

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.И. ОСТЕРТАК

МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2016

УДК 621.314(075.8)
О-764

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *В.П. Драгунов*,
канд. техн. наук, доцент *М.Г. Рубанович*

Работа подготовлена на кафедре полупроводниковых приборов
и микроэлектроники для студентов старших курсов факультета
радиотехники и электроники (направление 28.03.01
«Нанотехнологии и микросистемная техника»)

Остертак Д.И.

О-764 Микроэлектромеханика : учебное пособие / Д.И. Остертак. –
Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2016. – 120 с.

ISBN 978-5-7782-2901-3

Пособие посвящено изучению физических основ явлений, наблюдающихся в микроэлектромеханических системах (МЭМС). Рассматриваются динамические свойства элементов МЭМС, эффекты масштабирования и демпфирования в МЭМС, основные виды МЭМС: электростатические, электромагнитные и пьезоэлектрические, рассмотрены некоторые примеры и даны задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области микросистемной техники и МЭМС, а также может быть рекомендовано студентам других специальностей, научным работникам и инженерам, желающим самостоятельно изучать физические принципы работы МЭМС или расширить и систематизировать свои знания в этой области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, код проекта 629, тема проекта: «Теория построения и практическая реализация широкополосных микроволновых устройств, предназначенных для использования в измерительном оборудовании цифровых систем телевидения, связи и телекоммуникаций, включая вычислительные системы».

УДК 621.314(075.8)

ISBN 978-5-7782-2901-3

© Остертак Д.И., 2016

© Новосибирский государственный
технический университет, 2016

Введение

Микроэлектромеханика – это междисциплинарное направление, появившееся в результате достижений в области электроники, механики, информатики и измерительной техники, объединённых тенденцией к микроминиатюризации.

В основе изучения микроэлектромеханики лежит формирование знаний в области базовых принципов функционирования и конструирования механических и электромеханических элементов и устройств, реализуемых на микроуровне, т. е. микроэлектромеханических систем (МЭМС).

Термин МЭМС впервые возник в США в 1987 г., поскольку именно там были начаты исследования, относящиеся к микроприборам. Существует множество различных определений МЭМС. Одно из них следующее: МЭМС – это интегрированные системы с размерами от нескольких микрометров до миллиметров, которые объединяют в себе механические, электрические и электронные компоненты.

В настоящее время рынок МЭМС набирает всё большие обороты, особенно это касается инерциальных МЭМС, для которых ключевыми являются их динамические характеристики, чему посвящён первый раздел настоящего пособия.

Известно, что человечество постоянно стремится к миниатюризации, в том числе и МЭМС, поэтому необходимо понимать, как она может повлиять на свойства различных физических систем. Анализу эффектов масштабирования в МЭМС посвящён второй раздел пособия.

В третьем разделе проведён анализ демпфирования колебаний в МЭМС. В традиционных механических системах воздушным демпфированием обычно пренебрегают, так как энергия, рассеиваемая возду-

хом, гораздо меньше, чем энергия, рассеиваемая механическими узлами системы. Для МЭМС же воздушное демпфирование может стать очень существенным из-за гораздо больших величин отношения площади поверхности к объёму.

В основе работы всех МЭМС лежит преобразование одного вида энергии в другой, наиболее распространённые виды МЭМС – это электростатический, электромагнитный и пьезоэлектрический, о которых пойдёт речь в разделах 4, 5 и 6 соответственно.

1. Динамические свойства элементов МЭМС

Динамические свойства любой механической системы зависят от характера восстанавливающих и диссипативных сил. В МЭМС восстанавливающими силами являются силы упругости, возникающие при деформации упругих элементов. Зависимость восстанавливающих сил от смещений в общем случае является нелинейной, степень нелинейности зависит от свойств применяемых материалов и особенностей конструкции.

В случае, если система совершает малые колебания, то зависимость между восстанавливающими силами и смещениями принимается линейной.

К диссипативным силам, вызывающим необратимое рассеяние энергии, относятся силы трения в соединениях конструкции, «внутренние трения» в материалах, аэро- и гидродинамическое сопротивление окружающей среды.

Действия этих сил приводят к затуханию свободных колебаний и ограничению амплитуды вынужденных колебаний. Когда диссипативные силы пропорциональны перемещению или скорости перемещения, то элемент МЭМС имеет линейную характеристику.

1.1. Свободные колебания незатухающей системы

Колеблющуюся механическую структуру часто представляют в виде системы масса–пружина, как показано на рис. 1.1.

Начало координат у оси X совпадает с центром массы груза. Смещение массы от первоначального положения x приводит к появлению восстанавливающей силы, действующей на массу со стороны пружины $F = -kx$, где k – коэффициент жёсткости пружины. Знак минус означает, что сила направлена в противоположную оси X сторону.

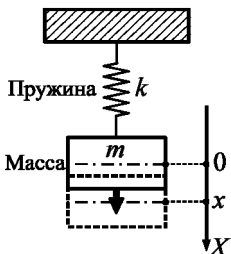


Рис. 1.1. Модель колебательной системы масса–пружина

Если нет других сил, действующих на массу, то дифференциальное уравнение, описывающее движение массы, можно записать следующим образом:

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (1.1)$$

Перепишем уравнение (1.1), положив $\omega^2 = k/m$,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.2)$$

Общее решение уравнения (1.2) имеет вид

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.3)$$

где ω – циклическая частота колебаний; A – амплитуда колебаний; α – угол сдвига фазы. Частота ω зависит только от параметров структуры k и m :

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad (1.4)$$

Амплитуда A и сдвиг фазы α зависят от начальных условий системы, например, при $x = x_0$ и $\dot{x} = v_0$ при $t = 0$ имеем $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega^2}$ и $\alpha = \arctg(x_0 \omega / v_0)$.

Частота колебаний может быть также найдена из закона сохранения энергии. Если колебания системы масса–пружина происходят по закону (1.3), то потенциальная энергия системы

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} A^2 k \sin^2(\omega t + \alpha),$$

тогда как кинетическая энергия системы

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 m \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Полная энергия колебательной системы $E = E_p + E_k$. В момент времени, когда $\omega t + \alpha = 0$, полная энергия $E = E_{k \max} = mA^2 \omega^2 / 2$, а

когда $\omega t + \alpha = \pi / 2$, то $E = E_{p\max} = kA^2/2$. Согласно закону о сохранении энергии $E_{k\max} = E_{p\max} = E$, откуда $\omega = \sqrt{k/m}$.

Для свободных колебаний системы масса–пружина полная энергия E остаётся неизменной, как показано на рис. 1.2, а, в то время как кинетическая E_k и потенциальная E_p энергии зависят от смещения x . Смещение массы, соответствующее энергии, изображённой на рис. 1.2, а, показано на рис. 1.2, б, а на рис. 1.2, в представлена зависимость смещения x от времени t .

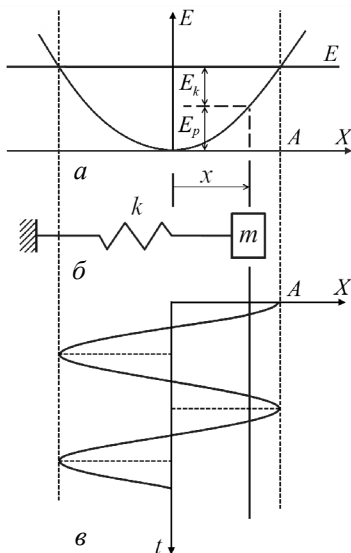


Рис. 1.2. Свободные колебания системы масса–пружина

1.1.1. Частота колебаний консольной балки с массой на конце

Найдём частоту колебаний консольной балки длиной l , шириной b , толщиной h , с массой m , сосредоточенной на её конце, когда колебания балки происходят в вертикальном направлении, как показано на рис. 1.3.

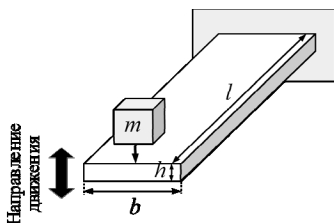


Рис. 1.3. Консольная балка с массой, сосредоточенной на конце

Будем полагать, что масса на конце балки гораздо больше, чем масса самой балки, так чтобы ею можно было пренебречь. Из курса прикладной механики известно, что жёсткость консольной балки $k = 3EJ/l^3$, где E – модуль Юнга; J – момент инерции сечения, который для консольной балки равен $J = bh^3/12$, таким образом, жёсткость балки $k = Ebh^3/(4l^3)$.

Подставляя последнюю формулу в (1.4), получим выражение для угловой частоты колебаний консольной балки с массой m на её конце:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4ml^3}}, \quad (1.5)$$

где f – обычная частота колебаний данной балки.

1.1.2. Частота колебаний массы, подвешенной на двух балках

Найдём частоту колебаний массы m , подвешенной на двух балках длиной a , шириной b и толщиной h , колебания балки происходят в вертикальном направлении, как показано на рис. 1.4.

Если пренебречь массой балок и изгибом центральной части, то коэффициент жёсткости k двух таких балок, называемых направляемыми балками с концентрированной силой (или S-образный изгиб), будет $k = 2Ebh^3/a^3$, таким образом, выражение для угловой частоты колебаний данной структуры

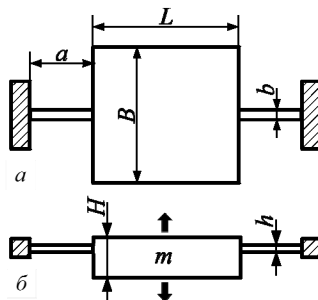


Рис. 1.4. Масса, подвешенная на двух балках:

a – вид сверху; $б$ – вид сбоку

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{2Ebh^3}{ma^3}}. \quad (1.6)$$

1.1.3. Частота колебаний торсионной структуры

Рассмотрим колебания торсионной структуры, изображённой на рис. 1.5. Если балка поворачивается на угол φ на конце (вблизи инерциальной массы), то возникает возвращающий момент, действующий на массу через торсионную балку: $T = -k_\varphi \varphi$, где k_φ – угловая жёсткость торсионной балки.

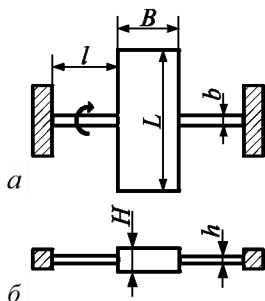


Рис. 1.5. Масса, подвешенная на двух торсионных балках:

a – вид сверху; *б* – вид сбоку

Если момент инерции вращения J_φ , то по 2-му закону Ньютона дифференциальное уравнение, описывающее угловые колебания

$$J_\varphi \ddot{\varphi} + k_\varphi \varphi = 0. \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) имеет вид $\varphi = \Phi \sin(\omega t + \alpha)$, где угловая частота угловых колебаний $\omega = \sqrt{k_\varphi / J_\varphi}$; угловая жёсткость балки $k_\varphi = GJ_\rho / l$, где J_ρ – полярный момент инерции сечения; G – модуль сдвига, который связан с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν следующим образом:

$$G = 0,5E / (1 + \nu). \quad (1.8)$$

Для структуры, представленной на рис. 1.5, момент инерции вращения J_φ

$$J_\varphi = \int_{-L/2}^{L/2} \rho B H x^2 dx = \frac{1}{12} \rho B H L^3, \quad (1.9)$$

где ρ – плотность материала колеблющейся массы (пластины); B – ширина пластины; H – толщина пластины; L – длина пластины (см. рис. 1.5).

В общем случае момент инерции механической системы относительно неподвижной оси a : $J_a = \int_{(V)} \rho r^2 dV$, где r – расстояние от элемента dV до оси a .

1.1.4. Свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим колебательную систему масса–пружина с двумя степенями свободы, изображённую на рис. 1.6, *а*, где $k_{1,2}$ – коэффициенты упругости первой и второй пружины, $m_{1,2}$ – массы первого и второго тела соответственно.

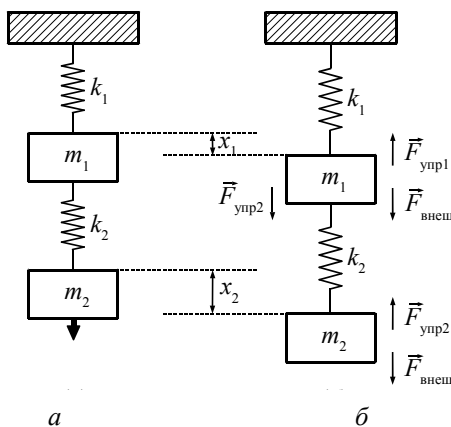


Рис. 1.6. Колебательная система масса – пружина с двумя степенями свободы:

а – в отсутствии внешнего воздействия;
б – с внешним воздействием

Из рис. 1.6, *б* видно, что на первое тело m_1 будут действовать три силы: силы упругости со стороны первой $\vec{F}_{\text{упр1}}$ и второй $\vec{F}_{\text{упр2}}$ пружин, и внешняя сила $\vec{F}_{\text{внеш}}$; на второе тело m_2 будут действовать только две силы: сила упругости со стороны второй пружины $\vec{F}_{\text{упр2}}$ и внешняя сила $\vec{F}_{\text{внеш}}$. В данном случае система уравнений, описывающая движения масс m_1 и m_2 , будет иметь вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Частные решения системы (1.10):

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi), \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (1.11)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний первого и второго тел соответственно. Найдём значения первой и второй производных от частных решений (1.11):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega A_1 \cos(\omega t + \varphi), \\ \dot{x}_2 = \omega A_2 \cos(\omega t + \varphi); \\ \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \varphi), \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) и (1.11) в систему уравнений (1.10), получаем

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) A_1 - k_2 A_2 = 0, \\ -k_2 A_1 + (k_2 - m_2 \omega^2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Видно, что (1.13) удовлетворяет тривиальному решению $A_1 = A_2 = 0$, которое подразумевает, что колебания отсутствуют. Для того чтобы найти нетривиальные решения, найдём определитель матрицы относительно A_1 и A_2 и приравняем его нулю:

$$\Delta = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0. \quad (1.14)$$

Поделив (1.14) на $m_1 m_2$, получим выражение

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0, \quad (1.15)$$

которое называется *характеристическим уравнением*.

Решение уравнения (1.15) даёт два значения собственных частот колебаний:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}. \quad (1.16)$$

Исходя из выражения (1.16) следует, что колебания системы происходят на двух частотах, и общее решение (1.11) системы уравнений (1.10) принимает вид

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi), \\ x_2 = A_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi). \end{cases} \quad (1.17)$$

Амплитуды A_{ij} зависят от частот собственных колебаний $\omega_{1,2}$. Отношения амплитуд A_{21}/A_{11} и A_{22}/A_{12} , называемые коэффициентами формы колебаний, определяются следующим образом:

$$\chi_j = A_{2j}/A_{1j} = (k_1 + k_2 - m_1 \omega_j^2)/k_2 = k_2/(k_2 - m_2 \omega_j^2), \quad (1.18)$$

где j равно 1 или 2. Анализ показывает, что амплитуды A_{1j} зависят от начальных условий $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$ следующим образом:

$$A_{11} = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} \left(\{ \chi_2 x_1(0) - x_2(0) \}^2 + \frac{1}{\omega_1^2} \{ -\chi_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) \}^2 \right)^{1/2},$$

$$A_{12} = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} \left(\{ -\chi_1 x_1(0) + x_2(0) \}^2 + \frac{1}{\omega_2^2} \{ \chi_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) \}^2 \right)^{1/2}.$$

Амплитуды колебаний $A_{21} = \chi_1 A_{11}$, $A_{22} = \chi_2 A_{12}$.

При соответствующем возбуждении колебания системы могут происходить на одной частоте $\omega = \omega_1 = \omega_2$, такие колебания называются *главными*.

1.2. Колебания механической системы с демпфированием

Диссипативные силы могут быть линейными и нелинейными. Линейные силы принимаются пропорциональными скорости перемещения. Если диссипативная сила пропорциональна скорости перемещения, то такую систему называют *системой с вязким трением*. Вязкое трение характерно для микромеханических систем с воздушным демпфированием.

На рис. 1.7 представлена модель системы масса–пружина с учётом демпфирования. Уравнение движения в этом случае выглядит следующим образом:

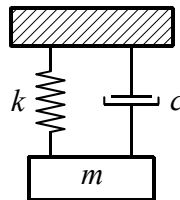
$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}, \quad (1.19)$$

где $F_d = -c\dot{x}$ – демпфирующая сила; c – коэффициент демпфирующей силы. Поделим выражение (1.19) на m , перенесём все слагаемые в одну сторону равенства, и сделаем замену $\omega_0^2 = k/m$ и $n = c/(2m)$, тогда (1.19) примет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.20)$$

где ω_0 – циклическая частота колебаний системы без затухания (собственная частота колебаний); n – коэффициент демпфирования.

Рис. 1.7. Модель системы масса–пружина с учётом демпфирования



Если положить $x = A \exp(\lambda t)$, то из (1.20) получается уравнение

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (1.21)$$

уравнение (1.21) имеет два решения: $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}$.

Поведение системы может быть охарактеризовано через соотношение $\zeta = n/\omega_0 = c/(2m\omega_0)$, называемое скоростью затухания. Различают три вида демпфирования (рис. 1.8).

1. Незначительное демпфирование

Если $n < \omega_0$, т. е. $\zeta < 1$, корни уравнения (1.21) $\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{\omega_0^2 - n^2}$, решение уравнения (1.20) будет иметь вид

$$x = A \exp(-nt) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - n^2} \cdot t + \alpha\right), \quad (1.22)$$

где α – фазовый сдвиг; A – амплитуда колебаний при $t = 0$.

Уравнение (1.22) показывает, что система будет колебаться, но в отличие от свободных колебаний:

– частота затухающих колебаний $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ меньше, чем частота свободных (собственных) колебаний ω_0 ;

– амплитуда колебаний экспоненциально затухает во времени.

Зависимость $x(t)$ для данного случая представлена на рис. 1.8, а, кривая 1.

2. Сильное демпфирование

Если $n > \omega_0$, т. е. $\zeta > 1$, корни уравнения (1.21) $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}$, а решение уравнения (1.20)

$$x = \exp(-nt) \left[c_1 \exp\left(\sqrt{n^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{n^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) \right], \quad (1.23)$$

где $c_{1,2}$ – константы интегрирования.

В этом случае колебаний системы не происходит, и инерциальная масса возвращается в своё первоначальное положение (см. рис. 1.8, кривая 2).

3. Критическое демпфирование

Если $n = \omega_0$, т. е. $\zeta = 1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -n = -\omega_0$, и решение уравнения (1.20) имеет вид

$$x = c_1 \exp(-nt) [c_2 t + c_3], \quad (1.24)$$

где $c_{1,2,3}$ – константы интегрирования.

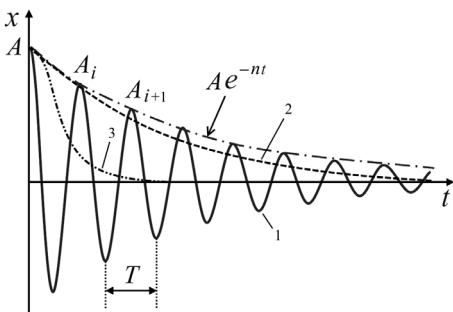


Рис. 1.8. Три вида демпфирования колебаний:

1 – незначительное; 2 – сильное;
3 – критическое

Данный результат означает, что в случае критического демпфирования нет колебаний, как и в случае сильного демпфирования, но время, затрачиваемое на смещение инерциальной массы в первоначальное положение, минимально (см. рис. 1.8, кривая 3).

На практике очень часто используется характеристика демпфирования, называемая логарифмическим декрементом затухания:

$$\Lambda = \ln(A_i / A_{i+1}) = \ln \left[\exp(-nt) / \exp(-n(t + T)) \right] = nT,$$

где T – период затухающих колебаний.

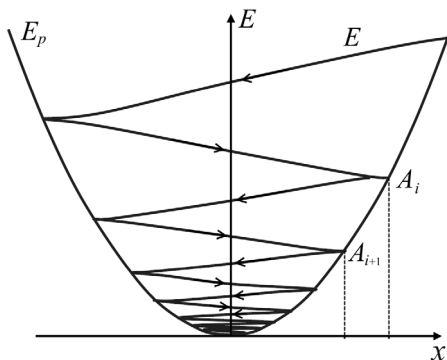


Рис. 1.9. Энергетическая диаграмма процесса затухающих колебаний

На рис. 1.9 изображена энергетическая диаграмма процесса затухающих колебаний, соответствующая кривой 1, изображенной на рис. 1.8. Из обоих рисунков видно, что амплитуда колебаний уменьшается со временем, поскольку полная энергия постепенно рассеивается, превращаясь в тепло.

1.3. Вынужденные колебания механической системы

Предположим, что на систему масса–пружина действует внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F = F_0 \sin(\omega t)$, в этом случае дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы,

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \sin(\omega t). \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) имеет решение $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение уравнения (1.20), а x_2 – частное решение уравнения (1.25).

Для x_1 уравнение (1.20) будет иметь вид

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0. \quad (1.26)$$

Из предыдущего раздела известно, что решение (1.26) для $n < \omega_0$ есть затухающие колебания

$$x_1 = A \exp(-nt) \sin \left[\sqrt{\omega_0^2 - n^2} \cdot t + \alpha \right].$$

Полагаем, что x_2 представляет собой устойчивые колебания

$$x_2 = B \sin(\omega t - \varphi), \quad (1.27)$$

где B – амплитуда результирующих колебаний; φ – сдвиг фаз между колебаниями системы и синусоидальными колебаниями внешней силы.

Представим (1.25) в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

и подставляем в него выражение (1.27), в результате получаем

$$\left[B(\omega_0^2 - \omega^2) - f \cos \varphi \right] \sin(\omega t - \varphi) + [2nB\omega - f \sin \varphi] \cos(\omega t - \varphi) = 0,$$

где $f = F_0/m$.

Последнее уравнение будет иметь решения, если $B(\omega_0^2 - \omega^2) - f \cos \varphi = 0$ и $2nB\omega - f \sin \varphi = 0$, откуда следует, что амплитуда колебаний B и сдвиг фаз φ принимают следующий вид:

$$B = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}, \quad (1.28)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (1.29)$$

Таким образом, решение уравнения (1.25) имеет вид

$$x = A \exp(-nt) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - n^2} \cdot t + \alpha\right) + B \sin(\omega t - \varphi). \quad (1.30)$$

На рис. 1.10 представлена качественная зависимость $x(t)$ для вынужденных колебаний согласно выражению (1.30). Зависимость имеет два характерных участка: переходный режим, когда амплитуда колебаний начинает возрастать, и установившийся режим, когда амплитуда колебаний не изменяется. Время, в течение которого длится переходный режим, связано с постоянной времени $\tau = 1/(\zeta\omega_d)$, для слабого демпфирования $\zeta \ll 1$ и $\omega_d \cong \omega_0$, т. е. $\tau = 1/(\zeta\omega_0) = 1/n$, где

ω_d – частота затухающих колебаний; $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Частота установившихся колебаний будет такой же, как и частота колебаний внешней силы, однако между этими колебаниями будет сдвиг фаз, который находится из (1.29).

На рис. 1.11 представлена энергетическая диаграмма процесса вынужденных колебаний, откуда видно, что с течением времени энергия системы растёт до своего максимального значения, которое достигается в установившемся режиме (см. рис. 1.10).



Рис. 1.10. Зависимость смещения инерциальной массы от времени для вынужденных колебаний

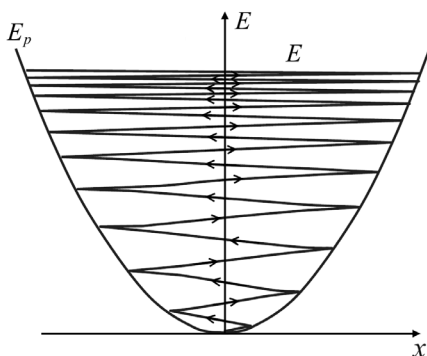


Рис. 1.11. Энергетическая диаграмма процесса вынужденных колебаний

1.3.1. Резонансная частота

Согласно выражению (1.28) для B амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум при частоте $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, называемой резонансной частотой, которая находится из условия $dB/d\omega = 0$.

Амплитуда колебаний B_r при резонансной частоте ω_r

$$B_r = \frac{f}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}} = \frac{B_0}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

где $B_0 = F_0/k$ – статическое смещение инерциальной массы.

Необходимо отметить, что $\omega_0 \geq \omega_d \geq \omega_r$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ – частота затухающих колебаний; $n = c/(2m)$ – коэффициент демпфирования; ω_r – резонансная частота колебаний.

1.3.2. Фазовый сдвиг при резонансе

Подставляя выражение $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ в выражение для фазового сдвига φ (1.29), получаем $\varphi_r = \arctg(\sqrt{1 - 2\zeta^2}/\zeta)$. Для слабого демпфирования, когда $\zeta \ll 1$, сдвиг фаз $\varphi_r \simeq \arctg(1/\zeta) \simeq \pi/2$.

1.3.3. Добротность колебательной системы

Для многих сенсорных систем острота резонансного пика очень важна для высокого разрешения и точности измерений.

Параметром, который отражает остроту резонансной кривой, является добротность или Q -фактор. Имеется несколько определений понятия добротности, все они эквивалентны для слабого демпфирования.

Определение 1. С математической точки зрения добротность – это высота пика относительной амплитуды $\beta = B_r/B_0 = B_r/(F_0/k)$ при резонансной частоте:

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\omega_0}{2n\sqrt{1-n^2/\omega_0^2}},$$

т. е. чем меньше коэффициент затухания, тем выше добротность.

Определение 2. В физике добротность Q определяется как отношение полной энергии системы к средней рассеиваемой энергии за один радиан при резонансной частоте:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}.$$

Для системы, колеблющейся при резонансной частоте ω_r , смещение равно $x = A \sin(\omega_r t)$.

