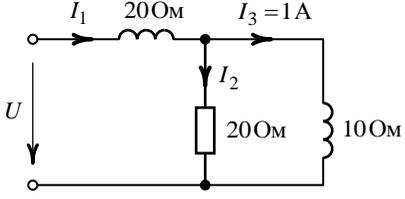
Расчет линейной цепи однофазного синусоидального тока

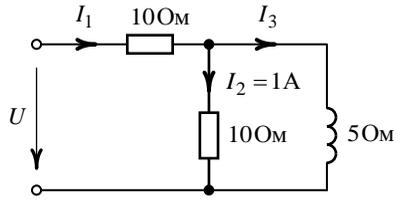
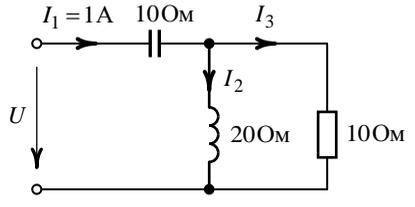
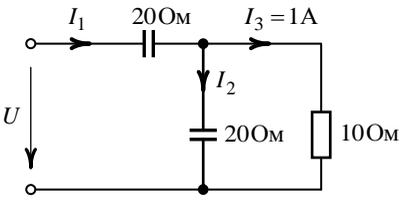
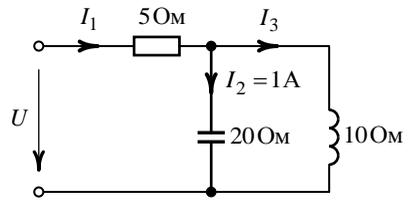
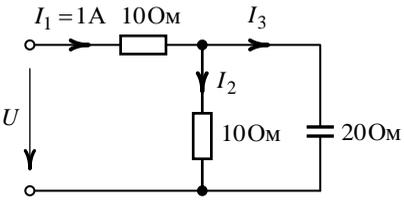
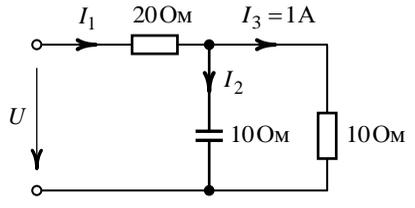
Для вариантов схем (см. табл. 2) определить недостающие токи I и напряжение питающего источника U , а также активную P , реактивную Q и полную S мощности цепи. Построить в масштабе векторную диаграмму токов и напряжений.

Таблица 2

Вариант 1	Вариант 2
Вариант 3	Вариант 4
Вариант 5	Вариант 6

<p style="text-align: center;">Вариант 7</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 8</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 9</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 10</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 11</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 12</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 13</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 14</p> 

<p style="text-align: center;">Вариант 15</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 16</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 17</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 18</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 19</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 20</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 21</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 22</p> 

<p style="text-align: center;">Вариант 23</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 24</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 25</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 26</p> 
<p style="text-align: center;">Вариант 27</p> 	<p style="text-align: center;">Вариант 28</p> 

Контрольное задание № 3

Расчет индуктивно связанных электрических цепей

Электрическая цепь с индуктивно связанными элементами питается от источника синусоидального напряжения $U = 120 \text{ В}$. Параметры цепи приведены на рисунках соответствующих вариантов схем контрольного задания (см. табл. 3).

Требуется определить показания приборов электродинамической системы, если частота питающего источника $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

Таблица 3

Вариант 1	Вариант 2
Вариант 3	Вариант 4

Вариант 5	Вариант 6
Вариант 7	Вариант 8
Вариант 9	Вариант 10

<p style="text-align: center;">Вариант 11</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 12</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 13</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 14</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 15</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 16</p>

<p style="text-align: center;">Вариант 17</p> <p> $M=0,012\text{Гн}$ $0,046\text{Гн}$ $0,036\text{Гн}$ 100 мкФ U </p>	<p style="text-align: center;">Вариант 18</p> <p> $M=0,03\text{Гн}$ $0,115\text{Гн}$ $0,06\text{Гн}$ 100 мкФ U </p>
<p style="text-align: center;">Вариант 19</p> <p> $M=0,012\text{Гн}$ $0,032\text{Гн}$ $0,048\text{Гн}$ 250 мкФ U </p>	<p style="text-align: center;">Вариант 20</p> <p> $M=0,006\text{Гн}$ $0,028\text{Гн}$ $0,013\text{Гн}$ 200 мкФ U </p>
<p style="text-align: center;">Вариант 21</p> <p> $M=0,003\text{Гн}$ $0,016\text{Гн}$ $0,012\text{Гн}$ 250 мкФ U </p>	<p style="text-align: center;">Вариант 22</p> <p> $M=0,015\text{Гн}$ $0,095\text{Гн}$ $0,035\text{Гн}$ 50 мкФ U </p>

