Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Д. БЕКАРЕВА

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов III курса ФПМИ направления
«Прикладная информатика и математика» (01.03.02)

НОВОСИБИРСК
2016

УДК 519.216(075.8)
Б 42

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент *В.С. Карманов*,
канд. техн. наук, доцент *В.Ю. Щеколдин*

Работа подготовлена на кафедре теоретической и прикладной информатики

Бекарева Н.Д.
Б 42 Случайные процессы: учеб. пособие / Н.Д. Бекарева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 127 с.

ISBN 978-5-7782-3042-2

Настоящая работа опирается на курс лекций по теории вероятностей, поскольку теория случайных процессов – это интенсивно развивающийся раздел теории вероятностей, имеющий многочисленные приложения в различных областях знаний. Цель данного пособия – на доступном уровне изложить основные идеи и методы тех разделов теории случайных процессов, которые традиционно читаются на факультетах прикладной математики в вузах страны, помочь овладеть прикладными методами теории случайных процессов.

Курс лекций предназначен для студентов ФПМИ, но может быть полезен и для студентов других факультетов.

УДК 519.216(075.8)

ISBN 978-5-7782-3042-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Основные понятия случайных процессов.....5
1.1. Случайные функции и случайные процессы 5
1.2. Конечномерные распределения случайных процессов.....6
1.3. Моменты случайной функции.....11
1.4. Белый шум 18
1.5. Свойства ковариационной функции.....19
1.6. Стохастическая эквивалентность процессов 22
1.7. Гильбертово пространство случайных процессов.....24
Упражнения 24
2. Некоторые классы случайных процессов.....27
2.1. Нормальные (гауссовские) процессы 27
2.2. Стационарные случайные процессы.....29
2.3. Случайные процессы с некоррелированными приращениями.....30
2.4. Случайные процессы с независимыми приращениями 33
2.5. Марковские процессы 34
2.6. Пуассоновский процесс 37
2.7. Винеровский процесс.....39
Упражнения 42
3. Операции анализа над случайными функциями.....45
3.1. Средняя квадратическая сходимость. Лемма Лоэва 45
3.2. Средняя квадратическая непрерывность случайных функций 50
3.3. Дифференцирование случайных функций.....51
3.4. Интегрируемость случайных функций.....57

3.5. Стохастические дифференциальные уравнения (тип I) 63
3.6. Слабая средняя квадратическая сходимость. Обобщенные случайные функции 66
3.7. Эргодические случайные процессы 69
3.8. Стохастический интеграл от неслучайной функции 72
3.9. Стохастические интегралы как интегралы, содержащие белый шум 75
3.10. Стохастический интеграл по ортогональной стохастической мере 77
3.11. Стохастические интегралы от случайных функций 80
3.12. Другие виды стохастических интегралов от случайных функций 81
3.13. Формула ИТО 84
3.14. Стохастические дифференциальные уравнения (тип II) 86
Упражнения 89
4. Стационарные случайные процессы 93
4.1. Свойства стационарных случайных процессов (ССП) 93
4.2. Спектральная теория стационарных случайных функций 94
4.2.1. Спектральные характеристики стационарных процессов 94
4.2.2. Примеры стационарных последовательностей 97
4.2.3. Спектральное представление стационарных процессов 100
4.2.4. Примеры стационарных процессов 101
4.2.5. Спектры стационарных процессов 103
4.2.6. Свойства спектральной плотности 111
4.2.7. Стационарный белый шум 112
4.3. Линейные преобразования стационарных процессов 114
Упражнения 124
Библиографический список 126

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс (СП) – это математическая модель для описания случайных явлений, развивающихся во времени. При этом предполагается, что состояние процесса в текущий момент времени t есть случайная величина (сл. величина) или случайный вектор $X(t, \omega) \equiv X_t$, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P). Приведем формальное определение СП.

Определение. Пусть (Ω, F, P) – некоторое вероятностное пространство. Случайным процессом $X(t)$ называется семейство случайных величин $\{X(t, \omega), t \in T\}$, зависящих от параметра t. При этом параметр t интерпретируется как время.

Как и в теории вероятностей, где зависимость сл. величины от ω не указывается, зависимость $X(t, \omega)$ от ω также не принято указывать, и процесс $X(t, \omega)$ обозначают просто как $X(t)$, но при этом помнят, что значения сл. величин $X(t)$ принадлежат измеримому пространству $(R^k, B(R^k))$, $k \geq 1$, $B(R^k)$ – σ-алгебра борелевских множеств из R^k, $k \geq 1$.

Если t интерпретировать не как время, то СП называют случайной функцией (СФ). Везде далее оба термина используются в одинаковой мере, если временной характер параметра не играет существенной роли.

Как видно из определения случайного процесса, $X(t)$ – сл. величина при каждом фиксированном $t \in T$, которую везде далее будем обозначать как $X_t : X(t) \equiv X_t$ при фиксированном t и называть **сечением** СП. Итак, при фиксированном $t \in T$, $X_t : (\Omega,\ A) \to (R^k,\ B(R^k))$, $k \geq 1$. Множество значений, которые может принимать сл. величина X_t, $t \in T$, называется пространством состояний СП.

При фиксированном элементарном исходе $\omega \in \Omega$ СП $X(t)$ представляет собой неслучайную функцию аргумента $t \in T$. Она называется **реализацией** СП или его **траекторией**. Реализации СП $X(t)$ будем обозначать соответствующими малыми буквами: $x(t)$ или же символом $X(t,\ \omega)$, указывая тем самым, что значение параметра ω зафиксировано и $X(t,\ \omega)$ является только функцией переменной t.

Множество всех реализаций СП называется фазовым пространством СП.

Таким образом, случайный процесс можно рассматривать либо как совокупность сечений – сл. величин X_t, $t \in T$, либо как совокупность неслучайных функций $x(t)$ – траекторий процесса.

В различных задачах используются оба этих представления.

Определение. Процесс $X(t)$, $t \in T$, называется регулярным, если его траектории в каждой точке $t \in T$ непрерывны справа (слева) и имеют конечные пределы слева (справа).

1.2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В теории случайных процессов, как и в теории вероятностей, среди вероятностных характеристик процессов наиболее важны функции распределения процессов.

Что понимается под функцией распределения процесса?

Зафиксируем некоторое значение параметра $t \in T$, получим сл. величину X_t. Функция распределения этой сл. величины X_t носит название одномерной функции распределения процесса $X(t)$, $t \in T$, обозначать которую будем символом $F(x,\ t)$. Итак, $F(x,\ t) \equiv F_{x_t}(x) =$ $= P\{X_t < x\}$.

Если зафиксировать два различных момента времени $t_1,\ t_2 \in T$, то совместная функция распределения сл. величин X_{t_1}, X_{t_2} носит название двумерной функции распределения процесса $X(t),\ t \in T$. Обозначают двумерную функцию распределения процесса символом $F(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)$, и по определению она равна $F(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2) \equiv$ $\equiv F_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1,\ x_2) = P\left\{X_{t_1} < x_1,\ X_{t_2} < x_2\right\}$.

Если зафиксировать произвольное количество значений $t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n \in T$, то совместная функция распределения случайных величин $X_{t_1},\ X_{t_2},\ ...,\ X_{t_n}$ называется n-мерной функцией распределения процесса $X(t),\ t \in T$. Обозначают n-мерную функцию распределения процесса символом $F(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ ...;\ x_n,\ t_n)$, и по определению она равна $F(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ ...;\ x_n,\ t_n) \equiv F_{X_{t_1} X_{t_2} \ldots X_{t_n}}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) =$ $= P\left\{X_{t_1} < x_1,\ X_{t_2} < x_2,\ ...,\ X_{t_n} < x_n\right\}$.

Из определений очевидно, что вероятностные характеристики процесса $X(t),\ t \in T$, определяются его сечениями – случайными величинами $X_t,\ t \in T$.

Наряду с функциями распределения случайных процессов используются плотности распределения или характеристические функции. Определения их и их обозначения для случайных процессов вводятся аналогично определению и обозначению функции распределения.

Так, одномерной плотностью распределения процесса называется плотность распределения любого из его сечений X_t; обозначение для функции плотности распределения также включает в себя символ t с тем, чтобы показать зависимость функции от параметра t: $f(x,\ t) \equiv f_{X_t}(t) \overset{\text{п.в.}}{=} F'(x,\ t)$.

Неслучайная функция $g(u_1,\ t_1;\ u_2,\ t_2;\ ...,\ u_k,\ t_k) = Me^{i\sum\limits_{j=1}^{k} u_j X_{t_j}} =$ $= \int\limits_{R^n} e^{i\sum\limits_{j=1}^{k} u_j x_j}\, dF(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ ...,\ x_k,\ t_k)$ называется характеристической функцией k-мерного распределения процесса $X(t)$.

В теории случайных процессов принята терминология, различающая процессы по типу сл. величин X_t и по виду параметрического множества T; она указана в следующей таблице.

	X_t – дискретная сл. величина	X_t – непрерывная сл. величина
T – дискретное множество	Цепи	Последовательности
T – непрерывное множество	Дискретные СП	Непрерывные СП

Рассмотрим примеры, поясняющие введенные выше понятия.

Пример 1. Пусть процесс $X(t)$ определен следующим образом: $X(t)=t\xi,\quad t\in T\equiv[0,1],\ \xi\succ Rav[-1,1]$. Описать множество сечений и траекторий процесса.

Решение. СП $X(t)$ при фиксированном $t\in[0,1]$ представляет собой сл. величину X_t, имеющую равномерное распределение на отрезке $[-t,\ t]$. Это следует из общего правила нахождения закона распределения функций сл. величин. Действительно, если обозначить за x и u реализации сл. величин X_t и ξ соответственно, то получим уравнение

$$x=tu,\ u=\frac{x}{t},\ |J|=\frac{1}{t},\ \Rightarrow f(x,\ t)=\frac{1}{t}f_\xi(u(x))=\frac{1}{2t}.$$

Или же $F(x,\ t)=P\{X_t<x\}=P\{t\xi<x\}=P\left\{\xi<\dfrac{x}{t}\right\}=\dfrac{x+t}{2t}\quad\Rightarrow$

$f(x,t)=\dfrac{1}{2t}$, т. е. случайная величина X_t имеет равномерное распределение на отрезке $[-t,\ t]$.

Траекториями процесса являются лучи, определенные на отрезке $[0,1]$, выходящие из начала координат со случайными тангенсами углов наклона, равными $\xi(\omega)$.

Процесс регулярен, так как все его траектории непрерывны.

Пример 2. Пусть $t \in T \equiv [0, \infty)$, а случайная функция $X(t)$ задана соотношением $X(t) = U_n$, $t \in [n, n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где U_n – последовательность конечных случайных величин. Описать траектории процесса. Является ли этот процесс регулярным?

Решение. Траектории процесса $x(t)$, $t \geq 0$, – кусочно-постоянные функции, испытывающие в точках $n = 1, 2, \ldots$ разрывы. По условию задачи эти функции непрерывны справа и имеют конечные левосторонние пределы, равные $\lim\limits_{t \to n-0} x(t) = U_{n-1}(\omega) < \infty \quad \forall \omega \in \Omega$. Здесь $U_{n-1}(\omega)$ уже не случайные величины, а некоторые числа – согласно договоренности о том, что переменная ω указывается аргументом только в случае, когда это фиксированное значение $\omega \in \Omega$. Следовательно, процесс является регулярным.

Пример 3. Пусть СП $X(t)$, $t \in T \equiv [0,1]$, задан соотношением $X(t) = \varphi(t)U$, U – некоторая сл. величина с функцией распределения $F_U(x)$, $\varphi(t) > 0$ – неслучайная функция. Найти конечномерные распределения процесса $X(t)$.

Решение. В соответствии с определением n-мерной функции распределения процесса $F(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)$ имеем:

$$F(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = P\left\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \ldots, X_{t_n} < x_n\right\} =$$

$$= P\{\varphi(t_1)U < x_1, \ldots, \varphi(t_n)U < x_n\} = P\left\{U < \frac{x_1}{\varphi(t_1)}, \ldots, U < \frac{x_n}{\varphi(t_n)}\right\} =$$

$$= P\left\{U < \min_k \frac{x_k}{\varphi(t_k)}\right\} = F_U\left(\min_k \frac{x_k}{\varphi(t_k)}\right).$$

В частности, при $n = 1$ $\quad F(x_1, t_1) \equiv F(x, t) = F_U\left(\dfrac{x}{\varphi(t)}\right)$ и, если сл. величина U – непрерывная сл. величина, то для нее существует плотность распределения $f_u(x) = F'_U(x)$, следовательно, и процесс имеет плотность одномерного распределения $f(x, t) = \dfrac{1}{\varphi(t)} f_U\left(\dfrac{x}{\varphi(t)}\right)$.

При $n \geq 2$ n-мерной плотности распределения процесс $X(t)$ не имеет, так как n-мерное распределение оказывается сосредоточенным на прямой и, следовательно, является вырожденным.

Пример 4. Пусть X, Y – независимые нормально распределенные с параметрами 0 и 0.5 (дисперсия) сл. величины. Случайный процесс определен соотношением $\xi(t) = (X+Y)/t$, $t > 0$. Вычислить для произвольного t вероятность $P\left\{\left|\xi(t)\right| \leq 3/t\right\}$.

Решение. Зафиксируем некоторое произвольное $t \in T$, тогда сл. величина $\xi_t = (X+Y)/t$ представима в виде суммы независимых нормально распределенных сл. величин, а потому сама имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $\frac{1}{t}$, т. е. $\xi_t \succ N\left(0, \frac{1}{t}\right)$. Тогда вероятность события $\left\{\left|\xi(t)\right| \leq 3/t\right\} \equiv \left\{\left|\xi_t\right| \leq 3/t\right\}$ при каждом фиксированном t означает вероятность отклонения нормально распределенной сл. величины от своего среднего не более чем на 3σ. Как известно, вероятность такого события равна 0.997: $P\left\{\left|\xi_t\right| \leq 3/t\right\} \simeq 0.997$. (Кто забыл правило трех сигм для нормально распределенной сл. величины, может получить результат вычислениями: $P\left\{\left|\xi_t\right| \leq 3/t\right\} = F(3/t,\ t) - F(-3/t,\ t) =$ $= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.997$.)

Пример 5. Пусть последовательность X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, такова, что ее сечения независимы в совокупности и имеют одинаковую функцию распределения $F(x, n)$. Найти семейство конечномерных распределений последовательности X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Решение. Имеем

$$F(x_1, n_1; x_2, n_2; \ldots; x_k, n_k) = P\left\{X_{n_1} < x_1, X_{n_2} < x_2, \ldots, X_{n_k} < x_k\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} P\left\{X_{t_j} < x_j\right\} = \prod_{j=1}^{k} F(x_j, n_j),\ k \geq 1.$$

Замечание. Последовательность X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, называют дискретным белым шумом.

Пример 6. Пусть случайная последовательность X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, определена рекуррентным соотношением $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$,

$n=1,\ 2,\ 3,...,\quad X_0=0,$ где $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых в совокупности гауссовских сл. величин с параметрами $M\varepsilon_n=0,$ $D\varepsilon_n=\sigma^2>0$ (дискретный белый гауссовский шум). Найти одномерную функцию распределения случайной последовательности $X_n,$ $n=1,\ 2,\ 3,...$

Решение. Рекуррентное соотношение в определении последовательности $X_n,\ n=1,\ 2,\ 3,...,$ можно развернуть и получить результат: $X_n=\varepsilon_1\alpha^{n-1}+\varepsilon_2\alpha^{n-2}+...+\varepsilon_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k\alpha^{n-k},\ n=1,\ 2,\ 3,...$ При каждом фиксированном $n\geq 1$ сл. величины X_n согласно условию задачи имеют нормальное распределение с параметрами $MX_n=0,\quad DX_n=$ $=\sigma^2\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha^{2(n-k)}=\begin{cases}\sigma^2\dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}, & |\alpha|\neq 1,\\ n\sigma^2, & |\alpha|=1.\end{cases}$ Следовательно, $F(x,\ n)=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{X_n}}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{D_{X_n}}}du,\ n=1,\ 2,\ 3,...$$

1.3. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Казалось бы естественным рассматривать СП $X(t),\ t\in T$, как **всю** совокупность случайных величин X_t. Но в общем случае это множество сл. величин может быть несчетным и невозможно построить совместный закон распределения **всех** его сечений. Даже если бы это оказалось возможным, то полученное выражение стало бы слишком громоздким и непригодным для вычислений. К счастью, многие прикладные задачи допускают решения, основанные на использовании лишь первых двух моментных характеристик СП – математического ожидания и ковариационной функции. Моментные характеристики процесса задают его простейшие свойства и вычисляются с помощью конечномерных распределений различных порядков. Отметим, что моментом

k-го порядка СП $X(t)$ называется k-й момент его сечений X_t (речь идет о любых моментах – начальных, центральных и т. д.).

Рассмотрим более подробно начальный момент первого порядка и центральный момент второго порядка – иначе говоря, математическое ожидание и ковариацию сечений процесса.

Определение. Математическим ожиданием k-мерного процесса $X(t)$, $t \in T$, называют неслучайную k-мерную же функцию $m_X(t)$ переменной $t \in T$, которая при всех $t \in T$ равна математическому ожиданию его сечений X_t.

Итак, $m_X(t) = MX_t = \int\limits_{R^k} x dF(x, t)$, $k \geq 1$.

Функцию $m_X(t)$, $t \in T$, интерпретируют как усредненную реализацию процесса $X(t)$.

Процесс $X(t)$, $t \in T$, называют центрированным, если его математическое ожидание равно нулю, т. е. $m_X(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T$.

Определение. Ковариационной функцией (функцией ковариаций) k-мерного процесса, $X(t)$, $t \in T$, $k \geq 1$, называют неслучайную матричную функцию $K_X(t_1, t_2)$ скалярных переменных $t_1, t_2 \in T$, значения которой при любых фиксированных t_1, t_2 равны ковариациям двух k-мерных сл. величин X_{t_1}, X_{t_2}:

$$K_X(t_1, t_2) = M \overset{\circ}{X}_{t_1} \overset{\circ}{X}{}_{t_2}^{m} = M\left(X_{t_1} - m_X(t_1)\right)\left(X_{t_2} - m_X(t_2)\right)^m$$

(при $k = 1$ знак транспонирования в формуле не нужен).

Иначе говоря,

$$K_X(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^1 X_{t_2}^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^1 X_{t_2}^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^1 X_{t_2}^k\right) \\ \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^2 X_{t_2}^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^2 X_{t_2}^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^2 X_{t_2}^k\right) \\ . & . & & . \\ \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^k X_{t_2}^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^k X_{t_2}^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_{t_1}^k X_{t_2}^k\right) \end{pmatrix},$$

где X_t^j, $j=1, 2, ..., k$, – компоненты сл. вектора X_t.

Если $t_1 = t_2 = t$, то ковариационная функция называется ковариационной матрицей, которую обозначают как $D_X(t) \equiv K_X(t, t)$ и называют дисперсией СП $X(t)$.

Таким образом,

$$D_X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}\left(X_t^1 X_t^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_t^1 X_t^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_t^1 X_t^k\right) \\ \operatorname{cov}\left(X_t^2 X_t^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_t^2 X_t^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_t^2 X_t^k\right) \\ . & . & & . \\ \operatorname{cov}\left(X_t^k X_t^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_t^k X_t^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_t^k X_t^k\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} DX_t^1 & \operatorname{cov}\left(X_t^1 X_t^2\right) & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_t^1 X_t^k\right) \\ \operatorname{cov}\left(X_t^2 X_t^1\right) & DX_t^2 & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_t^2 X_t^k\right) \\ . & . & & . \\ \operatorname{cov}\left(X_t^k X_t^1\right) & \operatorname{cov}\left(X_t^k X_t^2\right) & \ldots & DX_t^k \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Пусть $X(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t)$, $t \in T$, где ξ_k – действительные некоррелированные сл. величины с известными параметрами $M\xi_k$, $D\xi_k$, а $\varphi_k(t)$ – заданные на T детерминированные функции. Найти $m_X(t)$, $D_X(t)$, $K_X(t, s)$.