Полная энергия системы $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_r^2$. Энергия, рассеиваемая за один цикл, $\Delta E = -\int_0^T F_d \dot{x} dt$, где $F_d = -c\dot{x}$.

Таким образом, имеем $\Delta E = \int_0^T c\dot{x}^2 dt = \pi cA^2\omega_r$. Добротность в данном случае

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{m\omega_r}{c}.$$

Используя $n = \frac{c}{2m}$ и $\zeta = \frac{n}{\omega_0} \cong \frac{n}{\omega_r}$, получаем $Q \cong \frac{1}{2\zeta} \equiv \frac{\omega_0}{2n}$.

Определение 3. На рис. 1.12 качественно изображена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) колебательной системы; с графической точки зрения добротностью называется отношение резонансной частоты ω_r к полосе пропускания $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, где ω_1 , ω_2 и $\Delta\omega$:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2} \left(1 \pm \frac{\zeta}{1-2\zeta^2} \right),$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\zeta\omega_0}{\sqrt{1-2\zeta^2}},$$

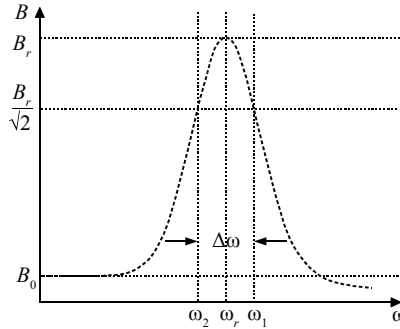


Рис. 1.12. Качественный вид АЧХ колебательной системы

для слабого затухания добротность

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 \left(\sqrt{1 - 2\zeta^2} \right)^2}{2\zeta\omega_0} = \frac{1 - 2\zeta^2}{2\zeta} \cong \frac{1}{2\zeta} \cong \frac{\omega_0}{2n}.$$

На рис. 1.13 представлены АЧХ колебательной системы для различных добротностей Q . Видно, что с увеличением добротности резонансная частота ω_r приближается к частоте собственных колебаний ω_0 (смещается вправо), при этом уменьшается полоса пропускания $\Delta\omega$, увеличивается амплитуда колебаний B . При $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$ явление резонанса полностью исчезает, где $\zeta = n / \omega_0 = c / (2m\omega_0)$.

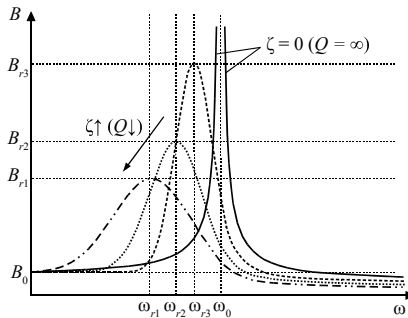


Рис. 1.13. Серия АЧХ колебательной системы для различных добротностей

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Кремниевая микроструктура изображена на рис. 1.14, где $a = 500$ мкм, $b = 50$ мкм, $h = 20$ мкм, $A = B = 4$ мм и $H = 300$ мкм. Если массой балочек и прогибом центральной части можно пренебречь, найти частоту собственных колебаний: 1) по нормали к плоскости устройства (нормальные колебания); 2) в плоскости устройства (латеральные колебания) и 3) вокруг оси упругих элементов (угловые колебания). В расчётах принять, что модуль Юнга $E_{Si} = 170$ ГПа, модуль сдвига $G_{Si} = 65$ ГПа, плотность $\rho_{Si} = 2,33$ г/см³.

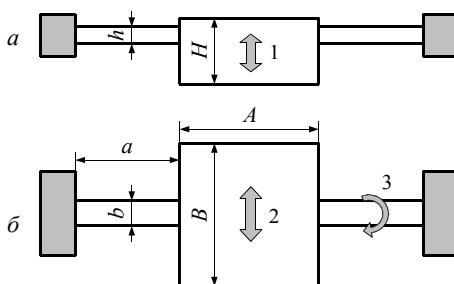


Рис. 1.14. Кремниевая микроструктура для задачи 1.1:

a – вид сбоку; b – вид сверху

1.2. Используя условия предыдущей задачи, найти частоту затухающих нормальных колебаний, если известен коэффициент затухания $c = 44$ г/с.

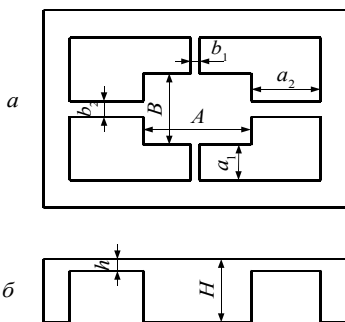


Рис. 1.15. Кремниевая микроструктура для задачи 1.5:

a – вид сверху; b – вид сбоку

1.3. Используя условия задачи 1.1, найти амплитуду вынужденных нормальных колебаний при нулевой и резонансной частотах, если на систему действует внешняя сила $F = 0,1 \sin(\omega t)$ мН.

1.4. Найти добротность системы, если при резонансе колебательная система имеет фазовый сдвиг $\varphi = 89,90^\circ$.

1.5. Кремниевая микроструктура изображена на рис. 1.15, где $a_1 = 100$ мкм, $b_1 = 20$ мкм, $a_2 = 150$ мкм, $b_2 = 30$ мкм, $A = B = 4$ мм, $h = 10$ мкм и $H = 300$ мкм, найти частоту собственных колебаний по нормали к плоскости устройства.

1.6. Компонент микрорейстройства массой 5 г закреплён на кремниевой балке, жёстко защемлённой с двух сторон, как показано на рис. 1.16, коэффициент жёсткости балки 18240 Н/м. Масса первоначально оттягивается вниз на расстояние 5 мкм и отпускается. Определить: а) частоту собственных колебаний системы; б) максимальную амплитуду колебаний.

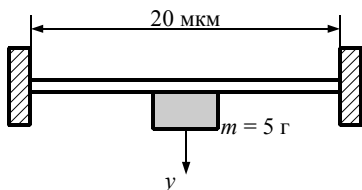


Рис. 1.16. Кремниевая микроструктура для задачи 1.6

2. Эффекты масштабирования в МЭМС

При миниатюризации различных устройств и систем необходимо осознать, что при определённых размерах систем имеют место различные физические процессы и явления. Кроме того, при изменении размеров систем меняется и относительный вклад физических процессов.

Поэтому при проектировании МЭМС нельзя напрямую использовать те же принципы, которые справедливы при разработке макроустройств.

2.1. Масштабирование геометрических размеров

Для оценки степени влияния изменения размеров системы на её физические свойства необходимо ввести определённые параметры. При этом будем полагать, что все размеры системы меняются изотропно, т. е. одинаково во всех трёх направлениях.

Например, длина X_0 может быть уменьшена до величины X_S посредством коэффициента масштабирования S . Так как мы будем рассматривать уменьшение размеров, то будем полагать, что $0 < S \leq 1$.

В результате для масштабирования геометрических размеров имеем:

$$X_S = SX_0 \text{ — масштабирование линейных размеров;}$$

$$A_S = X_S Y_S = S^2 X_0 Y_0 = S^2 A_0 \text{ — масштабирование площади;}$$

$$V_S = X_S Y_S Z_S = S^3 X_0 Y_0 Z_0 = S^3 V_0 \text{ — масштабирование объема.}$$

На рис. 2.1 изображены зависимости эффекта масштабирования от коэффициента масштабирования S , откуда видно, что изменение параметра масштабирования S в одно и то же число раз по-разному влияет на масштабируемые величины.

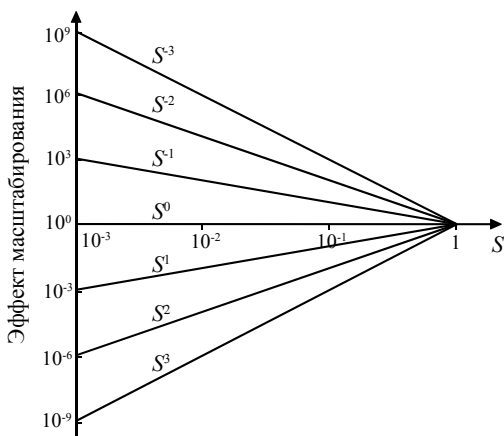


Рис. 2.1. Влияние коэффициента масштабирования S на физические величины с различными степенями S

Если бы масштабирование физических величин подчинялось только закону S^0 , то при проектировании МЭМС можно было бы использовать те же принципы, что и для макроустройств.

На самом деле такое невозможно, так как при масштабировании системы изменяется относительный вклад различных физических

явлений или же появляются новые явления, которых нет (или они не существенны) в макромире.

Например, масса объекта пропорциональна его объёму, поэтому, если линейный размер объекта уменьшается в 1000 раз (т. е. $S = 10^{-3}$), то его объём и соответственно масса уменьшатся в миллиард раз.

Различные отношения геометрических параметров, например отношение площади поверхности к объёму, очень важны во многих областях науки и техники:

$$A_S / V_S = 1 / S (A_0 / V_0) .$$

Если все размеры устройства уменьшаются, например, в 1000 раз, то отношение площади поверхности к объёму увеличивается в 1000 раз. Таким образом, физические эффекты, чувствительные к отношению площадь/объём, проявляются всё сильнее.

Например, силы поверхностной адгезии становятся более существенны для микро- и нанообъектов: сахар, упавший на рубашку, скатится вниз, так как сила тяжести превышает поверхностные силы, тогда как сахарная пудра прилипнет к рубашке, поскольку поверхностные силы превышают гравитационные.

2.2. Масштабирование механических систем

Имеется два наиболее важных фундаментальных параметра, характеризующих поведение механической системы, – это масса и жёсткость.

Если все размеры системы уменьшаются, например в 1000 раз, то масса, так же как и объём, уменьшается ещё больше (в 10^9 раз):

$$m_S = \rho S^3 V_0 = S^3 m_0 .$$

Гравитационная сила менее значима для микрообъектов. Насекомые могут передвигаться по поверхности воды и садиться на потолок, так как поверхностные силы превышают гравитационные. Кроме того, крошечные насекомые остаются живыми после падения с большой высоты.

Жёсткость механической системы – это фундаментальная величина, характеризующая способность механической системы оказывать сопротивление приложенным силам, она равна отношению силы, при-

ложенной к механическому элементу, к результирующему смещению $k = -F / x$.

Жёсткость механических элементов может складываться из комбинации жёсткостей балок и стержней. Балка оказывает сопротивление внешним силам в поперечном направлении, а стержень – в продольном.

Рассмотрим влияние различных видов нагрузки на балку и стержень, изображённые на рис. 2.2:

- осевая (продольная) нагрузка $k_{\text{осев}} \propto EA/l \propto Ed^2/l \propto S$;
- изгибающая (поперечная) нагрузка $k_{\text{изг}} \propto EJ/l^3 \propto Ed^4/l^3 \propto S$;
- угловая нагрузка $k_{\text{угл}} \propto M/\Theta \propto GJ_p/l \propto Gd^4/l \propto S^3$.

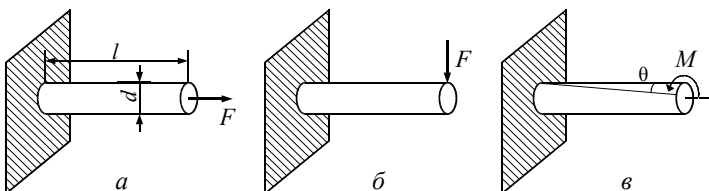


Рис. 2.2. Схематическое изображение цилиндрической балки и стержня:

а – осевая нагрузка; *б* – изгибающая нагрузка; *в* – угловая нагрузка

Таким образом, жёсткость при угловой нагрузке $k_{\text{угл}}$ уменьшается гораздо быстрее, чем жёсткость при осевой $k_{\text{осев}}$ или изгибающей $k_{\text{изг}}$ нагрузке, что часто используется в МЭМС при создании торсионных сенсоров и актюаторов.

Несомненно, масса и жёсткость являются основными характеристиками механической системы, однако знание конкретных их значений не позволяет непосредственно сравнивать одну систему с другой или вообще заниматься проектированием.

Частота собственных колебаний является тем самым параметром, который связывает упругие и инерциальные силы, что позволяет непосредственно определять частоту колебаний механической системы.

Частота колебаний является мерой относительной жёсткости механической системы и встречается при разработке осцилляторов и фильтров:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \propto \sqrt{\frac{k}{m}} \propto \frac{1}{S},$$

т. е. при уменьшении всех размеров системы, например, в 1000 раз, частота её собственных колебаний увеличивается в 1000 раз.

Исходя из вышесказанного можно сделать несколько следствий.

1. Небольшие предметы быстрее. Например, крылья птицы колибри делают 80–100 взмахов в секунду, муравей делает 10–12 шагов в секунду. Поэтому резонаторы, используемые в высокочастотных коммуникационных системах, стремятся сделать как можно меньше, так как небольшие устройства имеют более быстрое время срабатывания.

2. Необходимо отметить, что МЭМС-устройства являются более прочными и устойчивыми к ударным нагрузкам и вибрациям, чем их двойники в макроисполнении. Наиболее яркий пример – это тот факт, что МЭМС-акселерометр остаётся работоспособным даже после выстрела его вместе со снарядом из ствола танка (ускорение до 100 000 g), хотя сам корпус устройства при этом разрушается.

3. Отрицательным следствием уменьшения размеров механической системы является то, что в сенсорах (например, акселерометрах) будет требоваться более чувствительная система регистрации отклонения инерциальной массы, потому что инерциальная масса и соответственно результирующая сила инерции масштабируется как S^3 , а жёсткость упругих элементов как S , т. е. при уменьшении размеров системы инерциальная масса будет отклоняться всё меньше и меньше.

2.3. Масштабирование температурных систем

Влияние масштабирования на температурные системы можно оценить из основных законов теплопроводности.

Способность объекта накапливать температурную энергию определяется следующим выражением:

$$mC_p\Delta T = \rho VC_p\Delta T \propto S^3,$$

где m – масса объекта; C_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении; ΔT – градиент температур в материале; V – объём материала.

Тепловая энергия в пределах системы может распространяться тремя механизмами (рис. 2.3): теплопроводность, конвекция и излучение.

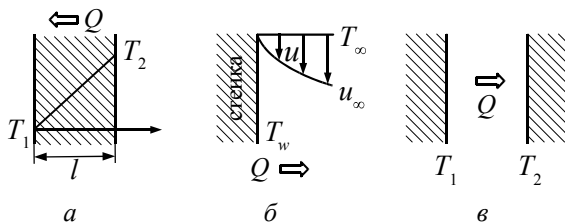


Рис. 2.3. Механизмы передачи тепловой энергии:

а – теплопроводность; *б* – конвекция; *в* – излучение

Теплопроводностью называется форма переноса тепла через материал объекта вследствие температурного градиента ∇T . Мощность тепловых потерь Q в этом случае

$$Q = \chi A \frac{\partial T}{\partial x} = \chi A \frac{T_2 - T_1}{l} \propto S^2,$$

где A – площадь поперечного сечения объекта; l – длина объекта; χ – коэффициент теплопроводности; единицы измерения $Q = [\text{Вт}]$, $\chi = [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})]$.

Конвекцией называется форма переноса тепла к объекту через газ или жидкость за счёт разности в температурах поверхности объекта или стенки T_w и температуры газа или жидкости T_∞ . Мощность тепловых потерь Q для конвекции

$$Q = hA(T_w - T_\infty) \propto S^2,$$

где h – коэффициент конвективной теплоотдачи, $h = [\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})]$.

Излучением называется форма переноса тепла вследствие испускания и поглощения электромагнитных волн. Мощность тепловых потерь Q согласно закону Стефана–Больцмана

$$Q = \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \propto S^2,$$

где σ – постоянная Стефана–Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$.

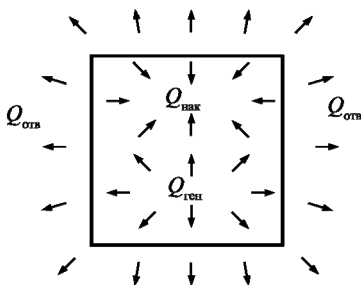


Рис. 2.4. Тепловая система

Тепловую систему, изображённую на рис. 2.4, которая включает в себя внутреннюю генерацию тепла $Q_{\text{ген}}$, накопление тепла в системе $Q_{\text{нак}}$ и отведение тепла $Q_{\text{отв}}$ из системы. Эти процессы могут быть описаны при помощи дифференциального уравнения первого порядка:

$$mC_p \dot{T} - hAT = Q_{\text{ген}}, \quad (2.1)$$

где 1-й множитель в левой части характеризует накопленное тепло $Q_{\text{нак}} \propto S^3$, а 2-й – отведённое тепло $Q_{\text{отв}} \propto S^2$. Если ввести параметр

$$\tau = \frac{mC_p}{hA} = \left(\frac{\rho C_p}{h} \right) \left(\frac{V}{A} \right) \propto S, \quad (2.2)$$

то уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\tau \dot{T} - T = \frac{Q_{\text{ген}}}{hA}, \quad (2.3)$$

где τ является тепловой постоянной времени.

Согласно (2.2), если размеры тепловой системы будут изотропно уменьшаться, например в 100 раз, то и тепловая постоянная времени тоже будет уменьшаться в 100 раз, это говорит о том, что с уменьшением размеров объекта становится легче отводить от него тепло.

Термическая механика включает в себя сложные уравнения с множеством параметров. Часто на практике для оценки отклика системы или для сравнения с экспериментальными данными используются безразмерные отношения. Далее рассмотрим два безразмерных параметра, которые отражают влияние масштабирования на механизмы переноса тепла.

Все эти три механизма передачи тепла включают в себя площадь A , через которую передаётся тепло, т. е. скорость передачи тепла будет масштабироваться как S^2 . Однако остаётся вопрос, как скорость передачи тепла будет отличаться для макро- и микро-объектов.

Рассмотрим тепловую систему, изображённую на рис. 2.4, которая включает в себя внутреннюю генерацию

Число Био – это отношение произведения коэффициента конвективного теплообмена h и характеристической длины l к коэффициенту теплопроводности твёрдого тела χ :

$$Bi = \frac{hl}{\chi} \propto S.$$

Число Био представляет собой отношение термического сопротивления стенки l/χ к термическому сопротивлению передачи тепла на поверхности $1/h$ и характеризует способность тела быстро прийти к тепловому равновесию без появления существенных внутренних термических напряжений. С уменьшением всех размеров системы, например в 100 раз, число Био Bi также уменьшится в 100 раз.

Число Грасгофа – это безразмерная величина, характеризующая отношение выталкивающей архимедовой силы, вызывающей конвективное движение флюидной среды, и сил вязкости, затрудняющих это движение:

$$Gr = \frac{gl^3\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \propto S^3,$$

где g – ускорение свободного падения; l – характеристическая длина; β – коэффициент термического расширения флюидной среды; T_w – температура поверхности стенки объекта; T_∞ – объёмная температура флюидной среды; ν – кинематическая вязкость.

При изотропном уменьшении размеров системы, например в 100 раз, число Грасгофа Gr уменьшается в 10^6 раз, что говорит о том, что при миниатюризации естественная конвекция существенно уменьшается вследствие затруднения движения флюидной среды.

2.4. Масштабирование флюидных систем

Механика флюидных систем описывается уравнением Навье–Стокса, которое является нелинейным и включает в себя различные силы: сила тяжести, инерции, вязкости и поверхностного натяжения.

Сложность в решении данного уравнения вынуждает разработчиков МЭМС устройств использовать безразмерные соотношения, характеризующие различные физические состояния (режимы) флюидных систем.

Для оценки влияния масштабирования на флюидные системы при разработке МЭМС рассмотрим три параметра: число Рейнольдса, Кнудсена и Вебера.

1. Число Рейнольдса

Число Рейнольдса Re является безразмерным параметром, характеризующим соотношение сил инерции и сил вязкости во флюидных системах, фактически Re – это мера турбулентности флюидной системы.

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \propto S,$$

где ρ – плотность среды; V – характеристическая (средняя) скорость; d – характеристическая длина (например диаметр канала); μ – вязкость среды, $\mu = [\text{Па} \cdot \text{с}]$.

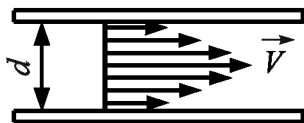


Рис. 2.5. Ламинарное течение флюидной среды

Число $Re < 2000$ соответствует ламинарному потоку, распределение скорости внутри канала параболическое (рис. 2.5) и силы вязкости преобладают над инерционными силами.

При $Re > 4000$ инерционные силы преобладают над силами вязкости и силы вязкости не могут подавить возмущения, которые возникают в первую очередь из-за шероховатости стенок канала. Профиль скорости в этом случае более однородный с наличием вихревых движений (водоворотов), которые усиливают смешивание.

$2000 < Re < 4000$ соответствует переходному режиму, здесь характер потока зависит в большей степени от шероховатости поверхности стенок канала.

В общем, с уменьшением всех размеров системы, например в 1000 раз, число Re также уменьшается в 1000 раз, таким образом, поток текучей среды при миниатюризации становится более ламинарным. Это приводит к тому, что смешивание становится затруднительным на микроуровне.

2. Число Кнудсена

Числом Кнудсена Kn называется отношение средней длины свободного пробега молекулы λ к характеристической длине поля течения l :

$$Kn = \frac{\lambda}{l} \propto \frac{1}{S}.$$

Число Кнудсена используется для оценки характеристик поля течения газов. Потоки газов имеют место в различных МЭМС, таких как микроактюаторы, инерциальные сенсоры: акселерометры, гироскопы.

Существуют четыре режима, которые характеризуются числом Кнудсена:

$Kn < 0,01$ – сплошная среда;

$0,01 < Kn < 0,1$ – скользящая среда (поток скольжения фаз);

$0,1 < Kn < 10$ – переходный режим;

$Kn > 10$ – свободная молекулярная среда.

Приведём некоторые примеры:

1) сплошная среда: поток в трубе, $\lambda \approx 0,1$ мкм, $l > 1$ мм;

2) скользящая среда: МЭМС устройство, $\lambda \approx 0,1$ мкм, $l \approx 2$ мкм;

3) переходной режим: камера химического осаждения из газовой фазы (ХОГФ), $\lambda \approx 0,1 \dots 100$ мкм, $l \approx 0,1 \dots 2$ мкм;

4) свободная молекулярная среда: головка жёсткого диска, $\lambda \approx 65$ нм, $l \approx 15$ нм.

3. Число Вебера

Число Вебера характеризует отношение между инерциальными силами и силами поверхностного натяжения в текучих средах:

$$We = \frac{\rho V^2 l}{\sigma} \propto S,$$

где ρ – плотность среды; l – характеристическая длина; V – характеристическая скорость; σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\sigma = [\text{кг/с}^2]$.

При изотропном уменьшении размеров системы усиливается влияние сил поверхностного натяжения. Пористые поверхности, например поролоновая губка, могут легко впитывать жидкости.

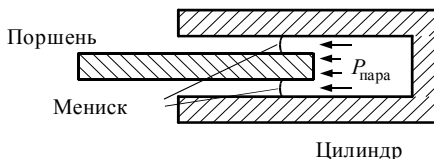


Рис. 2.6. Паровой МЭМС-двигатель

Пример использования сил поверхностного натяжения в МЭМС – это паровой МЭМС-двигатель (рис. 2.6), где образуется мениск, который служит в качестве прокладки между поршнем и цилиндром, что позволяет создавать давление внутри цилиндра.

2.5. Масштабирование электрических систем

Для оценки влияния масштабирования на электрические системы рассмотрим основные элементы электрической цепи: резистор, конденсатор и катушка индуктивности, изображённые на рис. 2.7.

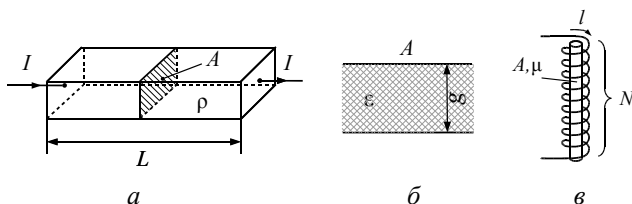


Рис. 2.7. Масштабирование элементов электрической цепи

1. Сопротивление кусочка материала R является функцией удельного сопротивления ρ материала и геометрических размеров L и A (см. рис. 2.7, а):

$$R = \frac{\rho L}{A} \propto \frac{1}{S}.$$

2. Электрическая ёмкость конденсатора C определяется диэлектрической проницаемостью ϵ материала между обкладками площадью A , разделёнными зазором g (см. рис. 2.7, б):

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon A}{g} \propto S.$$

3. Индуктивность катушки индуктивности определяется магнитной проницаемостью материала сердечника μ , длиной катушки l , числом витков N , площадью поперечного сечения сердечника A :

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 A}{l} \propto S.$$

В результате при изотропном уменьшении размеров системы, например в 1000 раз, сопротивление возрастает в 1000 раз, тогда как ёмкость и индуктивность уменьшаются в 1000 раз. Таким образом, простое уменьшение устройств микроэлектроники и МЭМС, содержащих определённые комбинации электрических элементов, невозможно.

Масштабирование электрических систем также имеет очень важное значение для МЭМС-актюаторов (исполнительных устройств). В макром мире преобладают устройства с магнитным и электромагнитным управлением.

При уменьшении размеров системы необходимо провести оценку, что лучше для МЭМС-устройств – магнитное или электрическое поле. Оценим плотность энергии электрического и магнитного полей (рис. 2.8).

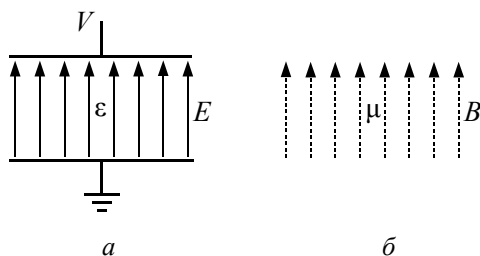


Рис. 2.8. Электрическое (а) и магнитное (б) поля в пространстве

Плотность энергии электрического поля:

$$U_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2},$$

где E – напряжённость электрического поля; $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Плотность энергии магнитного поля:

$$U_{\text{магн}} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu},$$

где B – магнитная индукция; $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Максимальные значения электрического E и магнитного B полей будут ограничены максимально достижимыми эксплуатационными величинами.