<p style="text-align: center;">Вариант 23</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 24</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 25</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 26</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 27</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 28</p>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зевеке Г.В.* Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
2. *Теоретические основы электротехники: учебник для вузов.* В 3 т. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. Том 1. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 424 с.
3. *Теоретические основы электротехники / под ред. проф. П.А. Ионкина.* Т. 1. Основы теории линейных цепей. – М.: Высшая школа, 1979. – 544 с.
4. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1984. – 559 с.
5. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник. – 10-е изд. / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 1999. – 638 с.
6. *Атабеков Г.И.* Теоретические основы электротехники: учебник для вузов. В 3-х ч. Ч.1. Линейные электрические цепи/ Г.И. Атабеков. – 5-е изд., исправл. – М.: Энергия, 1978. – 592 с.
7. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи / П.Н. Матханов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
8. *Малинин Л.И.* Основы теории цепей в упражнениях и задачах : учеб. пособие / Л.И. Малинин, В.Т. Мандрусова, В.Ю. Нейман; под ред. В.Ю. Неймана. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 296 с. (серия «Учебники НГТУ»).
9. *Малинин Л.И.* Теория цепей современной электротехники: учеб. пособие / Л.И. Малинин, В.Ю. Нейман. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 348 с. – (серия «Учебники НГТУ»).
10. *Нейман В.Ю.* Теоретические основы электротехники в примерах и задачах. Ч. 1. Линейные электрические цепи постоянного тока: учеб. пособие / В.Ю. Нейман. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 116 с.
11. *Нейман В.Ю.* Электротехника и электроника. Интернет-тестирование базовых знаний Ч. 3. Теория и методы анализа линейных цепей синусоидального тока: учеб. пособие / В.Ю. Нейман. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 130 с.
12. *Дьяконов В.П.* Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11/ В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН - Пресс, 2004. – 832 с.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Применение многофункциональных калькуляторов при вычислении комплексных чисел

Преобразование показательной (полярной) формы в алгебраическую			
1. $\underline{Z} = 200e^{j105^\circ}$ Ом		2. $\underline{Z} = 56\angle -125^\circ$ Ом	
Ввод:	Индикатор:	Ввод:	Индикатор:
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0
200 <input type="button" value="a"/>	200	56 <input type="button" value="a"/>	56
105 <input type="button" value="b"/>	105	125 <input type="button" value="+/-"/> <input type="button" value="b"/>	-125
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="P→R"/>	-51.763809	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="P→R"/>	-32.12028044
<input type="button" value="b"/>	193.18516	<input type="button" value="b"/>	-45.87251448
Результат: $\underline{Z} = -51,8 + j193,2$ Ом		Результат: $\underline{Z} = -32,1 - j45,9$ Ом	

Преобразование алгебраической формы в показательную (полярную)			
3. $\underline{Z} = 64 + j48$ Ом		4. $\underline{Z} = 125 - j300$ Ом	
Ввод:	Индикатор:	Ввод:	Индикатор:
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0
64 <input type="button" value="a"/>	64	125 <input type="button" value="a"/>	125
48 <input type="button" value="b"/>	48	300 <input type="button" value="+/-"/> <input type="button" value="b"/>	-300
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="R→P"/>	80	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="R→P"/>	325
<input type="button" value="b"/>	36.86989765	<input type="button" value="b"/>	-67.38013505
Результат: $\underline{Z} = 80e^{j36,9^\circ}$ Ом		Результат: $\underline{Z} = 325\angle -67,4^\circ$ Ом	

Продолжение приложения

Вычисления с комплексными числами			
5. $\underline{Z} = (24 + j16) + (12 - j36) \text{ Ом}$		6. $\underline{Z} = (-3 + j4)(15 + j11) \text{ Ом}$	
Ввод:	Индикатор:	Ввод:	Индикатор:
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0
24 <input type="button" value="a"/>	24	3 <input type="button" value="+/-"/> <input type="button" value="a"/>	-3
16 <input type="button" value="b"/>	16	4 <input type="button" value="b"/>	4
<input type="button" value="+"/>	0	<input type="button" value="X"/>	0
12 <input type="button" value="a"/>	12	15 <input type="button" value="a"/>	15
36 <input type="button" value="+/-"/> <input type="button" value="b"/>	-36	11 <input type="button" value="b"/>	11
<input type="button" value="="/>	36	<input type="button" value="="/>	-89
<input type="button" value="b"/>	-20	<input type="button" value="b"/>	27
Результат: $\underline{Z} = 36 - j20 \text{ Ом}$		Результат: $\underline{Z} = -89 + j27 \text{ Ом}$	
7. $\underline{I} = \frac{126 - j94}{8 + j2} \text{ А}$		8. $\underline{U} = 4 \angle 65^\circ \cdot (32 - j21) \text{ В}$	
Ввод:	Индикатор:	Ввод:	Индикатор:
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0
126 <input type="button" value="a"/>	126	4 <input type="button" value="a"/>	4
94 <input type="button" value="+/-"/> <input type="button" value="b"/>	-94	65 <input type="button" value="b"/>	65
<input type="button" value="÷"/>	0	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="P→R"/>	1.690473047
8 <input type="button" value="a"/>	8	<input type="button" value="X"/>	0