Решение. В соответствии с определениями имеем

$$m_X(t) = M\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k \varphi_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k \varphi_k(t);$$

$$K_X(t,\ s) = \mathrm{cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t),\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(s)\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{cov}(\xi_k,\ \xi_i)\varphi_k(t)\varphi_i(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \varphi_k(t)\varphi_k(s);$$

$$D_X(t) = K_X(t,\ t) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k {\varphi_k}^2(t).$$

Пример 8. Случайный процесс $N(t)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. $N(t)$ определен $\forall t \in T = [0,\ +\infty)$.

2. $P\{N(0) = 0\} = 1$.

3. Для любых фиксированных $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p$ сл. величины $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, ..., N_{t_p} - N_{t_{p-1}}$ независимы.

4. В случайные моменты времени происходит приращение значения функции $N(t)$ на единицу, причем для любого момента времени $t \geq 0$ $P\{(N(t+\Delta t) - N(t)) = 1\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$ и $\lambda > 0$ – постоянное для данного процесса число.

Найти одномерное распределение процесса $N(t)$.

Решение. Введем обозначения. Разность сл. величин $N_{t+\Delta t} - N_t$ обозначим через ΔN_t. Это случайное приращение процесса за время Δt. Событие $\{N_t = n\}$ означает, что «число единичных приращений за время t равно n», иначе – «число событий за время t равно n», если считать приращение на единицу значения функции $N(t)$ событием. Положим $p_n(t) = P\{N_t = n\}$, $n = 0, 1, 2\ldots$ Задача состоит в отыскании $p_n(t)$ для $n = 0, 1, 2\ldots$ и всех $t \geq 0$.

Выразим событие $\{N_{t+\Delta t} = n\}$ следующим образом:
$\{N_{t+\Delta t} = n\} = \{N_t = n\}\{\Delta N_t = 0\} + \{N(t) = n-1\}\{\Delta N_t = 1\}$. По условию 3 задачи, полагая $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$, получаем, что случайные величины $N_t \equiv N_{t_1} - N_{t_0}$, $\Delta N_t \equiv N_{t_2} - N_{t_1}$ независимы. Поэтому пары событий в правой части записанного выше равенства также независимы.

По условию 4 задачи $P\{\Delta N_t = 1\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $P\{\Delta N_t = 0\} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$. Учитывая все сказанное, имеем:

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)(1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)) + p_{n-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t)),\ \Delta t \to 0 \Leftrightarrow$$

$$p_n(t+\Delta t) - p_n(t) = \lambda\Delta t\left[(-p_n(t)) + p_{n-1}(t)\right] + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0.$$

Деля обе части полученного равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для искомых вероятностей: $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, с начальными условиями $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Дифференциальное уравнение решаем рекуррентно, считая, что на n-м шаге значение $p_{n-1}(t)$ уже известно.

Пусть $n = 0$. Дифференциальное уравнение принимает вид $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ при ограничении $p_0(0) = 1$. Решая это уравнение, перепишем его в виде $\dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \Rightarrow \dfrac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda dt \Rightarrow$

$\ln p_0(t) = -\lambda t + C \ \Rightarrow\ p_0(t) = Ce^{-\lambda t}$. Условие $p_0(0) = 1$ дает для C значение, равное единице, окончательно имеем $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Это вероятность того, что в промежутке $(0, t]$ не произойдет ни одного события, иначе – функция $N(t)$ не изменила своего значения в этом промежутке.

Пусть теперь $n = 1$. При этом значении n получаем линейное неоднородное уравнение с начальным условием: $p_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda p_0(t)$, $p_1(0) = 0$. Общее решение этого неоднородного уравнения, как известно, представляет собой сумму двух решений: общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $p_1(t) = Ce^{-\lambda t}$. Частное решение неоднородного уравнения, найденное методом вариации постоянной, имеет вид $p_1(t) = \lambda te^{-\lambda t}$. Тогда общее решение неоднородного уравнения получаем в виде $p_1(t) = Ce^{-\lambda t} + \lambda te^{-\lambda t}$. Начальное условие $p_1(0) = 0$ дает для C нулевое значение, $C = 0$. Окончательно имеем: $p_1(t) = \lambda te^{-\lambda t}$ – это вероятность того, что в промежутке времени (0, t] произойдет ровно одно событие.

Аналогичными рассуждениями приходим к результату:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Полученная формула выражает соответствие между значениями сл. величины N_t в произвольные фиксированные моменты времени t и вероятностями, с которыми эти значения сл. величина N_t может принимать, т. е. мы получили одномерный закон распределения сл. величины N_t, а следовательно, и одномерный закон распределения процесса $N(t)$, $t \geq 0$, – это распределение Пуассона с параметром λt. Поставленная задача решена.

Случайный процесс $N(t)$, $t \geq 0$, называется пуассоновским. Параметр λ трактуется как среднее число единичных приращений в единицу времени.

Пример 9. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию действительного ступенчатого процесса $X(t)$, который скачком меняет свое значение в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток интенсивности λ, а в промежутках между этими моментами сохраняет неизменные значения, представляющие собой независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и постоянными дисперсиями σ^2.

Решение. Прежде сделаем замечание относительно термина «пуассоновский поток». Если считать в задаче событием изменение значения процесса в случайный момент времени t, то вероятность числа таких событий, происшедших за промежуток времени $(0,\ t]$, вычисляется по закону Пуассона (см. предыдущий пример).

Очевидно, что $m_X(t) = MX_t = 0$, поскольку в любой момент времени сечением процесса будет сл. величина с нулевым математическим ожиданием. Ковариационная функция $K_X(t_1, t_2) = M \overset{\circ}{X}_{t_1} \overset{\circ}{X}_{t_2} = MX_{t_1} X_{t_2}$, причем процесс скалярный ($n = 1$). Введем вспомогательную сл. величину Y: $Y = 0$, если в промежутке $(t_1,\ t_2]$ $X(t)$ сохраняет постоянное значение, и $Y = 1$, если в промежутке $(t_1,\ t_2]$ процесс $X(t)$

хотя бы раз изменил значение. В примере 8 получена формула для вычисления вероятностей событий {в промежутке времени $(0,\ t]$ изменение значения процесса произошло ровно k раз}, иначе – событий {число точек, в которых произошло изменение значения процесса в промежутке времени $(0,\ t]$, равно k}, она имеет вид P {в промежутке времени $(0,\ t]$ изменение значения процесса произошло ровно k раз} = $p_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k \ge 0$. На основании этой формулы легко получить вероятность события {число точек из промежутка $(t_1,\ t_2]$, в которых произошло изменение значений процесса, равно k}. Обозначим вероятность этого последнего события через $p_k(t_2 - t_1)$: $p_k(t_2 - t_1) = \dfrac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$, $0 < t_1 < t_2$, поскольку $(t_1,\ t_2] = (0,\ t_2] - (0,\ t_1]$ и по условию 3 примера 8 получаем $N_{t_2 - t_1} = N_{t_2} - N_{t_1}$. Но тогда можно вычислить вероятность событий $\{Y = 0\}$, $\{Y = 1\}$: $P(Y = 0) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = p_0$, $P(Y = 1) = 1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = p_1$.

Получили закон распределения сл. величины Y в виде ряда распределения.

Заметим, что ряд распределения для дискретной сл. величины часто записывают в виде так называемой обобщенной плотности распределения – формулы, содержащей множителем δ-функцию: $f(y) = \sum\limits_k p_k \delta(y - k)$ и k – значения дискретной сл. величины. Для сл. величины Y эта функция имеет вид $f(y) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \delta(y) + (1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)}) \delta(y - 1)$.

Теперь для вычисления $K_X(t_1,\ t_2)$ можно применить формулу полного математического ожидания $M\left[M(\xi|\eta)\right] = \int M(\xi|y)\, dF(x|y)$:

$$K_X(t_1,\ t_2) = MX_{t_1}X_{t_2} = M\left[M\left(X_{t_1}X_{t_2} \mid Y\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} M\left(X_{t_1}X_{t_2} \mid y\right) dF(x|y) =$$

$$= M\left(X_{t_1}X_{t_2}\mid 0\right)e^{-\lambda(t_2-t_1)} + M\left(X_{t_1}X_{t_2}\mid 1\right)\left(1-e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right) =$$
$$= \sigma^2 e^{-\lambda(t_2-t_1)} + 0\left(1-e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right) = \sigma^2 e^{-\lambda(t_2-t_1)},$$

так как $M\left(X_{t_1}X_{t_2}\mid 0\right)=\sigma^2$, $M\left(X_{t_1}X_{t_2}\mid 1\right)=MX_{t_1}MX_{t_2}=0$.

Задача решена.

Вернемся к определению ковариационной функции. Ковариационная функция СП $X(t)$ является вторым смешанным центральным моментом сл. величин X_{t_1} и X_{t_2}. Иногда вместо нее рассматривают второй смешанный начальный момент $R_X(t_1,\ t_2)\equiv MX_{t_1}X_{t_2}$. Эту функцию называют корреляционной функцией СП $X(t)$. Из теории вероятностей известно соотношение между этими функциями:

$$K_X(t_1,\ t_2)=R_X(t_1,\ t_2)-MX_{t_1}MX_{t_2}$$

или

$$R_X(t_1,\ t_2)=K_X(t_1,\ t_2)+MX_{t_1}MX_{t_2}.$$

Определение. Взаимной ковариационной функцией $K_{XY}(t_1,\ t_2)$ случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве и на одном и том же множестве T, называется ковариация их сечений X_{t_1}, Y_{t_2}, рассматриваемая как функция аргументов $t_1,\ t_2\in T$: $K_{XY}(t_1,\ t_2)=M\overset{\circ}{X}_{t_1}\overset{\circ}{Y}_{t_2}$, $\overset{\circ}{X}_{t_1}=X_{t_1}-m_X(t_1)$, $\overset{\circ}{Y}_{t_2}=Y_{t_2}-m_Y(t_2)$. Если для любых $t_1,\ t_2\in T$ $K_{XY}(t_1,\ t_2)=0$, то случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ называются некоррелированными. Если хотя бы для одной пары $t_1,\ t_2\in T$ $K_{XY}(t_1,\ t_2)\neq 0$, то $X(t)$, $Y(t)$ называются коррелированными случайными функциями.

1.4. БЕЛЫЙ ШУМ

Большое значение для теории сл. процессов и ее приложений имеет особый вид случайных функций, у которых ковариационная функция в качестве множителя содержит δ-функцию.

Определение. СП $X(t)$, $t \in T$, с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_X(t_1, t_2) = \nu(t_1)\delta(t_1 - t_2) = \nu(t_2)\delta(t_1 - t_2)$ называется белым шумом**.** Множитель $\nu(t)$ называется интенсивностью белого шума.

Очевидно, что дисперсия $D_X(t)$ белого шума бесконечна $\left(\delta(t_1 - t_2) = 0 \quad \forall t_1 \neq t_2 \quad \text{и} \quad \delta(t_1 - t_2) = \infty \quad \text{при} \quad t_1 = t_2\right)$, а его значения в двух сколь угодно близких точках некоррелированны.

В чистом виде белый шум не может существовать физически, для его реализации необходима бесконечная мощность. Поэтому понятие белого шума является математической абстракцией, удобной для построения теории. Практически можно говорить о большей или меньшей степени приближения случайной функции к белому шуму. Это может быть только в том случае, когда наименьший интервал между значениями аргумента, при которых значения случайной функции практически некоррелированны, называемый интервалом корреляции, достаточно мал. На практике для определения интервала корреляции часто пользуются формулой $\Delta\tau = \dfrac{1}{2\sigma_X^2} \max\limits_t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|K_X(t)\right| dt$ – это чисто практическая мера близости случайных функций к белому шуму.

Векторную случайную функцию $X(t)$ можно считать белым шумом, если все ее компоненты допустимо принять за белый шум.

Замечание. Ранее (см. примеры 5 и 6) был введен в рассмотрение белый шум с дискретным временем, т. е. последовательность центрированных независимых и, следовательно, некоррелированных сл. величин. В отличие от белого шума с непрерывным временем белый шум с дискретным временем является гильбертовым процессом (см. раздел. 1.7).

1.5. СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

1. $K_X(t_2, t_1) = K_X^m(t_1, t_2)$.

Действительно,

$$K_X(t_2, t_1) = K_X(t_2, t_1) = M \overset{\circ}{X}_{t_2} \overset{\circ}{X}{}^{m}_{t_1} =$$

$$= M\left(\overset{\circ}{X}_{t_1}\overset{\circ}{X}_{t_2}^m\right)^m = K_X^m(t_1,\ t_2).$$

Для скалярного процесса $K_X(t_2,\ t_1) = K_X(t_1,\ t_2)$.

2. Матрица $K_X(t_1,\ t_2)$ является неотрицательно определенной функцией $t_1,\ t_2$.

По определению таких функциональных матриц это означает, что $\forall N$, $\forall\ t_1,\ t_2,\ ...,\ t_N \in T$, и любых ненулевых векторов $u_1,\ ...,\ u_N$ той же размерности, что и СП $X(t)$, $\sum\limits_{p,q=1}^{N} u_p^m K_x(t_p,\ t_q)u_q \ge 0$. Проверим это неравенство:

$$\sum_{p,q=1}^{N} u_p^m K_X(t_p,\ t_q)u_q = M\sum_{p,q=1}^{N} u_p^m X_{t_p} X_{t_q}^m u_q =$$

$$= M\sum_{p,q=1}^{N}\left(u_p^m X_{t_p}\right)\left(u_q^m X_{t_q}\right)^m = M\sum_{p=1}^{N} u_p^m X_{t_p}\sum_{q=1}^{N} u_q^m X_{t_q} =$$

$$= M\left(\sum_{p=1}^{N} u_p^m X_{t_p}\right)^2 \ge 0.$$

3. $\left\|K_X(t_1,\ t_2)\ \right\|^2 \le \sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)$, где $\sigma_X^2(t) = trD_X(t)$. Нормой матрицы будем считать евклидову норму.

Это свойство называют неравенством Коши–Буняковского. Оно следует из неравенства Шварца для математического ожидания векторных сл. величин $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_k)^m$, $\eta = (\eta_1,\ \eta_2,\ ...,\ \eta_k)^m$: $\left\|M\xi\eta^m\right\|^2 \le M\xi^m\xi M\eta^m\eta$. Если в неравенстве Шварца в качестве ξ взять сл. величину $X_{t_1} - m_X(t_1)$, в качестве η – сл. величину $X_{t_2} - m_X(t_2)$, тогда $M\xi\eta^m = M\overset{\circ}{X}_{t_1}\overset{\circ}{X}_{t_2}^m = K_X(t_1,\ t_2)$;

$M\xi^m\xi = M\overset{\circ}{X}{}^m_{t_1}\overset{\circ}{X}_{t_1} = \sigma^2_X(t_1)$, $\quad M\eta^m\eta = M\overset{\circ}{X}{}^m_{t_2}\overset{\circ}{X}_{t_2} = \sigma^2_X(t_2)$, поскольку

$$M\overset{\circ}{X}{}^m_t\ \overset{\circ}{X}_t = \sum_{j=1}^{k} M\left(\overset{\circ}{X}{}^j_t\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} D_X(t) = trD_X(t).$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что для существования моментов второго порядка (а значит, и первого) достаточно выполнить условие: $M\left|X(t)\right|^2 < \infty \quad \forall t \in T$. Процессы, имеющие конечные моменты второго (следовательно, и первого) порядка, называются **гильбертовыми случайными процессами**.

4. Если $K_X(t_1,\ t_2)$ непрерывна в точках $t_1 = t_2$, то она непрерывна во всех точках квадрата $T\times T$.

Оценим разность:

$$\left\|K_X(t_1+h_1,\ t_2+h_2) - K_X(t_1,\ t_2)\ \right\| = \left\|M\left[\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1}\overset{\circ}{X}{}^m_{t_2+h_2} - \overset{\circ}{X}_{t_1}\overset{\circ}{X}{}^m_{t_2}\right]\right\| =$$

$$= \left\|M\left[\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1}\left(\overset{\circ}{X}_{t_2+h_2} - \overset{\circ}{X}_{t_2}\right)^m + \left(\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1} - \overset{\circ}{X}_{t_1}\right)\overset{\circ}{X}{}^m_{t_2}\right]\right\| \le$$

$$\le \left\|M\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1}\left(\overset{\circ}{X}_{t_2+h_2} - \overset{\circ}{X}_{t_2}\right)^m\right\| + \left\|M\left(\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1} - \overset{\circ}{X}_{t_1}\right)\overset{\circ}{X}{}^m_{t_2}\right\| \le$$

$$\le \sqrt{\sigma^2_X(t_1+h_1\ )M\left(\overset{\circ}{X}_{t_2+h_2} - \overset{\circ}{X}_{t_2}\right)^m\left(\overset{\circ}{X}_{t_2+h_2} - \overset{\circ}{X}_{t_2}\right)} +$$

$$+\sqrt{\sigma^2_X(t_2)M\left(\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1} - \overset{\circ}{X}_{t_1}\right)^m\left(\overset{\circ}{X}_{t_1+h_1} - \overset{\circ}{X}_{t_1}\right)}.$$

В последнем неравенстве использовано свойство трех ковариационных матриц.

Далее

$$M\left(\overset{\circ}{X}_{t+h}-\overset{\circ}{X}_t\right)^m\left(\overset{\circ}{X}_{t+h}-\overset{\circ}{X}_t\right)\le\left\|M\left(\overset{\circ}{X}_{t+h}-\overset{\circ}{X}_t\right)\left(\overset{\circ}{X}_{t+h}-\overset{\circ}{X}_t\right)^m\right\|\sqrt{k}=$$

$$=\left\|M\overset{\circ}{X}_{t+h}\overset{\circ}{X}{}^m_{t+h}-M\overset{\circ}{X}_{t+h}\overset{\circ}{X}{}^m_t-M\overset{\circ}{X}_t M\overset{\circ}{X}{}^m_{t+h}+M\overset{\circ}{X}_t\overset{\circ}{X}{}^m_t\right\|\sqrt{k}=$$

$$=\left\|K_X(t+h,\ t+h)-K_X(t+h,\ t)-K_X(t,\ t+h)+K_X(t,\ t)\right\|\sqrt{k},$$

где k – размерность процесса $X(t)$.

По условию все слагаемые в последнем выражении имеют пределы, равные $K_X(t,\ t)$, следовательно, это последнее соотношение не превосходит ε для любого неотрицательного ε, но тогда имеет место неравенство

$$\forall\varepsilon>0\quad\left\|K_X(t_1+h_1,\ t_2+h_2)-K_X(t_1,\ t_2)\right\|<\varepsilon.$$

Это свойство может быть сформулировано следующим образом: если ковариационная матрица процесса $D_X(t)$ непрерывна на параметрическом множестве T, то на множестве $T\times T$ непрерывной будет и ковариационная функция $K_X(t_1,\ t_2)$.

5. Пусть $X(t)$ – некоторый процесс и $\varphi(t)$ – неслучайная функция переменной t, $A(t)$ – матричная неслучайная функция и $Y(t)=$ $=A(t)X(t)+\varphi(t)$. Тогда $K_Y(t_1,\ t_2)=A(t_1)K_X(t_1,\ t_2)A^m(t_2)$ (проверить самостоятельно).

1.6. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕССОВ

В дальнейшем нам понадобится понятие стохастической эквивалентности случайных процессов. Пусть два процесса $X(t)$, $Y(t)$, $t\in T$, определены на одном и том же вероятностном пространстве и принимают значения в одном и том же измеримом пространстве, например в $(R^k,\ B(R^k))$, $k\ge 1$.

Определение. Случайные процессы $X(t), Y(t), t \in T,$ называются **стохастически эквивалентными в широком смысле**, если $\forall\ t_1, t_2, ..., t_N \in T,\ B_1, B_2, ..., B_N \in B(R^k),\ N \geq 1$, выполняется равенство $P\left\{X_{t_1} \in B_1,...,X_{t_N} \in B_N\right\} = P\left\{Y_{t_1} \in B_1,...,Y_{t_N} \in B_N\right\}.$

Это означает, что все конечномерные распределения процессов $X(t)$ и $Y(t)$ совпадают.

Определение. Если для каждого $t \in T \quad P\left\{X_t = Y_t\right\} = 1,$ то процессы называются **стохастически эквивалентными** или просто эквивалентными.

В этом случае процесс $Y(t)$ называют версией процесса $X(t)$ (или наоборот). Из эквивалентности следует эквивалентность в широком смысле, обратное утверждение в общем случае места не имеет.