Максимально достижимая плотность электрической энергии ограничена электрическим пробоем, который возникает, когда электроны или ионы в электрическом поле ускоряются до энергии, достаточной для того, чтобы, столкнувшись с молекулами, выбить из них дополнительные электроны или ионы, в результате чего происходит лавинообразный пробой.

Для воздуха при нормальных температуре и давлении напряжённость электрического поля, при которой возникает пробой, $E_{\max} \approx 3 \cdot 10^6$ В/м (для расстояний > 10 мкм). В результате максимальная плотность энергии электрического поля $U_{\text{эл}} = \epsilon_0 \epsilon E_{\max}^2 / 2 \approx 40$ Дж/м³.

Максимально достижимая плотность энергии магнитного поля ограничена насыщением потока магнитной индукции в магнитных материалах. В ферромагнитных материалах магнитные домены ориентированы случайным образом, и результирующее магнитное поле отсутствует. Если приложить внешнее магнитное поле, то магнитные домены будут стремиться к выравниванию с приложенным магнитным полем. Когда все домены выравниваются вдоль магнитного поля, возникает насыщение потока магнитной индукции.

В магнитных материалах $B_{\text{насыщ}} \approx 1$ Тл. В результате

$$U_{\text{магн}} = \frac{B_{\text{насыщ}}^2}{2\mu_0\mu} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3.$$

Таким образом, $U_{\text{магн}} \approx 10^4 U_{\text{эл}}$, т. е. в макром мире магнитное управление доминирует над электрическим.

Однако в МЭМС-устройствах расстояние между электродами может быть уменьшено до 1 мкм. Исследования показали, что электрическое поле может быть гораздо больше, чем $3 \cdot 10^6$ В/м при таких зазорах.

Закон Пашена (1889 г.) гласит, что $E_{\max}$ является функцией произведения давления и расстояния (рис. 2.9). При уменьшении произведения Pd величина $E_{\max}$ уменьшается до значения $E_{\max}^{\text{макро}} \approx 3 \cdot 10^6$ В/м, однако затем начинает возрастать из-за того, что, во-первых, при

малых зазорах всё меньше и меньше столкновений возникает между электронами и ионами с молекулами газа, поскольку отношение средней длины свободного пробега между столкновениями к межэлектродному расстоянию возрастает; во-вторых, уменьшение давления также приводит к уменьшению числа столкновений, поскольку уменьшается количество молекул и соответственно увеличивается средняя длина свободного пробега.

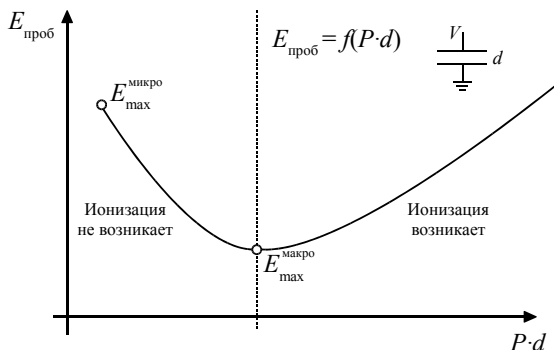


Рис. 2.9. Закон Пашена

В результате $E_{\max}$ возрастает до величины $E_{\max}^{\text{микро}} \approx 3 \cdot 10^8$ В/м (в вакууме). Таким образом, плотность энергии электрического поля $U_{\text{эл}} \approx 4 \cdot 10^5$ Дж/м³ становится примерно такой же, что для магнитного поля $U_{\text{магн}} \approx 4 \cdot 10^5$ Дж/м³.

Кроме того, $U_{\text{магн}}$ не зависит от масштабирования системы, так как $B_{\text{насыщ}}$ и μ являются постоянными величинами для конкретного материала, т. е.

$$U_{\text{магн}} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \propto S^0.$$

В то время как для электрического поля при постоянном приложенном напряжении ($V = \text{const}$)

$$U_{\text{эл}} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} \propto \frac{1}{S^2},$$

т. е. при уменьшении всех размеров системы, например в 1000 раз, плотность энергии электрического поля возрастает в 10^6 раз, тогда как плотность энергии магнитного поля не изменяется.

К тому же электростатические актюаторы гораздо легче изготовить в микроисполнении, используя технологию СБИС, чем электромагнитные (катушки индуктивности и магниты сложно изготовить в микроисполнении).

Всё это даёт преимущество использования энергии электрического поля перед энергией магнитного поля в МЭМС-устройствах.

2.6. Масштабирование оптических систем

Технологии микроэлектроники и МЭМС уже используются для производства миниатюрных оптических систем (например, светодиоды, интегральные волноводы, микрзеркала и дифракционные решётки). Из-за того что длина волны видимого света составляет от 650 нм для красного цвета и до 475 нм для синего цвета, размеры изготавливаемых интегральных оптических компонентов обычно не меньше этой величины (длины волны).

Кроме того, в оптических МЭМС-устройствах, работающих на отражение света, необходимо получать субмикронные смещения, что очень хорошо достигается при помощи МЭМС-элементов, делая их весьма привлекательными для использования в оптике.

2.7. Масштабирование химических и биологических систем

Масштабирование химических систем ограничено фундаментальным выбором между размером образца и пределом обнаружения. Несмотря на то что уменьшение размера образца обычно выгодно, в ограниченном объёме полное число молекул, доступных для обнаружения, также будет уменьшаться. Поэтому будут требоваться всё более и более чувствительные датчики, к тому же граница обнаружения одной молекулы ограничена (рис. 2.10).

Многие системы, сопряжённые с биологическими системами, являются мультидисциплинарными (например, флюидные, электронные, механические и т. д.) и, таким образом, свойства масштабирования какого-либо из этих компонентов могут ограничивать масштабирование

всей системы. Миниатюризация таких систем часто ограничена применением и размером соответствующих биологических элементов.

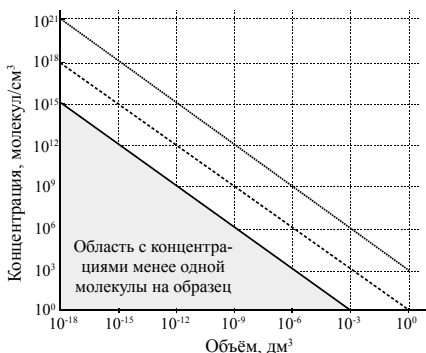


Рис. 2.10. Выбор между размером образца и пределом обнаружения

Например, устройства, манипулирующие с клетками, могут быть уменьшены только до размеров клетки (примерно 5...20 мкм), тогда как устройства имеющие дело с ДНК, могут быть гораздо меньше.

2.8. Вычислительные проблемы при масштабировании

Практически все МЭМС-устройства проектируются с помощью численного моделирования, которое уменьшает затраты на изготовление и экспериментальные измерения, поэтому необходимо учитывать вычислительные проблемы при масштабировании.

Инженерные расчёты всегда выполняются с помощью компьютеров. Вследствие цифрового представления данных существует величина ε , называемая вычислительной точностью, которая является последней цифрой после запятой, которая может быть представлена на компьютере.

При вычислениях возникает два вида ошибок.

1. *Ошибка отбрасывания* возникает потому, что числа на компьютере могут быть представлены только с конечной точностью ε .

2. *Ошибка округления* возникает при решении, например, уравнений из-за конечной точности ε . Ошибка округления накапливается с ростом количества вычислений.

Если вычисления происходят случайным образом, то результирующая ошибка округления будет порядка $\sqrt{N} \cdot \varepsilon$, где N – число выполненных расчётов. Однако если ошибки округления накапливаются преимущественно в одном направлении, то суммарная ошибка будет порядка $N\varepsilon$.

При моделировании МЭМС нужно учитывать следующие аспекты вычислений.

- Подходящий масштаб единиц чисел для моделирования МЭМС. При проектировании макроустройств обычно используется система единиц СИ. В системе СИ единица длины – метр. Однако в МЭМС-устройствах используются размеры порядка микрометров (10^{-6} м).

- Численные методы, такие как метод конечных элементов, обычно включают в себя решение больших систем уравнений (от 10^3 до 10^6 уравнений). Такая система уравнений становится плохо обусловленной, когда в уравнениях порядки величин сильно различаются. Решение таких систем уравнений может приводить к неточным результатам или они могут быть вообще нерешаемы.

Поэтому при уменьшении размеров системы желательно переходить от системы СИ к системе микро СИ.

2.9. Свойства материалов при масштабировании

При проектировании устройств, изготавливаемых с использованием микротехнологии, необходимо осознавать, что свойства тонкоплёночных материалов часто отличаются от свойств объёмных материалов.

Большинство этих отличий возникает из-за разницы в процессах изготовления тонких плёнок и объёмных материалов.

Кроме того, предположение однородности материала, которое используется для объёмных материалов, становится недостоверным при разработке устройств, которые имеют характерные размеры, соизмеримые с размерами отдельных кристаллитов (зёрен) и других дефектов поверхностей.

Различные локальные изменения размеров зёрен или других характеристик могут существенным образом влиять на работоспособность изготавливаемых устройств МЭМС.

Одно из преимуществ миниатюризации МЭМС-устройств заключается в том, что они могут быть изготовлены с очень низкой плотно-

стью дефектов благодаря достижениям в технологии микроэлектроники. Это одна из причин, почему надёжность некоторых МЭМС оказывается выше, чем у их макроскопических аналогов.

Тем не менее из-за высокого значения соотношения площади поверхности к объёму в МЭМС-устройствах необходимо тщательно контролировать состояние поверхности, её шероховатость.

2.10. Новые физические явления при масштабировании

При уменьшении размеров устройств до величин порядка микрометра возникают или становятся более существенны различные физические явления, важность которых возрастает при проектировании МЭМС. Рассмотрим три наиболее важных для МЭМС явления.

1. Броуновский (тепловой) шум

Броуновский шум является низкоуровневым (фоновым), присутствующим в электрических и механических системах. Этот тепловой шум присутствует в окружающей нас среде и возникает вследствие колебаний атомов в материалах, из которых изготовлено устройство, и среды, в которой это устройство работает.

Следовательно, тепловой шум зависит от температуры этих материалов. Механизмами влияния теплового шума на механические и электрические системы являются демпфирование в механических системах и сопротивление в электрических системах.

При уменьшении размеров устройств тепловой шум проявляется всё сильнее, что необходимо учитывать при проектировании.

2. Эффект Пашена

Явление увеличения напряжения пробоя с уменьшением произведения давления и расстояния было открыто ещё в 1889 г. Пашеном. Это явление проявляет себя при межэлектродных расстояниях менее 2 мкм, которые являются характерными для МЭМС-устройств. Это позволяет существенно повысить эффективность электростатических актюаторов.

3. Электронное туннелирование

Квантоворазмерные объекты, например электроны, могут туннелировать через очень небольшие расстояния (порядка нанометров) благодаря волновым свойствам квантоворазмерных частиц. Данный эффект кажется странным с точки зрения классической физики, где частицы должны были бы отражаться (отталкиваться) от барьера.

Электронное туннелирование может быть использовано в МЭМС-устройствах как очень чувствительный метод регистрации перемещений с разрешением порядка 0,01 нм. На этом принципе основана работа сканирующего туннельного микроскопа.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Имеется кубическая масса с длиной ребра L , которая держится на стержне с квадратным сечением (длина стороны $0,1L$) и длиной $2L$. Система подвергается ступенчатому ускорению a , которое вызывает разрушение стержня вследствие механического напряжения T_S . Как изменится ускорение, необходимое для разрушения стержня, если систему изотропно уменьшить в 1000 раз?

2.2. Имеется куб с длиной ребра d и плотностью ρ , плавающий в жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ . Рассчитать размеры куба, при которых сила поверхностного натяжения больше, чем вес куба. Оценить размеры куба в случае, если он сделан из кремния ($\rho = 2,33 \text{ г/см}^3$), а жидкостью является вода ($\sigma = 0,072 \text{ Н/м}$).

2.3. Трубка имеет диаметр $d = 80 \text{ мкм}$ и длину $L = 10 \text{ мм}$. Найти среднюю скорость потока и число Рейнольдса для воды и воздуха при температуре 20°C , если разница между давлениями, приложенными к концам трубки, $\Delta P = 1 \text{ кПа}$.

При 20°C вязкость воды $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$, воздуха – $\mu_{\text{возд}} = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$, плотность воздуха $\rho_{\text{возд}} = 1,2 \text{ кг/м}^3$, воды – $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ г/см}^3$. Объём жидкости, протекающий через трубку в единицу времени, $Q = \pi d^4 \Delta P / (128 \mu L)$.

3. Демпфирование колебаний в МЭМС

Динамические характеристики МЭМС существенно зависят от их демпфирующих свойств. В зависимости от конкретного применения требуются различные степени демпфирования. Например, для резонаторов с высокой добротностью нужно очень низкое демпфирование, для акселерометров и актюаторов – высокое демпфирование, а для гироскопов – что-то среднее между ними.

Демпфирование в МЭМС отличается от демпфирования в макроустройствах, так как воздушное демпфирование в МЭМС гораздо более существенно из-за более высокого отношения площади поверхности к объёму.

Изменением давления воздуха, можно регулировать добротность системы в широком диапазоне, таким образом, высокодобротные системы должны работать в вакууме.

3.1. Механизмы демпфирования

В МЭМС имеется несколько различных механизмов демпфирования.

1. *Структурное демпфирование.* Данный вид демпфирования устанавливает предел добротности системы для конкретного материала. Потери в материалах возникают из-за движения на атомарном уровне, что приводит к тепловыделению. Эти «внутренние трения» устанавливают фундаментальный предел максимально достижимой добротности колебательной системы.

Структурное демпфирование зависит от температуры, частоты колебаний, колебательной моды и вида материала.

2. *Конструкционное демпфирование.* Подвижная часть в МЭМС не плавает, а закреплена на подложке при помощи механических упругих подвесов. Когда устройство колеблется, то небольшая, но не пренебрежимая часть колебательной энергии рассеивается в местах крепления упругих подвесов.

Конструкционное демпфирование зависит от места крепления упругого подвеса относительно формы колебательной моды и от типа крепления.

3. *Флюидное демпфирование.* Для МЭМС-устройств данная форма демпфирования является наиболее значимой, которую практически всегда необходимо учитывать при проектировании. Флюидное демпфирование возникает из-за циклических движений конструкции в газообразной или жидкостной средах.

Флюидное демпфирование зависит от характеристик среды, в которой происходит движение подвижных элементов, характера этого движения и геометрических параметров конструкции.

Исследования показывают, что добротность системы существенным образом зависит от давления окружающей среды. Зук и другие

ученые исследовали поведение колеблющихся поликремниевых микробалок и обнаружили три характерных участка зависимости добротности от давления $Q(P)$ (рис. 3.1).

1. На участке I система имеет максимальную добротность Q , которая достигается при очень низких давлениях P . Демпфирование в этом случае очень низкое и главным образом возникает из-за структурного и конструкционного механизмов. Добротность на участке I слабо зависит от давления.

2. На участке II, когда давление ещё низкое, молекулы газа не взаимодействуют друг с другом, демпфирование происходит из-за передачи импульса между молекулами газа и колеблющейся балкой.

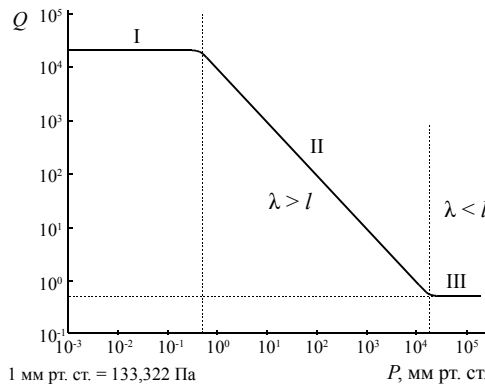


Рис. 3.1. Зависимость добротности от давления для МЭМС-резонатора:

λ – средняя длина свободного пробега молекулы газа; l – характеристический размер устройства [Sensors and Actuators A. – 1992. – Vol. 35 – P. 51–59]

При повышении давления молекулы газа начинают взаимодействовать между собой и оказывают влияние на вибрирующую балку в виде сил вязкого трения. При этом добротность является функцией давления $Q = f(P)$.

3. На участке III при давлениях, близких к атмосферному, добротность колебательной системы перестаёт зависеть от давления, в этом случае воздух является вязкой средой.

3.2. Вязкое демпфирование

Вязкое демпфирование является одним из основных механизмов затухания в МЭМС и оно сильно зависит от вязкости среды.

Абсолютная вязкость среды μ является мерой сопротивления к течению, и представляет собой отношение сдвигового напряжения τ между текучими слоями к градиенту скорости dv/dy через канал (рис. 3.2), $\mu = \tau / (dv/dy)$.

В данном случае градиент скорости – линейный, и текучая среда связана с каждой из поверхностей. Также вводят кинематическую вязкость $\nu = \mu / \rho$.

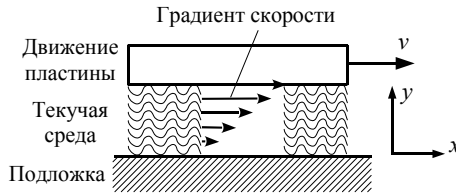


Рис. 3.2. Линейный градиент скорости между двумя пластинами как результат касательных напряжений, возникающих в вязкой среде

Природа вязкости у жидкости и газа различна. Вязкость в жидкой среде является следствием когезии (сцепления) между соседними молекулами, а вязкость в газовой среде возникает из-за межмолекулярных столкновений в газе. Так как скорость молекулярных столкновений зависит от температуры газа, то вязкость газа увеличивается с ростом температуры. У жидкости наоборот – вязкость уменьшается с ростом температуры.

Используя теорию межмолекулярных столкновений, Больцман рассчитал коэффициент вязкости в газах:

$$\mu = \frac{\rho \bar{v} \lambda}{3},$$

где $\bar{v}$ – средняя скорость молекул газа; λ – средняя длина свободного пробега молекулы газа; ρ – плотность газа. Данное выражение справедливо для $\lambda < l$, где l – характеристический размер устройства. Выражения для ρ , $\bar{v}$ и λ имеют следующий вид:

$$\rho = n \frac{M}{N_a}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n}, \quad \text{где } n = \frac{N_a P}{RT},$$

где M – молярная масса; n – концентрация; d – эффективный диаметр молекулы газа; $N_a = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро.

В идеальном газе произведение $\rho\lambda = \text{const}$, следовательно, вязкость μ не зависит от давления P .

Однако когда расстояние между движущимися элементами МЭМС становится соизмеримым со средней длиной свободного пробега молекулы $\lambda \approx l$, то вязкость начинает зависеть от давления. Межмолекулярные взаимодействия в пределах газового слоя случаются всё реже, а импульс непосредственно передаётся между молекулами газа и поверхностью элемента МЭМС, что приводит к зависимости вязкости от давления.

Для того чтобы учесть зависимость коэффициента вязкости от давления, существует полуэмпирическая зависимость так называемого эффективного коэффициента вязкости:

$$\mu_{\text{эф}} = \frac{\mu_0}{1 + 9,658 \text{Kn}^{1,159}},$$

где $\text{Kn} = \lambda/l$ – число Кнудсена; μ_0 – коэффициент вязкости при атмосферном давлении.

При очень низких давлениях модель *вязкого демпфирования* становится неверной и тогда используют модель *демфирования разреженного воздуха (модель Кристиана)* (рис. 3.3), где $\dot{x}$ –

Колеблющаяся
пластина

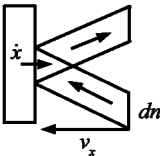


Рис. 3.3. Столкновение колеблющейся пластины с надвигающимися молекулами

– скорость движения пластины; v_x – скорость молекул; $dn = nf(v_x)dv_x$ – число молекул в единице объёма со скоростями в диапазоне от v_x до $v_x + dv_x$, где $f(v_x)$ – функция распределения Максвелла:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

где m – масса молекулы. Вычисления приводят к коэффициенту демпфирующей силы

$$c_r = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{M}{RT}} \cdot PA,$$

где T – температура газа; A – площадь пластины; M – молярная масса; P – давление среды.

3.3. Демпфирование со сдвливающимся слоем

Если пластина расположена параллельно неподвижной стенке и движется ей навстречу, то воздушный слой между пластиной и стенкой сдавливается, а некоторая часть воздуха выходит наружу, как показано на рис. 3.4. При этом из-за вязкого течения воздуха в зазоре возникает дополнительное давление Δp .

И, наоборот, когда пластина движется от стенки, то давление в зазоре уменьшается, и воздух засасывается между пластиной и подложкой. Работа, выполняемая пластиной, расходуется вязким потоком воздуха и превращается в тепловую энергию.

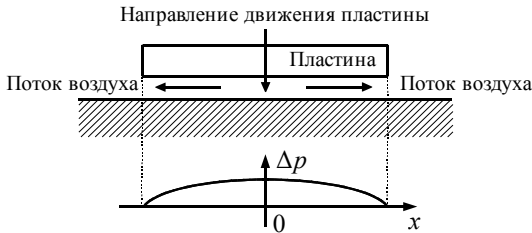


Рис. 3.4. Появление дополнительного давления в зазоре между пластиной и стенкой

Очевидно, что демпфирующая сила в данном случае зависит от величины зазора: чем он меньше, тем больше демпфирующая сила. Если пластина находится слишком далеко от стенки, то дополнительным давлением в зазоре можно пренебречь и тогда демпфирование главным образом возникает из-за силы лобового сопротивления.

Поведение сжатого слоя в общем случае определяется как вязкими, так и инерционными силами текучей среды. Однако для очень маленьких размеров МЭМС-устройств инерционными силами можно пренебречь. В данном случае характер текучей среды описывается уравнением Рейнольдса:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial(h\rho)}{\partial t}, \quad (3.1)$$

где $P = P_0 + p$, P_0 – давление окружающей среды; p – изменение давления; μ – коэффициент вязкости среды; ρ – плотность среды; h – расстояние между пластиной и стенкой (см. рис. 3.4).

Для упрощения уравнения (3.1) сделаем следующие допущения:

1) температурный градиент поперёк слоя является пренебрежимо малым;

2) число Рейнольдса много меньше единицы (среда ламинарная), $\omega h^2 \rho \ll \mu$;

3) отсутствуют температурные колебания (система изотермальная);

4) расстояние h между пластиной и стенкой не изменяется в плоскости xy ;

5) плотность воздуха ρ пропорциональна давлению P , $\rho = \rho_0 P / P_0$.

Таким образом, получается нелинейное уравнение Рейнольдса для демпфирования со сдвливанием слоя между параллельными пластинами:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial(hP)}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Если ввести нормированные величины $\tilde{P} = P / P_0$, $\tilde{x} = x / l$, $\tilde{y} = y / l$, $\tilde{h} = h / h_0$, $\tau = \omega t$, то уравнение (3.2) может быть записано как

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{P}^2}{\partial \tilde{y}^2} = 2\sigma \frac{\partial(\tilde{h}\tilde{P})}{\partial \tau}, \quad (3.3)$$

где σ – коэффициент сдвливания, равный

$$\sigma = \frac{12\mu\omega l^2}{P_0 h_0^2},$$

здесь ω – угловая частота колебаний пластины; l – характеристический размер пластины (ширина или длина для прямоугольной пластины, радиус для круглой пластины и т. д.); h_0 – первоначальный зазор между пластиной и стенкой.

3.3.1. Линейное уравнение Рейнольдса для «сжимаемого» газа

Если полагать $h = h_0 + \Delta h$ и $P = P_0 + p$, то для небольших смещений $\Delta h \ll h_0$, $p \ll P_0$, и уравнение (3.2) можно линеаризовать:

$$P_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{12\mu}{h_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{12\mu P_0}{h_0^3} \frac{dh}{dt}. \quad (3.4)$$

При очень больших значениях σ слой оказывается полностью сжатым и газ не покидает зазор. Типичный пример – это поршень, двигающийся внутри цилиндра, или колебания с очень высокой частотой.

3.3.2. Линейное уравнение Рейнольдса для «несжимаемого» газа

Для очень малых значений σ , например при низких частотах колебаний, газовый слой имеет достаточно времени, чтобы выйти из зазора.

При этом $p/P_0 \ll \Delta h/h_0$ и газ практически не сжимается, при этом уравнение (3.4) заметно упрощается:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h_0^3} \frac{dh}{dt}. \quad (3.5)$$

3.4. Демпфирование со сдавливающимся слоем для параллельных пластин

Для двух параллельных пластин, изображённых на рис. 3.5, *а*, сила сопротивления, возникающая при движении подвижной пластины навстречу неподвижной, вызвана ростом давления между этими двумя пластинами (рис. 3.5, *б*).

Демпфирование в данном случае включает в себя два процесса: во-первых, выдавливание воздуха при сближении пластин и засасывание его в область между пластинами при удалении их друг от друга; во-вторых, сжатие воздушного слоя между пластинами.

Поэтому вводят *вязкую демпфирующую силу и упругую демпфирующую силу*. Если пластина колеблется с очень низкой частотой, то

слой газа практически не сжимается, а выходит наружу, в этом случае доминирует вязкая демпфирующая сила.

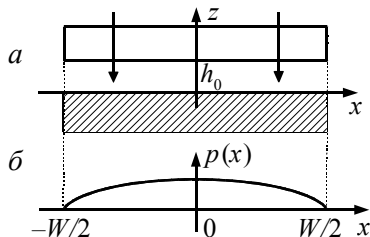


Рис. 3.5. Демпфирование со сдвливающимся слоем (а) и демпфирующее давление (б)

С другой стороны, если пластина колеблется с очень высокой частотой, то слой газа сжимается и не успевает выходить наружу, в данном случае доминирует упругая демпфирующая сила.