Продолжение приложения

2 <input type="checkbox"/> b	2	32 <input type="checkbox"/> a	32
<input type="checkbox"/> =	12.05882353	21 <input type="checkbox"/> +/- <input type="checkbox"/> b	-21
<input type="checkbox"/> b	-14.7647058	<input type="checkbox"/> =	130.2249916
Результат: $\underline{I} = 12,1 - j14,8 \text{ A}$		<input type="checkbox"/> b	80.50746275
		Результат: $\underline{Z} = 130,2 + j80,5 \text{ B}$	
9. $\underline{I} = \frac{220 \angle 120^\circ}{50 \angle -30^\circ} \text{ A}$		10. $\underline{I} = 15 \angle -175^\circ \frac{245 - j125}{23 + j51} \text{ A}$	
Ввод:	Индикатор:	Ввод:	Индикатор:
<input type="checkbox"/> 2nd F <input type="checkbox"/> CPLX	0	<input type="checkbox"/> 2nd F <input type="checkbox"/> CPLX	0
220 <input type="checkbox"/> a	220	15 <input type="checkbox"/> a	15
120 <input type="checkbox"/> b	120	175 <input type="checkbox"/> +/- <input type="checkbox"/> b	-175
<input type="checkbox"/> 2nd F <input type="checkbox"/> P→R	-110	<input type="checkbox"/> 2nd F <input type="checkbox"/> P→R	-14.94292047
<input type="checkbox"/> ÷	0	<input type="checkbox"/> X	0
50 <input type="checkbox"/> a	50	245 <input type="checkbox"/> a	245
30 <input type="checkbox"/> +/- <input type="checkbox"/> b	-30	125 <input type="checkbox"/> +/- <input type="checkbox"/> b	-125
<input type="checkbox"/> 2nd F <input type="checkbox"/> P→R	43.30127019	<input type="checkbox"/> ÷	0
<input type="checkbox"/> =	-3.81051177	23 <input type="checkbox"/> a	23
<input type="checkbox"/> 2nd F <input type="checkbox"/> R→P	4.4	51 <input type="checkbox"/> b	51
<input type="checkbox"/> b	150	<input type="checkbox"/> =	-2.88689947
Результат: $\underline{I} = 4,4 \angle 150^\circ \text{ A}$		<input type="checkbox"/> b	73.686938814
		Результат: $\underline{I} = -2,9 + j73,7 \text{ A}$	

Окончание приложения

11. $\underline{U} = 2 45^\circ \cdot 30 35^\circ +$ $+110 80^\circ \text{ В}$		12. $\underline{U} = \frac{(12 + j6)(14 + j15)}{26 + j9} - j10 \text{ В}$	
Ввод:	Индикатор:	Ввод:	Индикатор:
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0	<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="CPLX"/>	0
2 <input type="button" value="a"/>	2	12 <input type="button" value="a"/>	12
45 <input type="button" value="b"/>	45	6 <input type="button" value="b"/>	6
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="P→R"/>	1.414213562	<input type="button" value="X"/>	0
<input type="button" value="X"/>	0	14 <input type="button" value="a"/>	14
30 <input type="button" value="a"/>	30	15 <input type="button" value="b"/>	15
35 <input type="button" value="b"/>	35	<input type="button" value="÷"/>	0
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="P→R"/>	24.57456133	26 <input type="button" value="a"/>	26
<input type="button" value="+"/>	0	9 <input type="button" value="b"/>	9
110 <input type="button" value="a"/>	110	<input type="button" value="-"/>	0
80 <input type="button" value="b"/>	80	10 <input type="button" value="b"/>	10
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="P→R"/>	19.10129954	<input type="button" value="="/>	5.817701453
<input type="button" value="="/>	29.5201902	<input type="button" value="b"/>	-1.85997358
<input type="button" value="2nd F"/> <input type="button" value="R→P"/>	170	Результат: $\underline{U} = 5,8 - j1,9 \text{ В}$	
<input type="button" value="b"/>	80		
Результат: $\underline{U} = 170 80^\circ \text{ В}$			

Нейман Владимир Юрьевич

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Часть 2

**ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ
ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 23.03.2015. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 9,76. Печ. л. 10,5. Изд. № 345/14. Заказ № . Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20