Условие стохастической эквивалентности не означает, что процессы тождественны, – они могут иметь совершенно разные траектории. Для пояснения сути дела рассмотрим два процесса $X(t) = 0,$ $Y(t) = \begin{cases} 0,\ t \neq \omega, \\ 1,\ t = \omega, \end{cases}$ $t \in [0,1],\ \omega \in [0,1]$ и F – σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$. Процессы X и Y эквивалентны, так как $\left\{\omega : X(t) \neq Y(t)\right\} = \left\{\omega = t\right\} = \left\{t\right\}$. Мера Лебега одноточечного множества равна нулю, следовательно, $P\left\{X_t = Y_t\right\} = 1$ для любого $t \in T$. Но у этих процессов нет ни одной пары совпадающих траекторий: для всякого $\omega \in \Omega$ в точке $t^* = \omega$ по условию $X(t^*, \omega) \neq Y(t^*, \omega)$, поэтому $P\left\{\omega :\ X(t,\ \omega) = Y(t,\ \omega)\right\} = 0$ (еще раз напоминаем, что символом $X(t,\ \omega)$ обозначена траектория процесса $X(t),$ аналогично для процесса $Y(t)$).

Определение. Процессы $X(t), Y(t), t \in T,$ называются неотличимыми, если

$$P\left\{\sup_{t \in T} \left|X(t) - Y(t)\right| > 0\right\} = 0 .$$

1.7. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Заметим в заключение, что везде далее (как и раньше) мы будем рассматривать процессы с конечными вторыми моментами. В теории сл. процессов такие процессы называются гильбертовыми. Название объясняется тем, что множество сл. величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, F, P), центрированных и имеющих конечные моменты второго порядка, образуют гильбертово пространство H с нормой $\|\xi\| = (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}}$, $(\xi, \eta) = M(\xi\eta^*) = \mathrm{cov}(\xi, \eta)$. Случайный же процесс по определению – это семейство сл. величин. Условия $\xi, \eta \in H$, $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$ означают, что ξ и η – ортогональны. Понятие ортогональности играет важную роль в теории оценивания сл. величин.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить семейство реализаций СП $X(t) = (1+t^2)^{-1}u$, $t \in [a, b] \subset R$, u – скалярная сл. величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0.5$. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса.

2. Пусть $X(t) = \alpha t + \beta$, $t > 0$, α, β – независимые сл. величины с функциями распределения $F_\alpha(a)$, $F_\beta(b)$. Описать траектории процесса, найти конечномерные функции распределения процесса $X(t)$, $m_X(t)$, $K_X(t_1, t_2)$.

3. Найти вероятность того, что за время τ произойдет четное число скачков, если речь идет о пуассоновском процессе $N(t)$ с параметром λ.

4. Известна ковариационная функция $K_X(t, s) = \dfrac{1}{1+(t-s)^2}$. Найти $K_Y(t, s)$, если $Y(t) = e^{-t^2} X(t) + \sin 2t$.

5. Телеграфным сигналом называется процесс $X(t)$, $t \ge 0$, который с равными вероятностями может принимать лишь два значения: $+1$ и -1, причем число перемен знака за время $\tau = t - s$ не зависит от

предыстории процесса до момента s и представляет собой пуассоновский процесс $N(t)$ с параметром λ. Найти $K_X(t, s)$.

6. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию пуассоновского процесса $N(t)$ с параметром λ.

7. Определить n-мерный закон распределения пуассоновского процесса.

8. Пусть α, β – скалярные сл. величины с числовыми характеристиками $M\alpha = m_\alpha$, $M\beta = m_\beta$, $D\alpha = \sigma_\alpha^2$, $D\beta = \sigma_\beta^2$, $\operatorname{cov}(\alpha, \beta) = v$. Определить математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $X(t) = \alpha\cos\varphi t + \beta\sin\varphi t$, $t \in [0, \infty)$, $\varphi \in R$ – постоянна.

9. Пусть $X(t) = \alpha t + \beta t^2$, $t \in [0, \infty)$, α, β – независимые скалярные сл. величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0.25$. Найти $m_X(t)$, $K_X(t, s)$, $D_X(t)$, $f(x, t)$.

10. Пусть $X(t) \equiv X \ \forall t \in R$, причем X подчиняется показательному распределению с параметром $\lambda = 2$. Найти $m_X(t)$, $K_X(t, s)$, $D_X(t)$, $F(x, t; y, s)$.

11. Процесс задается формулой $X(t) = \alpha t^2$, $t > 0$, и сл. величина $\alpha \in Rav[0, 3]$. Найти одномерную функцию распределения и одномерную плотность процесса $X(t)$.

12. Случайный процесс $X(t)$ есть величина интервала времени между двумя последовательными скачками пуассоновского процесса $N(t)$ с параметром λ. Найти одномерную плотность процесса $X(t)$.

13. Пусть $X(t) = Vt + b$, где V – сл. величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m и σ, b – неслучайная константа. Найти $m_X(t)$, $K_X(t, s)$, $D_X(t)$, $f(x, t)$.

14. Пусть процесс $X(t)$ задан в виде $X(t) = \varphi(t, Y)$, где $t \in T$, Y – известная сл. величина с $f_Y(y)$. Записать выражения для $m_X(t)$, $K_X(t, s)$, $D_X(t)$, $f(x, t)$.

15. Пусть $X(t) = \alpha\cos(\beta t + \gamma)$, $t \in T$, α, β – известные параметры, а сл. величина γ равномерно распределена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найти одномерную функцию распределения процесса, $m_X(t)$, $K_X(t, s)$, $D_X(t)$.

16. Случайное гармоническое колебание задано в виде $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, где ω – неслучайная частота, а случайные амплитуды A и B независимы и подчиняются каждая закону распределения $N(0, \sigma)$. Найти одномерную и двумерную плотность процесса.

17. Пусть $X(t) = \alpha\cos(\beta t + \gamma),\ t \in T,\ \alpha,\ \beta$ – неотрицательные сл. величины с известным совместным законом распределения, а сл. величина γ не зависит от них и равномерно распределена на отрезке $\left[0, 2\pi\right]$. Найти одномерную функцию распределения процесса.

2. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. НОРМАЛЬНЫЕ (ГАУССОВСКИЕ) ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T \subset R$, называется гауссовским (нормально распределенным), если **все** его конечномерные распределения нормальны.

Напомним некоторые сведения из теории вероятностей.

Известно, что:

1) если k-мерный вектор ξ имеет нормальное распределение, то и все компоненты этого вектора также имеют нормальное распределение;

2) всякий подвектор гауссовского вектора является гауссовским;

3) если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ – **независимые** гауссовские сл. величины, то вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^{\text{т}}$ также является гауссовским (имеет многомерное нормальное распределение);

4) если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ – **независимые** гауссовские сл. величины, то сл. величина $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ также является гауссовской.

Вернемся к случайной функции $X(t)$, $t \in T$, имеющей нормальное распределение. Для начала пусть это будет скалярная функция. Для нее формула n-мерной плотности распределения запишется в виде

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x - m_X(t)^m \Sigma^{-1}(x - m_X(t))}, \quad x \in R^n,$$

где $m_X(t)$ – вектор математических ожиданий, $m_X(t) = (m_X(t_1), m_X(t_2), \ldots, m_X(t_n))^{\text{т}}$ и Σ – ковариационная матрица,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} K_X(t_1, t_1) & K_X(t_1, t_2) & \ldots & K_X(t_1, t_n) \\ K_X(t_2, t_1) & K_X(t_2, t_2) & \ldots & K_X(t_2, t_n) \\ . & . & . & . \\ K_X(t_n, t_1) & K_X(t_n, t_2) & \ldots & K_X(t_n, t_n) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Если же $X(t)$ – k-мерная функция, то внешне формула для плотности вероятности остается точно такой же, как для скалярной функции $X(t)$, но содержательный смысл векторов x, $m_X(t)$ и матрицы Σ в формуле плотности вероятности $f(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n)$ изменится: векторы $m_X(t)$ и x станут размерности kn – $x = \left(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k, x_2^1,\right.$ $\left. x_2^2, \ldots, x_2^k, \ldots, x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k\right)^{\text{T}}$, $m_X(t) = \left(m_X^1(t_1), \ldots, m_X^k(t_1), m_X^1(t_2), \ldots,\right.$ $\left. m_X^k(t_2), \ldots, m_X^1(t_n), \ldots, m_X^k(t_n)\right)^{\text{T}}$. В векторе x первые k компонент $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k$ – значения вектора X_{t_1}, следующие k компонент – значения вектора X_{t_2} и т. д. Аналогично для вектора $m_X(t)$.

Матрица Σ также изменит размерность, **каждый** элемент матрицы Σ из формулы (2.3) $K_X(t_i, t_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, будет уже не числом, а матрицей вида

$$K_X(t_i, t_j) = \begin{pmatrix} K_{X_1X_1}(t_i, t_j) & K_{X_1X_2}(t_i, t_j) & \ldots & K_{X_1X_k}(t_i, t_j) \\ K_{X_2X_1}(t_i, t_j) & K_{X_2X_2}(t_i, t_j) & \ldots & K_{X_2X_k}(t_i, t_j) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{X_kX_1}(t_i, t_j) & K_{X_kX_2}(t_i, t_j) & \ldots & K_{X_kX_k}(t_i, t_j) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, размерность матрицы $\Sigma - kn \times kn$.

2.2. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, называется стационарным в узком смысле, если любые n-мерные распределения сл. величин X_{t_k} и X_{t_k+h} одинаковы при всех h и всех t_k, $k = \overline{1,n}$. Это условие означает, что процесс $X(t)$ находится в вероятностном равновесии и момент начала наблюдения за ним не имеет значения. В частности, распределение сл. величин X_t одно и то же при всех t. Формально условие стационарности СП в узком смысле можно записать так:

$$F(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ ...;\ x_n,\ t_n) \equiv F(x_1,\ t_1+h;\ x_2,\ t_2+h;\ ...;\ x_n;\ t_n+h)$$

или, что то же самое,

$$f(x_1,\ t_1;\ ...;\ x_n,\ t_n) \equiv f(x_1,\ t_1+h;\ ...;\ x_n,\ t_n+h). \qquad (2.2)$$

При $n=1$ это условие имеет вид $f(x,\ t) = f(x,\ t+h)$. Полагая $h=-t$, получим $f(x,\ t) = f(x)$ – одномерное распределение стационарного СП не зависит от времени. Одномерное же распределение процесса определяет математическое ожидание процесса, следовательно,

$$m_X(t) = MX_t = m_X = \text{const}. \qquad (2.3)$$

При $n=2$ из условия стационарности (2.4) следует: $f(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2) = f(x_1,\ t_1+h;\ x_2,\ t_2+h)$. Полагаем $h=-t_1$, получаем $f(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2) = f(x_1;\ x_2,\ t_2-t_1) \equiv f(x_1;\ x_2,\ \tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

Следовательно, двумерное распределение стационарного СП зависит только от разности $t_2 - t_1 = \tau$. Но тогда и ковариационная функция процесса, определяемая двумерным законом распределения процесса, есть функция одного параметра τ:

$$K_X(t_1,\ t_2) \equiv K_X(t_2-t_1) = K_X(\tau). \qquad (2.4)$$

Условия (2.3), (2.4) зачастую проверить легче, чем условие (2.2).

Процесс $X(t)$, $t \in T$, называют стационарным в широком смысле, если он обладает конечными вторыми моментами (а значит, и первыми), и его математическое ожидание не зависит от времени, а ковариационная функция зависит только от разности $t_2 - t_1 = \tau$ $\forall t_1,\ t_2 \in T$.

Иначе, процесс $X(t)$, $t \in T$, является стационарным в широком смысле, если для него выполнены условия (2.5) и (2.6).

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле (что и было показано выше). Обратное утверждение справедливо только для гауссовских (нормальных) процессов.

Далее везде (кроме гл. 4) под словами «стационарный процесс» будем понимать случайный процесс, стационарный в узком смысле.

Простым примером стационарного процесса будет любой процесс, состоящий из независимых одинаково распределенных случайных величин.

Отметим в заключение, что для реальных процессов условия, определяющие стационарный процесс, являются весьма ограничительными, однако они выполняются на достаточно коротком интервале времени, в течение которого вероятностные характеристики процесса изменяются мало.

2.3. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, называется процессом с некоррелированным приращениями (СПНРП), если для любых непересекающихся промежутков $[t_1, t_2)$, $[t_3, t_4)$, $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$, соответствующие приращения $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_4} - X_{t_3}$ процесса $X(t)$ некоррелированны.

Таким образом, СП $X(t)$ будет СПНРП, если $\operatorname{cov}(X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_4} - X_{t_3}) = 0$.

Из этого определения следует, что приращения процесса с некоррелированными приращениями на любых конечных промежутках имеют конечные моменты второго порядка. При этом сам процесс может и не иметь конечных математического ожидания и моментов второго порядка.

Однако если в некоторый момент времени t_0 значение СПНРП $X(t)$ почти наверное равно нулю, $X_{t_0} \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, то $X(t)$ имеет конечные моменты первого и второго порядка, так как его значение в любой момент t совпадает с его приращением на промежутке $[t_0, t)$ при $t > t_0$ и его приращением на интервале $[t,\ t_0)$, взятом с противоположным знаком, при $t < t_0$.

Далее будем рассматривать только такие СПНРП, которые имеют конечные моменты первого и второго порядка. Из определения также следует, что значение X_t процесса $X(t)$ в любой момент t не коррелированно с его будущими приращениями на промежутках, следующих за моментом t_0, и с его прошлыми приращениями на промежутках, предшествующих моменту t_0: $M\,\overset{\circ}{X}_t\left(\overset{\circ}{X}_{t_2} - \overset{\circ}{X}_{t_1}\right)^{\mathrm{T}} = 0$ при $t_0 < t \le t_1 < t_2$ и $t_1 < t_2 \le t < t_0$.

Этот факт становится очевидным, если учесть, что $\overset{\circ}{X}_t \overset{\text{п.н.}}{=} X_t - X_{t_0}$ есть приращение процесса $X(t)$ на промежутке $[t_0,\ t)$, не пересекающемся с $[t_1,\ t_2)$ при значениях $t > t_0$, и взятое с противоположным знаком приращение процесса $X(t)$ на интервале $[t,\ t_0)$, не пересекающемся с $[t_1,\ t_2)$ при значениях $t < t_0$.

СПНРП описывают с помощью функции $k(t)$:

$$k(t) = \begin{cases} M\,\overset{\circ}{X}_t\,\overset{\circ}{X}{}_t^{\mathrm{T}} & \text{при} \quad t > t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t = t_0, \\ -M\,\overset{\circ}{X}_t\,\overset{\circ}{X}{}_t^{\mathrm{T}} & \text{при} \quad t < t_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Справедливо утверждение, что ковариационная функция процесса $X(t)$ и ковариационная матрица приращения $X_{t_2} - X_{t_1}$ процесса $X(t)$ на любом промежутке определяются следующими формулами:

$$K_X(t_1,\ t_2) = \begin{cases} k\left(\min(t_1,\ t_2)\right) & \text{при} \quad t_1, t_2 > t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t_1 \le t_0 \le t_2, \quad t_2 \le t_0 \le t_1. \\ -k\left(\max(t_1,\ t_2)\right) & \text{при} \quad t_1, t_2 < t_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$M\left(\overset{\circ}{X}_{t_2}-\overset{\circ}{X}_{t_1}\right)\left(\overset{\circ}{X}_{t_2}-\overset{\circ}{X}_{t_1}\right)^m = k(t_2)-k(t_1). \tag{2.7}$$

Из определения функции $k(t)$ ясно, что при значениях $t > t_0$ она представляет собой ковариационную матрицу значения процесса $X(t)$ в момент t, при значениях $t < t_0$ – взятую с противоположным знаком ковариационную матрицу значения процесса $X(t)$ в момент t. Приращение функции $k(t)$ на любом промежутке служит ковариационной матрицей приращения процесса $X(t)$ на промежутке. Из этих фактов следует, что $k(t)$ – неубывающая, неотрицательная при значениях $t > t_0$, неположительная при значениях $t < t_0$, равная нулю при $t = t_0$ функция.

Верно и обратное утверждение: если ковариационная функция СП $X(t)$ определяется формулой (2.5) и $k(t)$ при этом – функция с перечисленными выше свойствами, то $X(t)$ – СПНРП, значение которого в момент t_0 почти наверное равно 0.

Таким образом, возможность представления ковариационной функции процесса через функцию $k(t)$ с указанными выше свойствами является необходимым и достаточным условием того, что $X(t)$ – СПНРП и его значение при $t = t_0$ равно нулю почти наверное.

Полагая в дальнейшем функцию $k(t)$ непрерывной и дифференцируемой, выражение для функции $K_X(t_1, t_2)$ можно переписать при значениях $t_1,\ t_2 > t_0$ в виде

$$K_X(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{\min(t_1,\ t_2)} \nu(\tau)\,d\tau, \tag{2.8}$$

где $\nu(t)$ – неотрицательная функция, называемая интенсивностью СПНРП.

Рассмотренные выше процессы с некоррелированными приращениями можно считать процессами с ортогональными приращениями (для этого следует полагать $m_X(t) = 0$). Условие ортогональности приращений приводит к тому, что ковариационная функция СПНРП имеет специальную структуру, а именно: ковариационная функция выражается через дисперсию процесса – см. формулу (2.8) (для других процессов – наоборот, дисперсия процесса выражается через ковариационную функцию).

2.4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T \subset R$, называется процессом с независимыми приращениями (СПНП), если для любых $n > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1, n}$, таких что $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, сл. величины $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ являются независимыми. По определению независимых сл. величин это означает, что

$$P\left\{X_{t_1} - X_{t_0} < u_1, X_{t_2} - X_{t_1} < u_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} < u_n\right\} =$$

$$= P\left\{X_{t_1} - X_{t_0} < u_1\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} < u_n\right\}.$$

Если t_1 – наименьший среди всех индексов, то предполагается также, что $X_{t1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы.

Если процесс с независимыми приращениями имеет конечный момент второго порядка, то он является процессом с некоррелированными приращениями (обратное утверждение справедливо только для гауссовских процессов). Следовательно, в этом случае ковариационная функция $K_X(t_1, t_2)$ СПНП $X(t)$ определяется формулой $K_X(t_1, t_2) = k(\min(t_1, t_2))$, где $k(t)$ – неубывающая неотрицательная функция, представляющая собой ковариационную матрицу (дисперсию в случае скалярного процесса $X(t)$) значения процесса $X(t)$ в данный момент t. Если функция $k(t)$ – непрерывная и дифференцируемая функция, то $K_X(t_1, t_2) = k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau) d\tau$ и $\nu(\tau)$ – интенсивность СПНП.

2.5. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, называется марковским процессом (МП), если для всех $n > 1$, любых $t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$ и любого борелевского множества $B \in B(R^1)$ выполняется условие:

$$P\left\{X_{t_n} \in B \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_{n-1}}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=} P\left\{X_{t_n} \in B \middle| X_{t_{n-1}}\right\}. \tag{2.9}$$

Соотношение (2.11) – это упрощенная запись выражения

$$P\left\{X_{t_n} \in B \middle| X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=}$$

$$\overset{\text{п.н.}}{=} P\left\{X_{t_n} \in B \middle| X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right\},$$

где $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ – произвольные допустимые значения сл. величин $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$.

Свойство (2.9) называется марковским свойством. На языке функций распределения и плотностей распределения определение МП выглядит следующим образом: СП $X(t)$, $t \in T$, называется марковским СП, если для всех $n > 1$ и любых $t_1 < t_2 < ... < t_n \in T$ его условное распределение в момент времени t_n не зависит от совокупности значений процесса в моменты $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$, а определяется значением процесса только в момент времени t_{n-1}, т. е.

$$F(x_n, t_n \mid x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_{n-1}, t_{n-1}) = F(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}),$$

или

$$f(x_n, t_n \mid x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_{n-1}, t_{n-1}) = f(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}).$$

Таким образом, вероятностное распределение процесса в момент времени $t = t_k$ зависит лишь от того, в каком состоянии находился процесс в ближайшем прошлом $t = t_{k-1}$, и не зависит от его состояний, предшествующих моменту t_{k-1}. Можно показать, что для мар-

ковских процессов при любых $B_1, B_2 \in B(R^1)$ и любых $s \le u \le t$
$P\left\{X_s \in B_1, X_t \in B_2 \middle| X_u\right\} = P\left\{X_s \in B_1 \middle| X_u\right\} P\left\{X_t \in B_2 \middle| X_u\right\}$.