3.4.1. Демпфирование в случае «сжимаемого газа»

На рис. 3.6 представлены зависимости упругой демпфирующей силы и вязкой демпфирующей силы от коэффициента сдвливания σ для узких прямоугольных пластин. Видно, что кривые пересекаются при определённом коэффициенте сдвливания σ_c , соответствующем критической частоте ω_c . При критической частоте вязкая и упругая демпфирующие силы становятся равными. При частотах, меньших ω_c , доминирует вязкая демпфирующая сила, а при частотах, больших ω_c , доминирует упругая демпфирующая сила.

Рассмотрим частные случаи решения уравнения (3.4): для прямоугольной и квадратной пластин.

1. Узкие прямоугольные пластины ($L \gg W$)

Будем полагать, что расстояние между пластинами в (3.4) будет изменяться по гармоническому закону

$$h = h_0 (1 + \varepsilon \sin(\omega t)),$$

где $\varepsilon \ll 1$. В случае с тонкими прямоугольными пластинами коэффициент сдвливания, соответствующий критической частоте

$$\omega_c = \frac{\pi^2 h_0^2 P_0}{12 \mu W^2},$$

равен $\sigma_c = \pi^2 \approx 9,8696$. Выражение для коэффициента вязкого демпфирования:

$$c_d = \frac{96\mu L W^3}{\pi^4 h_0^3} = \frac{8\sigma P_0 A}{\pi^4 h_0 \omega},$$

где L и W – длина и ширина пластин, соответственно $A = LW$.

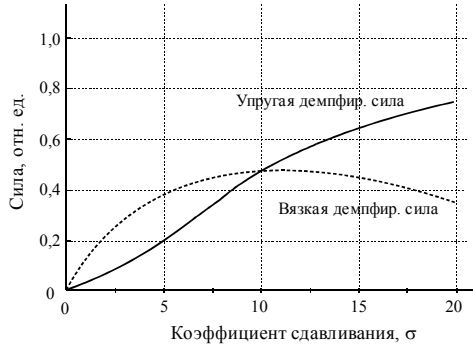


Рис. 3.6. Зависимости упругой демпфирующей силы и вязкой демпфирующей силы от коэффициента сжатия для узких прямоугольных пластин

Выражение для коэффициента упругой демпфирующей силы:

$$k_e = \frac{8LWP_0}{\pi^2 h_0} = \frac{8P_0 A}{\pi^2 h_0}.$$

2. Прямоугольные пластины ($L \geq W$)

В случае прямоугольных пластин критический коэффициент сжатия

$$\sigma_c = \pi^2 (1 + 1/\eta^2),$$

где $\eta = L/W$. Расчёты в случае прямоугольных пластин, когда $L \geq W$, приводят к выражениям для коэффициента вязкого демпфирования

$$c_d(\sigma) = \frac{64\sigma P_0 A}{\pi^6 h_0 \omega} \sum_{m,n \text{ нечёт}} \frac{m^2 + (n/\eta)^2}{(mn)^2 \left\{ \left[m^2 + (n/\eta)^2 \right]^2 + \sigma^2 / \pi^4 \right\}}$$

и коэффициента упругого демпфирования

$$k_e(\sigma) = \frac{64\sigma^2 P_0 A}{\pi^8 h_0} \sum_{m,n \text{ нечёт}} \frac{1}{(mn)^2 \left\{ \left[m^2 + (n/\eta)^2 \right]^2 + \sigma^2 / \pi^4 \right\}},$$

где $A = LW$ – площадь пластины.

3.4.2. Влияние демпфирования со сдвливающимся слоем на динамические характеристики колеблющихся систем

Если учитывать вязкое и упругое демпфирование, то уравнение, описывающее вынужденные колебания (1.25), принимает вид

$$m\ddot{x} + c_d \dot{x} + (k_0 + k_e)x = F_0 \sin(\omega t),$$

где $F_0 \sin(\omega t)$ – внешняя сила с угловой частотой ω . Амплитуда x_0 и сдвиг фаз φ установившихся колебаний системы $x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$ будут определяться выражениями:

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + c_d^2 \omega^2 / m^2}},$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{c_d \omega}{m(\omega_a^2 - \omega^2)} \right),$$

здесь $\omega_a^2 = (k_0 + k_e)/m = \omega_0^2 + k_e/m$. В данном случае частота ω_a является функцией частоты ω , поскольку коэффициент упругой демпфирующей силы $k_e = f(\omega)$.

3.4.3. Демпфирование в случае «несжимаемого газа»

Чаще всего на практике больший интерес представляет низкочастотный характер колебательной системы, поэтому важной здесь является *вязкая демпфирующая сила*. Далее рассмотрим частные решения уравнения (3.5).

1. Длинная прямоугольная пластина ($L \gg W$) (рис. 3.7).

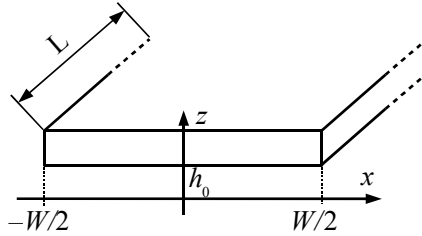


Рис. 3.7. Демпфирование с «несжимаемым газом» для длинной прямоугольной пластины

Уравнение (3.5) в данном случае имеет вид

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{12\mu}{h_0^3} \frac{dh}{dt}, \quad (3.6)$$

граничные условия в нашем случае $p(\pm W/2) = 0$.

Общее решение уравнения (3.6)

$$p(x, t) = \frac{6\mu}{h_0^3} \frac{dh}{dt} x^2 + c_1 x + c_2.$$

Используя граничные условия, получаем частное решение

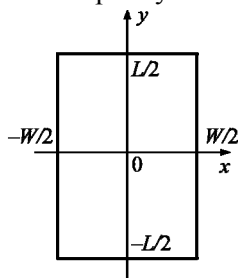
$$p(x, t) = \frac{6\mu}{h_0^3} \left(x^2 - \frac{W^2}{4} \right) \frac{dh}{dt}.$$

Сила затухания

$$F_d = L \int_{-W/2}^{W/2} p(x) dx = -\frac{\mu L W^3}{h_0^3} \dot{h}.$$

Откуда коэффициент демпфирующей силы $c_d = \mu L W^3 / h_0^3$.

2. Прямоугольная пластина ($L \geq W$) (рис. 3.8).



Граничные условия для (3.5) будут $p(\pm W/2, y) = 0$, $p(x, \pm L/2) = 0$. В результате решения уравнения коэффициент демпфирующей силы определяется как

$$c_d = \frac{\mu L W^3}{h_0^3} \beta(\eta'),$$

Рис. 3.8. Демпфирование с «несжимаемым газом» для прямоугольной пластины

где $\eta' = W/L$; $\beta(\eta') = 1 - \frac{192}{\pi^5} \eta' \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \left(\frac{\pi n}{2\eta'} \right)$ – поправочный коэффициент.

Зависимость $\beta(\eta')$ показана на рис. 3.9. Для бесконечно длинной и узкой полоски $\beta(0) = 1$, $L \gg W$. Для квадратной пластины $\beta(1) = 0,42$, $L = W$.

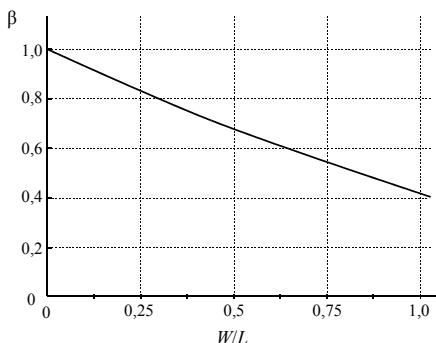


Рис. 3.9. Зависимость поправочного коэффициента β от аспектного отношения W/L

3. Круглая пластина (рис. 3.10)

Уравнение Рейнольдса (3.5) в полярной системе координат будет иметь вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} p(r) \right) = \frac{12\mu}{h_0^3} \frac{dh}{dt}. \quad (3.7)$$

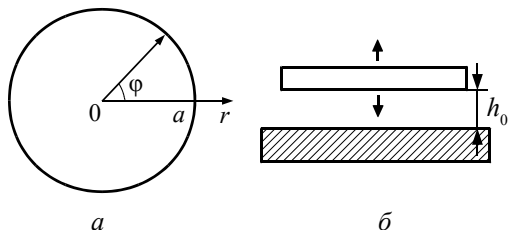


Рис. 3.10. Демпфирование с «несжимаемым газом» для круглой пластины:

a – вид сверху; b – вид сбоку

Граничные условия в данном случае $p(a) = 0$, $dp(0)/dr = 0$, где a – радиус пластины. Решение данного уравнения получается следующим:

$$p(r) = -\frac{3\mu}{h_0^3} (a^2 - r^2) \frac{dh}{dt}.$$

Найдём силу затухания

$$F_d = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = -\frac{3\pi}{2h_0^3} \mu a^4 \frac{dh}{dt},$$

откуда коэффициент демпфирующей силы $c_d = 3\pi\mu a^4 / (2h_0^3)$.

4. Кольцевидная пластина (рис. 3.11).

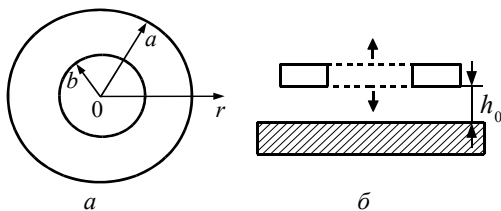


Рис. 3.11. Демпфирование с «несжимаемым газом» для кольцевидной пластины:

a – вид сверху; b – вид сбоку

Для кольцевидной пластины уравнение Рейнольдса такое же, как и для круглой, отличаются лишь граничные условия $p(a) = p(b) = 0$, где a и b – внешний и внутренний радиусы.

В результате решения уравнения (3.7) с заданными граничными условиями получается следующий коэффициент демпфирующей силы:

$$c_d = \frac{3\pi\mu a^4}{2h_0^3} g(\gamma),$$

где $\gamma = b/a$, $g(\gamma) = 1 - \gamma^4 + (1 - \gamma^2)^2 / \ln(\gamma)$.

5. Перфорированная бесконечно тонкая пластина (рис. 3.12).

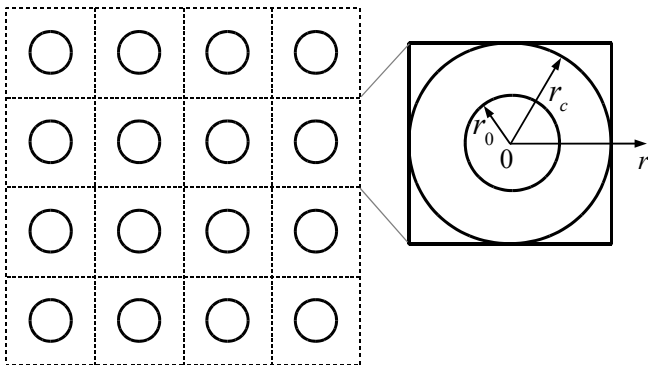


Рис. 3.12. Схематическое изображение перфорированной бесконечно тонкой пластины и одной из ячеек

Для того чтобы уменьшить влияние демпфирования, например в акселерометрах, микрофонах, микрозеркала, движущиеся пластины иногда перфорируют.

Для анализа примем следующие условия: а) отверстия круглые и равномерно распределены по пластине; б) размеры пластины гораздо больше, чем размеры одной ячейки, т. е. площадь пластины квазibesконечная; в) диаметр отверстия гораздо больше, чем толщина пластины, т. е. пластина бесконечно тонкая.

В результате решения уравнения Рейнольдса для «несжимаемого газа» получается следующий коэффициент демпфирующей силы:

$$c_d = \frac{3\mu A^2}{2\pi h_0^3 N} k(\theta),$$

где A – общая площадь пластины (включая площадь отверстий); N – количество отверстий, $\theta = r_0/r_c$, $k(\theta) = 4\theta^2 - \theta^4 - 4\ln(\theta) - 3$, r_0 – радиус одного отверстия.

Для пластины с конечной площадью необходимо вводить поправку, для того чтобы учесть выход воздуха из зазора через края.

Поэтому, например, для прямоугольной перфорированной пластины длиной L и шириной W результирующий коэффициент демпфирующей силы

$$c_d = \frac{c_d^1 c_d^2}{c_d^1 + c_d^2},$$

где $c_d^1 = \mu L W^3 \beta(\eta')/h_0^3$ – коэффициент демпфирования, учитывающий форму пластины, а $c_d^2 = 3\mu A^2 k(\theta)/(2\pi h_0^3 N)$ – коэффициент демпфирования, учитывающий характер перфорации.

Данная модель подходит для тонких перфорированных пластин. С развитием технологии МЭМС стало возможным перфорировать толстые пластины с помощью глубокого реактивного ионного травления. Для толстых перфорированных пластин нужно учитывать сопротивление воздуха, проходящего через отверстия, поэтому необходимо решать модифицированное уравнение Рейнольдса, что является более сложным и порой требует применения численных методов расчёта, таких как метод конечных элементов.

3.4.4. Влияние амплитуды колебаний пластины на коэффициент демпфирования

В рассмотренных случаях амплитуда движения считалась небольшой, но часто амплитуда может быть сравнимой с номинальным зазором. Тогда необходимо учитывать амплитуду колебаний.

Если пластина колеблется по закону $h = h_0(1 + \varepsilon \sin(\omega t))$, то соответствующие выражения для коэффициента демпфирования нужно умножать на функцию $f_d(\varepsilon)$, зависящую от амплитуды колебаний ε :

$$f_d(\varepsilon) = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Например, для бесконечно длинной прямоугольной пластины коэффициент демпфирующей силы будет

$$c_d = \frac{\mu L W^3}{h_0^3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

3.5. Демпфирование со скользящим слоем

Очень часто встречаются МЭМС-устройства с тангенциальным (латеральным) движением, т. е. когда движение происходит параллельно подложки. Поскольку размеры пластины обычно гораздо больше ее толщины и зазора между подложкой и пластиной, то вязкое демпфирование окружающего воздуха является причиной рассеивания энергии колебательной системы.

Для исследования демпфирования со скользящим слоем используется механическая модель, изображённая на рис. 3.13, состоящая из квазibesконечной пластины, погружённой в несжимаемую вязкую среду, пластина движется в латеральном направлении, при этом расстояние между подложкой и пластиной остаётся постоянным.



Рис. 3.13. Схематическое изображение модели демпфирования со скользящим слоем

3.5.1. Базовые уравнения

Основным уравнением, описывающим стационарный поток несжимаемой среды, является уравнение Навье–Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.8)$$

где ρ – плотность среды; $\vec{F}$ – приложенная сила; p – давление среды; μ – коэффициент вязкости; $\vec{v}$ – скорость среды, где $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$,

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ – градиент,}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

Если движение пластины происходит в x -направлении, то (3.8) преобразуется в

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u \right] = \\ & = F_x - \frac{\partial}{\partial x} p + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если полагать, что пластина расположена в плоскости x - y и имеет бесконечные размеры, движется в x -направлении, при этом отсутствуют внешние силы и градиенты давления, тогда имеем $u \gg v, w$

$$\text{и } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Таким образом, уравнение (3.9) упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.10)$$

Для квазибесконечной пластины (т. е. размеры пластины гораздо больше, чем расстояние между пластиной и подложкой) вторым членом уравнения (3.10) можно пренебречь, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.11)$$

Условия применимости уравнения (3.11) следующие.

1. Скорость $u = 0$ у поверхности подложки и равна скорости движущейся пластины у поверхности пластины.

2. Если пластина колеблется по закону $x(t) = a_0 \sin(\omega t)$, то $a_0 \ll l$, где l – характерный размер пластины.

3. $l \gg 2d^2 a_0 / \delta^2$, где $\delta = \sqrt{2\mu / (\rho\omega)}$ – эффективная длина затухания, расстояние в направлении оси z , на котором скорость движения текучей среды уменьшается в e раз относительно скорости пластины.

В случае если $d \ll \delta$, то уравнение (3.11) упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.12)$$

3.5.2. Модели демпфирования

При моделировании данного вида демпфирования используются две модели: Куэтта и Стокса. Различие между этими двумя моделями состоит в различных профилях скорости.

Модель Куэтта

Если полагать, что пластина колеблется с достаточно низкой частотой, т. е. $d \ll \delta$, то для анализа используется уравнение (3.12).

Граничные условия для скорости пластины в данном случае

$$u(z=0) = u_0 \cos(\omega t), \quad u(z=d) = 0. \quad (3.13)$$

Согласно (3.12) и (3.13) профиль скорости будет линейным (рис. 3.14)

$$u(z) = u(0) \left(1 - \frac{z}{d} \right),$$

где $u(0)$ – скорость движения пластины. Сдвигающая сила сопротивления, приложенная к пластине,

$$F_{Cd} = -\mu \frac{u(0)}{d} A,$$

где A – площадь пластины.

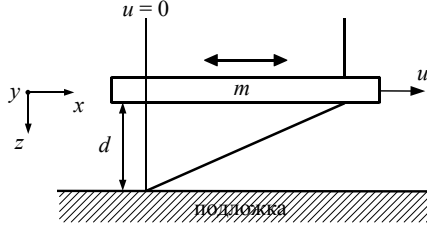


Рис. 3.14. Профиль скорости текучей среды для модели Куэтта

Согласно модели Куэтта градиент скорости над пластиной равен нулю. Рассеянная за один цикл энергия равна

$$\Delta E_{Cd} = \int_0^T A \mu \frac{u(0)}{d} u(0) dt = \int_0^{2\pi} A \mu \frac{u_0^2 \cos^2(\omega t)}{d} \frac{1}{\omega} d(\omega t) = \frac{\pi}{\omega} u_0^2 \frac{\mu}{d} A.$$

Согласно определению добротности $Q = 2\pi E / \Delta E$, где $E = m \dot{x}^2 / 2 = m u_0^2 / 2$, добротность для модели Куэтта

$$Q_{Cd} = \frac{\pi m u_0^2}{\Delta E_{Cd}} = \frac{m \omega d}{\mu A} = \frac{\rho H \omega d}{\mu},$$

где $m = H \rho A$; H – толщина пластины. Таким образом, Q_{Cd} не зависит от площади пластины A .

Модель Стокса

В случае если расстояние между подложкой и пластиной достаточно большое, то модель Куэтта оказывается неверной, тогда используется модель Стокса, основанная на решении уравнения (3.11).

В результате решения уравнения (3.11) с граничными условиями (3.13) получается профиль скорости с быстро ослабевающей амплитудой и сдвигом фазы относительно движения пластины (рис. 3.15):

$$u(z) = u_0 \frac{-e^{-\tilde{d} + \tilde{z}} \cos(\omega t + \tilde{z} - \tilde{d} - \theta) + e^{\tilde{d} - \tilde{z}} \cos(\omega t - \tilde{z} + \tilde{d} - \theta)}{\sqrt{e^{2\tilde{d}} + e^{-2\tilde{d}} - 2 \cos(2\tilde{d})}}, \quad (3.14)$$

где $\tilde{d} \equiv d / \delta$, $\tilde{z} \equiv z / \delta$ и θ – сдвиг фазы относительно колебаний пластины $u(0) = u_0 \cos \omega t$.

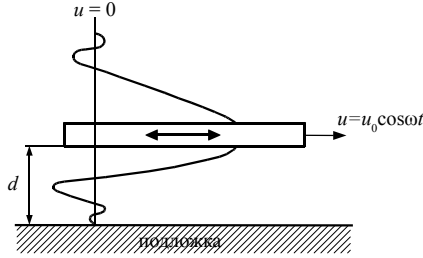


Рис. 3.15. Профиль скорости текучей среды для модели Стокса

Выражение для θ

$$\theta = \arctg \frac{(e^{\tilde{d}} + e^{-\tilde{d}}) \sin \tilde{d}}{(e^{\tilde{d}} - e^{-\tilde{d}}) \cos \tilde{d}}. \quad (3.15)$$

Таким образом, демпфирующая сила, действующая на пластину,

$$F_{Sd} = A\mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A\mu u_0}{\delta \sqrt{e^{2\tilde{d}} + e^{-2\tilde{d}} - 2 \cos(2\tilde{d})}} \left[-e^{-\tilde{d}} \cos(\omega t - \tilde{d} - \theta) + \right. \\ \left. + e^{-\tilde{d}} \sin(\omega t - \tilde{d} - \theta) - e^{\tilde{d}} \cos(\omega t + \tilde{d} - \theta) + e^{\tilde{d}} \sin(\omega t + \tilde{d} - \theta) \right]. \quad (3.16)$$

Рассеянная за один цикл колебаний энергия равна

$$\Delta E_{Sd} = \int_0^T F_{Sd} u_0 dt = \frac{\pi A \mu u_0^2}{\omega \delta} \frac{\text{sh}(2\tilde{d}) + \sin(2\tilde{d})}{\text{ch}(2\tilde{d}) - \cos(2\tilde{d})}. \quad (3.17)$$

Тогда добротность системы

$$Q_{Sd} = \frac{m\omega\delta}{\mu A} \frac{\text{ch}(2\tilde{d}) - \cos(2\tilde{d})}{\text{sh}(2\tilde{d}) + \sin(2\tilde{d})}. \quad (3.18)$$

В случае если $d \ll \delta$, то $Q_{Sd} = Q_{Cd}$, т.е. добротности, найденные с использованием моделей Стокса и Куэтта, совпадают.

Если же $d \gg \delta$, то добротность по модели Стокса

$$Q_{S\infty} = \frac{m\omega\delta}{\mu A} = \frac{\rho H \omega \delta}{\mu}.$$

При $d \gg \delta$ влияние подложки на пластину оказывается несущественным, и пластина может считаться изолированным объектом в текучей среде.

Аналитические расчёты, представленные выше, применимы лишь для достаточно простых геометрий конструкций. Реальные же МЭМС-структуры обычно слишком сложные, для того чтобы использовать аналитические методы расчёта, поэтому для более точного расчёта используют численные методы, например метод конечных элементов. Тем не менее аналитические расчёты являются стартовой точкой для дальнейших расчётов численными методами.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Если эффективный диаметр молекулы водорода $d = 2,25 \cdot 10^{-4}$ мкм, рассчитать коэффициент вязкости водорода при 0 °С.

3.2. Рассчитать среднюю длину свободного пробега λ атомов аргона ($d = 360$ пм) и атомов гелия ($d = 190$ пм) при атмосферном давлении и комнатной температуре.

3.3. МЭМС-акселерометр имеет добротность, ограниченную: свойствами материала $Q_{\text{струк}} = 50\,000$, конструкцией $Q_{\text{конст}} = 1000$ и воздушным демпфированием $Q_{\text{возд}} = 40$. Рассчитать общую добротность системы.

3.4. Имеется кремниевая квадратная пластина размером 100×100 мкм², толщина пластины 2,5 мкм. Устройство находится в атмосфере воздуха с коэффициентом вязкости $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Зазор между пластиной и подложкой составляет 2 мкм, пластина колеблется с частотой 1000 Гц. Рассчитать добротность колебаний при нормальном и латеральном движении пластины, если коэффициент жёсткости в обоих случаях 1 Н/м.

3.5. Как изменится добротность при латеральном движении в предыдущей задаче, если зазор между пластиной и подложкой увеличить в 50 раз. Какую модель демпфирования при этом нужно использовать.

3.6. Используя условия задачи 3.4, определить, как изменится добротность для нормальных колебаний, если пластину перфорировать, сделав в ней 25 равномерно распределённых по площади отверстий диаметром 10 мкм, считать пластину бесконечно тонкой.

4. Электростатические преобразователи

Электростатические силы редко используются для перемещения макроскопических машинных механизмов, так как эти силы слишком малы, для того чтобы сместить или поднять механические части, несмотря на очень высокие прикладываемые напряжения. Однако микроустройства имеют большие отношения площади поверхности к объёму, их массы обычно малы, что делает электростатические силы, которые являются поверхностными силами, очень привлекательными для использования в МЭМС.

4.1. Достоинства и недостатки электростатических преобразователей

Отметим достоинства и недостатки электростатических преобразователей.

Достоинства:

- 1) простота изготовления: совместимость с интегральной КМОП-технологией, не требуются дорогостоящие материалы, и, таким образом, низкая стоимость производства;
- 2) низкая потребляемая мощность за счёт использования схем питания с источниками напряжения вместо источников тока;
- 3) высокая чувствительность и быстроедействие, например, время переключения микрозеркала составляет менее 20 мкс, что достаточно для получения 8-битного изображения;
- 4) отсутствие температурной зависимости характеристик приборов;
- 5) малые габариты устройств.

Недостатки:

- 1) малые значения действующих сил и изменений ёмкости, например, если типичная ёмкость ёмкостного сенсора порядка пФ, то необходимо регистрировать изменения ёмкости порядка фФ, что предъявляет высокие требования к электронике;

2) нестабильность из-за возможного эффекта схлопывания (смыкания, pull-in effect);

3) для работы актюаторов в статическом режиме необходимы достаточно высокие напряжения. Например, для поворота микрзеркала на $\pm 7,5^\circ$ нужно прикладывать напряжения около 25 В. В линейном электростатическом актюаторе для перемещений в десятки микрометров необходимы напряжения около 300 В;

4) чувствительность к загрязнениям (пыль) и влажности, т. е. необходима корпусировка устройства.

4.2. Принцип функционирования

В основе работы емкостных сенсоров и электростатических актюаторов лежит конденсатор переменной ёмкости:

– если из-за внешнего воздействия расстояние между двумя проводниками изменяется, то изменяется и электрическая ёмкость между ними. На этом принципе основана работа емкостных сенсоров;

– с другой стороны, если приложить напряжение между двумя проводниками, то между ними возникает электростатическая сила притяжения. На этом принципе работают электростатические актюаторы.