Условные вероятности

$$P(x, s; B, t) = P\left\{X_t \in B \middle| X_s = x\right\}, \; t > s, \; x \in R^1, \; B \in B(R^1), \quad (2.10)$$

называются переходными вероятностями МП. Эти вероятности удовлетворяют соотношению

$$P(x, s; B, t) = \int_{R^1} P(y, u; B, t) P(x, s; dy, u),$$

которое выполняется при всех $s \le u \le t \in T$ и называется условием Чепмена–Колмогорова.

МП называется однородным, если

$$P(x, s; B, t) \equiv P(x; B, t - s) = P(x; B, \tau),$$

т. е.

$$P\left\{X_t \in B \middle| X_s = x\right\} = P\left\{X_{t-s} \in B \middle| X_0 = x\right\} = P\left\{X_\tau \in B \middle| X_0 = x\right\}.$$

Для однородного МП уравнения Чепмена–Колмогорова упрощаются:

$$P(x; B, t + s) = \int_{R^1} P(y; B, t) P(x; dy, s), \text{ где } s, t, s + t \in T.$$

Нетрудно убедиться в том, что все конечномерные распределения МП определяются его двумерным распределением.

Можно показать, что любой СП с независимыми приращениями является марковским процессом (проверить самостоятельно, см. также раздел 2.6).

Все, что было сказано выше о марковских процессах, характерно, вообще говоря, для непрерывных процессов. Поскольку для марковских процессов в полной мере используется терминология, приведенная в таблице раздела 1, то есть смысл ввести некоторые понятия для марковских цепей (МЦ) и дискретных марковских процессов (ДМП).

Условие (2.9) – марковское свойство – для марковских цепей и для дискретных марковских процессов записывается следующим образом:

$$P\left\{X_{t_n}=x_n \middle| X_{t_1}=x_1,\ X_{t_2}=x_2,\ ...,\ X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=}$$

$$\overset{\text{п.н.}}{=} P\left\{X_{t_n}=x_n \middle| X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\right\}. \qquad (2.11)$$

Аналогично изменится и условие (2.10):

$$P(x,\ s;\ y,\ t)=P\left\{X_t=y \middle| X_s=x\right\},\ \ t>s,\ \ x,\ y\in R^1, \qquad (2.12)$$

это соотношение означает, что в интервале времени $(s,\ t)$ состояние процесса изменится от x к y. Если при этом речь идет о цепях, то говорят об изменении состояния процесса за $(t-s)$ шагов.

Уравнение Чепмена–Колмогорова в этих случаях будет записываться как $P(x,\ s;\ y,\ t)=\sum\limits_{z\in S} P(x,\ s;\ z,\ u)P(z,\ u;\ y,\ t)\ \ \forall\ \ s\le u\le t\in T$ и S – множество значений сл. величины X_t; для однородных марковских цепей и однородных дискретных марковских процессов – $P(x;\ y,\ t+s)=\sum\limits_{z\in S} P(x;\ u,\ t)P(u;\ y,\ s)\ \ \forall\ \ s\le u\le t\in T$.

Пример 1. Рассмотрим последовательность бросаний игральной кости. Пусть ξ_n – число очков, выпавшее при n-м бросании, $n=1,\ 2,...$ Введем последовательность сл. величин X_n по правилу: $X_n=$ $=\max(\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n)$. Покажем, что последовательность $\{X_n\}$ – марковская, и определим для нее переходную вероятность.

Решение. Пусть при некотором значении $n\ge 1$ $X_n=k$, где k – целое число от 1 до 6. При последующих бросаниях k не может уменьшиться, поэтому для $r = 1, 2, \ldots, 6$

$$P\left\{X_{n+1}=r \middle| X_n=k\right\}=\begin{cases} 0, \ \ r<k, \\ P\left\{X_{n+1} \text{ не больше } k\right\}=\dfrac{k}{6}, \ \ r=k, \\ \dfrac{1}{6}, \ \ r>k. \end{cases}$$

В силу независимости результатов бросаний условная вероятность зависит лишь от $X_n = k$ и не зависит от предыдущих значений X. Следовательно, последовательность $\left\{X_n\right\}$ – марковская. Переходная вероятность за один шаг описывается матрицей P, элементы которой $p_{ij}=P\left\{X_{n+1}=j \middle| X_n=i\right\}, \ i, j=\overline{1,6}$:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} \\ & & . \ . \ . & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Пуассоновским процессом с параметром $\lambda > 0$ называется процесс $X(t), \ t \in [0, +\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $P\left\{X(0)=0\right\}=1$;

2) для любого p = 2, 3, ... и любых значений параметров $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_p$ его приращения $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$, k = 0, 1, 2, ..., p, независимы;

3) случайная величина $X_t - X_s$, $0 \le s < t$, имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(t-s)$, т. е. $P\{X_t - X_s = k\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$.

Пуассоновский процесс возникает при моделировании потока редких событий. Он играет важную роль в различных приложениях теории случайных процессов, в частности в теории массового обслуживания.

Пример 8 раздела 1 и определение пуассоновского процесса позволяют перечислить некоторые важные свойства этого процесса.

1. *Отсутствие последействия.* Число наступлений событий в некотором промежутке не зависит от числа наступлений событий в других не пересекающихся с ним промежутках – условие 2 в определении процесса.

2. *Стационарность.* Число событий, наступивших в промежутке $(s,\ t]$, не зависит от положения этого промежутка на числовой прямой, от значения процесса в точке s, а определяется полностью длиной промежутка $(t-s)$ – условие 3 в определении.

3. *Ординарность*. Для выяснения смысла этого понятия важен пример 8 раздела 1. Ординарность предполагает, что за время $h \to 0$ может наступить не более одного события, т. е. значения процесса изменяются скачком на единицу.

Таким образом, реализации пуассоновского процесса представляют собой неубывающую ступенчатую функцию, моменты скачков определяются моментами появления некоторого события.

Значением процесса является число событий, появившихся за время $(0,\ t]$ – процесс является дискретным. Более того, нетрудно показать, что пуассоновский процесс является дискретным марковским процессом. Действительно, пусть в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$ значения процесса были $k_1,\ k_2,\ k_3$. Тогда

$$P\{X_{t_1} = k_1,\ X_{t_2} = k_2,\ X_{t_3} = k_3\} =$$

$$= P\{X_{t_3} - X_{t_2} = k_3 - k_2 = m_3;\ X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1 = m_2;\ X_{t_1} = m_1\} =$$

$$= P\left\{(X_{t_3} - X_{t_2} = m_3)\right\} P\left\{(X_{t_2} - X_{t_1}) = m_2\right\} P\left\{(X_{t_1}) = m_1\right\} =$$

$$= p_{m_1}(t_1) p_{m_2}(t_2 - t_1) p_{m_3}(t_3 - t_2).$$

Отсюда $\quad P\left\{k_3,\ t_3 \middle| k_1 t_1;\ k_2,\ t_2\right\} = \dfrac{p_{m_1}(t_1) p_{m_2}(t_2 - t_1) p_{m_3}(t_3 - t_2)}{p_{m_1}(t_1) p_{m_2}(t_2 - t_1)} =$

$= p_{m_3}(t_3 - t_2) = P\left\{X_{t_3} - X_{t_2} = k_3 - k_2\right\}$ $\Rightarrow$ марковское условие (2.9) выполняется.

Принято обозначать пуассоновский процесс буквой N: $X(t) \equiv N(t)$.

Одномерный закон распределения пуассоновского процесса определяется соотношением $p_k(t) = P\{N_t = k\} = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k \geq 0$, которое получается из условия 3 определения при $s = 0$ (см. также формулу из примера 8 раздела 1).

2.7. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Винеровским процессом, выходящим из нуля, называется процесс $W(t),\ t \in [0,\ +\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) все реализации $w(t)$ процесса $W(t)$ непрерывны и $w(0) = 0$;

2) для любого $p = 2, 3, \ldots$ значений параметров $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_p$ его приращения $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ..., $W_{t_p} - W_{t_{p-1}}$ независимы;

3) случайная величина $W_t - W_s$ $\forall t > s > 0$ имеет нормальное распределение с параметрами $(0,\ (t-s)\sigma^2)$, где σ^2 – коэффициент диффузии винеровского процесса или его интенсивность.

Таким образом, плотность распределения сл. величины $\Delta W \equiv$ $\equiv W_t - W_s$, $t > s$, равна $f_{\Delta W}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}$, $x \in R$.

В определении винеровского процесса можно условие $w(0) = 0$ заменить на условие $w(0) = x \in R$, и тогда получим определение винеровского процесса, выходящего из точки x. Можно рассматривать винеровский процесс, выходящий из случайной точки.

Случайный процесс $\frac{1}{\sigma}W(t)$ называется стандартным винеровским процессом, его интенсивность равна единице.

Получим конечномерные распределения винеровского процесса. Зафиксируем n произвольных точек $0 \le t_1 < \ldots < t_n$. Случайный вектор $W = \left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right)^{\text{т}}$ получается из вектора приращений $\Delta W = \left(W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)^{\text{т}}$ невырожденным линейным преобразованием с матрицей A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $W = A\Delta W$.
Из теории вероятностей известно, что линейное преобразование гауссовой сл. величины вновь является гауссовой сл. величиной; следовательно, все конечномерные распределения винеровского процесса являются нормальными распределениями с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sum$, равной

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 \\ & & . \;\; . \;\; . & & \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$

(см. последнее свойство ковариационной функции). Вид матрицы Σ можно определить достаточно просто еще и, если учесть, что винеровский процесс является процессом с независимыми (следовательно, с некоррелированными) приращениями и согласно формуле (2.10) его ковариационная функция $K_w(t_i, t_j) = \int\limits_0^{\min(t_i, t_j)} \sigma^2 dt = \sigma^2 \min(t_i, t_j), \; i, j = \overline{1, n}.$

Из полученного результата следует, что винеровский процесс – это процесс со стационарными приращениями (почему?).

Если $W(t)$, $t \in [0,\ +\infty)$, сл. вектор размерности k, то все компоненты его независимы и представляют собой одномерные винеровские процессы. Ковариационная матрица n-мерного нормального распределения сл. вектора W_t размерности k имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} K_w(t_1,\ t_1) & K_w(t_1,\ t_2) & \ldots & K_w(t_1,\ t_n) \\ K_w(t_2,\ t_1) & K_w(t_2,\ t_2) & \ldots & K_w(t_2,\ t_n) \\ & . & . & . \\ K_w(t_n,\ t_1) & K_w(t_n,\ t_2) & \ldots & K_w(t_n,\ t_n) \end{pmatrix}.$$

Каждая компонента матрицы Σ – $K_w(t_i,\ t_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, в свою очередь

представима в виде $K_w(t_i,\ t_j) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}\left(X_1^i X_1^j\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \operatorname{cov}\left(X_2^i X_2^j\right) & \ldots & 0 \\ & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \operatorname{cov}\left(X_k^i X_k^j\right) \end{pmatrix}.$

Винеровский процесс называют еще процессом броуновского движения; он имел большое значение при разработке теории СП. Многие распределения, используемые в теории управления, можно моделировать процессами, порождаемыми винеровскими процессами. Кроме того, он находит широкое применение в теории стохастической ортогональной меры (см. раздел 3.10).

Траектория винеровского процесса обладает весьма неожиданными свойствами. В дальнейших разделах покажем, что сумма квадратов приращений винеровского процесса, соответствующих разбиению отрезка $[a,\ b] \subset T = [0,\ +\infty)$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, при стремлении мелкости разбиения $\lambda = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$ к нулю, сходится в смысле средней квадратической сходимости к $(b-a)$. Если рассмотреть аналогичную сумму квадратов приращений для процесса, изменяющегося скачками, то она будет конечной на любом отрезке $[a,\ b]$, если число скачков на отрезке конечно, и совпадет с суммой квадратов скачков, таким образом, не зависит непрерывно от a и b.

Сравнение этих результатов приводит к вопросу о том, существуют ли у траектории винеровского процесса скачки.

А.Н. Колмогоров показал, что для любого винеровского процесса можно построить новый, эквивалентный ему процесс с непрерывными траекториями. В силу того, что конечномерные распределения эквивалентных процессов совпадают, новый процесс с независимыми приращениями также будет винеровским. Этими соображениями и продиктовано условие 1) в определении винеровского процесса.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что все конечномерные распределения марковских процессов определяются их двумерными распределениями.

2. Доказать, что любой процесс с независимыми приращениями является марковским.

3. Написать уравнение Чепмена–Колмогорова. Почему оно справедливо лишь для марковских процессов?

4. Является ли винеровский процесс гауссовским? марковским?

5. Какими общими свойствами обладают винеровский и пуассоновский процессы?

6. Доказать, что пуассоновский процесс является марковским.

7. Показать, что СП, являющийся линейной комбинацией нормальных процессов, является нормальным процессом. В частности, найти характеристики нормального процесса $Z(t) = aX(t) + bY(t)$, где X и Y – нормальные процессы с характеристиками $m_X(t) = t$, $m_Y(t) = 1 + t^2$,

$$K_X(t,\ s) = \frac{1}{1+2(t-s)^2},\ K_Y(t,\ s) = 9e^{-2((s-t)^2)},\ K_{XY}(t,\ s) = 4\cos(t-s).$$

8. Пусть $X(t)$, $Y(t)$, $t \in T$ – винеровские процессы, исходящие из нуля. Найти их совместный закон распределения при каждом фиксированном $t \in T$.

9. Доказать, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле.

10. Пусть $X(t) \equiv X \; \forall \; t \in R$, причем X подчиняется показательному распределению с параметром $\lambda = 2$. Является ли СП $X(t)$ стационарным в узком смысле?

11. Является ли скалярный случайный процесс $X(t) = \alpha \sin \nu t + \beta \cos \nu t$, $t \in T \subset R$, α, β – некоррелированные сл. величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными σ^2, стационарным: а) в узком смысле? б) в широком смысле?

12. Пусть $X(t)$, $t \in T$, – нормальный стационарный СП. Найти одномерный и двумерный законы распределения процесса.

13. Является ли СП $Y(t) = X(t) + u$, $t \in T$, стационарным в широком смысле, если $X(t)$, $t \in T$, – стационарный процесс и а) $\forall \; t \in T$ сл. величины X_t и u – независимы; б) $u = X(t_0)$, $t_0 \in T$?

14. Пусть $X(t) = \alpha \cos(\beta t + \gamma)$, $t \in T$, α, β – неотрицательные сл. величины с известной совместной плотностью вероятностей $f(a, b)$, а сл. величина γ не зависит от них и равномерно распределена на отрезке $[0, \; 2\pi]$. Доказать, что СП $X(t)$ стационарен.

15. Пусть $X(t)$, $t \in T$, – гауссовский стационарный процесс с постоянным математическим ожиданием и ковариационной функцией вида $K_x(t, \; s) = K_x(t - s)$. Показать, что этот процесс стационарен в узком смысле.

16. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность центрированных некоррелированных сл. величин. Доказать стационарность последовательности в широком смысле.

17. Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ – набор центрированных комплексных сл. величин, удовлетворяющих условию ортогональности. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – некоторые числа из промежутка $[-\pi, \pi)$. Последовательность $\{X_m\}$, $m = 1, 2, ...$, определена следующим образом: $X_m = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k e^{i \alpha_k m}$, $m \in Z$. Показать, что она стационарна в широком смысле.

18. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность из задачи 16, а $\{\alpha_n\}$ – последовательность комплексных чисел, таких что $\sum\limits_{k \in Z} |\alpha_k| < \infty$. Последо-

вательность $\{Y_n\}$ определяется соотношением $Y_n = \sum_{k \in Z} \alpha_k X_{n-k}$ (последовательность двустороннего скользящего среднего). Показать, что она стационарна в широком смысле.

19. Пусть $X_n = \cos(n\xi + \eta)$, где $\eta \succ Rav[0, 2\pi]$, сл. величина ξ задана функцией распределения $F_\xi(x) \equiv F(x)$. Показать, что $\{X_n\}$ – центрированная стационарная в широком смысле последовательность.

20. Определить n-мерный закон распределения пуассоновского процесса.

21. СП $X(t)$ – величина интервала времени между двумя последовательными скачками пуассоновского процесса $N(t)$ с параметром λ. Найти $f(x, t)$.

22. Найти математическое ожидание и $K_N(t_1, t_2)$ пуассоновского процесса с параметром λ.

23. Найти вероятность того, что за время τ произойдет четное число скачков, если речь идет о пуассоновском процессе $N(t)$ с параметром λ.

3. ОПЕРАЦИИ АНАЛИЗА НАД СЛУЧАЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Все операции математического анализа опираются на понятия предела и сходимости. Для случайных функций речь должна идти о вероятностной сходимости, но вероятностной сходимости существует много видов. Какую из них предпочесть?

В теории случайных процессов предпочтение отдается средней квадратической сходимости (с.к. сходимости), поскольку при этом виде сходимости получается довольно несложная теория дифференцирования и интегрирования случайных функций, дающая удобные практические методы исследования сл. функций.

3.1. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ. ЛЕММА ЛОЭВА

Напомним определение с.к. сходимости для последовательности скалярных сл. величин. Последовательность скалярных сл. величин $X_1, X_2, \ldots$ называется сходящейся в среднем квадратическом или, короче, с.к. сходящейся к случайной величине *X*, если $M\left|X_n - X\right|^2 \to 0$, $n \to \infty$. Очевидно, при этом сл. величины X_n должны иметь конечные моменты второго порядка.

Случайная величина *X* называется средним квадратическим или с.к. пределом последовательности $\{X_n\}$; записывают это так: $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $n \to \infty$, или $X = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} X_n$ (l.i.m. – сокращение от limit in main – сходимость в среднем).

Аналогично в случае однопараметрического семейства случайных величин $\{X_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ с конечными моментами второго порядка, говорят, что X_α с.к. сходится к X при $\alpha \to \alpha_0$, $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, если $M|X_\alpha - X|^2 \to 0,\ \ \alpha \to \alpha_0$.

Лемма Лоэва. Пусть $\{X_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, $\{Y_\beta,\ \beta \in B\}$ – два семейства сл. величин, $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $\alpha \to \alpha_0$, $Y_\beta \xrightarrow{\text{с.к.}} Y$, $\beta \to \beta_0$. Тогда $MX_\alpha Y_\beta \to MXY$, $(\alpha,\ \beta) \to (\alpha_0,\ \beta_0)$.

Доказательство. Доказательство утверждения опирается на неравенство

$$\left|MX_\alpha Y_\beta - MXY\right| \le \left|MX_\alpha (Y_\beta - Y)\right| + \left|M(X_\alpha - X)Y\right|.$$

Применим к каждому слагаемому правой части неравенство Шварца (см. третье свойство ковариационных функций):

$$\left|MX_\alpha (Y_\beta - Y)\right| \le \sqrt{MX_\alpha^2 M(Y_\beta - Y)^2},$$

$$\left|M(X_\alpha - X)Y\right| \le \sqrt{M(X_\alpha - X)^2 MY^2}.$$

Далее, учитывая, что MX_α^2 остается ограниченной величиной при $\alpha \to \alpha_0$, так как

$$MX_\alpha^2 = M(X_\alpha - X + X)^2 = M(X_\alpha - X)^2 +$$

$$+2M(X_\alpha - X)X + MX^2 \le 2M(X_\alpha - X)^2 + 2MX^2,$$

получим результат: $\left|MX_\alpha Y_\beta - MXY\right| \le \sqrt{\left(\varepsilon_1 + 2MX^2\right)\varepsilon_2} + \sqrt{\left(\varepsilon_1 MY^2\right)} \le \varepsilon$, что означает сходимость к нулю $(MX_\alpha Y_\beta - MXY)$ при $(\alpha,\ \beta) \to (\alpha_0,\ \beta_0)$.

Следствие 1. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $\alpha \to \alpha_0$, то $MX_\alpha X_\beta \to MX^2$, $(\alpha,\ \beta) \to (\alpha_0,\ \alpha_0)$.

Следствие 2. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $\alpha \to \alpha_0$, то для любой сл. величины Y $MX_\alpha Y \to MXY$, $\alpha \to \alpha_0$.

Следствие 3. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $\alpha \to \alpha_0$, то $MX_\alpha \to MX$, $M\overset{\circ}{X}_\alpha \overset{\circ}{X}_\gamma \to MX^2$, $(\alpha, \gamma) \to (\alpha_0, \alpha_0)$.

Для доказательства последнего результата достаточно воспользоваться неравенством

$$\left| M(X_\alpha - X)Y \right| \le \sqrt{M(X_\alpha - X)^2 MY^2},$$

на основании которого можно утверждать, что с.к. сходимость $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $\alpha \to \alpha_0$, влечет сходимость $MX_\alpha \to MX$, $\alpha \to \alpha_0$, и с.к. сходимость $\overset{o}{X}_\alpha \to \overset{o}{X}$, $\alpha \to \alpha_0$. Затем к последнему из полученных результатов следует применить следствие 1.

Можно доказать обратное по отношению к лемме Лоэва утверждение: если существует конечный $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \alpha_0}} MX_\alpha X_\beta$, то существует и с.к. предел сл. величины X_α при $\alpha \to \alpha_0$.

Действительно, пусть $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \alpha_0}} MX_\alpha X_\beta = A$. Рассмотрим

$$M\left| X_\alpha - X_\beta \right|^2 = MX_\alpha^2 - 2MX_\alpha X_\beta + MX_\beta^2.$$

Перейдем к пределу при $\alpha \to \alpha_0$, $\beta \to \alpha_0$:

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \alpha_0}} M\left| X_\alpha - X_\beta \right|^2 = \lim_{\alpha \to \alpha_0} MX_\alpha^2 - 2\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \alpha_0}} MX_\alpha X_\beta + \lim_{\beta \to \alpha_0} MX_\beta^2 = 0,$$

так как предел каждого из слагаемых правой части равен A. Следовательно, X_α – фундаментальна и, значит, существует с.к. предел для X_α.

Теперь можно сформировать так называемый стохастический критерий Коши с.к. сходимости.

Для с.к. сходимости сл. величины X_α к некоторой сл. величине X при $\alpha \to \alpha_0$ необходимо и достаточно сходимости $MX_\alpha X_\beta$ к неотрицательному пределу при $(\alpha,\ \beta) \to (\alpha_0,\ \alpha_0)$. Или, что то же самое, для с.к. сходимости сл. величины X_α к некоторой сл. величине X при $\alpha \to \alpha_0$ необходимо и достаточно: 1) сходимости MX_α к конечному пределу при $\alpha \to \alpha_0$ и 2) сходимости центрального момента $M\overset{\circ}{X}_\alpha \overset{\circ}{X}_\beta$ к конечному пределу при $(\alpha,\ \beta) \to (\alpha_0,\ \alpha_0)$.

Замечание. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, $\alpha \to \alpha_0$, т. е. $\underset{\alpha\to\alpha_0}{\text{l.i.m.}}\, X_\alpha = X$, тогда $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} MX_\alpha = MX$ (следствие 3 леммы Лоэва). Последнее равенство с учетом первого соотношения перепишем в виде

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} MX_\alpha = MX = M(\underset{\alpha\to\alpha_0}{\text{l.i.m.}}\, X_\alpha) \Leftrightarrow \lim_{\alpha\to\alpha_0} MX_\alpha = M(\underset{\alpha\to\alpha_0}{\text{l.i.m.}}\, X_\alpha).$$

Получили очень **важное** соотношение, полезное в задачах с предельными переходами!

Пример 1. Пусть $X(t)$, $t \in [0,\ \infty)$, – винеровский скалярный процесс с единичным коэффициентом диффузии. Пусть $[a,\ b] \in T$ и $\lambda\left[a,\ b\right] = \left\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$ – некоторое разбиение этого отрезка с мелкостью разбиения $\lambda = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$. Покажем, что существует с.к. предел $\underset{\lambda\to 0}{\text{l.i.m.}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2 = b - a.$

Решение. Согласно определению винеровского процесса сл. величины $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$, $k = \overline{1,n}$, независимы, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии $D\left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) = M\left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2 = t_k - t_{k-1}$. Так как

$$M\sum_{k=1}^{n}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}M\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}D\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})=b-a,$$

то очевидно, что

$$\lim_{\lambda\to 0}M\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2-(b-a)\right)^2=\lim_{\lambda\to 0}D\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2=|\text{сл. величины}$$

$\dfrac{X_{t_k}-X_{t_{k-1}}}{\sqrt{t_k-t_{k-1}}}$ независимы, имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1, следовательно, сл. величина $\dfrac{\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2}{t_k-t_{k-1}}$ имеет хи-квадрат-распределение с одной степенью свободы:

$$\frac{\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2}{t_k-t_{k-1}}\sim\chi_1^2,$$

а потому

$$M\left(\frac{\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2}{t_k-t_{k-1}}\right)=1\quad\text{и}\quad D\frac{\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2}{t_k-t_{k-1}}=2\,|=$$

$$=2\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})^2\le\lambda\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})=2\lambda(b-a)\to 0,\ \lambda\to 0.$$

3.2. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Скалярная случайная функция $X(t)$, $t \in T$, называется непрерывной в среднем квадратическом, или, короче, с.к. непрерывной в точке $t \in T$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t', \ \left| t' - t \right| < \delta: \ M\left| X(t') - X(t) \right|^2 < \varepsilon .$$

Это определение конструктивно совпадает с определением непрерывной в точке функции в анализе.

Если сл. функция $X(t)$ с.к. непрерывна в любой точке $t \in T$, то она называется с.к. непрерывной в области T.

Необходимое и достаточное условие с.к. непрерывности сл. функции $X(t)$, $t \in T$, можно выразить одним из утверждений.

Теорема 1. Для с.к. непрерывности случайной функции $X(t)$ в области T необходима и достаточна непрерывность функции $R_X(t, s) = MX_t X_s$ на множестве $T \times T$.

Теорема 2. Случайная функция $X(t)$ с.к. непрерывна на области T тогда и только тогда, когда:

1) непрерывно на T ее математическое ожидание $m_X(t)$ и

2) непрерывна на области $T \times T$ ковариационная функция $K_X(t, s)$.

Справедливость теорем следует из определения функции, непрерывной в среднем квадратическом, и двух формулировок стохастического критерия Коши с.к. сходимости.

Пример 2. Покажем, что винеровский процесс является с.к. непрерывным.

Решение. Ковариационная функция винеровского процесса $K_X(t_1, t_2) = \sigma^2 t_1$, $t_1 < t_2$, удовлетворяет требованиям теоремы 2.

Пример 3. Пусть сл. функция $X(t)$ задана на отрезке $T = [0,1]$ следующим образом: $X(t) = \begin{cases} U, \ t < \frac{1}{2}, \\ V, \ t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ где U, V – независимые одинаково распределенные сл. величины со средним m и дисперсией $D > 0$. Исследовать на непрерывность функцию $X(t)$.

Решение. $m_X(t) = MX_t = \begin{cases} MU = m, \ t < \dfrac{1}{2}, \\ MV = m, \ t \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow m_X(t)$ – непрерывная на T функция. Найдем теперь $K_X(t, s)$. Если $\max(t, s) < \dfrac{1}{2}$, то $K_X(t, s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s) = \operatorname{cov}(U, U) = D$; если $\min(t, s) \geq \dfrac{1}{2}$ $K_X(t, s) = = \operatorname{cov}(V, V) = D$. Если же $t < \dfrac{1}{2} \leq s$, $K_X(t, s) = \operatorname{cov}(U, V) = 0 \Rightarrow$ функция $K_X(t, s)$ разрывна в точке $\dfrac{1}{2}$, так как $K_X(t, s) \to D$, $t, s \to \dfrac{1}{2}$ и $t, s > \dfrac{1}{2}$ или $t, s < \dfrac{1}{2}$ и $K_X(t, s) \to 0$ при $t, s \to \dfrac{1}{2}$ и $t < \dfrac{1}{2} \leq s$.

Замечание. Из условия с.к. непрерывности процесса ничего нельзя сказать о непрерывности реализаций процесса. Возможны различные комбинации: процесс с.к. непрерывен, но почти все его траектории разрывные функции, или же все траектории процесса – непрерывные функции, сам же процесс не является с. к. непрерывным.

3.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Скалярная СФ $X(t)$ называется с.к. дифференцируемой в точке $t \in T$, если существует такая случайная функция $X'(t)$, к которой с.к. сходится при $h \to 0$ случайная функция $\dfrac{X(t+h) - X(t)}{h}$:

$X'(t) = \underset{h \to 0}{\text{l.i.m.}} \dfrac{X(t+h) - X(t)}{h}$. Случайная функция $X'(t)$ называется с.к. производной случайной функции $X(t)$ в точке t.

Если функция $X(t)$ дифференцируема в каждой точке $t \in T$, то семейство сл. величин $\{X'(t),\ t \in T\}$ называется с.к. производной процесса $X(t)$ на T.

Теорема 3. Случайная функция $X(t)$ с.к. дифференцируема в области T тогда и только тогда, когда существует конечная производная $\dfrac{\partial^2 R_X(t,\ s)}{\partial t \partial s}$ во всех точках $(t,\ s) \in T \times T$.

Доказательство. По стохастическому критерию Коши с.к. предел $X_h(t) = \dfrac{X(t+h) - X(t)}{h}$ при $h \to 0$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел момента

$$MX_h(t)X_\ell(t) = \frac{1}{hr} M\left(X(t+h) - X(t)\right)\left(X(t+r) - X(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{hr} M\left(X(t+h)X(t+r) - X(t+h)X(t) - X(t)X(t+r) + X(t)X(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{hr}\left(R_X(t+h,\ t+r) - R_X(t+h,\ t) - R_X(t,\ t+r) + R_X(t,\ t)\right)$$

при $(h,\ r) \to (0,\ 0)$.

Но если этот предел существует, то он равен второй смешанной производной $\dfrac{\partial^2 R_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ в точке $t_1 = t_2 = t$. Но в том случае по свойствам ковариационной функции, если эта производная существует на точках диагонали квадрата $T \times T$, то она существует и всюду в квадрате $T \times T$.

В условиях теоремы 3 во всех точках $(t_1,\ t_2) \in T \times T$ существуют производные $\dfrac{\partial R_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}$, $\dfrac{\partial R_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}$ и справедливы формулы

$$R_{X'X}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial R_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}, \quad R_{XX'}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial R_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}. \qquad (3.1)$$

Действительно,

$$R_{X'X}(t_1,\ t_2) = MX'(t_1)X(t_2) = M\,\text{l.i.m.}\frac{X(t_1+h)-X(t_1)}{h}X(t_2) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{R_X(t_1+h,\ t_2)-R_X(t_1,\ t_2)}{h} = \frac{\partial R_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}.$$

В вычислениях воспользовались замечанием в конце раздела 3.1.

Из второй формулировки стохастического критерия Коши следует утверждение.

Теорема 4. Случайная функция $X(t)$ с.к. дифференцируема в области T тогда и только тогда, когда:

1) существует конечная производная функции $m_X(t)$, $t \in T$, и

2) существует конечная вторая смешанная производная ее ковариационной функции $K_X(t_1,\ t_2)$ во всех точках $(t,\ s) \in T \times T$.

Справедливы формулы:

$$m_{X'}(t) = m'_X(t);$$

$$K_{X'}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2};$$

$$K_{X'X}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}; \tag{3.2}$$

$$K_{XX'}(t_1,t_2) = \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}.$$

Обычным образом определение с.к. производной обобщается на случай с.к. производной СФ $X(t)$ более чем первого порядка.

Замечание. Если $X(t)$, $t \in T$, – стационарный процесс, то $K_X(t_1,\ t_2) \equiv K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau)$. Если существует процесс $X'(t)$, то для него $K_{X'}(t_1,\ t_2) \equiv K_{X'}(\tau) = -\dfrac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2} = -K''_X(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$, $m_{X'}(t) = 0$.

Пример 4. Пусть центрированная функция $X(t)$ имеет ковариационную функцию $K_X(t_1,\ t_2) = 2e^{-\alpha(t_1-t_2)^2}$, $\alpha > 0.$ Вычислить дисперсию ее с.к. производной.

Решение. Поскольку $m_X(t) = 0,$ остается проверить на дифференцируемость ковариационную функцию $K_X(t_1,\ t_2)$ – она бесконечное число раз дифференцируема. Тогда

$$K_{X'}(t,\ s) = \frac{\partial^2 K_X(t,\ s)}{\partial t \partial s} = 4\alpha\left(1 - 2\alpha(t-s)^2\right)e^{-\alpha(t-s)^2} \Rightarrow$$

$$D_{X'}(t) = K_X(t,\ t) = 4\alpha.$$

Отметим, что операция с.к. дифференцирования является линейной операцией. Пусть $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k X_k(t),$ где α_k – числа, а $X_k(t)$ – с.к. дифференцируемые сл. функции. Тогда

$$X'(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X_k(t+h) - X_k(t)}{h} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k'\ (t).$$

Иными словами, с.к. производная линейной комбинации с.к. дифференцируемых функций является линейной комбинацией их с.к. производных, что и означает линейность операции с.к. дифференцирования.

Этот результат можно обобщить в следующем направлении: если неслучайная функция $\varphi(t)$ дифференцируема на T, а СФ $X(t)$ – с.к. дифференцируема на T, то СФ $Y(t) = \varphi(t)X(t)$ имеет с.к. производную $Y'(t) = \varphi'(t)X(t) + \varphi(t)X'(t).$

Однако не следует думать, что все случайные функции с.к. дифференцируемы.

Пример 5. Рассмотрим винеровский процесс $W(t),\ t \geq 0$, $\sigma^2 = 1$, и решим вопрос об его с.к. дифференцируемости.

Решение. Пусть $0 < h < r$. При $h,\ r \to 0$ величина $MW_h(t)W_r(t) = \dfrac{1}{r}$ не имеет конечного предела. Это означает, что винеровский процесс не является с.к. дифференцируемым ни при каком $t \in T = [0,\ \infty)$:

$$MW_h(t)W_r(t) = M\frac{1}{hr}(W_{t+h} - W_t)(W_{t+r} - W_t) =$$

$$= M\frac{1}{hr}(W_{t+h} - W_t)(W_{t+r} - W_{t+h} + W_{t+h} - W_t) =$$

$$= M\frac{1}{hr}\left[(W_{t+h} - W_t)((W_{t+r} - W_{t+h}) + (W_{t+h} - W_t))\right] =$$

$$= \frac{1}{hr}D(W_{t+h} - W_t) = \frac{1}{r}.$$

Сделаем еще одно важное **замечание**. Дифференцируемость сл. функций весьма легко проверяется, сравнительно легко вычисляются вероятностные характеристики производных сл. функций. К сожалению, явный вид процесса $X'(t)$ по приведенным выше необходимым и достаточным условиям существования производных сл. функций получить не удается. Это удается сделать в отдельных случаях на основе следующего определения.

Определение. Случайная функция $X(t)$, $t \in T$, называется дифференцируемой на T (потраекторно), если почти все ее траектории – дифференцируемые функции, т. е. вероятность события $\{\omega : X(t,\ \omega) - \text{дифференцируема на } T\}$ равна единице: $P\{\omega : X(t,\ \omega) - \text{дифференцируема на } T\} = 1$. Здесь $X(t,\ \omega)$ – траектория процесса $X(t)$.

Пусть $\overset{\circ}{X}(t,\ \omega)$ – производная траектории СП $X(t)$ (и ее мы можем считать производной самого процесса в случае потраекторной дифференцируемости процесса), $X'(t)$ – с.к. производная процесса $X(t)$, $t \in T$, тогда из условия $P\{\omega : X(t,\ \omega) - \text{дифференцируема на } T\} = 1$ следует

$$P\left\{X'(t) = \overset{\circ}{X}(t)\right\} = 1,$$

что означает стохастическую эквивалентность процессов $X'(t)$ и $\overset{\circ}{X}(t)$, т. е. $X'(t) \overset{\text{п.н.}}{=} \overset{\circ}{X}(t)$.

Пример 6. Пусть $X(t) = \sum_{k=1}^{N} V_k \varphi_k(t),\ t \in T,$ где V_k – некоррелированные сл. величины с математическими ожиданиями $MV_k = m_k$, дисперсиями $DV_k = D_k$, а $\varphi_k(t)$ – непрерывные на T неслучайные функции. Найти $X'(t)$.

Решение. Траектории СП $X(t)$ имеют вид $X(t,\ \omega) = \sum_{k=1}^{N} V_k(\omega)\varphi_k(t)$, где $V_k(\omega)$ – неслучайные числа, следовательно, для всех $\omega \in \Omega$ $\overset{\circ}{X}(t,\ \omega) = \sum_{k=1}^{N} V_k(\omega)\varphi'(t)$. Если $X(t)$ – с.к. дифференцируемый СП, то его производная согласно вышеизложенному совпадает почти всюду с производной траекторий $\overset{\circ}{X}(t,\ \omega)$, т. е. $X'(t) \overset{\text{п.н.}}{=} \sum_{k=1}^{N} V_k \varphi'(t)\quad \forall t \in T$.

Остается проверить с.к. дифференцируемость СП $X(t)$ по теореме 4: $m_X(t) = \sum_{k=1}^{N} m_k \varphi_k(t),\ \ K_X(t,\ s) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} \operatorname{cov}(V_k,\ V_r)\varphi_k(t)\varphi_r(s)$ дифференцируемы нужное число раз, при этом

$$m'_X(t) = \sum_{k=1}^{N} m_k \varphi'_k(t),$$

$$K_{X'}(t,\ s) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} \operatorname{cov}(V_k,\ V_r)\varphi'_k(t)\varphi'_r(s) = \sum_{k=1}^{N} \varphi'_k(t)\varphi'_k(s) D_k.$$

Легко видеть, что при вычислении ковариационной функции полученного процесса $X'(t)$ результат повторит только что полученное выражение.

3.4. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение интеграла от случайной функции $X(t)$ на отрезке $[a, b] = T$ дословно повторяет определение интеграла Римана на отрезке $[a, b]$. Пусть $X(t)$ – случайная с.к. непрерывная функция, $g(t, \tau)$ – неслучайная непрерывная функция двух переменных $t, \tau \in T$, $\lambda[a, b] = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ с мелкостью разбиения $\lambda = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$. Выберем на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ длинами Δt_k произвольные (не случайные!) точки τ_k и составим сумму $S_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} g(t, \tau_k) X(\tau_k) \Delta t_k$.

Определение. Средним квадратическим интегралом, или с.к. интегралом, от случайной функции $g(t, \tau)X(\tau)$ по области T называется с.к. предел последовательности интегральных сумм $S_n(t)$ при $\lambda \to 0$, если он существует и не зависит ни от разбиения отрезка, ни от выбора точек τ_k: $Y(t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, S_n(t) = \int\limits_T g(t, \tau) X(\tau) d\tau$.

Интеграл $Y(t) = \int\limits_T g(t, \tau) X(\tau) d\tau$ называют еще с.к. интегралом от случайной функции $X(t)$ с весом $g(t, \tau)$.

Теорема 5. С.к. интеграл от случайной функции $X(t)$ с весом $g(t, \tau)$ по промежутку $T \subset R$ существует тогда и только тогда, когда существует интеграл $\iint\limits_T g(t_1, \tau_1) g(t_2, \tau_2) R_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$, $t_1, t_2 \in T$, или, что то же самое, с.к. интеграл от случайной функции $X(t)$ с весом $g(t, \tau)$ по промежутку $T \subset R$ существует тогда и только тогда, когда:

1) существует интеграл $\int\limits_T g(t, \tau) m_X(\tau) d\tau$ и

2) существует интеграл $\iint\limits_T g(t_1, \tau_1) g(t_2, \tau_2) K_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$,

$t_1, t_2 \in T$.