4.3. Электростатические силы в МЭМС

Электростатические силы в МЭМС имеют следующие особенности, которые очень важны при анализе и проектировании устройств:

– для микроструктур электростатическая сила сравнима с силой упругости механических элементов и демпфирующей силой окружающего воздуха, поэтому все эти силы во многих случаях необходимо учитывать одновременно;

– электростатическая сила является нелинейной в зависимости от расстояния, поэтому совместное действие электростатической и упругой сил может вызывать нестабильность;

– с увеличением расстояния между элементами устройства увеличивается и влияние краевых эффектов, которые во многих случаях желательно учитывать.

4.3.1. Нормальная составляющая электростатической силы

Рассмотрим электростатический актюатор, состоящий из батарейки и плоскопараллельного конденсатора, одна из обкладок которого подвижна по нормали к плоскости устройства (рис. 4.1).

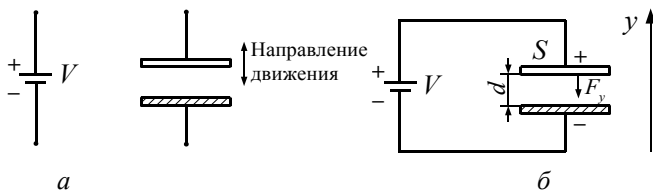


Рис. 4.1. Плоскопараллельный конденсатор и батарейка до (а) и после (б) подключения

Ёмкость переменного конденсатора $C = \epsilon_0 \epsilon S / d$, где S – площадь перекрытия электродов; d – межэлектродный зазор; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость между электродами (для воздуха $\epsilon \approx 1$), $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Будем полагать, что энергия батарейки в первоначальном состоянии равна E_0 , а энергия конденсатора равна нулю.

Затем конденсатор подключается к батарейке. Если ЭДС источника равна V , то заряд, запасённый в конденсаторе, будет равен $Q_C = CV$. Энергия, запасённая в конденсаторе, равна $E_C = CV^2 / 2$. Из-за зарядки конденсатора энергия батарейки становится равной $E_B = E_0 - Q_C V = E_0 - CV^2$.

Таким образом, энергия системы батарейка–конденсатор становится равной

$$E = E_B + E_C = E_0 - \frac{CV^2}{2} = E_0 - \frac{\epsilon_0 \epsilon S V^2}{2d}. \quad (4.1)$$

Сила, приложенная к подвижному электроду, равна

$$F_y^V = -\frac{\partial E}{\partial d} = -\frac{\epsilon_0 \epsilon S V^2}{2d^2}. \quad (4.2)$$

Отрицательный знак в выражении для F_y^V означает, что сила притягивающая. Видно, что сила притяжения между двумя параллельными пластинами остаётся постоянной при одновременном уменьшении размеров пластины и межэлектродного зазора в одно и то же число раз. Однако при уменьшении только зазора d сила F_y^V возрастает квадратично, что очень выгодно при миниатюризации.

4.3.2. Латеральная (тангенциальная) составляющая электростатической силы

Также рассмотрим систему, состоящую из батарейки и плоскопараллельного конденсатора. Но теперь межэлектродный зазор d не изменяется, а одна из пластин (в данном случае верхняя) подвижна в латеральном (тангенциальном) направлении (рис. 4.2).

Если полагать, что размеры пластины гораздо больше, чем зазор d , то ёмкость между двумя пластинами равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(b-x)}{d},$$

где a и b – длина и ширина пластины соответственно; x – смещение электродов.

Аналогично энергия батарейки до подключения источника равна E_0 , энергия конденсатора равна нулю. При подключении батарейки к конденсатору заряд, запасённый в нём, становится $Q_C = CV$, а энергия

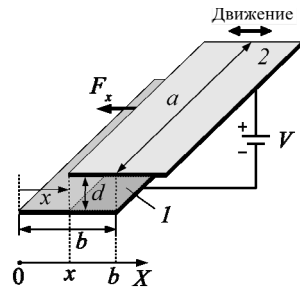


Рис. 4.2. Латеральная составляющая электростатической силы в плоскопараллельном актуаторе после подключения к батарейке

$$E_C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(b-x)}{2d} V^2 = \frac{CV^2}{2}. \quad (4.3)$$

В результате энергия системы становится

$$E = E_B + E_C = E_0 - \frac{CV^2}{2} = E_0 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(b-x)V^2}{2d}. \quad (4.4)$$

Сила, приложенная к подвижному электроду,

$$F_x^V = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon a V^2}{2d}. \quad (4.5)$$

Отрицательный знак в выражении для F_x^V означает, что латеральная составляющая электростатической силы является притягивающей, и она стремится увеличить площадь перекрытия электродов.

Необходимо отметить, что F_x^V не зависит от смещения электродов x и ширины электродов b , также она остаётся постоянной при одновременном изменении размеров электродов a и b и межэлектродного зазора d .

Сравним нормальную и латеральную составляющие электростатической силы при $S = a(b - x)$, поделив F_y^V на F_x^V :

$$\left| \frac{F_y^V}{F_x^V} \right| = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a (b - x) V^2}{2d^2} \frac{2d}{\varepsilon_0 \varepsilon a V^2} = \frac{b - x}{d}.$$

В МЭМС обычно $(b - x) > d$, поэтому практически всегда нормальная составляющая электростатической силы больше латеральной: $|F_y| > |F_x|$.

4.3.3. Электростатические силы при постоянном заряде

Если зарядить плоскопараллельный актюатор (с изменением межэлектродного зазора либо с изменением площади перекрытия электродов) от батарейки до напряжения V , а затем отключить батарейку, то пластины будут притягиваться друг к другу, так как на них есть заряд.

Поскольку теперь заряд Q остаётся постоянным, а батарейка оказывается отключённой, то энергия системы равна $E = E_C = Q^2 / (2C)$.

В результате нормальная составляющая электростатической силы

$$F_y^Q = -\frac{\partial E}{\partial d} = -\frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}, \quad (4.6)$$

тогда как латеральная составляющая электростатической силы

$$F_x^Q = -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon a (b-x)^2}, \quad (4.7)$$

где $x < b$.

Проанализируем выражения для нормальной составляющей электростатической силы при $V = \text{const}$ и $Q = \text{const}$. Видно, что $F_y^V \sim 1/d^2$, тогда как F_y^Q не зависит от d .

Сделаем то же самое для латеральной составляющей электростатической силы при $V = \text{const}$ и $Q = \text{const}$. Видно, что F_x^V не зависит от перекрытия электродов $(b-x)$, в то время как $F_x^Q \sim 1/(b-x)^2$.

Использование электростатических актюаторов в режимах постоянного напряжения V или постоянного заряда Q имеет свои преимущества и недостатки, однако в силу того что схему с постоянным зарядом Q гораздо сложнее реализовать, поскольку нужно контролировать заряд и его утечки, в большинстве электростатических актюаторов используется режим постоянного напряжения V .

4.3.4. Влияние краевых эффектов на электрическую ёмкость и электростатические силы

Электрическая ёмкость

В проведённом выше анализе мы предполагали, что пластины переменного конденсатора параллельны и размеры пластин гораздо больше, чем расстояние между ними (так называемая модель идеального плоского конденсатора (ИПК)). В рамках модели ИПК ёмкость плоскопараллельного конденсатора для конструкций с изменением межэлектродного зазора d и изменением перекрытия между электродами x может быть найдена по формулам

$$C(d) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \text{ и } C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a (b-x)}{d}. \quad (4.8)$$

На практике же размеры электродов в МЭМС часто соизмеримы с расстоянием между ними, и ёмкость уже не может быть найдена с достаточной точностью. Из-за влияния краевых эффектов ёмкость оказывается больше, чем ёмкость ИПК (рис. 4.3).

Вообще говоря, точное значение электрической ёмкости может быть найдено только численными методами (метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ), метод площадок (МП) и др.), основанными на решении уравнения Пуассона $\nabla^2 V = 4\pi\rho$, где V – потенциал электрического поля; ρ – плотность заряда при соответствующих граничных условиях. Тем не менее при некоторых допущениях можно получить аналитические выражения для расчёта ёмкости с

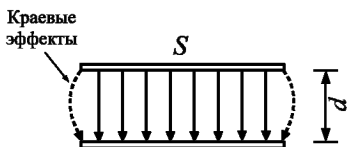
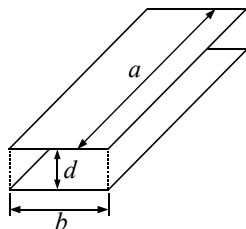


Рис. 4.3. Силовые линии электрического поля с учётом влияния краевых эффектов

учётом краевых эффектов. Рассмотрим следующие случаи.

1. Ёмкость плоскопараллельного конденсатора с бесконечно тонкими электродами (без учёта их толщины) с длиной пластин a , шириной b и межэлектродным зазором d (рис. 4.4).

Рис. 4.4. Схематическое изображение плоскопараллельного конденсатора при $a \gg b$



Для этого случая в литературе имеется выражение для расчёта ёмкости:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a b}{d} \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left[1 + \theta_1 \ln(2\pi) + \ln \left(\frac{b}{d} + \theta_2 \right) \right] \right\}, \text{ где } a \gg b, \quad (4.9)$$

полученное Пальмером в 1937 г. методом конформных преобразований, позже улучшенное с помощью использования поправок θ_i . Отметим, что данная формула учитывает конечную ширину электродов b , но не учитывает длину a . Для (4.9) при $\theta_1 = 1,03$ и $\theta_2 = 0,75$ погрешность расчётов $\delta \leq 1\%$ при $b/d \geq 0,4$.

Для расчёта ёмкости при $b/d < 1$ в литературе имеется выражение

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi a}{\ln(4d/b)}. \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) позволяет рассчитать ёмкость с погрешностью $\delta \leq 10\%$ при отношении $b/d \leq 1,13$.

2. Для того чтобы учесть не только конечную ширину электродов b , но и их конечную длину a , используется так называемая двумерная формула Пальмера:

$$C_1^{2D} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a b}{d} \left[1 + \frac{d}{\pi b} \left(1 + \ln \left(2\pi \left(\frac{b}{d} + c_1 \right) \right) \right) \right] + \frac{d}{\pi a} \left(1 + \ln \left(2\pi \left(\frac{a}{d} + c_2 \right) \right) \right) \right], \quad (4.11)$$

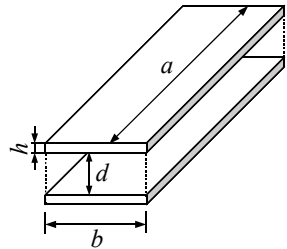
где $a \approx b$, а $c_1 = 0,75(a+b)/a$ и $c_2 = 0,75(a+b)/b$ – поправки для улучшения точности расчётов. В случае, когда $a = b$ погрешность расчётов $\delta < 5\%$ при $b/d \geq 0,4$.

3. Для учёта толщины электродов (рис. 4.5) в литературе имеется так называемая формула Пальмера–Янга:

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a b}{d} \left[1 + \frac{d}{\pi b} \left(1 + \ln \left(2\pi \frac{b}{d} \right) \right) \right] + \frac{d}{\pi b} \ln \left(1 + \frac{2h}{d} + 2\sqrt{\frac{h}{d} + \frac{h^2}{d^2}} \right) \right], \quad (4.12)$$

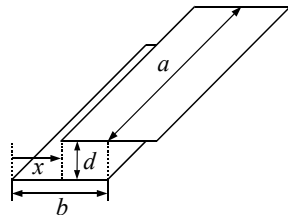
которая, однако, не учитывает длину электродов a , т. е. применима лишь для $a \gg b$.

Рис. 4.5. Схематическое изображение плоскопараллельного конденсатора при $a \gg b$ с учётом толщины h



4. Ёмкость плоскопараллельного конденсатора при смещении электродов относительно друг друга (рис. 4.6).

Рис. 4.6. Схематическое изображение плоскопараллельного конденсатора при $a \gg b$ со смещением x



В рамках модели ИПК ёмкость в данном случае

$$C_{\text{ИПК}}^* = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(b-x)}{d}, \text{ где } x \leq b.$$

В литературе имеется аналитическое выражение для оценки ёмкости с учётом краевых эффектов при смещении электродов:

$$C^* = C' \left[1 - \theta \left\{ \frac{|x|}{b} - \frac{d}{b} \left(1 - \exp \left(-\frac{b}{d} \frac{|x|}{b} \right) \right) \right\} \right], \quad (4.13)$$

где

$$C' = C_0 \left\{ 1 + \frac{d}{\pi b} \left(1 + \ln \left[2\pi \left(\frac{b}{d} + 0,75 \right) \right] \right) \right\};$$

$$\theta = 1 - 1,324 / \left[1 + 1,112(b/d)^{0,695} \right] \text{ для } a \gg b, \text{ и}$$

$$C' = C_0 \left\{ 1 + \frac{2d}{\pi b} \left(1 + \ln \left[2\pi \left(\frac{b}{d} + 1,5 \right) \right] \right) \right\},$$

$$\theta = 1 - 1,247 / \left[1 + 0,611(b/d)^{0,784} \right] \text{ для } a = b, \quad C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon ab / d.$$

Формула (4.13) позволяет рассчитать ёмкость с погрешностью $\delta \leq 10\%$ при $0 \leq |x|/b \leq 1$ и $1 \leq b/d \leq 100$, что в принципе перекрывает диапазоны используемых в МЭМС соотношений. Выражение (4.13) не учитывает толщину электродов.

На рис. 4.7 представлена зависимость нормированной ёмкости C/C_0 от отношения межэлектродного зазора к ширине электродов d/b ,

рассчитанная численно для геометрии электродов, изображённой на рис. 4.4.

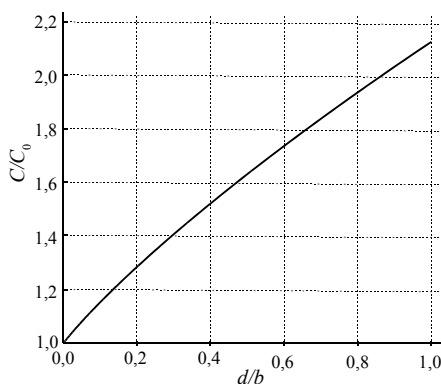


Рис. 4.7. Зависимость нормированной ёмкости C/C_0 от отношения межэлектродного зазора к ширине электродов d/b

Из рис. 4.7 видно, что при увеличении отношения d/b ёмкость, рассчитанная численно, стремительно увеличивается относительно ёмкости ИПК C_0 , и при $d/b = 1$ ёмкости будут отличаться уже более чем в два раза.

На рис. 4.8 представлены зависимости нормированной ёмкости $C/C_{\max}$ ($C_{\max}$ – ёмкость при $x=0$, т. е. без смещения) от относительного смещения x/b , рассчитанные численно для различных отношений b/d и с помощью формулы ИПК, для геометрии электродов, изображённой на рис. 4.6.

Из рис. 4.8 видно, что с уменьшением отношения b/d краевые эффекты проявляются всё сильнее, особенно это заметно при $x/b \geq 1$, когда ёмкость ИПК становится равной нулю, тогда как на самом деле ёмкость далеко не нулевая.

Электростатические силы

Краевые эффекты оказывают существенное влияние не только на значения и зависимости электрической ёмкости, но также и на электростатические силы.

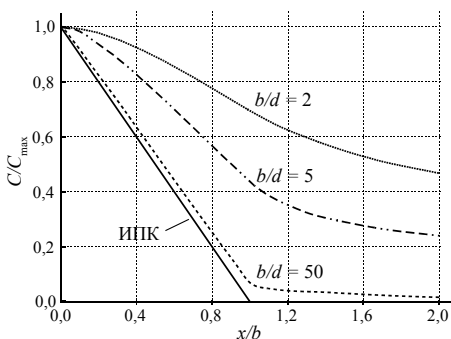
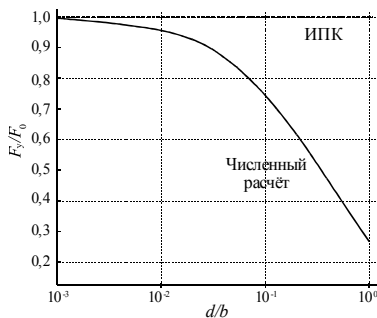


Рис. 4.8. Зависимости нормированной ёмкости $C/C_{\max}$ от отношения смещения x к ширине электродов b , рассчитанные численно для различных отношений b/d с помощью формулы ИПК

Наиболее существенное влияние краевые эффекты оказывают на значения нормальной составляющей электростатической силы при постоянном заряде и латеральной составляющей электростатической силы при постоянном напряжении.

На рис. 4.9 представлены зависимости нормированной нормальной составляющей электростатической силы F_y/F_0 от отношения d/b при постоянном заряде на обкладках конденсатора, где F_0 — значение силы при $d/b = 10^{-3}$.

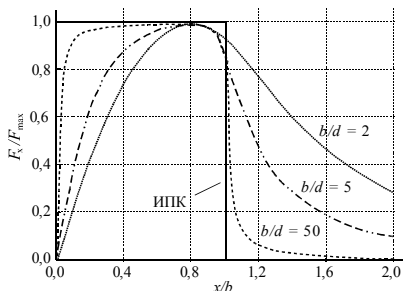
Рис. 4.9. Зависимости нормированной нормальной составляющей электростатической силы F_y/F_0 от отношения d/b при постоянном заряде на обкладках конденсатора. Сплошная линия — численный расчёт, пунктирная линия — расчёт по формуле ИПК



На графике сплошной линией изображён численный расчёт, учитывающий краевые эффекты, а пунктирной — расчёт по формуле ИПК (4.6), согласно которой сила F_y вообще не зависит от расстояния d , что на самом деле далеко не так. Это приводит к тому, что, например, при $d/b = 1$ ошибка в использовании формулы ИПК может превысить 270 %.

На рис. 4.10 представлены зависимости нормированной латеральной составляющей электростатической силы $F_x / F_{\max}$ от относительного смещения x/b при постоянном напряжении, где $F_{\max}$ – максимальное значение силы.

Рис. 4.10. Зависимости нормированной латеральной составляющей электростатической силы $F_x / F_{\max}$ от относительного смещения x/b при постоянном напряжении на обкладках конденсатора. Сплошная линия – расчёт по формуле ИПК, пунктирные линии – численный расчёт для различных отношений b/d



Из рис. 4.10 видно, что латеральная составляющая электростатической силы при постоянном напряжении, согласно модели ИПК, остаётся постоянной при смещении электродов, имеет ступенчатый вид и обращается в нуль при $x/b > 1$. Данный факт существенным образом отличается от действительности, поскольку из рис. 4.10 следует, что с учётом краевых эффектов электростатическая сила F_x при $x/b > 1$ плавно уменьшается и имеет отличные от нуля значения, особенно сильно краевые эффекты проявляются при уменьшении отношения b/d .

Из всего сказанного следует, что краевые эффекты могут существенным образом влиять на электрическую ёмкость и электростатические силы в МЭМС, поэтому при проектировании их практически всегда необходимо учитывать.

4.4. Плоскопараллельный актюатор

4.4.1. Эффект схлопывания (Pull-in effect)

Рассмотрим плоскопараллельный актюатор с массой, подвешенной на упругих подвесах с двух сторон так, что движение массы происходит только в нормальном направлении (рис. 4.11). Когда на электроды подаётся напряжение V , то электростатическая сила стремится сбли-

зить электроды, в то же время сила упругости стремится вернуть подвижный электрод в первоначальное положение.

Положение равновесия массы будет определяться равенством электростатической и упругой сил. Однако из-за нелинейности электростатической силы может возникать проблема неустойчивости.

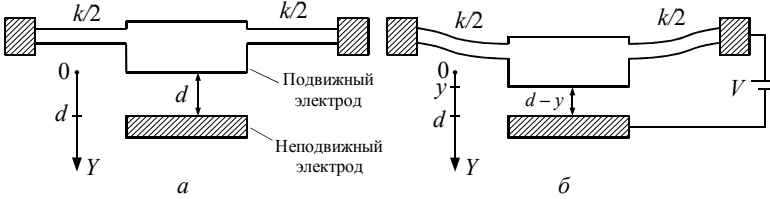


Рис. 4.11. Плоскопараллельный актюатор без электростатической силы (а) и с электростатической силой (б)

Если полагать, что смещение массы из положения равновесия равно y , то условие баланса сил будет

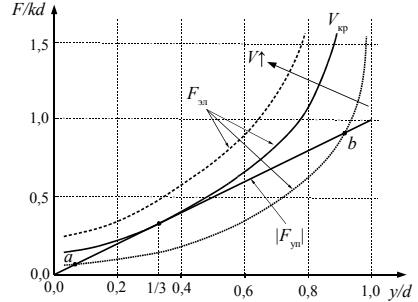
$$F = F_{\text{уп}} + F_{\text{эл}} = -ky + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2(d - y)^2} = 0, \quad (4.14)$$

где $F_{\text{уп}} = -ky$, $F_{\text{эл}} = \varepsilon_0 \varepsilon S V^2 / [2(d - y)^2]$.

Сначала исследуем уравнение (4.14) графически, силы $F_{\text{уп}}$ и $F_{\text{эл}}$ являются функциями от смещения y , где $F_{\text{эл}} \sim 1/(d - y)^2$, а $F_{\text{уп}}$ — прямая линия (рис. 4.12). При определённых условиях кривые будут пересекаться, т. е. когда жёсткость k достаточно велика, а напряжение V не очень велико.

Из рис. 4.12 видно, что решение, соответствующее точке b , является неустойчивым. Если внешняя сила сдвинет массу немного назад (влево), то восстанавливающая сила $F_{\text{уп}}$ будет больше, чем $F_{\text{эл}}$, и масса вернётся назад в положение a . С другой стороны, если внешняя сила сдвинет массу вперед (вправо) дальше, чем точка b , то $F_{\text{эл}} > F_{\text{уп}}$ и масса будет двигаться до тех пор, пока не вступит в контакт с неподвижным электродом.

Рис. 4.12. Зависимости нормированной электростатической $F_{эл}$ и упругой $F_{уп}$ сил от относительного смещения подвижного электрода y/d



Математически условие равновесия можно записать как $\partial F / \partial y < 0$ или

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{(d - y)^3} - k < 0. \quad (4.15)$$

Из уравнения (4.14) и неравенства (4.15) получается, что $y < d/3$. Это значит, что система остаётся в устойчивом состоянии, если подвижный электрод сместится не более чем на $1/3$ от первоначального положения. Для конкретной механической структуры коэффициент жёсткости $k = \text{const}$. Из рисунка видно, что с ростом напряжения V электростатическая сила $F_{эл}$ растёт, поэтому точки a и b сближаются, и понятно, что при определённом значении $V = V_{кр}$ точки a и b сольются.

При напряжении $V > V_{кр}$ пересечения кривых вообще не будет, так как $F_{эл}$ всегда будет в этом случае больше, чем $|F_{уп}|$, и масса всегда будет двигаться к неподвижному электроду, при этом между ними будет возникать контакт (схлопывание, смыкание, pull-in). Напряжение $V_{кр}$ называется напряжением схлопывания, смыкания или pull-in voltage.

Напряжение схлопывания можно определить из уравнения (4.14). Введём безразмерные величины: $\tilde{y} = y/d$ и $p = F_{эл0}/kd$, где $F_{эл0} = \varepsilon_0 \varepsilon S V^2 / (2d^2)$.

Уравнение (4.14) можно переписать в виде $\tilde{y}(1 - \tilde{y})^2 = p$, где $0 < \tilde{y} < 1$. Максимальное значение $\tilde{y}(1 - \tilde{y})^2$ достигает при $\tilde{y} = 1/3$ и

равно $4/27$, т. е. условие для устойчивого решения имеет вид $p \leq 4/27$.

Находим напряжение схлопывания из условия $F_{эл0}/kd = 4/27$

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{kd^3}{\epsilon_0 \epsilon S}} = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{kd^2}{C_0}}, \quad (4.16)$$

где $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S / d$. Критическое смещение подвижного электрода $y_{кр} = d/3$.

4.4.2. Способы устранения эффекта схлопывания

Существует несколько способов, которые позволяют избежать эффект схлопывания, увеличить диапазон движения и избежать разрушения устройства.

1. Наиболее простой способ – это использование ограничителей движения (стопоров), которые не будут позволять контактировать электродам. При этом необходимо, чтобы ограничители имели такой же потенциал, что и подвижный электрод, дабы исключить всяческие электростатические взаимодействия между ними. Кроме того, при многократном использовании ограничителей происходит их механический износ.

2. Использование последовательного конденсатора.

Рассмотрим плоскопараллельный актюатор, к которому последовательно подключён конденсатор (рис. 4.13, а). Будем полагать, что первоначальная ёмкость конденсатора $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S / d$, а его ёмкость при смещении $C_M = \epsilon_0 \epsilon S / (d - y)$.

Если полагать, что ёмкость последовательно соединённого конденсатора $C_S = bC_0 = \epsilon_0 \epsilon S / (d/b)$, тогда суммарная ёмкость обоих конденсаторов C_M и C_S :

$$C = \frac{1}{1/C_M + 1/C_S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d/b + d - y} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_{эф} - y},$$

где $d_{эф} = d(1 + 1/b)$ – эффективный зазор между обкладками переменного конденсатора (рис. 4.13, б), однако подвижный электрод может

смещаться максимум на расстояние d (от точки A до линии BB' , как показано на рис. 4.13, б), поскольку расстояния между BB' и C физически не существует.

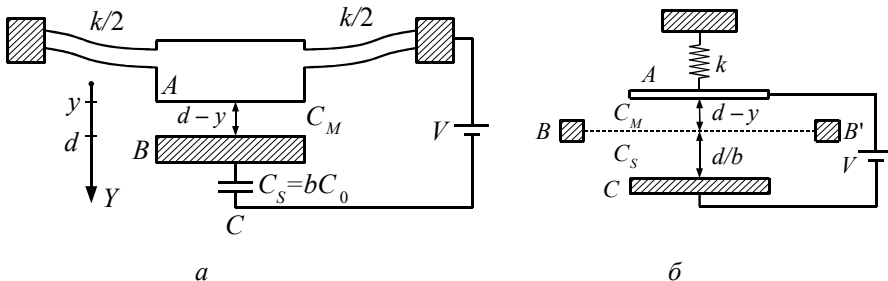


Рис. 4.13. Плоскопараллельный актюатор с последовательно подклю-
чённым конденсатором:

a – схематическое изображение; $б$ – эквивалент устройства с эффективным
зазором

Очень часто на подложку (неподвижный электрод) наносят слой диэлектрика, например SiO_2 , в этом случае $d_{\text{эф}} = d + d_1/\epsilon_1$, где d_1 – толщина слоя SiO_2 , $\epsilon_1 = 3,9$ – диэлектрическая проницаемость SiO_2 .

Таким образом, выражение для напряжения схлопывания (4.16) становится

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{kd_{\text{эф}}^3}{\epsilon_0 \epsilon_S}}. \quad (4.17)$$

Очевидно, что $d_{\text{эф}}$ будет всегда больше d , т. е. в любом случае использование последовательно подключённого конденсатора будет увеличивать критическое напряжение. Кроме того, если C_S достаточно мала и $d_{\text{эф}} > 3d$, то схлопывания не будет происходить вообще, для этого нужно, чтобы $b < 1/2$ или $C_S < C_0/2$. В этом случае подвижный электрод может двигаться во всём диапазоне зазора d . Недостаток такого решения – это дополнительное падение напряжения на конденсаторе C_S , т. е. требуются высокие управляющие напряжения.

3. Использование режима при постоянном заряде.

Если подключить источник напряжения V на некоторое время и затем отключить его, то за счёт электростатической силы подвижный электрод будет двигаться к неподвижному (рис. 4.14).

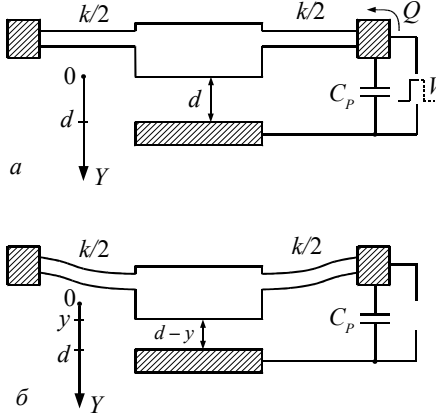


Рис. 4.14. Плоскопараллельный актюатор в схеме с постоянным зарядом:

a – в момент включения источника; b – после отключения источника

Заряд, запасённый в системе, равен $Q = (C_0 + C_P)V$, где $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S / d$, C_P – ёмкость параллельно подключенного конденсатора (паразитная ёмкость).

Положение равновесия y_0 будет определяться выражением

$$ky_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S Q^2}{2(d - y_0)^2 (\epsilon_0 \epsilon S / (d - y_0) + C_P)^2}. \quad (4.18)$$

Если ввести обозначения $\tilde{y} = y / d$, $b = C_P / (C_P + C_0)$, то выражение (4.18) примет вид

$$\tilde{y}_0(1 - b\tilde{y}_0)^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S Q^2}{2kd^3(C_P + C_0)^2}. \quad (4.19)$$

Если ввести обозначения $\zeta = b\tilde{y}_0$, то выражение (4.19) ещё упрощается:

$$\zeta(1-\zeta)^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2kd^3} b. \quad (4.20)$$

Мы знаем, что максимальное значение для левой части при $\zeta = 1/3$ ($\tilde{y}_0 = 1/(3b)$) равно $4/27$. Очевидно, что если $b < 1/3$ ($C_P < C_0/2$), то $\tilde{y}_0 > 1$, это значит, что при $C_P < C_0/2$ схлопывания электродов не происходит.

Если же $b > 1/3$ (или $C_P > C_0/2$), то подвижный электрод сомкнётся при смещении $y_0 = d/3b = d(C_0 + C_P)/(3C_P)$, а напряжение схлопывания

$$V_{кр}^Q = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{kd^3}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \frac{1}{b}}. \quad (4.21)$$

Поскольку $b < 1$ всегда, то положение равновесия всегда будет больше, чем $d/3$. Например, при $C_P = C_0$, $y_0 = 2d/3$, а критическое напряжение $V_{кр}^Q = \sqrt{2} \cdot V_{кр}$.

Хотя схема с постоянным зарядом и имеет преимущество перед схемой с последовательным конденсатором в более низких управляющих напряжениях, реализовать такую схему достаточно сложно из-за утечек заряда.

4.5. Встречно-штыревые (гребенчатые) актюаторы

Имеются две базовые конструкции встречно-штыревых микроактюаторов:

- 1) конструкция с изменением межэлектродного зазора (поперечная встречно-штыревая структура) (рис. 4.15, а).
- 2) конструкция с изменением перекрытия электродов (продольная встречно-штыревая структура) (рис. 4.15, б).

Далее рассмотрим особенности функционирования каждой из этих конструкций отдельно.

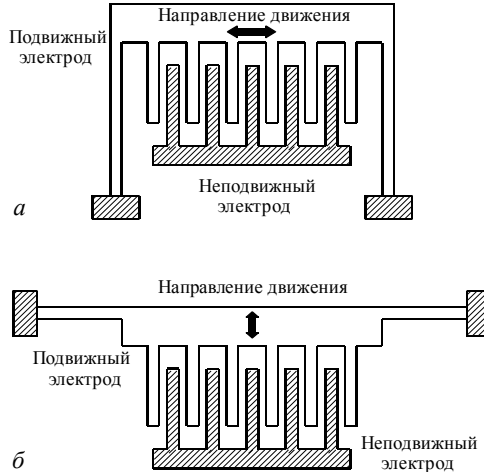


Рис. 4.15. Основные конструкции встречно-штыревых микроактюаторов:

a – поперечная встречно-штыревая структура;
б – продольная встречно-штыревая структура

4.5.1. Поперечная встречно-штыревая конструкция актюатора

Рассмотрим трёхэлектродную конструкцию гребенчатого актюатора, изображённую на рис. 4.16. В данном случае ёмкость между подвижным электродом и двумя неподвижными электродами

$$C(y) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d + y} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d - y} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(1 - \tilde{y}^2)} = \frac{C_0}{1 - \tilde{y}^2},$$

где $\tilde{y} = y / d$, $C_0 = 2\varepsilon_0 \varepsilon S / d$.

Электростатическая сила, действующая на подвижный электрод

$$|F_{\text{эл}}| = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C(y)}{\partial y} = \frac{V^2}{2} \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon S y d}{(d + y)^2 (d - y)^2} =$$

$$2V^2 \frac{y \varepsilon_0 \varepsilon S}{d^3 (1 - y^2 / d^2)^2} = C_0 V^2 \frac{\tilde{y}}{d(1 - \tilde{y}^2)^2}.$$

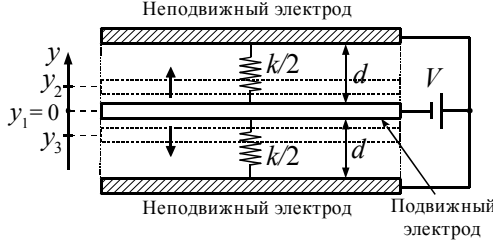


Рис. 4.16. Модель трёхэлектродного поперечного встречно-штыревого актюатора

Уравнение баланса сил

$$F = F_{\text{уп}} + F_{\text{эл}} = 0, \quad (4.22)$$

где сила упругости

$$F_{\text{уп}} = -ky;$$

электростатическая сила

$$F_{\text{эл}} = C_0 V^2 \frac{\tilde{y}}{d(1 - \tilde{y}^2)^2}.$$

Таким образом, уравнение баланса сил (4.22) принимает вид

$$C_0 V^2 \frac{\tilde{y}}{d^2 (1 - \tilde{y}^2)^2} - k\tilde{y} = 0. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) имеет пять корней: $\tilde{y}_1 = 0$,

$\tilde{y}_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{C_0 V^2 / (k d^2)}}$ и $\tilde{y}_{4,5} = \pm \sqrt{1 + \sqrt{C_0 V^2 / (k d^2)}}$, но поскольку $\tilde{y} = y / d$ не может быть больше 1, то корни $\tilde{y}_{4,5}$ здесь не подходят.

Анализ решений уравнения (4.23) показывает следующее.

1. При $V < \sqrt{k d^2 / C_0} = \sqrt{k d^3 / (2 \epsilon_0 \epsilon S)}$ положение $\tilde{y}_1 = 0$ является устойчивым, корни $\tilde{y}_{2,3}$ являются действительными решениями и соответствуют двум неустойчивым положениям (см. рис. 4.16).

Например, если подвижный электрод сдвинется за счёт внешнего воздействия чуть дальше, чем $y_2 = \tilde{y}_2 d$, то он сомкнётся с неподвиж-

ным электродом, а если он сдвинется назад относительно $\tilde{y}_2 d$ (ближе к центру), то он вернётся в исходное положение со смещением $\tilde{y}_1 = 0$.

Диапазон, при котором подвижный электрод может вернуться в устойчивое положение (состояние) с $\tilde{y}_1 = 0$, находится между $y_2 = \tilde{y}_2 d$ и $y_3 = \tilde{y}_3 d = -\tilde{y}_2 d$. Очевидно, что чем выше напряжение V , тем уже диапазон стабильности.

2. Если $V \geq \sqrt{kd^2/C_0}$, то положение $\tilde{y}_1 = 0$ является неустойчивым. В этом случае корни $\tilde{y}_2$ и $\tilde{y}_3$ комплексные и подвижный электрод всегда будет притянут в контакт с одним из неподвижных электродов.

4.5.2. Продольная встречно-штыревая конструкция актюатора

Рассмотрим трёхэлектродную конструкцию актюатора с изменением перекрытия между электродами, изображённую на рис. 4.17. В приближении модели ИПК латеральная (тангенциальная) составляющая электростатической силы не зависит от смещения x и равна $|F_x| = 2\varepsilon_0 \varepsilon a V^2 / (2d)$, где коэффициент 2 в числителе означает, что на подвижный электрод действуют силы со стороны двух подвижных электродов.

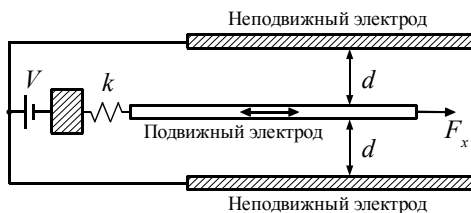


Рис. 4.17. Модель трёхэлектродного продольного встречно-штыревого актюатора

Уравнение баланса сил в этом случае

$$2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a}{2d} V^2 - kx = 0,$$

откуда положение равновесия соответствует смещению $x = \varepsilon_0 \varepsilon a V^2 / (kd)$.

Таким образом, смещение подвижного электрода x пропорционально квадрату приложенного напряжения V^2 . В конструкции данного типа в идеальном случае отсутствуют явления неустойчивости, связанные с электростатическими взаимодействиями.

4.5.3. Эффект электростатического размягчения (electrostatic spring-softening effect)

Данный эффект проявляется в плоскопараллельных и встречно-штыревых актюаторах с изменением межэлектродного зазора.

1. Плоскопараллельный актюатор

Рассмотрим уравнение баланса сил в плоскопараллельном актюаторе:

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2(d-y)^2} - ky = 0.$$

Разложим в ряд Тейлора выражение для электростатической силы

$$F_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2(d-y)^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^3} y + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^4} y^2 + \dots$$

Ограничимся первыми двумя членами ряда

$$F_{\text{эл}} \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^3} y$$

и подставим $F_{\text{эл}}$ в уравнение баланса сил, в результате получим

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^3} y - ky = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2d^2} - y \left(k - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^3} \right) = 0. \quad (4.24)$$

Введём эффективную жёсткость системы $k_{\text{эф}} = k - \varepsilon_0 \varepsilon S V^2 / d^3$, тогда уравнение баланса сил (4.24) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{2d^2} - k_{\text{эф}} y = 0. \quad (4.25)$$

Из выражения для $k_{\text{эф}}$ следует, что при приложении напряжения V эффективная жёсткость системы, состоящая из механической жёсткости и электростатического воздействия, уменьшается.

Для того чтобы система не вышла из равновесия, необходимо, чтобы эффективная жёсткость была положительной ($k_{\text{эф}} > 0$), т. е. прикладываемое напряжение должно быть

$$V < \sqrt{\frac{kd^3}{\varepsilon_0 \varepsilon S}}.$$

Эффект схлопывания, однако, накладывает более жёсткое требование на величину прикладываемого напряжения

$$V_{\text{кр}} < \sqrt{\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 \varepsilon S}}.$$

2. Встречно-штыревой актюатор

Запишем уравнение баланса сил во встречно-штыревом актюаторе с изменением межэлектродного зазора:

$$\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S V^2 y d}{(d^2 - y^2)^2} - ky = 0.$$

Разложим в ряд Тейлора выражение для электростатической силы

$$F_{\text{эл}} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S V^2 y d}{(d^2 - y^2)^2} \approx \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^3} y + \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^5} y^3 + \dots$$

Ограничимся лишь первым членом ряда $F_{\text{эл}} \approx 2\varepsilon_0 \varepsilon S V^2 y / d^3$, тогда уравнение баланса сил принимает вид

$$\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S V^2}{d^3} y - ky = 0, \quad (4.26)$$

откуда из условия сохранения системой положительной эффективной жёсткости

$$k_{\text{эф}} = k - 2\varepsilon_0 \varepsilon S V^2 / d^3 > 0,$$

находим ограничение для напряжения между электродами

$$V < \sqrt{\frac{kd^3}{2\varepsilon_0\varepsilon S}}. \quad (4.27)$$

Данное условие совпадает с найденным в разделе 4.5.1 условием неустойчивости для поперечного встречно-штыревого актюатора. Таким образом, механизмом неустойчивости в актюаторах данного вида является появление отрицательной эффективной жёсткости.

Эффект электростатического размягчения очень часто используется в МЭМС для подстройки жёсткости системы и изменения резонансной частоты.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Кремниевый плоскопараллельный актюатор показан на рис. 4.18. Между электродами в течение короткого времени прикладывается напряжение V , а затем источник напряжения отключается до того, как подвижный электрод сможет сместиться на заметное расстояние. Найти: а) выражение для электростатической силы, действующей на подвижный электрод; б) значение силы при смещении $y = 2$ мкм, исходное расстояние между электродами $d = 5$ мкм, площадь пластины $S = 4$ мм², напряжение $V = 10$ В.

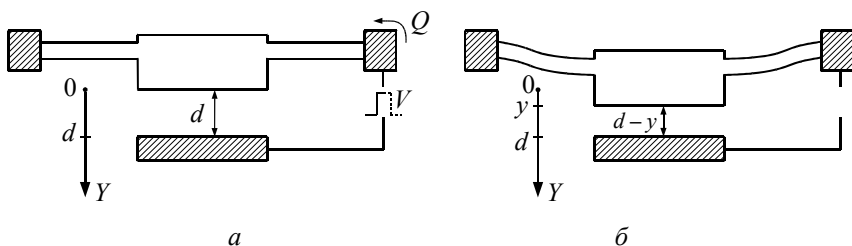


Рис. 4.18. Плоскопараллельный актюатор для задачи 4.1:

а – при подключении источника напряжения; б – после подключения

4.2. Используя условия предыдущей задачи, рассчитать нормальную составляющую электростатической силы F_y , если источник напряжения V не отключать.

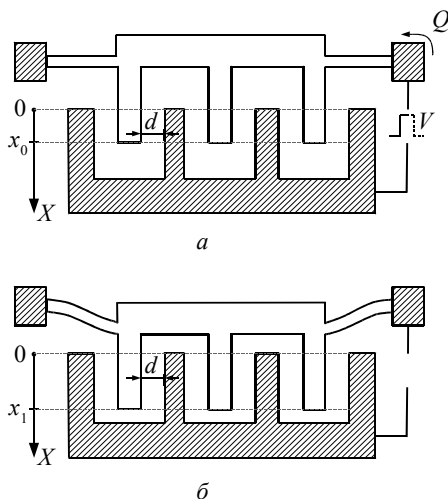


Рис. 4.19. Встречно-штыревой
актюатор для задачи 4.3:

a – при подключении источника напряже-
ния; *б* – после подключения

4.3. Для встречно-штыревого актюатора между электродами в течение короткого времени прикладывается напряжение V , а затем источник отключается до того, как подвижный электрод сможет сместиться на заметное расстояние (рис. 4.19). Найти: а) выражение для латеральной составляющей электростатической силы, когда перекрытие электродов равно x_1 , б) оценить силу при $d = 5$ мкм, $x_0 = 50$ мкм, $x_1 = 75$ мкм, $H = 20$ мкм (толщина электродов), $n = 3$ (число штырей), $V = 10$ В.

4.4. Используя условия предыдущей задачи, рассчитать латеральную составляющую электростатической силы F_x , если источник V не отключать.

4.5. Встречно-штыревой актюатор изображён на рис. 4.19. Между электродами прикладывается напряжение V , но затем источник отключается до того, как подвижный электрод перейдёт в положение равновесия x_1 . Найти: а) выражение для положения равновесия x_1 ; б) значение x_1 для $H = 20$ мкм, $n = 3$, $d = 2$ мкм, $V = 10$ В, $k = 1$ мН/м, $x_0 = 20$ мкм.

4.6. Используя условия предыдущей задачи, найти положение равновесия x_1 , если источник V не отключать.

4.7. Между электродами плоскопараллельного актюатора прикладывается напряжение V , но источник отключается до того, как подвижный электрод сместится, как показано на рис. 4.18 б. Найти положение равновесия подвижного электрода y для $d = 5$ мкм, $V = 5$ В, $k = 10$ Н/м и площади пластины $S = 4$ мм².

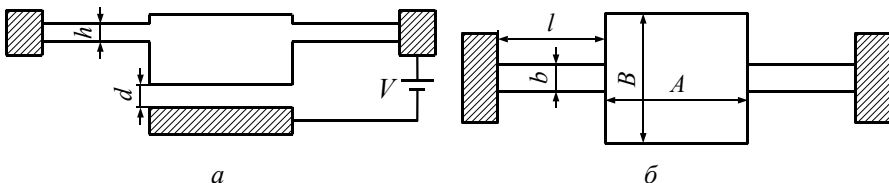


Рис. 4.20. Кремниевая микроструктура для задачи 4.8:

a – вид сбоку; b – вид сверху

4.8. Кремниевая микроструктура изображена на рис. 4.20, где $l = 500$ мкм, $b = 100$ мкм, $h = 10$ мкм, $A = B = 2$ мм, $d = 4$ мкм. Найти максимальное положение равновесия $y_{\max}$ и напряжение схлопывания $V_{\text{кр}}$. Модуль Юнга для кремния $E = 170$ ГПа.

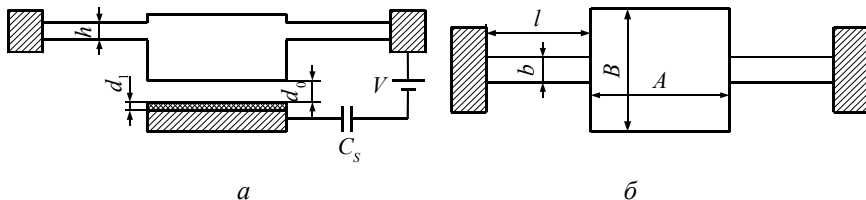


Рис. 4.21. Кремниевая микроструктура для задачи 4.9:

a – вид сбоку; b – вид сверху

4.9. Кремниевая микроструктура изображена на рис. 4.21, где $b = 50$ мкм, $h = 10$ мкм, $l = 500$ мкм, $A = B = 2$ мм, $d_0 = 3$ мкм, плёнка $d_1 = 1$ мкм с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1 = 3,8$, ёмкость последовательно подключенного конденсатора $C_s = 100$ пФ. Найти максимальное положение равновесия $y_{\max}$ и напряжение схлопывания $V_{\text{кр}}$.

4.10. На рис. 4.22 изображена кремниевая микроструктура, где $A=2,4$ мм, $B=1,2$ мм, $b_1=50$ мкм, $b_2=100$ мкм, $l_1=100$ мкм, $l_2=150$ мкм, $h=5$ мкм, $d=3$ мкм, $H=250$ мкм, модуль Юнга $E=170$ ГПа. Найти напряжение схлопывания $V_{кр}$.

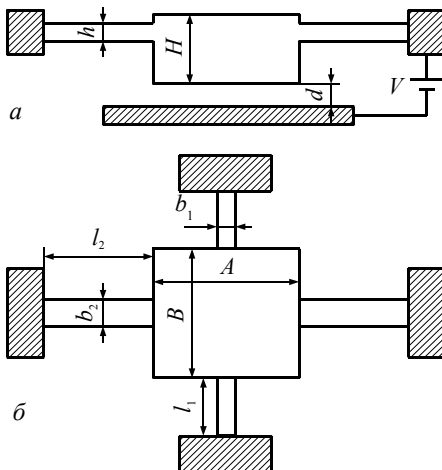


Рис. 4.22. Кремниевая микроструктура для задачи 4.10:

a – вид сбоку; b – вид сверху

4.11. Как изменится резонансная частота колебаний микроструктуры в предыдущей задаче, если между электродами приложить напряжение? Увеличится, уменьшится или не изменится? Рассчитать резонансную частоту колебаний микроструктуры из предыдущей задачи, когда напряжение между электродами отсутствует и когда приложено напряжение $V=0,9V_{кр}$. Плотность кремния $\rho=2,33$ г/см³.

4.12. Используя рис. 4.20, найти напряжение V , которое сместит центральную часть на расстояние $y=d/4$, $d=2$ мкм, $b=h=1$ мкм, $l=100$ мкм, $A=B=10$ мкм, модуль Юнга кремния $E=160$ ГПа.

4.13. Используя рис. 4.20, определить напряжение схлопывания $V_{кр}$, если при подаче отклоняющего напряжения $V=0,5$ В подвижная часть смещается на величину $\Delta d=0,01$ мкм, известен лишь первоначальный зазор $d=6$ мкм.

4.14. Кремниевая микроструктура (рис. 4.22) используется как ёмкостной акселерометр, где $A=100$ мкм, $B=80$ мкм, $H=2,5$ мкм, $d=10$ мкм, $l_1=l_2=300$ мкм, $b_1=b_2=20$ мкм, $h=0,1$ мкм, модуль Юнга $E=170$ ГПа, плотность кремния $\rho=2,33$ г/см³. Определить приложенное к сенсору ускорение, если после этого ёмкость увеличилась на 30 %.

4.15. Используя условие предыдущей задачи, найти относительное изменение ёмкости при ускорении 20 м/с² без учёта и с учётом краевых эффектов (при помощи двумерной формулы Пальмера (4.11)).

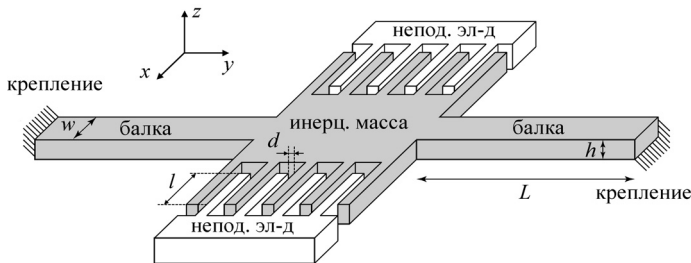


Рис. 4.23. Ёмкостной акселерометр для задачи 4.16

4.16. На рис. 4.23 изображён акселерометр, изготовленный с помощью поверхностной микрообработки. Инерциальная масса держится на двух консольных балках длиной L , шириной w и толщиной h . Пальцы гребёнок имеют длину перекрытия l , толщину h и зазор между электродами d . Какая ось, x , y или z , является более чувствительной к ускорению a и почему? Получить выражение для чувствительности к ускорению $\partial C/\partial a$.

4.17. Для плоскопараллельного актюатора (см. рис. 4.11) определить максимальную скорость v_m , с которой подвижный электрод проходит положение равновесия y_a (на рис. 4.12 соответствует точке a) при приложении между электродами напряжения V ($V < V_{кр}$). Масса подвижного электрода m , первоначальный зазор между электродами d , площадь подвижного электрода S , коэффициент жёсткости упругих подвесов k .

5. Электромагнитные преобразователи

5.1. Достоинства и недостатки

Отметим достоинства и недостатки электромагнитных преобразователей.

Достоинства:

- 1) более высокие значения сил по сравнению с электростатическими актюаторами при больших расстояниях между электродами;
- 2) более высокая стабильность по сравнению с электростатическими преобразователями, отсутствие эффекта схлопывания;
- 3) возможность функционирования в «экстремальных» условиях окружающей среды (жидкость, газы), нет чувствительности к загрязнению.

Недостатки:

- 1) процессы изготовления не совместимы с интегральной КМОП-технологией (гибридная конструкция), большие габариты;
- 2) более высокая по сравнению с электростатическими преобразователями, потребляемая мощность, так как необходимы большие токи;
- 3) катушки индуктивности, используемые в актюаторах, обладают высоким тепловыделением (происходит нагрев устройства);
- 4) магнитное поле может влиять на свободные носители в проводниках и электронных схемах, а также на магнитные носители данных.

5.2. Принцип функционирования

Принцип работы электромагнитных преобразователей основан на взаимодействии между электрическим током в проводнике и внешним магнитным полем. На рис. 5.1 изображён линейный проводник, по которому течёт ток I , и помещён он во внешнее магнитное поле B .

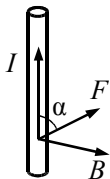


Рис. 5.1. Проводник с током I в магнитном поле B

Сила Ампера, действующая на проводник с током I в магнитном поле B , равна $\vec{F} = I[\vec{l} \times \vec{B}]$, величина этой силы $F = IlB \sin \alpha$, где l – длина проводника; α – угол между направлениями I и B . Ясно, что для того чтобы появилась сила Ампера, угол α должен быть не равен нулю.