Доказательство теорем опирается на стохастический критерий Коши с.к. сходимости. Справедливы соотношения:

$$
\begin{aligned}
&m_Y(t) = \int_T g(t,\ \tau)\, m_X(\tau) d\tau;\\
&K_Y(t_1,\ t_2) = \iint_T g(t_1,\ \tau_1)\, g(t_2,\ \tau_2)\, K_X(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2;\\
&K_{YX}(t_1,\ t_2) = \int_T g(t_1,\ \tau)\, K_X(\tau,\ t_2) d\tau;\\
&K_{XY}(t_1, t_2) = \int_T g(t_2, \tau)\, K_X(t_1, \tau) d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

При этом $\int_T \int_T g(t_1,\ \tau_1) g(t_2,\ \tau_2) R_X(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2$ представляет собой момент второго порядка для интеграла $Y(t)$, т. е. $R_Y(t_1,\ t_2) = \int_T \int_T g(t_1,\ \tau_2) g(t_2,\ \tau_2) R_X(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2$.

В частном случае, когда $g(t,\ \tau)$ зависит только от τ, т. е. $g(t,\ \tau) \equiv \varphi(\tau)$, с.к. интеграл от случайной функции $X(t)$ с весом $\varphi(\tau)$ будет уже просто сл. величиной $Y = \int_T \varphi(\tau) X(\tau) d\tau$, для которой справедливы формулы

$$
m_Y = \int_T \varphi(\tau) m_X(\tau) d\tau,\quad D_Y = \int_T \int_T \varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2) K_X(\tau_1,\ \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.
$$

Формулы (3.3) легко можно доказать, опираясь на определение ковариационной матрицы и замечание в конце раздела 3.1.

Если $X(t)$ – k-мерный СП, тогда $g(t,\ \tau)$ – матрица размерности $k \times k$ и формулы (3.3) имеют место с очевидными изменениями: вторая из них запишется в виде

$$
K_Y(t_1,\ t_2) = \int_T \int_T g(t_1,\ \tau_1) K_X(\tau_1,\ \tau_2) g^{\mathrm{T}}(t_2,\ \tau_2) d\tau_1 d\tau_2\ ,
$$

а последняя формула – в виде

$$K_{XY}(t_1,\ t_2)=\int_T K_X(t_1,\ \tau)g^{\mathrm{T}}(t_2,\ \tau)d\tau.$$

С.к. интеграл $Y(t)$ обладает некоторыми свойствами определенного интеграла.

1. Интеграл $Y(t)$ существует, если $g(t,\ \tau)X(\tau)$ – с.к. непрерывная на T функция.

2. Интеграл $Y(t)$ – линейная функция в том смысле, что

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n a_k g_k(t,\ \tau)X_k(\tau)d\tau=\sum_{k=1}^n a_k \int_a^b g_k(t,\ \tau)X_k(\tau)d\tau,$$

где a_k – неслучайные коэффициенты, а $g_k(t,\ \tau)X_k(\tau)$ – с.к. интегрируемые на отрезке функции.

3. Для интеграла $Y(t)$ справедливо правило дифференцирования по верхнему пределу.

Прежде всего введем определение такого интеграла. Если

$$g(t,\ \tau)=J(t-\tau)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad t\geq\tau,\\ 0, & \text{если}\quad t<\tau,\end{cases}\quad \text{то}\quad Y(t)=\int_T J(t-\tau)X(\tau)d\tau\ -$$

интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Такие интегралы могут иметь и более общий вид

$$Y(t)=\int_a^t \varphi(\tau)X(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

где $\varphi\in C(T)$, $X(t)$ – с.к. непрерывная сл. функция.

Для интеграла (3.4) применимо правило дифференцирования по переменному верхнему пределу, т. е. сл. функция $Y(t)=\int_a^t \varphi(\tau)X(\tau)d\tau$ с.к. дифференцируема по переменному верхнему пределу и справедлива формула

$$Y'(t)=\varphi(t)X(t). \tag{3.5}$$

Этот результат можно получить строго, если рассмотреть выражение $M\left(Y_{\Delta t}(t)-\varphi(t)X(t)\right)^2$ и показать, что в пределе при $\Delta t \to 0$ это выражение обращается в нуль $\left(Y_{\Delta t}(t) := \dfrac{Y(t+\Delta t)-Y(t)}{\Delta t}\right)$. Для интеграла (3.4) формулы (3.3) принимают вид

$$m_Y(t) = \int_a^t \varphi(\tau) m_X(\tau) d\tau,$$

$$K_X(t_1,\ t_2) = \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2) K_X(\tau_1,\ \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

и в точках непрерывности подынтегральных функций следуют равенства

$$m_Y'(t) = \varphi(t) m_X(t), \quad \frac{\partial^2 K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \varphi(t_1)\varphi(t_2) K_X(t_1,\ t_2).$$

4. Интеграл (3.4) можно вычислять по частям: если в интеграле $Y(t)$ $\varphi \in C^{(1)}(T)$, $X(t)$ – с.к. непрерывная случайная функция, имеющая с.к. производную $X'(t)$, тогда справедлива формула

$$\int_a^t \varphi'(\tau) X(\tau) d\tau = \varphi(t)X(t) - \varphi(a)X(a) - \int_a^t \varphi(\tau) X'(\tau) d\tau. \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.6), рассматривая интеграл в левой части как с.к. предел интегральных сумм и учитывая непрерывность дифференцируемой функции $\varphi(t)$, можно получить формулу для с.к. производной произведения:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)X(t) = \varphi'(t)X(t) + \varphi(t)X'(t).$$

Пример 7. Пусть $W(t)$, $t \geq 0$, – стандартный винеровский процесс. Докажем, что он с.к. интегрируем при $t \geq 0$ с весом $J(t-\tau)$.

Решение. Для решения воспользуемся теоремой 5. Интеграл $Y(t) = \int\limits_T J(t-\tau)W(\tau)d\tau = \int\limits_0^t W(\tau)d\tau$ существует, если существует интеграл $\int\limits_T J(t-\tau)m_W(\tau)d\tau = \int\limits_0^t m_W(\tau)d\tau$ и существует интеграл

$$\int\limits_T\int\limits_T J(t_1-\tau_1)J(t_2-\tau_2)K_W(\tau_1,\ \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_W(\tau_1,\ \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 .$$

Знаем, что $m_W(t) \equiv 0$, $K_W(t_1,\ t_2) = \min(t_1,\ t_2)$. Но тогда $\int\limits_0^t m_W(\tau)d\tau = 0$ и

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} \min(\tau_1,\ \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \int\limits_0^{t_1} d\tau_1\left(\int\limits_0^{\tau_1}\tau_2 d\tau_2 + \int\limits_{\tau_1}^{t_2}\tau_1 d\tau_2\right) =$$

$$= \frac{\tau_1^3}{6}\Bigg|_0^{t_1} + \left(\frac{\tau_1^2 t_2}{2} - \frac{\tau_1^3}{3}\right)\Bigg|_0^{t_1} = \frac{t_1^3}{6} + \frac{t_1^2 t_2}{2} - \frac{t_1^3}{3} = \frac{t_1^2 t_2}{2} - \frac{t_1^3}{6} .$$

Оба интеграла конечны, но тогда существует и интеграл $Y(t)$.

Пример 8. Найти $K_Y(t_1,\ t_2)$, если $Y(t) = \int\limits_0^t X(\tau)d\tau$, $K_X(t_1,\ t_2) = = De^{-\alpha|t_1-t_2|}$.

Решение.

$$K_Y(t_1,\ t_2) = \int\limits_0^{t_1} d\tau_1 \int\limits_0^{t_2} K_X(\tau_1,\ \tau_2)d\tau_2 = D\int\limits_0^{t_1} d\tau_1 \int\limits_0^{t_2} e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}d\tau_2 = |t_1 < t_2| =$$

$$= D\int\limits_0^{t_1} d\tau_1\left(\int\limits_0^{\tau_1} e^{-\alpha(\tau_1-\tau_2)}d\tau_2 + \int\limits_{\tau_1}^{t_2} e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}d\tau_2\right) =$$

$$= \frac{D}{\alpha}\int_0^{t_1}\left(e^{-\alpha(\tau_1-\tau_2)}\Big|_0^{\tau_1} - e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}\Big|_{\tau_1}^{t_t} \right) d\tau_1 =$$

$$= \frac{D}{\alpha}\int_0^{t_1}\left(-e^{-\alpha\tau_1} - e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)} + 2 \right) d\tau_1 =$$

$$= \frac{D}{\alpha^2}\left(\left(\left(e^{-\alpha\tau_1} \right)\Big|_0^{t_1} - e^{-\alpha(t_2-\tau_1)}\Big|_0^{t_1} \right) + 2\,\tau_1\Big|_0^{t_1} \right) =$$

$$= \frac{D}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t_1} + e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha(t_2-t_1)} - 1 \right) + 2\frac{D}{\alpha}t_1.$$

При $t_1 > t_2$ вследствие симметрии матрицы K_X выражение для K_Y будет аналогичным, только t_1 и t_2 поменяются местами. Окончательно получаем

$$K_Y(t_1,\ t_2) = 2\frac{D}{\alpha}\min(t_1,\ t_2) + \frac{D}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t_1} + e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha|t_1-t_2|} - 1 \right).$$

В заключение отметим, что операция с.к. интегрирования также не позволяет найти интеграл $Y(t)$ в явном виде. Иногда это удается сделать точно таким же способом, как и получение с.к. производной. Пусть $X(t)$ такова, что все ее реализации интегрируемы по Риману на множестве T, т. е. $P\left\{ \omega:\ \text{существует}\ Y_R(\omega) = \int_T \varphi(t)X(t,\ \omega)dt \right\} = 1$. Тогда Y_R при различных значениях ω – сл. величина. Если $X(t)$ к тому же с.к. интегрируем, то потраекторный интеграл Y_R и с.к. интеграл $Y = \int_T \varphi(t)X(t)\,dt$ совпадают с вероятностью 1. Тогда можем сначала найти с.к. интеграл от случайной функции и для него вычислять числовые характеристики. Рассмотрим пример.

Пример 9. Пусть $X(t) = U\sin\nu t + V\cos\nu t,\ t \ge 0,\ \nu > 0$ и U и V – независимые гауссовские сл. величины с $MU = MV = 0$ и равными дисперсиями $DU = DV = D$. Найти явный вид интеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau,\ t \geq 0.$

Решение. Для любого ω траектория сл. функции $X(t)$ имеет вид $X(t,\ \omega) = U(\omega)\sin \nu t + V(\omega)\cos \nu t$ и, как линейная комбинация интегрируемых функций, интегрируема на любом конечном отрезке $[0,\ t]$: $Y_R(t,\ \omega) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\nu}\left[-U(\omega)(\cos \nu t - 1) + V(\omega)\sin \nu t\right],\ t \geq 0.$

Далее, сл. функция $X(t)$ является при каждом t гауссовской сл. величиной с параметрами $m_X(t) = 0$ и $D_X(t) = D$; $K_X(t,\ s) = D \times \times\left(\cos \nu(t-s) + \sin \nu(t+s)\right)$. Условия теоремы 5 для функций $m_X(t)$ и $K_X(t,\ s)$ выполняются, поэтому с.к. интеграл $Y(t)$ существует и почти всюду равен потраекторному интегралу $Y_R(t)$, т. е. $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau = \frac{1}{\nu}\left[-U(\cos \nu t - 1) + V\sin \nu t\right],\ t \geq 0.$ Его числовые вероятностные характеристики имеют вид $m_Y = 0,\quad D_Y(t) = \frac{2D}{\nu^2}(1 - \cos \nu t).$

3.5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ТИП I)

Введенные выше понятия с.к. производной и с.к. интеграла позволяют рассмотреть стохастические дифференциальные уравнения вида

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t)\xi(t),\ t \geq 0, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $X'(t)$ – с.к. производная процесса $X(t)$; $\xi(t)$ – с.к. непрерывная при $t \geq 0$ случайная функция; $A(t)$, $B(t)$ – непрерывные неслучайные функции; X_0 – некоторая сл. величина.

Определение. Случайная функция $X(t)$, $t \geq 0$, является решением уравнения (3.7) с начальным условием $X(0) = X_0$, если при любом $t \geq 0$ выполняется соотношение

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A(\tau)X(\tau)d\tau + \int_0^t B(\tau)\xi(\tau)d\tau , \tag{3.8}$$

где в правой части равенства (3.8) все интегралы понимаются в среднем квадратическом смысле.

Уравнение (3.7) можно записать в несколько ином виде:

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + B(t)\xi(t)dt. \tag{3.9}$$

Уравнения (3.7) – (3.9) эквивалентны в том смысле, что все они определяют один и тот же СП $X(t)$.

Можно проверить, что решением дифференциального уравнения (3.7) или, что все равно, (3.9) является процесс $X(t)$, имеющий вид

$$X(t) = F(t)X_0 + F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)\xi(\tau)d\tau , \tag{3.10}$$

где $F(t)$ – решение уравнения

$$\begin{cases} F'(t) = A(t)F(t), \ t > 0, \\ F(0) = I. \end{cases} \tag{3.11}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что матричная функция $F(t)$ из (3.11) такова, что $F(t) \neq 0$ при любом $t \geq 0$, а функция $A(t)$ – кусочно-непрерывна.

Вычислим с.к. производную равенства (3.10) с учетом всех свойств операций с.к. дифференцирования и с.к. интегрирования, отмеченных выше:

$$X'(t) = F'(t)X_0 + F'(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)\xi(\tau)d\tau + F(t)F^{-1}(t)B(t)\xi(t) =$$

$$= A(t)\left[F(t)X_0 + F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)\xi(\tau)d\tau \right] + B(t)\xi(t) =$$

$$= A(t)X(t) + B(t)\xi(t).$$

Осталось проверить выполнение начального условия: $X(0) = = F(0)X_0 = X_0$. В силу (3.11) $F(0) = I$, следовательно, начальное условие выполняется. Выражение (3.10) позволяет выписать явный аналитический вид решения уравнения (3.7) во многих практически важных случаях.

Пример 10. Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению $X'(t) = = \alpha X(t) + \xi$, $X(0) = X_0$, где ξ и X_0 образуют гауссовский случайный вектор, причем $M\xi = m_\xi$, $MX_0 = m_0$, $D\xi = D_\xi$, $DX_0 = D_0$, $\rho = \mathrm{cov}(\xi, X_0)$. Найти закон распределения $X(t)$ при любом $t \geq 0$.

Решение. Уравнение (3.11) для данного случая имеет вид $F'(t) = \alpha F(t)$, $F(0) = 1$. Поэтому $F(t) = e^{\alpha t}$. Общее решение уравнения, заданного в условии задачи, согласно формуле (3.10) имеет вид

$$X(t) = e^{\alpha t} X_0 + e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\xi d\tau \quad \Rightarrow$$

$$X(t) = e^{\alpha t} X_0 + \xi e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = e^{\alpha t} X_0 + \frac{\xi}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1).$$

Видим, что процесс $X(t)$ как линейная комбинация гауссовских сл. величин X_0 и ξ – гауссовская сл. величина с параметрами

$$MX = m_x(t) = e^{\alpha t} m_0 + \frac{m_\xi}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1),$$

$$D_x(t) = e^{2\alpha t} D_0 + \frac{D_\xi}{\alpha^2}(e^{\alpha t} - 1)^2 + \frac{2\rho}{\alpha} e^{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1).$$

3.6. СЛАБАЯ СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ. ОБОЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Обобщим понятие с.к. сходимости последовательностей сл. величин на с.к. сходимость последовательностей сл. функций.

Определение. Последовательность случайных функций $\{X_n(t)\}$ называется сходящейся в среднем квадратическом к случайной функции $X(t)$, $t \in T$, если последовательность значений $\{X_{nt}\}$ этих случайных функций с.к. сходится к соответствующему значению X_t случайной функции $X(t)$ при всех фиксированных $t \in T$.

Случайная функция $X(t)$ называется с.к. пределом последовательности сл. функций $\{X_n(t)\}$.

Пусть Φ – некоторый класс ограниченных функций переменной t, каждая из которых отлична от нуля только в некоторой конечной области (это существенно, только если T – бесконечная область).

Определение. Последовательность случайных функций $\{X_n(t)\}$, $t \in T$, называется слабо с.к. сходящейся (с.с.к. сходящейся) к случайной функции $X(t)$ (по отношению к классу Φ), если

$$\int_T \varphi(\tau) X_n(\tau) d\tau \xrightarrow{\text{с.к.}} \int_T \varphi(\tau) X(\tau) d\tau \quad \forall \varphi(t) \in \Phi.$$

Случайная функция $X(t)$ называется в этом случае слабым средним квадратическим пределом (с.с.к. пределом) последовательности $\{X_n(t)\}$.

Класс функций Φ обычно в определении не указывается, так как он естественно определяется условиями задачи. Обычно это класс непрерывных функций, или непрерывных со своими производными до определенного порядка, или бесконечно дифференцируемых функций и т. д.

Пример 11. Пусть последовательность $X_n(t)$, $t \in T$, n =1, 2,…, такова, что $m_{X_n}(t) = 0$,

$$K_{X_m X_n}(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{mn}{m+n} e^{-m(t_1 - t_2)}, & t_1 \ge t_2; \\ \dfrac{mn}{m+n} e^{-n(t_2 - t_1)}, & t_1 < t_2. \end{cases}$$

Исследовать на с.к. сходимость эту функциональную последовательность.

Решение. $K_{mn}(t_1,\ t_2)\to 0,\ m,n\to\infty,$ если $t_1\neq t_2$, $K_{mn}(t_1,\ t_2)\to\infty,$ $m,\ n\to\infty,$ если $t_1=t_2$. Следовательно, $MX_{nt_1}X_{nt_2}$ не имеет конечного предела при $m,\ n\to\infty$ для любых $t_1,\ t_2\in T,$ а значит, с.к. сходимости по стохастическому критерию Коши последовательности функций быть не может. Что можно сказать о с.с.к. сходимости этой последовательности?

Согласно определению слабой сходимости вещественных (неслучайных функций) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{mn}(t+\tau,\ t)d\tau=\frac{mn}{m+n}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}e^{n\tau}d\tau+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-m\tau}d\tau\right)=1\quad\Rightarrow$$

$$K_{mn}(t_1,\ t_2)\ \xrightarrow{\text{слабо}}\ \delta(t_1-t_2)\ \text{при}\ m,n\to\infty\,.$$

Поэтому естественно считать с.к. пределом последовательности функций $\{X_n(t),\ t\in T\}$ белый шум единичной интенсивности.

Обратимся теперь к определению слабой с.к. сходимости последовательности сл. функций, для чего рассмотрим интегралы $Y_n=\int\varphi(\tau)X_n(\tau)d\tau$, где φ – любая непрерывная финитная функция.

$$MY_mY_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{mn}(\tau_1,\ \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)d\tau_1d\tau_2=$$

$$=\frac{mn}{m+n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau_1)d\tau_1\left(\int\limits_{-\infty}^{\tau_1}e^{-m(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\tau_2)d\tau_2+\int\limits_{\tau_1}^{\infty}e^{-n(\tau_2-\tau_1)}\varphi(\tau_2)d\tau_2\right)=$$

$$=\frac{mn}{m+n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau_1)d\tau_1\left(\frac{1}{m}\varphi\left(\tau_1'\right)+\frac{1}{n}\varphi\left(\tau_1''\right)\right),$$

где $\tau_1'\in(-\infty,\ \tau_1)$, $\tau_1''\in(\tau_1,\ \infty)$. Так как $e^{-m(\tau_1-\tau_2)}\to 0$, $e^{-n(\tau_2-\tau_1)}\to 0\ \ \forall\tau_2\neq\tau_1$, то $\tau_1',\ \tau_1''\to\tau_1$ при $m,\ n\to\infty$, и в силу непрерывности функции $\varphi(\tau)$ $\varphi(\tau_1')\to\varphi(\tau_1)$, $\varphi(\tau_1'')\to\varphi(\tau_1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $MY_mY_n \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\tau)d\tau$ $m,n\to\infty$ $\Rightarrow$ последовательность интегралов сходится. Тогда последовательность $\{X_n(t),\ t\in T\}$ слабо с.к. сходится. Значит, белый шум единичной интенсивности является с.с.к. пределом рассматриваемой последовательности.

Приведенный пример показывает, что в общем случае с.с.к. предел последовательности случайных функций может не быть случайной функцией в обычном смысле. Это вызывает необходимость расширить понятие случайной функции.

Определение. Слабый средний квадратический предел последовательности случайных функций называется обобщенной случайной функцией.

Белый шум относится к классу случайных обобщенных функций.

Очевидно, что из с.к. сходимости с.с.к. сходимость следует: любая с.к. сходящаяся последовательность случайных функций с.с.к. сходится с той же предельной функции. Следовательно, класс обобщенных сл. функций содержит и некоторые обычные случайные функции.

Интегралы, содержащие белый шум

Определение. Пусть $V(t)$ – с.с.к. предел последовательности с.к. интегрируемых функций $\{X_n(t),\ t\in T\}$. Интегралом от белого шума $V(t)$ называется с.к. предел интегралов от сл. функций $X_n(t)$:

$$\int\limits_T \varphi(\tau)V(\tau)d\tau = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int\limits_T \varphi(\tau)X_n(\tau)d\tau \quad \forall\varphi\in\Phi. \tag{3.12}$$

Рассмотрим числовые вероятностные характеристики таких интегралов.

Пусть сначала $Y(t)=\int\limits_0^t \varphi(\tau)V(\tau)d\tau$ – интеграл с переменным верхним пределом. Тогда $m_Y(t)=MY_t=0$,

$$K_Y(t,\ s)=M\int\limits_0^t\int\limits_0^s \varphi(\tau)\varphi(\sigma)V(\tau)V(\sigma)d\tau d\sigma=$$

$$=\int_0^t\int_0^s \varphi(\tau)\varphi(\sigma)K_V(\tau,\sigma)d\tau d\sigma=\int_0^t\int_0^s \varphi(\tau)\varphi(\sigma)\nu(\tau)\delta(\tau-\sigma)d\tau d\sigma=$$

$$=\int_0^t \varphi^2(\tau)\nu(\tau)d\tau, \qquad (3.13)$$

где $\nu(\tau)$ – интенсивность белого шума.

Если в равенстве (3.12) интеграл $Y(t)$ рассматривать на отрезке $[a,\ b]\equiv T$, то он будет уже просто сл. величиной $Y=\int_T \varphi(\tau)V(\tau)d\tau$ с математическим ожиданием и дисперсией, равными соответственно $MY=0,\ DY=\int_a^b \varphi^2(\tau)\nu(\tau)d\tau.$

Если же в качестве интеграла $Y(t)$ рассмотреть общий случай, а именно $Y(t)=\int_T g(t,\ \tau)V(\tau)d\tau$, где $[a,\ b]\equiv T$, то $m_Y(t)=MY_t=0,$

$$K_Y(t_1,\ t_2)=\int_T\int_T g(t_1,\ \tau_1)g(t_2,\ \tau_2)K_V(\tau_1,\ \tau_2)d\tau_1 d\tau_2=\int_T g(t_1,\ \tau)g(t_2,\ \tau)\nu(\tau)d\tau.$$

3.7. ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

При решении практических задач большое значение имеет вопрос: можно ли по одной реализации СП делать выводы о вероятностных свойствах процесса? Оказывается, что в некоторых случаях это возможно.

Для стационарных процессов, кроме средних статистических характеристик, вводятся еще характеристики, средние по времени. Пусть $x(t)$ – реализация СП $X(t)$, $t\in T$. Рассмотрим $\hat{M}X(t)=$ $=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\tilde{m}_x$. Здесь символом $\hat{M}$ обозначено усреднение по времени.

Следует отметить, что не для всех процессов временные средние $\tilde{m}_x$ имеют конечные значения. Это во-первых. Если они и имеют конечные значения, то они могут меняться от реализации к реализации. Это во-вторых. Процессы, для которых временные средние конечны и одинаковы для всех реализаций и, кроме того, совпадают со статистическими средними, носят название эргодических процессов относительно математического ожидания или просто эргодических процессов.

В эргодических процессах статистические средние с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, равны временному среднему, полученному усреднением одной единственной реализации за достаточно большой промежуток времени. Таким образом, по одной реализации процесса можно сделать выводы о его вероятностных свойствах.

Дадим формальное определение эргодическим процессам.

Определение. Скалярный СП $X(t)$, $t \in T = [0,\ r]$, с.к. интегрируемый на T с весом $g(t,\ \tau) = \frac{1}{r}$, имеющий постоянное математическое ожидание m_X, называется эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если существует $\underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{r}\int\limits_0^r X(t)dt = m_X$ или, что то же самое, существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} M\left(\frac{1}{r}\int\limits_0^r X(t)dt - m_X\right)^2 = 0$.

Теорема 6. Пусть $X(t)$, $t \in T \equiv [0,\ r]$, – скалярный процесс с конечным моментом второго порядка, с.к. интегрируемый на множестве T с весом $\frac{1}{r}$ и $m_X(t) \equiv m_X$ $\forall t \in T$. Предел в среднем квадратическом смысле $\underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{r}\int\limits_0^r (X(t) - m_X)dt = 0$ существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^r K_X(t_1,\ t_2)dt_1 dt_2 = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Обозначим за сл. величину Y интеграл $\frac{1}{r}\int\limits_0^r X(t)dt$: $Y = \frac{1}{r}\int\limits_0^r X(t)dt$. Его числовые вероятностные характеристики, согласно формулам (3.3) раздела 3, равны $m_Y = \frac{1}{r}\int\limits_0^r m_X(t)dt = m_X$;

$DY = \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^r K_X(t_1,\ t_2)dt_1dt_2$.

С другой стороны, если воспользоваться определением дисперсии сл. величины, получим $D_Y = M(Y - m_Y)^2 = M\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r (X(t)dt - m_X(t))\right]^2$.

Сопоставляя два выражения для дисперсии D_Y, получаем соотношение $M\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r (X(t)dt - m_X(t))\right]^2 = \frac{1}{r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^r K_X(t_1,\ t_2)dt_1dt_2$.

Предел левой части при $r \to \infty$ равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю предел правой части при $r \to \infty$.

Теорема доказана. Она содержит необходимое и достаточное условия эргодичности процесса $X(t)$ и утверждает следующее. Для скалярного процесса $X(t),\ t \in T \equiv [0,\ r]$, с постоянным математическим ожиданием условие, что среднее значение этого сл. процесса по области T в пределе при $r \to \infty$ равно его математическому ожиданию, **равносильно** условию, что среднее значение по области $T \times T$ ковариационной функции при $r \to \infty$ стремится к нулю.

В вычислительном отношении иногда гораздо проще, особенно в случае стационарных процессов, использовать следующее достаточное условие эргодичности СП.

Теорема 7. Для эргодичности СП $X(t),\ t \in T = [0, r]$, по отношению к его математическому ожиданию, с.к. интегрируемого на T с весом $\frac{1}{r}$, имеющего постоянное математическое ожидание, достаточно существования предела $\lim\limits_{|t_2 - t_1| \to \infty} K_X(t_1,\ t_2) = 0$.

Пример 12. Пусть $X(t),\ t \in T = [0,\ \infty)$, – стационарный скалярный СП с параметрами $m_X(t) = 0$, $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$,

$\alpha > 0$. Он является эргодическим по отношению к его математическому ожиданию, так как:

1) $m_X(t) = 0$ – математическое ожидание постоянно;

2) процесс является с.к. интегрируемым на любом отрезке $[0, r]$ с весом $\frac{1}{r}$, поскольку существуют интегралы $\frac{1}{r}\int_0^r m_X(t)dt = 0$ и $\frac{1}{r^2}\int_0^r\int_0^r K_X(t_2 - t_1)dt_1dt_2$;

3) выполняется достаточное условие теоремы 7, которое при $\tau = t_2 - t_1$ означает существование предела $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} K_X(\tau) = 0$.

Еще раз отметим сущность эргодических процессов: эргодичность скалярного СП $X(t)$, $t \in T$, относительно его математического ожидания означает, что если известна его реализация $X(t)$, то в качестве оценки m_X может быть взята величина $\frac{1}{r}\int_0^r x(t)dt$, т. е. $\hat{m}_X = \frac{1}{r}\int_0^r x(t)dt.$ Чем больше величина r, тем точнее оценка.

3.8. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ОТ НЕСЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим на множестве $T \equiv [a, b]$ неслучайную непрерывную функцию $\varphi(t)$ и скалярный процесс с некоррелированными приращениями $X(t)$ с известными математическим ожиданием и ковариационной функцией:

$$m_X(t) = m_X(a) + \int_a^t m'_X(\tau)d\tau,\ t \in T, \quad K_X(t,\ s) = k(a) + \int_a^t \nu(\tau)d\tau,$$

где $m'_X(t)$ и $\nu(t)$ также непрерывные на множестве T функции, $\nu(t)$ – интенсивность процесса $X(t)$ [см. формулы (2.8) и (2.10)]. Для произвольных разбиений отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ с мелкостями разбиений $\lambda = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$, $k = \overline{1,n}$, составим интегральные суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\tau_k)\left[X(t_k) - X(t_{k-1})\right]$, τ_k – произвольные точки отрезков $[t_{k-1},\ t_k]$.

Определение. Стохастическим интегралом от функции $\varphi(t)$ по процессу $X(t)$ называется с.к. предел последовательности $\{S_n,\ n \geq 1\}$ при $\lambda \to 0$, если он существует и не зависит ни от разбиения отрезка $[a,\ b]$, ни от выбора точек τ_k:

$$Y = \underset{\lambda\to 0}{\mathrm{l.i.m.}} S_n = \underset{\lambda\to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\tau_k)\left[X(t_k) - X(t_{k-1})\right] = \int_a^b \varphi(t)dX(t).$$

Теорема 8. Для существования стохастического интеграла от неслучайной функции φ по процессу X с некоррелированными приращениями необходимо и достаточно существование пределов:

$$\lim_{n\to\infty} MS_n = \int_a^b \varphi(\tau)m'_X(\tau)d\tau, \qquad \lim_{m,n\to\infty} MS_nS_m = \int_a^b \left(\varphi(\tau)\right)^2 \nu(\tau)d\tau.$$

При этом математическое ожидание и ковариационная функция (дисперсия в случае скалярного процесса) стохастического интеграла определяются формулами:

$$m_Y = \int_a^b \varphi(\tau)m'_X(\tau)d\tau,$$
$$D_Y = \int_a^b \left(\varphi(\tau)\right)^2 \nu(\tau)d\tau. \tag{3.15}$$

Пример 13. Найти математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла $Y = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}dX(\tau)$, если $X(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\alpha > 0$.

Решение. Для винеровского процесса $m_X(t) \equiv 0 \ \forall t \in T$ и $\nu(t) \equiv 1$ ковариационная функция имеет вид

$$K_X(t_1, t_2) = \int\limits_0^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau) d\tau = \min(t_1, t_2).$$

Тогда по формулам (3.15)

$$m_Y = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot 0 d\tau = 0; \quad D_Y = \int\limits_0^{\infty} e^{-2\alpha\tau} \cdot 1 d\tau = \frac{1}{2\alpha}.$$

Пример 14. Найти математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла $Y = \int\limits_0^{\infty} \frac{dX(\tau)}{1+\tau^2}$, если $X(t)$ – пуассоновский процесс постоянной интенсивности ν.

Решение. Пуассоновский процесс есть процесс с независимыми приращениями и конечными моментами второго порядка, следовательно, он является СПНРП, поэтому задание интеграла по пуассоновскому процессу корректно.

Известно, $m_X(t) = \nu t$, тогда $\quad m_Y = \int\limits_0^{\infty} \frac{\nu d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\pi\nu}{2};$

$$D_Y = \int\limits_0^{\infty} \frac{\nu dt}{(1+t^2)^2} = \nu \int\limits_0^{\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} dt = \nu \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{\nu}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{t d(1+t^2)}{(1+t^2)^2} =$$

$$= \nu \left(\operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right) = \frac{\nu\pi}{4}.$$

Замечание 1. Если в определении стохастического интеграла процесс $X(t)$ – векторный, то $\varphi(t)$, $\nu(t)$ – матрицы, вторая формула в соотношениях (3.15) принимает вид $D_Y = \int\limits_a^b \varphi(\tau)\nu(\tau)\varphi^m(\tau) d\tau$. Необходимым и достаточным условием существования векторного стохастического интеграла является существование всех скалярных интегралов, входящих в его состав.

Замечание 2. Если $\varphi \in C^{(1)}(T)$ и $X(t)$ – СПНРП, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^t \varphi(\tau)dX(\tau) = \varphi(t)X(t) - \varphi(a)X(a) - \int_a^t \varphi'(\tau)X(\tau)d\tau.$$

Эта формула выражает стохастический интеграл через с.к. интеграл, и это равенство может быть принято за определение стохастического интеграла.

3.9. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ КАК ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ БЕЛЫЙ ШУМ

Покажем прежде всего, что процессы с некоррелированными приращениями не являются с.к. дифференцируемыми процессами. Пусть $X(t),\ t \in T,$ – СПНРП с $m_X(t) \equiv 0$, $K_X(t_1,\ t_2) = \int\limits_{t_0}^{\min(t_1,\ t_2)} \nu(\tau)d\tau$.

Для с.к. дифференцируемости СП $X(t)$ необходимо и достаточно существование конечной второй производной $\dfrac{\partial^2 K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$. Рассмотрим сначала K_X как функцию t_2 при фиксированном t_1, тогда

$$K_X(t_1,\ t_2) = \begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_2} \nu(\tau)d\tau, & \text{если} \quad t_2 \le t_1, \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} \nu(\tau)d\tau, & \text{если} \quad t_1 < t_2. \end{cases}$$

Дифференцируя эту формулу по t_2, находим

$$\frac{\partial K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=\begin{cases}\nu(t_2), & \text{если} \quad t_2 \le t_1,\\ 0, & \text{если} \quad t_1 < t_2,\end{cases}$$

откуда следует, что функция $\dfrac{\partial K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}$ в точке $t_1=t_2$ терпит разрыв с величиной скачка, равной $-\nu(t_2)$. Последнее равенство можно записать в виде $\dfrac{\partial K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=\nu(t_2)\varepsilon(t_1-t_2)$, где $\varepsilon(t_1-t_2)$ – единичная функция.

Продифференцируем последнее равенство по переменной t_1, получим $\dfrac{\partial^2 K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}=\nu(t_2)\delta(t_1-t_2)=\nu(t_1)\delta(t_1-t_2).$

При $t_1=t_2$ $\dfrac{\partial^2 K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}=\infty$, следовательно, достаточное условие с.к. дифференцируемости процесса **не** выполнено.

Однако выражение для второй производной ковариационной функции содержит множителем δ-функцию, но тогда это ковариационная функция белого шума. Поэтому целесообразно считать с.к. производную СПНРП $X(t)$ белым шумом. Для формального же доказательства этого факта достаточно показать, что любой СПНРП имеет слабую с.к. производную, представляющую собой белый шум той же интенсивности, что и СПНРП.

На основании сказанного стохастический интеграл от неслучайной функции можно **формально** представить в виде интеграла, содержащего белый шум: $\int\limits_a^b \varphi(\tau)dX(\tau)=\int\limits_a^b \varphi(\tau)V(\tau)d\tau.$

Если в интегралах заменить a на t_0, b – на t и $\varphi(t)$ – на $\varepsilon(t-\tau)$, то они примут вид $\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon(t-\tau)dX(\tau)=\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon(t-\tau)V(\tau)d\tau \;\Rightarrow \int\limits_{t_0}^{t} dX(\tau)=$

$$=\int\limits_{t_0}^{t} V(\tau)d\tau \;\Leftrightarrow\; X(t)-X(t_0)=\int\limits_{t_0}^{t} V(\tau)d\tau \;\Rightarrow X(t)=X(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t} V(\tau)d\tau.$$

Последний результат означает, что любой с.к. непрерывный процесс с некоррелированными приращениями можно представить в виде интеграла от белого шума той же интенсивности.

3.10. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО ОРТОГОНАЛЬНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРЕ

Отметим, что введенный выше стохастический интеграл от неслучайной функции представляет собой частный случай стохастических интегралов от неслучайных функций по ортогональной стохастической мере.

Введем некоторые определения.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) и некоторое множество $E \subset R^1$ с σ-алгеброй ε его подмножеств.

Определение. Случайная функция (может быть и комплексная) $Z(\Delta, \omega) \equiv Z(\Delta)$, $\Delta \in \varepsilon$, $\omega \in \Omega$, называется элементарной стохастической мерой, если выполнены условия:

1) $Z(\Delta)$ – центрированная сл. функция с конечным вторым моментом, т. е. $MZ(\Delta) = 0$, $M\left|Z(\Delta)\right|^2 < \infty$;

2) для $\Delta_1, \Delta_2 \in \varepsilon$, таких, что $\Delta_1 \bigcap \Delta_2 = \varnothing$, $Z(\Delta_1 + \Delta_2) = Z(\Delta_1) + Z(\Delta_2)$;

3) если $\{\Delta_n\}$ – последовательность из ε такая, что $\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \ldots \supseteq \Delta_n \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \varnothing$, то $M\left|Z(\Delta_n)\right|^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Если дополнительно выполняется условие, что $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \varepsilon$ таких, что $\Delta_1 \bigcap \Delta_2 = \varnothing$, $M\left\{Z(\Delta_1), \overline{Z(\Delta_2)}\right\} = 0$, т. е. $Z(\Delta_1) \perp Z(\Delta_2)$, то стохастическая мера называется ортогональной.

С каждой стохастической мерой $Z(\Delta)$ связана неслучайная мера $m(\Delta)$, определенная следующим образом: $m(\Delta) = M\left|Z(\Delta)\right|^2 < \infty$, $\Delta \in \varepsilon$. Она называется структурной функцией стохастической меры. С каждой же конечной мерой $m(\bullet)$ связана функция распределения – это любая функция $F(x)$, $x \in E$, обладающая свойствами: 1) $F(x)$ –

неубывающая функция, 2) $F(0)=0$, $F(T)=\lim\limits_{x\to T-} F(x)<\infty$, если $E=[0,\ T]$, и 3) $F(x)$ – непрерывная справа функция. Говорят еще, что неслучайная конечная мера порождает функцию распределения.

С помощью функции распределения $F(x)$ мера $m(\bullet)$ на каждом промежутке $\langle a,\ b\rangle$ задается следующим образом:

$$m\big((a,\ b]\big)=F(b)-F(a),\ \ m\big((a,\ b)\big)=F(b-)-F(a),$$

$$m\big([a,\ b]\big)=F(b)-F(a-),\ \ m\big([a,\ b)\big)=F(b-)-F(a-).$$

Определение стохастического интеграла по ортогональной стохастической мере от неслучайной функции полностью повторяет определение интеграла Лебега. Пусть $f(x)$ – некоторая простая функция на E, т. е. такая, что $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k I_{\Delta_k}(x)$ и $I_{\Delta_k}(x)$ – индикаторная функция множества Δ_k. Стохастическим интегралом по ортогональной мере $Z(\Delta)$ от простой функции $f(x)$ называется сл. величина $I(f)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k Z(\Delta_k)$.

Если $f(x),\ x\in E$, аппроксимируется последовательностью простых функций $\{f_n(x),\ n\ge 1\}$, т. е. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и f_n – простые функции на E, то сл. величина $I(f)=\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$ называется стохастическим интегралом на E от произвольной неслучайной функции по ортогональной стохастической мере.

Перечислим некоторые свойства стохастических интегралов от неслучайных функций по ортогональной стохастической мере.

1. $M\{I(f)\}=0$.

2. $I\{af+bg\}\overset{\text{п.н.}}{=}aI(f)+bI(g)$, $a,\ b$ – числа.

3. $D\{I(f)\}=\int\limits_E |f(x)|^2 m(dx)$, $m(dx)$ – структурная функция меры $Z(\Delta)$ на ε.

4. $\operatorname{cov}\left(I(f),\, I(g)\right) = \int\limits_E f(x)\overline{g(x)}\, m(dx)$.

Далее, из теории стохастических мер известно, что стохастическая ортогональная мера $Z(\bullet)$ на борелевской σ-алгебре ε подмножеств отрезка $[0,\ T] = E$ может быть задана с помощью центрированных с.к. непрерывных СП $X(t)$, $X(0) = 0$, $t \in [0,\ T]$, с некоррелированными приращениями, иначе говоря, с помощью процессов с ортогональными приращениями (см. раздел 2.2). В этом состоит еще одна особенность СП с ортогональными приращениями. Если $\Delta \in \varepsilon$, т. е. $\Delta = \langle s,\ t\rangle \subset E$, то сл. функция $Z(\Delta) = X(t) - X(s)$ обладает всеми свойствами элементарной ортогональной стохастической меры на ε. Структурная функция $m(\Delta)$ этой ортогональной стохастической меры имеет вид

$$m(\Delta) = M\left|Z(\Delta)\right|^2 = k(t) - k(s) = D_X(t) - D_X(s), \tag{3.16}$$

[см. формулы (2.7), (2.9)].