Главный принцип, реализуемый в МЭМС-устройствах, заключается в использовании витков (контуров), которые могут быть как прямоугольной, так и круглой формы. На рис. 5.2 изображён прямоугольный виток (контур), который, например, может быть размещён на подвижной структуре. По контуру течёт ток I и помещён он во внешнее магнитное поле B , которое параллельно плоскости витка, как показано на рисунке.

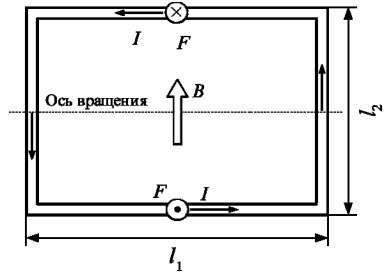


Рис. 5.2. Прямоугольный контур с током I в магнитном поле B

Поскольку поле B параллельно току для коротких плеч длиной l_2 , то нет силы, действующей на эти стороны. Однако имеются две силы, действующие на каждое из длинных плеч: одна входит в плоскость витка, другая выходит из этой плоскости. Согласно определению силы Ампера эти две силы одинаковы по величине и противоположны по направлению. Их величина равна $F = Il_1 B$. В итоге результирующая сила, действующая на виток, равна нулю.

Однако из-за взаимодействия двух параллельных и противоположных по направлению сил возникает момент сил: $M = Il_1 l_2 B$, который приводит к вращению витка (контура) вокруг оси, изображённой на рис. 5.2.

Проанализируем также круглый контур радиусом R , изображённый на рис. 5.3. Сила Ампера, действующая на круговой сегмент длиной dl , который определяется углом $d\alpha$, равна $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, модуль силы $dF = IRB \sin \alpha d\alpha$. Результирующая сила, действующая на круглый контур, может быть найдена путём суммирования всех этих элементарных сил, т. е. необходимо вычислить интеграл

$$F = \oint dF = \int_0^{2\pi} IRB \sin \alpha d\alpha = 0,$$

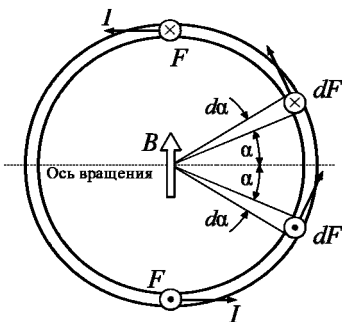


Рис. 5.3. Круглый контур с током I в магнитном поле

т. е. результирующая сила, так же как и для прямоугольного контура, равна нулю.

Если рассмотреть две элементарные длины, которые расположены под углом α симметрично относительно оси вращения контура, то две силы dF , которые равны по значению и противоположны по направлению, будут порождать элементарный момент сил $dM = 2R \sin \alpha dF$.

Суммарный момент, который будет приводить к вращению витка вокруг оси вращения, может быть рассчитан как

$$M = \int_0^\pi dM = \int_0^\pi 2R \sin \alpha dF = 2IR^2 B \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \pi R^2 IB.$$

Если сравнить выражения для моментов прямоугольного и круглого витков, то можно записать, что $M = ISB$, где S – площадь витка (контура).

Таким образом, можно обобщить формулировку механического момента, образуемого в витке с током, во внешнем магнитном поле, в векторной форме: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, где $\vec{m}$ – магнитный дипольный момент, который может быть рассчитан как $\vec{m} = IS \vec{n}_S$, где $\vec{n}_S$ – единичный вектор нормали, имеющий направление, перпендикулярное плоскости контура. Чем больше количество витков в контуре, тем выше мощность преобразователя, так как магнитный момент M увеличивается в соответствующее количество витков раз.

Наиболее простой вариант реализации токопроводящего витка в МЭМС-преобразователях – это размещение соответствующего контура на свободном конце консольной балки. Рассмотрим далее следующий пример.

Пример 1. Микробалка, изображённая на рис. 5.4, используется для измерения внешнего магнитного поля, направление которого известно, как

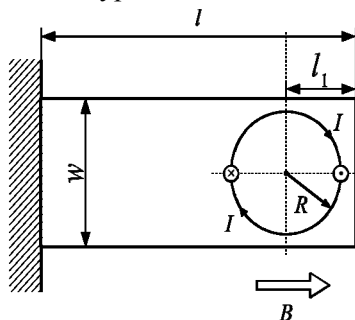


Рис. 5.4. Микробалка для измерения внешнего магнитного поля

показано на рисунке. Определить величину магнитного поля B , полагая, что геометрия и свойства материала микробалки известны, известен также угол отклонения конца балки, который определяется экспериментально.

Взаимодействие между внешним магнитным полем B и током I в круглом витке за счёт момента сил M будет стремиться повернуть виток вокруг оси, которая перпендикулярна длинной части консоли и проходит через центр витка. Величина этого момента может быть найдена как $M = \pi R^2 IB$. При приложении этого момента угол отклонения микробалки составляет

$$\theta_{1y} \approx \frac{M(l-l_1)}{EJ_y},$$

где $J_y = wt^3/12$ – момент инерции сечения микробалки; t – толщина балки. Откуда магнитное поле

$$B = \frac{EJ_y \theta_{1y}}{\pi R^2 I(l-l_1)}.$$

5.3. Магнитное преобразование

Принцип работы магнитных преобразователей заключается в следующем: магнит, помещённый во внешнее магнитное поле, будет влиять или испытывать на себе силы/моменты, которые возникают из-за взаимодействия между собственным магнитным полем магнита и внешним магнитным полем.

На рис. 5.5 изображён магнит длиной l , магнитный дипольный момент которого равен

$$\vec{m} = q_m \vec{l}, \quad (5.1)$$

где q_m – магнитный монополь, векторы $\vec{m}$ и $\vec{l}$ параллельны.

Если этот магнит поместить во внешнее магнитное поле, как показано на рисунке, то на него будет действовать магнитный момент M в направлении, перпендикулярном его плоскости, этот момент будет пытаться выстроить в линию магнитное поле магнита и внешнее магнитное поле.

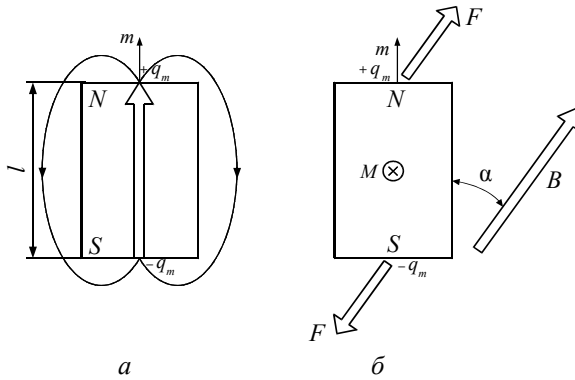


Рис. 5.5. Постоянный магнит без внешнего воздействия (а) и во внешнем магнитном поле (б)

Момент этого взаимодействия может быть рассчитан как $M = q_m l B \sin \alpha$. Данный момент сил возникает из-за влияния двух одинаковых, но разных по знаку сил $\vec{F} = q_m \vec{B}$. Эти силы различны по знаку, так как магнитный заряд положительный на одном полюсе и отрицательный на другом, как следствие результирующая сила, действующая на магнит, будет равна нулю, и будет иметь место только магнитный момент, вызванный этими двумя силами, который равен $M = Fl \sin \alpha$, где размерности $M = [\text{Н} \cdot \text{м}]$, $q_m = [\text{А} \cdot \text{м}]$.

Значение q_m можно определить следующим образом: магнитный дипольный момент равен

$$m = M_m S l, \quad (5.2)$$

где $M_m = [\text{А/м}]$ – намагниченность для изотропного магнитного материала.

$$M_m = \frac{B_m (\mu_r - 1)}{\mu_0 \mu_r}, \quad (5.3)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ_r – относительная магнитная проницаемость материала магнита, B_m – магнитное поле, создаваемое магнитом, $B_m = [\text{Тл}] = [\text{Н}/(\text{м} \cdot \text{А})]$.

Объединив выражения (5.1)–(5.3), получаем

$$q_m = \frac{B_m S(\mu_r - 1)}{\mu_0 \mu_r},$$

где B_m – магнитное поле, создаваемое магнитом.

Для анизотропных материалов ситуация оказывается гораздо сложнее, так как магнитная проницаемость различна в различных направлениях.

Сила притяжения может возникать между постоянным магнитом и слоем ферроэлектрика (который может быть намагничен), как способ магнитного преобразования (рис. 5.6).

В данном случае магнитная сила может быть рассчитана как $F = B_m^2 S_m / (2\mu_0)$, где S_m – площадь магнита относительно нормали к магнитному полю, $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

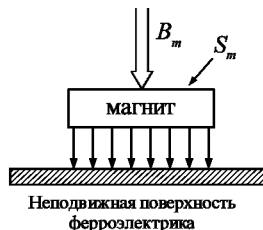


Рис. 5.6. Магнитная сила между постоянным магнитом и ферроэлектрической подложкой

5.4. Магнитно-электромагнитное преобразование

Во многих МЭМС-устройствах используется взаимодействие между электромагнитным и магнитным полями, для того чтобы увеличить производительность преобразователей. Объединение катушки с током и постоянного магнита так, чтобы их поля были параллельны, является типичным примером.

Существует два способа рассчитать силу между этими двумя компонентами.

1. Преобразование реального магнита в эквивалентный виток катушки, как показано на рис. 5.7. Полагая, что магнит и эквивалентный виток имеют один и тот же магнитный дипольный момент m , можно записать $m = q_m t_m = I_2 S_2$, где S_2 – площадь эквивалентного витка с током I_2 .

Сила взаимодействия может быть рассчитана как частная производная полной энергии магнитно-электромагнитного взаимодействия U_m по координате

$$F = \frac{\partial U_m}{\partial t_g} = m \frac{\partial B_1}{\partial t_g}.$$

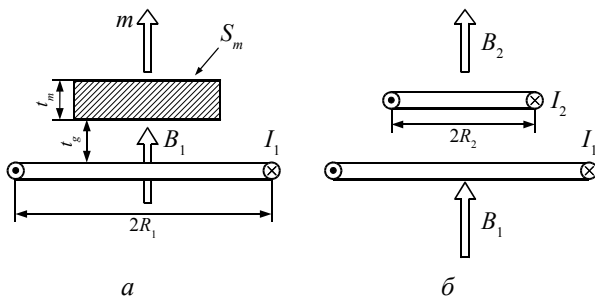


Рис. 5.7. Магнитно-электромагнитное преобразование:
a – виток и постоянный магнит; *б* – виток и эквивалентный
 постоянному магниту виток

Магнитная энергия может быть рассчитана как

$$U_m = \frac{L_{11}I_1^2}{2} + \frac{L_{22}I_2^2}{2} + L_{12}I_1I_2,$$

где L_{11} и L_{22} – непосредственно индуктивности двух катушек, а L_{12} – взаимная индуктивность между двумя катушками.

Эти индуктивности равны:

$$L_{11} = \frac{1}{I_1} \int_{S_1} B_1 dS, \quad L_{12} = \frac{1}{I_2} \int_{S_1} B_2 dS, \quad L_{22} = \frac{1}{I_2} \int_{S_2} B_2 dS.$$

В случае, когда магнитная индукция B_1 постоянна через всю эквивалентную катушку, сила F приводится к виду

$$F = \frac{3\mu_0 n_1 S_1 I_1 S_2 I_2 t_g}{2\pi (R_1^2 + t_g^2)^{5/2}},$$

где n_1 – число витков в катушке с током I_1 .

2. Другой способ рассчитать силу взаимодействия между катушкой и магнитом – это записать энергию магнитно-электромагнитного взаимодействия в следующем виде:

$$U_m = \frac{(n_1 I_1 + B_m t_m / \mu_m)^2}{2\tilde{R}},$$

где μ_m – магнитная проницаемость материала магнита; $\tilde{R}$ – магнитное сопротивление той части силовых линий магнитного поля, которая содержит катушку, воздушный зазор и магнит:

$$\tilde{R} = \tilde{R}_{\text{кат}} + \frac{t_g}{\mu_0 S_m} + \frac{t_m}{\mu_m S_m}.$$

Если катушка не содержит магнитного сердечника, то $\tilde{R}_{\text{кат}} = 0$. Продифференцировав выражение для U_m по t_g , получаем силу взаимодействия:

$$F = \frac{\partial U_m}{\partial t_g} = \frac{(n_1 I_1 + B_m t_m / \mu_m)^2}{2 \mu_0 S_m \tilde{R}^2}.$$

Пример 2. Круглая катушка радиусом R_1 размещена на конце микробалки, как показано на рис. 5.8. Магнит площадью S_m , толщиной t_m и индукцией B_m расположен под катушкой, зазор между катушкой и магнитом равен t_g . Определите ток I_1 в катушке, при котором зазор t_g уменьшится в два раза. Полагать, что микросистема работает в воздухе и катушка имеет только один виток.

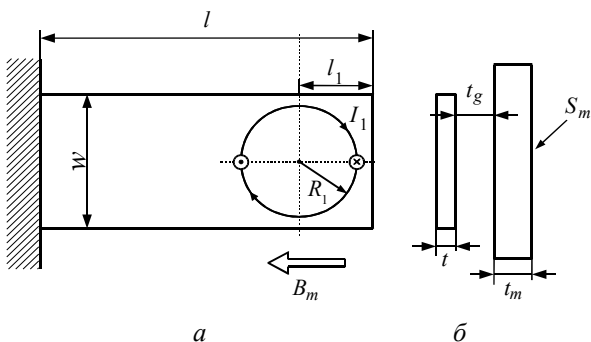


Рис. 5.8. Электромагнитный балочный микроактюатор:

a – вид сверху; b – вид сбоку

При прохождении тока I_1 через катушку, расположенную на расстоянии l_1 от конца балки, на виток будут действовать силы, порождающие момент сил, стремящийся отклонить балку в направлении постоянного магнита.

Чтобы определить силу, необходимую для смещения конца балки на расстояние $t_g / 2$, рассмотрим консольную балку, изображённую на рис. 5.9, которая имеет длину l , при этом сила F действует на балку на расстоянии l' от места её закрепления, что соответствует расстоянию $(l - l_1)$ (рис. 5.8).

Из курса прикладной механики взаимосвязь между приложенной силой F и смещением конца балки $y_{\max}$ (рис. 5.9):

$$y_{\max} = \frac{F(l')^2}{6EJ}(3l - l').$$

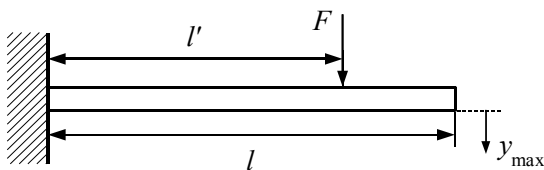


Рис. 5.9. Консольная балка, на которую действует сила F на расстоянии l' от её начала

Таким образом, сила, необходимая для смещения конца балки на расстояние $t_g / 2$ и приложенная на расстоянии $(l - l_1)$ (рис. 5.8), равна

$$F = \frac{3EJ_y t_g}{(l - l_1)^2 (2l + l_1)}, \quad (5.4)$$

где $J_y = wt^3 / 12$ – момент инерции сечения.

Сила, образованная взаимодействием магнит–катушка

$$F = \frac{(n_1 I_1 + B_m t_m / \mu_m)^2}{2\mu_0 S_m \tilde{R}^2}. \quad (5.5)$$

Приравниваем выражения (5.4) и (5.5) и находим необходимый ток

$$I_1 = \left(\frac{\tilde{R}}{l - l_1} \sqrt{\frac{6\mu_0 S_m E J_y t_g}{2l + l_1}} - \frac{B_m t_m}{\mu_m} \right) / n_1,$$

где магнитное сопротивление $\tilde{R} = t_g / (\mu_0 S_m) + t_m / (\mu_m S_m)$, поскольку катушка не содержит магнитного сердечника и $n_1 = 1$, так как есть только один виток.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Определить суммарное воздействие на контур, изображённый на рис. 5.10, по которому течёт ток I , если на него действует внешнее магнитное поле B , $R = l / 2$. Найти момент сил M , действующий на рамку.

5.2. Определить отклонение средней точки микродатчика, которое возникает из-за взаимодействия между полем постоянного магнита, закреплённого на микромостике длиной l и неподвижной катушки с током I_1 (рис. 5.11). Поперечное сечение микромостика определяется шириной w и толщиной t .

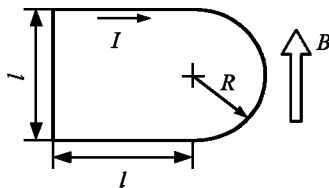


Рис. 5.10. Контур с током I в магнитном поле B

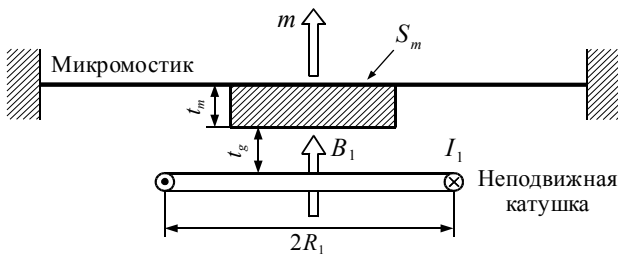


Рис. 5.11. Магнитно-электромагнитное взаимодействие с помощью гибкого мостика

5.3. Микробалка намагничена, как показано на рис. 5.12. Определить эффекты активации (что будет происходить с балкой) конца консольной балки, если внешнее поле определяется как $B = B_0 \exp(-az)$, и

источник магнитного поля расположен под концом балки на расстоянии h . Известно, что длина балки l , ширина w и толщина t , намагниченность магнита m .

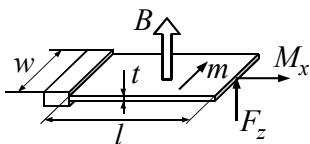


Рис. 5.12. Намагниченная микробалка в электромагнитном поле

6. Пьезоэлектрические преобразователи

6.1. Достоинства и недостатки

Отметим достоинства и недостатки пьезоэлектрических преобразователей.

Достоинства:

- 1) самогенерация, не требуются источники питания (для сенсоров);
- 2) высокая чувствительность и быстродействие;
- 3) сравнительно большие смещения.

Недостатки:

- 1) сложная процедура изготовления, не совместимая с интегральной КМОП-технологией, дорогие материалы;
- 2) отсутствует возможность работы при повышенных температурах (температура Кюри примерно 200...300 °С);
- 3) низкая производительность на низких частотах;
- 4) свойства пьезоэлектрических материалов довольно быстро меняются со временем (старение).

6.2. Эффект пьезоэлектричества

Кристаллические материалы, которые поляризуются при деформации и, наоборот, деформируются при приложении электрического поля, называются пьезоэлектриками, при этом знак поляризации зависит от знака приложенного механического напряжения, а знак вызываемой деформации зависит от знака приложенного электрического поля.

Физическая природа эффекта пьезоэлектричества заключается в нецентросимметричности расположения атомов и их результирующих зарядов в кристаллической решётке.

Хорошим примером иллюстрации данного эффекта является кристаллическая структура кварца, где расположение ионов Si (положительные заряды) и O (отрицательные заряды) несимметрично относительно любой точки кристалла, что видно из рис. 6.1, *a*.

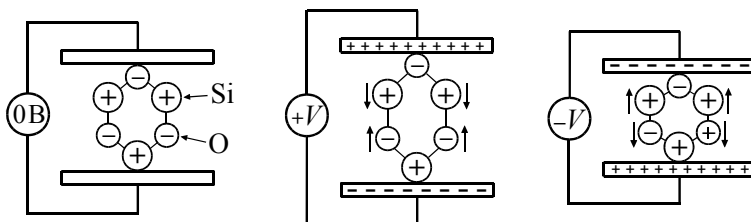


Рис. 6.1. Эффект пьезоэлектричества на примере кварца:

a – напряжение отсутствует – нет механической деформации; *б* – положительное напряжение – происходит растяжение кристалла; *в* – отрицательное напряжение – происходит сжатие кристалла

Если сжимать или растягивать кристаллическую решётку, то знак вызванной поляризации будет изменяться, а её величина практически линейно будет зависеть от приложенного механического напряжения, что очень выгодно использовать в сенсорах.

При приложении же электрического поля к пьезоэлектрику (рис. 6.1, *б* и 6.1, *в*) электростатические силы будут влиять на нецентросимметричное расположение ионов и вызывать растяжение или сжатие кристаллической решётки в зависимости от знака приложенного напряжения и коэффициента связи (пьезоэлектрической постоянной). Возможность изменять знак деформации при изменении прикладываемого напряжения является очень привлекательным для микроактюаторов.

6.2.1. Математическое описание эффекта пьезоэлектричества

Поскольку данный эффект анизотропный, то введём обозначения для направлений в кристалле.

Как правило, направление положительной поляризации выбирают так, чтобы оно совпадало с осью z декартовой системы координат, как показано на рис. 6.2. Нормальные компоненты механических напряжений вдоль осей x, y и z обозначаются через 1, 2 и 3 соответственно,

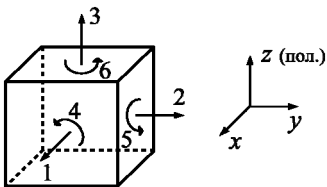


Рис. 6.2. Схематическое изображение кристалла пьезоэлектрика в прямоугольной системе координат

т. е. ось поляризации всегда совпадает с осью z (индексом 3). Сдвиговые компоненты механического напряжения и деформации обозначаются через индексы 4, 5 и 6.

Основные уравнения, описывающие пьезоэлектрический эффект, имеют тензорный вид. Уравнение, связывающее электрическую поляризацию и прикладываемое механическое напряжение, имеет вид

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k, \quad (6.1)$$

где D_i – вектор электрической поляризации; T_{kl} – матрица механических напряжений; ε_{ik}^T – матрица электрических постоянных при постоянном механическом напряжении; E_k – вектор напряжённости электрического поля; d_{ikl} – тензор пьезоэлектрических постоянных.

Электрическая поляризация складывается из двух составляющих: механическая нагрузка и электрическое смещение.

В отсутствие электрического поля 2-е слагаемое в уравнении (6.1) равно нулю. В матричном виде уравнение (6.1) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad (6.1a)$$

где $T_{1,2,3}$ – нормальные напряжения вдоль осей x, y и z , а $T_{4,5,6}$ – сдвиговые напряжения вокруг осей x, y и z соответственно. Размерности величин $D_i = [\text{Кл/м}^2]$, $T_j = [\text{Н/м}^2]$, $\varepsilon_{ik} = [\text{Ф/м}]$, $E_k = [\text{В/м}]$, $d_{ij} = [\text{Кл/Н}] = [\text{м/В}]$.

6.2.2. Обратный эффект пьезоэлектричества

Уравнение, связывающее деформацию, механическое напряжение и напряжённость электрического поля имеют следующий вид:

$$e_{ij} = S_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k, \quad (6.2)$$

где e_{ij} – матрица деформаций; T_{kl} – матрица механических напряжений; E_k – вектор напряжённости электрического поля; S_{ijkl}^E – тензор упругих податливостей при постоянной напряжённости электрического поля; d_{kij} – тензор пьезоэлектрических постоянных.

В отсутствие механического напряжения 1-е слагаемое в уравнении (6.2) равно нулю. Размерность $S_{ijkl}^E = [\text{м}^2 / \text{Н}]$, e_{ij} – безразмерная величина.

В матричном виде уравнение (6.2) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (6.2a)$$

Коэффициент электромеханической связи – величина, характеризующая количество энергии, преобразованной из электрической энергии в механическую энергию, или наоборот:

$$k = \frac{\text{преобразованная энергия}}{\text{входная энергия}} = \frac{U_{PZT}}{\sqrt{U_M U_E}},$$

где k характеризует степень эффективности преобразования энергии, пьезоэлектрическая энергия

$$U_{PZT} = \frac{1}{2} \{T_j\}^T \{d_{ij}\}^T \{E_j\},$$

механическая энергия

$$U_M = \frac{1}{2} \{T_j\}^T \{S_{ij}^E\} \{T_j\}$$

и электрическая энергия

$$U_E = \frac{1}{2} \{E_k\}^T \{\epsilon_{ik}^T\} \{E_k\}.$$

6.3. Модель пьезоэлектрического балочного актюатора

Пьезоэлектрические актюаторы часто используются вместе с консольными балками или пластинами. Общие модели таких актюаторов являются довольно сложными, их точный анализ часто требует использования численных методов (например, МКЭ). Для некоторых простых случаев, однако, всё же можно получить аналитические решения.

Рассмотрим консольную балку, изображённую на рис. 6.3, *а* и состоящую из двух слоёв материала, один из которых является пьезоэлектрическим (*биморфный пьезоэлектрический актюатор*).

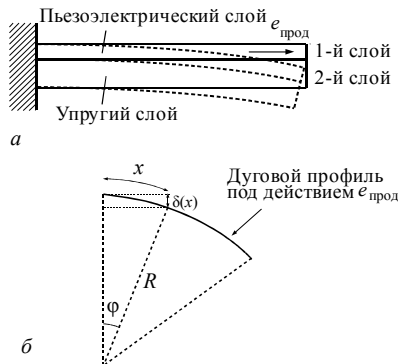


Рис. 6.3. Изгиб пьезоэлектрического биморфного элемента

Для анализа примем следующие допущения:

- 1) вызванное механическое напряжение и деформация направлены строго вдоль балки;
- 2) поперечное сечение балки не изменяет своей формы и конфигурации при изгибе;
- 3) балка сохраняет постоянный изгиб вдоль всей своей оси;
- 4) сдвиговые напряжения и деформации полностью отсутствуют;
- 5) изгибом балки из-за внутренних напряжений можно пренебречь;
- 6) толщина балки гораздо меньше, чем радиус её кривизны, вызванный пьезоэлектрическим эффектом;
- 7) коэффициент Пуассона изотропный для всех плёнок.

Когда слой пьезоэлектрика подвергается продольной деформации $e_{\text{прод}}$, то балка изгибается в дугу, радиус кривизны которой

$$R = \frac{4(E_1 J_1 + E_2 J_2)(E_1 S_1 + E_2 S_2) + (t_1 + t_2)^2 E_1 S_1 E_2 S_2}{2|e_{\text{прод}}|(t_1 + t_2)E_1 S_1 E_2 S_2}, \quad (6.3)$$

где S_1 и S_2 – площади поперечного сечения пьезоэлектрического и упругого слоёв; E_1 и E_2 – модули Юнга для этих слоёв; t_1 и t_2 – их толщины.

Если известен радиус кривизны (рис. 6.3, б), то можно определить вертикальное смещение $\delta(x) = R(1 - \cos \varphi)$, так как угол $\varphi \ll 1$, то $1 - \cos \varphi \approx \varphi^2/2$ и $\varphi \approx x/R$, т.е. $R(1 - \cos \varphi) \approx x^2/(2R)$, откуда

$$\delta(x) \approx \frac{x^2 d_{31} E_3 (t_1 + t_2) E_1 S_1 E_2 S_2}{4(E_1 J_1 + E_2 J_2)(E_1 S_1 + E_2 S_2) + (t_1 + t_2)^2 E_1 S_1 E_2 S_2}, \quad (6.4)$$

где d_{31} – пьезоэлектрическая постоянная; E_3 – напряжённость электрического поля вдоль оси z . Зная вертикальное смещение пьезоэлектрического балочного актюатора, можно определить силу, развиваемую актюатором $F = \delta(x)k$, где k – коэффициент жёсткости балки.

Пример 1. Пьезоэлектрический актюатор балочного типа длиной 500 мкм изготовлен из двух слоёв: ZnO и poly-Si (рис. 6.4). Найти вертикальное отклонение конца балки и поперечную силу на конце балки, если приложить напряжение 10 В.

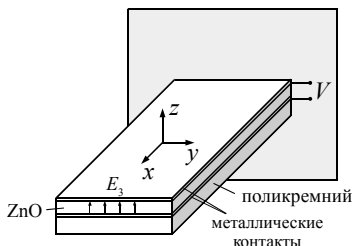


Рис. 6.4. Биморфный пьезоэлектрический элемент

Параметры слоев ZnO и Si

Параметр	ZnO	poly-Si
Ширина, мкм	20	20
Толщина, мкм	1	2
Модуль Юнга, ГПа	160	160
Пьезоэлектрическая постоянная d_{31} , Кл/Н	$5 \cdot 10^{-12}$	—

Решение

1. В данном частном случае ось поляризации z перпендикулярна лицевой поверхности балки. Ось x расположена вдоль балки. Электрическое поле прикладывается вдоль оси z , вызывая механическое напряжение в направлении оси x .

Продольная деформация

$$e_{\text{прод}} = e_1 = d_{31}E_3 = d_{31}V/t_1.$$

Радиус кривизны балки определяется выражением (6.3), максимальное поперечное отклонение конца балки выражением (6.4):

$$\delta(x=l) = \frac{l^2 d_{31} E_3 (t_1 + t_2) E_1 S_1 E_2 S_2}{4(E_1 J_1 + E_2 J_2)(E_1 S_1 + E_2 S_2) + (t_1 + t_2)^2 E_1 S_1 E_2 S_2} = 2,778 \text{ мкм},$$

где $S_1 = t_1 w$, $S_2 = t_2 w$, $l = 500$ мкм, $d_{31} = 5 \cdot 10^{-12}$ Н/м, $E_3 = V/t_1 = 10^7$ В, $t_1 = 1$ мкм, $t_2 = 2$ мкм, $w = 20$ мкм, $E_1 = E_2 = 160$ ГПа, $J_1 = t_1^3 w/12$, $J_2 = t_2^3 w/12$.

2. Поперечная сила на конце балки $F = \delta(x=l)k$, где неизвестен коэффициент жёсткости k . Проанализируем поперечное сечение балки; нужно определить нейтральную ось многослойной структуры балки

$$z_N = \sum_i z_i E_i S_i / \sum_i E_i S_i ,$$

для двухслойной структуры балки, изображённой на рис. 6.5, нейтральная ось

$$z_N = \frac{z_1 E_1 S_1 + z_2 E_2 S_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2} ,$$

где $z_1 = t_2 + t_1/2$, $z_2 = t_2/2$.

Затем находим эквивалентный момент инерции сечения:

$$(EJ)_{\text{эКВ}} = \sum_i \left\{ E_i \left[J_i + z_i S_i (z_i - z_N) \right] \right\} .$$

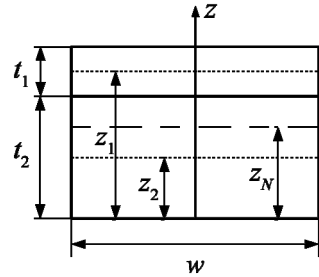


Рис. 6.5. К определению нейтральной оси двухслойной структуры балки

В случае двухслойной балки

$$(EJ)_{\text{эКВ}} = E_1 [J_1 + z_1 S_1 (z_1 - z_N)] + E_2 [J_2 + z_2 S_2 (z_2 - z_N)] .$$

Изгибающий момент балки

$$M = \frac{(EJ)_{\text{эКВ}}}{R} ,$$

вертикальное отклонение балки при $x = l$,

$$\delta(x=l) \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{Ml^2}{2(EJ)_{\text{эКВ}}} ,$$

коэффициент жёсткости

$$k = \frac{3(EJ)_{\text{эКВ}}}{l^3} .$$

Поперечная сила на конце балки

$$F = \delta(x=l)k = \frac{3M}{2l} = \frac{3(EJ)_{\text{эКВ}}}{2lR} .$$

Вычисления приводят к коэффициенту жёсткости $k = 0,173$ Н/м. В результате поперечная сила на конце балки $F = 0,481$ мкН.

Пример 2. Кусочек тонкой плёнки ZnO расположен около основания консольной балки, как показано на рис. 6.6. Плёнка ZnO расположена между двумя проводящими слоями. Длина всей балки равна l и состоит из двух сегментов l_A и l_B , сегмент A покрыт пьезоэлектрическим материалом, а сегмент B – нет. Устройство используется как сенсор, определить взаимосвязь между приложенной силой F и генерируемым напряжением V .

Решение

Обычно ось z осаждённой плёнки ZnO соответствует нормали к лицевой поверхности балки, на которую она осаждается. Это означает, что поперечная сила F будет вызывать механическое напряжение растяжения в плёнке пьезоэлектрика, что приведёт к появлению электрического напряжения V вдоль оси z . Сдвиговые механические напряжения здесь не будем учитывать.

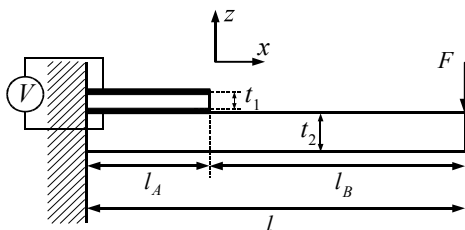


Рис. 6.6. Биморфный пьезоэлектрический сенсор

Из курса прикладной механики максимальное механическое напряжение вдоль консольной балки, вызванное внешней силой F :

$$T_{1\max} = \frac{F l t_2}{2 J_2},$$

где $T_{1\max} \parallel x$, J_2 – момент инерции сечения балки без плёнки ZnO. Для ZnO матрица пьезоэлектрических постоянных

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -11,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11,34 & 0 & 0 \\ -5,43 & -5,43 & 11,37 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\text{пКл}}{\text{Н}}.$$

В результате электрическая поляризация в направлении оси z равна

$$D_3 = d_{31}T_{1\max}.$$

Выходное напряжение $V = E_3t_1 = D_3t_1/\varepsilon = d_{31}Flt_1t_2/(2\varepsilon J_2)$.

Пример 3. Для такого же случая, как и в предыдущем примере, найти вертикальное отклонение конца балки, если устройство используется в качестве актюатора. Прикладываемое напряжение равно V .

Решение

При приложении напряжения V напряжённость электрического поля

$$E_3 = V/t_1.$$

Приложенное электрическое поле вызывает продольную деформацию вдоль оси x :

$$e_1 = d_{31}E_3.$$

Смещение на конце сегмента A ($\delta(x=l_A)$) может быть найдено, как в примере 1, при этом сегмент A будет изогнут в дугу. Угловое отклонение на конце пьезоэлектрического сегмента

$$\varphi(x=l_A) = l_A/R,$$

где R – радиус кривизны сегмента A .

Сегмент B не изгибается и остаётся прямым. Вертикальное отклонение конца балки в таком случае будет

$$\delta(x=l) = \delta(x=l_A) + l_B \sin[\varphi(x=l_A)].$$

Пример 4. На рис. 6.7 изображён тонкоплёночный сенсор с ZnO , имеющий конструкцию с компланарными электродами (лежащими в одной плоскости). Найти: 1) выходное напряжение V при приложении внешней силы F ; 2) если структура используется как актюатор, чему равны компоненты деформации, когда между электродами прикладывается напряжение V .

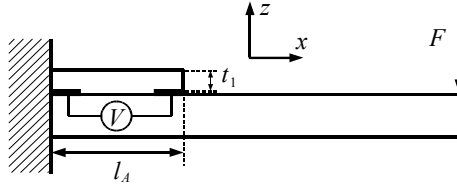


Рис. 6.7. Биморфный пьезоэлектрический сенсор с компланарными электродами

Решение

1. Приложенная внешняя сила F приводит к появлению двух компонентов механического напряжения: T_1 – нормального и T_5 – сдвигового.

Выходное электрическое поле связано с механическими напряжениями согласно выражению для прямого пьезоэлектрического эффекта (6.1, a). Поскольку внешнее электрическое поле отсутствует, то $E_{1,2,3} = 0$ и выражение (6.1, a) принимает вид

$$\begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -11,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11,34 & 0 & 0 \\ -5,43 & -5,43 & 11,37 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_5 \\ 0 \end{vmatrix} \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2,$$

откуда $D_1 = -11,34 \cdot 10^{-12} T_5$, $D_2 = 0$, $D_3 = -5,43 \cdot 10^{-12} T_1$. Поскольку выходное напряжение в данном случае связано с поляризацией в направлении оси x , то $V = D_1 l_A / \varepsilon$.

2. Определим деформацию, когда устройство используется как актюатор. Пусть напряжение V прикладывается вдоль оси x . Будем считать, что расстояние между электродами l_A , следовательно, величина напряжённости электрического поля $E_1 = V / l_A$. Приложенное электрическое поле порождает продольную деформацию вдоль оси x согласно уравнению (6.2а), поскольку внешние механические напряжения отсутствуют, то $T_{1-6} = 0$, и вектор деформаций будет представлять собой

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5,43 \\ 0 & 0 & -5,43 \\ 0 & 0 & 11,37 \\ 0 & -11,34 & 0 \\ -11,34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-12},$$

откуда видно, что в данном случае отсутствуют продольные компоненты деформации, а остаётся лишь одна сдвиговая компонента $e_5 = -11,34 \cdot 10^{-12} E_1$.

Пример 5. Получить выражение для смещения конца балки пьезоэлектрического актюатора, если приложенное напряжение равно V , а оси x и z на рис. 6.7 поменялись местами относительно предыдущего примера.

Решение

Напряжённость электрического поля вдоль оси z : $E_3 = V / l_A$. Приложенное напряжение приводит к появлению продольной деформации e_3 согласно выражению

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5,43 \\ 0 & 0 & -5,43 \\ 0 & 0 & 11,37 \\ 0 & -11,34 & 0 \\ -11,34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix} \times 10^{-12},$$

где остаются только продольные компоненты деформации $e_{1,2,3}$. В данном примере нас интересует только деформация $e_3 = d_{33}E_3 = 11,37 \cdot 10^{-12} E_3$.

Для того чтобы получить выражение для смещения конца балки, нужно в формуле (6.3) для радиуса кривизны деформацию $e_{\text{прод}}$ заменить на e_3 . Затем нужно найти смещение конца балки аналогично примеру 3.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Пьезоэлектрический датчик силы имеет две конфигурации, изображённые на рис. 6.8, *a* и *б*. Определить выражение для выходного напряжения для двух случаев.

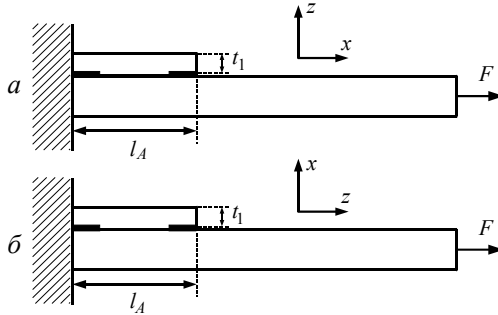


Рис. 6.8. Пьезоэлектрический датчик силы для задачи 6.1, конфигурации (*a*) и (*б*)

6.2. Пьезоэлектрический актюатор имеет конфигурацию, изображённую на рис. 6.9. Определить выражение для результирующего смещения конца балки, если между электродами прикладывается напряжение V .

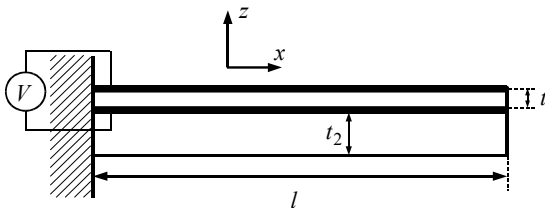


Рис. 6.9. Пьезоэлектрический актюатор для задачи 6.2

6.3. Тонкий лист изготовлен из пьезоэлектрического материала с поперечным сечением $w \times t$ и пьезоэлектрической постоянной d_{31} (рис. 6.10). Лист поляризован в направлении оси z и подвергается изгибающим моментам M , которые действуют на его края. Полная де-

формация $e_t = e_1$ измеряется на одной из сторон листа из пьезоэлектрика. Рассчитать генерируемое напряжение V .

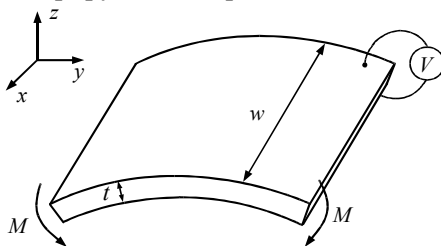


Рис. 6.10. Лист из пьезоэлектрика для задачи 6.3

6.4. Определить механическую деформацию в направлении оси z (рис. 6.10), если на лист действует сила $F = 500$ мкН в присутствии внешнего электрического поля $E_3 = 100$ В/м (вектор силы и напряжённости параллельны). Модуль Юнга материала $E = 48$ ГПа, пьезоэлектрическая постоянная $d_{33} = 360 \cdot 10^{-12}$ м/В. Площадь поперечного сечения $S = 10^{-8}$ м².

6.5. Рассчитать коэффициент электромеханической связи для предыдущей задачи, если $\epsilon_{33} = 15$ нФ/м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. *Bao M.* Analysis and Design Principles of MEMS Devices. – Amsterdam: Elsevier. 2005. – 328 pp.
2. *Lee K.B.* Principles of Microelectromechanical Systems. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 2011. – 667 pp.
3. *Allen J.J.* Micro Electro Mechanical System Design. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group. 2005. – 496 pp.
4. *Liu C.* Foundations of MEMS. – Upper Saddle River: Prentice Hall. 2012. – 560 pp.
5. *Lobontiu N., Garcia E.* Mechanics of Microelectromechanical Systems. – Boston: Kluwer Academic Publishers. 2005. – 405 pp.

Дополнительная

1. *Zook J.D., Burns D.W., Guckel H., Sniegowski J.J., Engelstad R.L., Feng Z.* Characteristics of polysilicon resonant microbeams // *Sensors and Actuators A*. – 1992. – Vol. 35. – P. 51–59.
2. *Leus V., Elata D.* Fringing field effect in electrostatic actuators // Technical Report ETR-2004-2, Technion (Haifa, Israel, 2004).
3. *Драгунов В.П., Остертак Д.И.* Электростатические взаимодействия в МЭМС с плоскопараллельными электродами. Часть I. Расчёт ёмкостей // *Нано- и микросистемная техника*. – 2010. – №7 (120). – С. 37–41.
4. *Драгунов В.П., Остертак Д.И.* Электростатические взаимодействия в МЭМС с плоскопараллельными электродами. Часть II. Расчёт электростатических сил // *Нано- и микросистемная техника*. – 2010. – №8 (121). – С. 40–47.
5. *Драгунов В.П., Остертак Д.И.* Предельные характеристики микроэлектромеханических преобразователей энергии // *Научный вестник НГТУ*. – 2009. – №1 (34). – С. 129–141.
6. *Драгунов В.П., Колчужин В.А., Остертак Д.И.* Влияние краевых эффектов на электрическую ёмкость в МЭМС // *Доклады АН ВШ РФ*. – 2009. – №2 (13). – С. 97–105.
7. *Драгунов В.П., Остертак Д.И.* Электростатические взаимодействия в МЭМС со встречно-штыревой структурой // *Доклады АН ВШ РФ*. – 2009. – №1 (12). – С. 99–106.
8. *Драгунов В.П., Доржиев В.Ю.* Начальные условия и динамический pull-in эффект в МЭМС с изменяющимся межэлектродным зазором // *Нано- и микросистемная техника*. – 2015. – №10 (183). – С. 31–41.
9. *Драгунова Л.С., Драгунов В.П.* Влияние начальных условий на поведение двухэлектродных микроэлектромеханических систем // *Известия Томского политехнического университета*. – 2014. – Т. 325. – №4. – С. 142–148.
10. *Драгунов В.П., Драгунова Е.В.* Особенности функционирования МЭМ систем // *Нано- и микросистемная техника*. – 2015. – № 6 (179). – С. 43–52.

Приложение

1. Жёсткость параллельно и последовательно соединённых упругих элементов

а) Параллельно соединённые упругие элементы

При параллельном соединении упругих элементов (рис. П1, а) общая сила упругости F складывается из упругих сил первой F_1 и второй F_2 пружин:

$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x,$$

при этом смещение x для обеих сил одинаковое.

В результате общая жёсткость $k_{\text{общ}}$ упругих элементов является суммой жёсткостей отдельных элементов:

$$k_{\text{общ}} = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

б) Последовательно соединённые упругие элементы.

При последовательном соединении упругих элементов (рис. П1, б) одна и та же сила $F = k_1 x_1 = k_2 x_2$ действует на упругие элементы, а общее смещение $x_{\text{общ}}$ является суммой x_1 и x_2 :

$$x_{\text{общ}} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2},$$

таким образом, в случае параллельного соединения упругих элементов, складываются обратные величины жёсткостей:

$$\frac{1}{k_{\text{общ}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}.$$

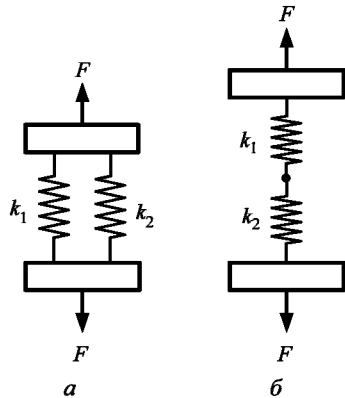
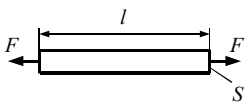
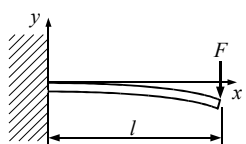
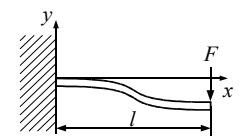
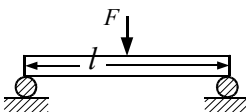
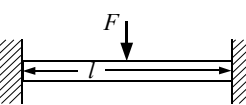
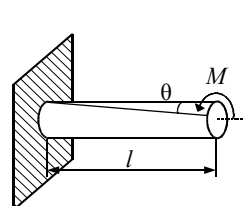
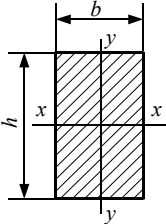
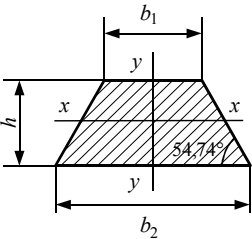
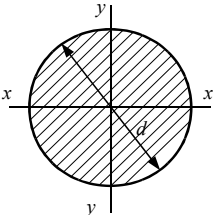


Рис. П1. Параллельное и последовательное соединение упругих элементов

2. Жёсткости наиболее распространённых упругих элементов

Вид нагрузки	Геометрия	Формула
Одноосное растяжение		$k_x = \frac{ES}{l},$ E – модуль Юнга
Консольная балка с силой, сосредоточенной на конце		$k_y = \frac{3EJ}{l^3},$ J – момент инерции сечения
Направляемая балка с концентрированной силой (S-образный изгиб)		$k_y = \frac{12EJ}{l^3}$
Балка на двух опорах		$k_y = \frac{48EJ}{l^3}$
Жёсткозашемлённая балка		$k_y = \frac{192EJ}{l^3}$
Жёсткость торсионного упругого элемента		$k_\theta = \frac{M}{\theta} = \frac{GJ_\rho}{l},$ k_θ – угловая жёсткость, G – модуль сдвига, J_ρ – полярный момент инерции сечения

3. Моменты инерции сечения наиболее распространённых упругих элементов

Вид сечения	Геометрия	Формула
Прямоугольное		$J_x = \frac{bh^3}{12}, J_y = \frac{b^3h}{12};$ $J_p = \frac{hb^3}{16} \left[\frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right],$ в формуле для J_p $h \geq b$
Трапецевидное		$J_x = \frac{h^3 (b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2)}{36(b_1 + b_2)},$ $J_y = \frac{h(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)}{48}$
Круглое		$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64};$ $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Динамические свойства элементов МЭМС	5
1.1. Свободные колебания незатухающей системы	5
1.1.1. Частота колебаний консольной балки с массой на конце	7
1.1.2. Частота колебаний массы, подвешенной на двух балках	8
1.1.3. Частота колебаний торсионной структуры	9
1.1.4. Свободные колебания механической системы с двумя степе- нями свободы	10
1.2. Колебания механической системы с демпфированием	12
1.3. Вынужденные колебания механической системы	15
1.3.1. Резонансная частота	18
1.3.2. Фазовый сдвиг при резонансе	18
1.3.3. Добротность колебательной системы	18
Задачи для самостоятельного решения	21
2. Эффекты масштабирования в МЭМС	22
2.1. Масштабирование геометрических размеров	22
2.2. Масштабирование механических систем	24
2.3. Масштабирование температурных систем	26
2.4. Масштабирование флюидных систем	29
2.5. Масштабирование электрических систем	32
2.6. Масштабирование оптических систем	36
2.7. Масштабирование химических и биологических систем	36
2.8. Вычислительные проблемы при масштабировании	37
2.9. Свойства материалов при масштабировании	38
2.10. Новые физические явления при масштабировании	39
Задачи для самостоятельного решения	40
3. Демпфирование колебаний в МЭМС	40
3.1. Механизмы демпфирования	41
3.2. Вязкое демпфирование	43

3.3. Демпфирование со сдвливающимся слоем	45
3.3.1. Линейное уравнение Рейнольдса для «сжимаемого» газа	47
3.3.2. Линейное уравнение Рейнольдса для «несжимаемого» газа	47
3.4. Демпфирование со сдвливающимся слоем для параллельных пластин	47
3.4.1. Демпфирование в случае «сжимаемого газа»	48
3.4.2. Влияние демпфирования со сдвливающимся слоем на ди- намические характеристики колеблющихся систем	50
3.4.3. Демпфирование в случае «несжимаемого газа»	50
3.4.4. Влияние амплитуды колебаний пластины на коэффициент демпфирования	55
3.5. Демпфирование со скользящим слоем	56
3.5.1. Базовые уравнения	56
3.5.2. Модели демпфирования	58
Задачи для самостоятельного решения	61
4. Электростатические преобразователи	62
4.1. Достоинства и недостатки электростатических преобразователей	62
4.2. Принцип функционирования	63
4.3. Электростатические силы в МЭМС	63
4.3.1. Нормальная составляющая электростатической силы	64
4.3.2. Латеральная (тангенциальная) составляющая электростати- ческой силы	65
4.3.3. Электростатические силы при постоянном заряде	66
4.3.4. Влияние краевых эффектов на электрическую ёмкость и электростатические силы	67
4.4. Плоскопараллельный актюатор	73
4.4.1. Эффект схлопывания (Pull-in effect)	73
4.4.2. Способы устранения эффекта схлопывания	76
4.5. Встречно-штыревые (гребенчатые) актюаторы	79
4.5.1. Поперечная встречно-штыревая конструкция актюатора	80
4.5.2. Продольная встречно-штыревая конструкция актюатора	82
4.5.3. Эффект электростатического размягчения (electrostatic spring-softening effect)	83
Задачи для самостоятельного решения	85
5. Электромагнитные преобразователи	90
5.1. Достоинства и недостатки	90
5.2. Принцип функционирования	90
5.3. Магнитное преобразование	93

5.4. Магнитно-электромагнитное преобразование	95
Задачи для самостоятельного решения	99
6. Пьезоэлектрические преобразователи	100
6.1. Достоинства и недостатки	100
6.2. Эффект пьезоэлектричества	100
6.2.1. Математическое описание эффекта пьезоэлектричества.....	101
6.2.2. Обратный эффект пьезоэлектричества	103
6.3. Модель пьезоэлектрического балочного актюатора.....	104
Задачи для самостоятельного решения	112
Список литературы	114
Приложение	115

Остертак Дмитрий Иванович

МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 26.04.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 60 экз. Уч.-изд. л. 6,97. Печ. л. 7,5. Изд. 346/15. Заказ № 662
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20