В силу с.к. непрерывности процесса $X(t)$ его дисперсия является функцией непрерывной, поэтому в силу полученного соотношения можно считать, что неслучайная мера $m(\cdot)$ порождает функцию распределения $F(t) \equiv D(t)$, $t \in T$, иначе говоря, $D_X(t)$ есть функция распределения меры $m(\cdot)$.

Интегралы по стохастической ортогональной мере, порожденной процессом $X(t)$ с ортогональными приращениями, записывают обычно в виде $I(f) = \int\limits_0^T f(t)Z(dt) = \int\limits_0^T f(t)dX(t)$.

Поскольку часто в роли процессов $X(t)$ выступают винеровские процессы, последняя запись преобразуется к виду $I(f) = \int\limits_0^T f(t)Z(dt) =$

$= \int\limits_0^T f(t)dW(t)$ (см. также следующий раздел).

3.11. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть задан винеровский процесс $W(t)$, $t \geq 0$, интенсивности $\nu(t)$ – это значит, что его приращение в точке t – сл. величина $W_{t+\Delta t} - W_t$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $\sqrt{\nu(t)\Delta t}$. Напоминаем, что когда мы полагали интенсивность винеровского процесса постоянной, равной σ, для дисперсии приращения постулировалась формула $D(W_{t+\Delta t} - W_t) = \sigma^2 \Delta t$. Знаем, что $m_w(t) = 0 \;\; \forall t \geq 0$,

$$K_w(t_1,\, t_2) = k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\min(t_1,\, t_2)} \nu(\tau) d\tau,$$

где $\nu(t)$ – неотрицательная непрерывная функция. Пусть далее $X(t)$ – с.к. непрерывная сл. функция с конечным моментом второго порядка, такая, что случайные величины $X_{t_1}, ..., X_{t_n}, W_{s_1}, ..., W_{s_m}$ не зависят от $W(s) - W(t)$ при любых n, m и $t_1 < t_2 < ... < t_n \leq t$; $s_1 < s_2 < ... < s_m \leq t < s$. Для любых разбиений отрезка $[a,\, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ с мелкостью разбиения $\lambda = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$ запишем сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X(t_{k-1})\big[W(t_k) - W(t_{k-1})\big]$.

Определение. Стохастическим интегралом от с.к. непрерывной случайной функции $X(t)$ по процессу с независимыми приращениями $W(t)$ (интегралом Ито) называется с.к. предел последовательности сумм S_n при $\lambda \to 0 \;\; (n \to \infty)$, если он существует и не зависит от способа разбиения отрезка:

$$Y = \int\limits_a^b X(\tau) dW(\tau) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} X(t_{k-1})\big[W(t_k) - W(t_{k-1})\big].$$

Замечание! Значение СФ $X(t)$ берется **в левом конце** отрезка $\big[t_{k-1},\, t_k\big]$. При другом выборе точек из отрезка $\big[t_{k-1},\, t_k\big]$ значение предела изменится.

Теорема 9. Необходимым и достаточным условием существования интеграла Ито является существование интеграла, $\lim\limits_{m,n\to\infty} MS_nS_m = \int\limits_a^b M\left(X(\tau)\right)^2 \nu(\tau)d\tau$, при этом справедливо соотношение

$$D_Y = \int\limits_a^b M\left(X(\tau)\right)^2 \nu(\tau)d\tau. \tag{3.17}$$

Очевидно, что $m_Y(t) \equiv 0$.

(Поскольку стохастический интеграл от случайной функции также является частным случаем стохастических интегралов по ортогональной стохастической мере, условия теоремы 9 аналогичны условиям теоремы 8.)

Пример 15. Найти дисперсию интеграла Ито $Y = \int\limits_0^t X(\tau)dW(\tau)$, если $X(t)$ – сл. функция с $m_X(t) = ct,\ K_X(t_1,\ t_2) = De^{\mu(t_1+t_2)-\alpha|t_1-t_2|}$, а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Решение. По формуле (3.17)

$$D_Y = \int\limits_a^b M\left(X(\tau)\right)^2 \nu(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \left(\left(m_X(\tau)\right)^2 + D_X(\tau)\right)\cdot 1 d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t (c^2t^2 + De^{2\mu\tau})\,d\tau = \frac{c^2t^3}{3} + D\frac{1}{2\mu}(e^{2\mu t} - 1).$$

3.12. ДРУГИЕ ВИДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно замечанию к определению интеграла Ито, если в интегральных суммах брать значения функции в других точках отрезков $\left[t_{k-1},\ t_k\right]$, то в с.к. пределе этих интегральных сумм будем получать другие интегралы. Так, если брать значения сл. функции $X(t)$ в правых концах отрезков, то получим интегралы, обозначаемые символом Y_1:

$$Y_1 = \int_a^b X(\tau) d_1 W(\tau) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} X(t_k)\left[W(t_k) - W(t_{k-1})\right].$$

И вообще, для любого $\theta \in (0,\ 1)$ можно определить стохастический θ-интеграл соотношением

$$Y_\theta = \int_a^b X(\tau) d_\theta W(\tau) = (1-\theta)Y + \theta Y_1 =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} \left[(1-\theta)X(t_{k-1}) + \theta X(t_k)\right]\left[W(t_k) - W(t_{k-1})\right].$$

Интеграл Ито получается при $\theta = 0$, интеграл Y_1 при $\theta = 1$; при $\theta = \dfrac{1}{2}$ симметризованный стохастический интеграл носит название интеграла Стратоновича.

Среди всех этих интегралов интеграл Ито – самый простой в вычислительном отношении: достаточно просто вычисляются математическое ожидание и дисперсия интеграла. При остальных $\theta \neq 0$ эти характеристики вычислять сложно из-за зависимости сл. величин $X(\tau_k)$ от сл. величин $W(t_k) - W(t_{k-1})$.

Как и в случае стохастических интегралов от неслучайных функций, стохастические интегралы от случайных функций можно рассматривать как интегралы, содержащие белый шум. Имея в виду формальное соотношение $\dfrac{dW(t)}{dt} = V(t)$, стохастический интеграл Ито можно записать в виде $\int_a^b X(t) dW(t) = \int_a^b X(t)V(t)dt$.

О процессе

$$Y(t) = \int_a^t X(\tau) dW(\tau) = \int_a^t X(\tau)V(\tau)d\tau \qquad (3.18)$$

принято говорить, что он имеет стохастический дифференциал Ито: $dY(t) = X(t)dW(t)$, или, короче:

$$dY = XdW. \tag{3.19}$$

Формула (3.19) представляет собой сокращенную форму записи интеграла (3.18) в том смысле, что один и тот же процесс в первой из этих формул представлен интегралом, а во второй из них – дифференциалом.

Аналогичные сокращенные формы записей интегралов приняты и для других стохастических интегралов, в частности для интеграла Y_1 принято обозначение $dY = Xd_1W$ и $dY = Xd_*W$ – для интегралов Стратоновича. В случае же произвольного θ-интеграла пишут $dY = Xd_\theta W$.

Так как процесс $W(t)$ не имеет с.к. производной в обычном смысле, то dW, а следовательно, и dY не являются дифференциалами в привычном смысле. Тем не менее равенство (3.19) имеет вполне определенный смысл: обозначим приращение сл. функции $Y(t)$ на малом интервале Δt через $\Delta Y = Y(t+\Delta t) - Y(t) = X(t)\Delta W$, $\Delta W = W(t+\Delta t) - - W(t)$. Итак, получили соотношение $\Delta Y = X(t)\Delta W$. Оценим теперь порядок малости ΔY относительно Δt. Для этого вычислим условное математическое ожидание и условную дисперсию величины ΔY при данном значении x сл. величины $X(t)$. Сначала условное математическое ожидание: $M\left(\Delta Y \middle| x\right) = xM\left(\Delta W \middle| x\right)$ = |по определению стохастического интеграла от случайных функций $X(t)$ и ΔW являются независимыми сл. величинами при любых t| $= xM(\Delta W) = 0$. Теперь – условную дисперсию $D\left(\Delta Y \middle| x\right)$: при нулевом значении условного математического ожидания $D\left(\Delta Y \middle| x\right) = M(\Delta Y^2 | x) = x^2 \nu(t)\Delta t.$ Отсюда следует, что порядок малости компонент вектора ΔY относительно Δt равен $\frac{1}{2}$.

Таким образом, в отличие от обычного дифференциала функции $df(x) = f'(x)\Delta x$ и с.к. дифференциала сл. функции $dX(t) = X'(t)\Delta t$, имеющих тот же порядок малости, что и приращение независимой переменной, стохастический дифференциал имеет порядок малости $\frac{1}{2}$ относительно Δt.

3.13. ФОРМУЛА ИТО

Пусть сл. процесс $X(t)$ есть решение дифференциального уравнения $X'(t) = A(t, X(t)) + B(t, X(t))V(t)$, $X(0) = X_0$, где A, B – некоторые неслучайные функции двух переменных; $V(t) = \dfrac{dW(t)}{dt}$ – белый шум интенсивности $\nu(t)$; $W(t)$ – винеровский процесс той же интенсивности; X_0 – сл. величина. В этом случае процесс $X(t)$ представим своим стохастическим дифференциалом

$$dX(t) = A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0. \tag{3.20}$$

Далее, пусть $Z(t, x)$, $t \ge 0$, $x \in R$, – вещественная скалярная функция, имеющая непрерывные производные $\dfrac{\partial Z}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$. Тогда [11] процесс $Y(t) = Z(t, X(t))$, $t \ge 0$, имеет стохастический интеграл

$$dY(t) = \frac{\partial Z}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial Z}{\partial x}(t, X(t))dX(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(t, X(t))(dX(t))^2 = \frac{\partial Z}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial Z}{\partial x}(t, X(t)) \times$$

$$\times\left[A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW(t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(t, X(t))B^2(t, X(t))dt =$$

$$= \left[\frac{\partial Z}{\partial t}(t, X(t)) + A(t, X(t))\frac{\partial Z}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(t, X(t))B^2(t, X(t))\right]dt +$$

$$+B(t, X(t))\frac{\partial Z}{\partial x}(t, X(t))dW(t), \tag{3.21}$$

где $(dX(t))^2$ определяется из равенства (3.20) по следующему правилу «оперирования с дифференциалами»: $dt \cdot dt = dt \cdot dW(t) = dW(t)dt = 0$, $dW(t)dW(t) = dt$.

Иначе говоря, для всех неотрицательных t почти наверное имеет место равенство

$$Z(t,\, X(t)) = Z(0,\, X_0) + \int_0^t B(s,\, X(s)) \frac{\partial Z}{\partial x}(s,\, X(s) dW(s) +$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{\partial Z}{\partial t}(s,\, X(s) + A(s,\, X(s)) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{1}{2} B^2(s,\, X(s)) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right) ds. \qquad (3.22)$$

При этом должны быть выполнены условия, при которых определен стохастический интеграл по процессу $W(t)$.

Любая из двух последних формул называется формулой Ито: первая формула – формула Ито стохастического дифференциала, вторая – формула Ито стохастического интеграла.

Как пользуются формулой Ито? Рассмотрим примеры.

Пример 16. Рассмотрим процесс $Y(t) = W^2(t),\ t \geq 0,\ W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Вычислить дифференциал Ито процесса $Y(t)$.

Решение. В этом примере $X(t) = W(t)$, что следует из формулы (3.20), и $Z(t,\, x) = x^2$. Действуя по формуле (3.21), получим $dY(t) = 0 \cdot dt + 2W(t)dW(t) + \frac{1}{2} 2(dW(t))^2 = 2W(t)dW(t) + dt \ \Rightarrow \ dW^2(t) =$ $= 2W(t)dW(t) + dt.$

В соответствии с интегральной формулой (3.22) получаем

$W^2(t) = 2\int_0^t W(s)dW(s) + \int_0^t ds,\ t \geq 0,$ при этом учли, что $W(0) = 0.$

Преобразуем последнюю формулу к виду $\int_0^t W(s)dW(s) =$ $= \frac{1}{2} W^2(t) - \frac{1}{2} t.$ Видим, что стохастический интеграл от стандартного винеровского процесса по этому же процессу нельзя вычислять по обычной формуле интеграла от степенной функции.

Стохастический θ-интеграл при любом θ отличается от интеграла Ито на величину θt, поэтому $\int\limits_0^t W(t)d_\theta W(t) = \frac{1}{2}W^2(t) + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)t.$

В частности, $\int\limits_0^t W(t)d_* W(t) = \frac{1}{2}W^2(t)$ для интеграла Стратоновича и $\int\limits_0^t W(t)d_1 W(t) = \frac{1}{2}W^2(t) + \frac{1}{2}t$ для интеграла Y_1.

Видим, что значения стохастических θ-интегралов существенно отличаются друг от друга при различных значениях θ, особенно если значение t достаточно велико.

Пример 17. Пусть $Y(t) = e^{W(t)}$, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Вычислить дифференциал Ито этого процесса $Y(t)$.

Решение. Согласно формуле (3.21) $dY(t) = de^{W(t)} = \frac{1}{2}e^{W(t)}dt +$ $+ e^{W(t)}dW(t)$.

Пример 18. Пусть $Y(t) = W^{-3}(t)$, где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Вычислить дифференциал Ито этого процесса $Y(t)$.

Решение.

$$dY(t) = -3W^{-2}(t)dW(t) + \frac{1}{2}6W^{-1}(t)(dW(t))^2 =$$

$$= -\frac{3}{W^2(t)}dW(t) + \frac{3}{W(t)}dt.$$

3.14. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ТИП II)

Введенное понятие стохастического интеграла Ито позволяет рассмотреть класс дифференциальных уравнений, отличных от рассмотренных ранее в разделе 3.5.

Пусть $X(t) \in R^n$, $A(X, t) \in R^n$, $B(X, t) \in R^{n \times m}$ – матричная функция размерности $n \times m$, $W(t) \subset R^m$ – m-мерный стандартный винеровский процесс и $X_0 \subset R^n$ – вектор начальных условий.

Определение. Случайная функция $X(t)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = A(X(t), t)dt + B(X(t), t)dW(t) \tag{3.23}$$

на отрезке $\Delta = [0, T]$ с начальным условием $X(0) = 0$, если для каждого $t \in \Delta$ ее можно представить в виде

$$X(t) = X_0 + \int_0^T A(X(\tau), \tau)\,d\tau + \int_0^T B(X(\tau), \tau)\,dW(\tau), \tag{3.24}$$

где первый интеграл в правой части понимается в с.к. смысле, а второй – является интегралом Ито.

От дифференциальных уравнений раздела 3.5 уравнение (3.24) отличается наличием в нем интеграла Ито. Уравнение (3.23) называют в этом случае стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито.

Рассмотрим примеры.

Пример 19. Показать, что сл. функция $X(t) = e^{W(t)}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dX(t) = \frac{1}{2}X(t)dt + {}$ $+ X(t)dW(t),\ X(0) = 1$, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Решение. Рассмотрим $X(t) = e^{W(t)}$ в виде $X(t) = Z(t, W(t))$ и $Z(t, x) = e^x$. Используем результаты примера 17: $de^{W(t)} = \frac{1}{2}e^{W(t)}dt + {}$ $+ e^{W(t)}dW(t) = \frac{1}{2}X(t)dt + X(t)dW(t).$ Кроме того, $X(0) = e^{W(0)} = 1$. Следовательно, $X(t) = e^{W(t)}$ действительно является решением уравнения.

Пример 20. Пусть $X(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному стохастическому уравнению $dX(t) = (A(t)X(t) + B(t))dt + {}$

$+G(t)dW(t)$, $X(0)=X_0$ с непрерывными коэффициентами A, B, G. Показать, что процесс

$$X(t)=F(t)X_0+F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)\,d\tau+F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)G(\tau)\,dW(\tau) \quad (3.25)$$

является решением этого дифференциального уравнения, если матричная функция $F(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F'(t)=A(t)F(t), \\ F(0)=I. \end{cases} \quad (3.26)$$

Решение. Вычислим стохастические дифференциалы слагаемых в правой части равенства (3.25), используя правило с.к. дифференцирования и формулу Ито:

$$d\left(F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau\right)=\left[F'(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau+B(t)\right]dt;$$

$$d\left(F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)G(\tau)dW(\tau)\right)=F'(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)G(\tau)dW(\tau)+G(t)dW(t).$$

В последнем равенстве учтено, что для $Y(t)=\int_0^t F^{-1}(\tau)G(\tau)dW(\tau)$ по определению справедливо $dY(t)=F^{-1}(t)G(t)dW(t)$, а по правилу Ито в силу линейности преобразования $Z(t,\,Y(t))=F(t)Y(t)$ имеет место $d(F(t)Y(t))=F'(t)Y(t)dt+F(t)dY(t)$.

Окончательно получаем

$$dX(t)=F'(t)\left[X_0+\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau+\int_0^t F^{-1}(\tau)G(\tau)dW(\tau)\right]dt+$$

$$+ B(t)dt + G(t)dW(t) \overset{(3.26)}{=}$$

$$A\left[F(t)X_0 + F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau + F(t)\int_0^t F^{-1}(\tau)G(\tau)dW(\tau)\right]dt +$$

$$+ B(t)dt + G(t)dW(t) = A(t)X(t)dt + B(t)dt + G(t)dW(t).$$

Итак, выражение (3.25) дает общий вид решения стохастического дифференциального уравнения в форме Ито.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Можно ли утверждать, что с.к. предел последовательности сл. величин обладает обычными свойствами предела последовательности?

2. Можно ли утверждать, что с.к. предел сл. функции обладает обычными свойствами предела неслучайной функции?

3. Доказать, что линейная комбинация и произведение с.к. непрерывных на T скалярных сл. процессов – с.к. непрерывные на T скалярные сл. процессы.

4. Пусть X_k, $k = 1, 2, \ldots$, – некоррелированные сл. величины и $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что последовательность сл. величин $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся числовые ряды $\sum\limits_{n=1} MX_n$, $\sum\limits_{n=1} DX_n$.

5. Пусть $X(t)$, $Y(t)$, $X_k(t)$, $Y_k(t)$, $t \in T \subset R$, $k = 1, 2, \ldots$, – скалярные сл. процессы, причем $MX^2(t) < \infty$, $MY^2(t) < \infty$, $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}} X_k(t) = X(t)$, $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}} Y_k(t) = Y(t)$. Доказать, что $\underset{k,n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, MX_k(t)Y_n(t) = MX(t)Y(t)$.

6. Пусть $X(t) = (X_1(t),\ X_2(t))^{\mathrm{T}}$, $t \in T$, – двумерный винеровский процесс, исходящий из нуля. Пусть $[a, b] \subset T$ и $\{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\}$ – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Доказать, что существует $\underset{\lambda\to 0}{\text{l.i.m.}} \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\left(X^1_{t_{k+1}} - X^1_{t_k}\right)\left(X^2_{t_{k+1}} - X^2_{t_k}\right)\right] = 0.$

7. Доказать, что СП $X(t)$, $t \in T$, $X(t) = e^{-2t}\sin(t+\varphi)$, где φ – сл. величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$, дифференцируем на T.

8. Пусть процесс задается соотношением $X(t) = |\sin t| - \sin(2t+\varphi)$, $t \in T = [0, \infty)$, φ – сл. величина, распределенная по равномерному закону на отрезке $[0, 2\pi]$. Является ли дифференцируемой на T произвольная реализация СП $X(t)$? Является ли с.к. дифференцируемым процесс $X(t)$?

9. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t_1, t_2)$, $D_Y(t)$, если $Y(t) = X'(t)$ и $X(t) = 2 + t + \alpha t^2 + \beta t^3$, $t \in T$, α, β – некоррелированные сл. величины с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями $D\alpha = D\beta = 0.1$.

10. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t_1, t_2)$, $D_Y(t)$, если $Y(t) = X'(t)$ и $X(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 \sin t$, $t \in T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1)^{\mathrm{T}}$, $M\alpha = (1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{cov}(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Пусть $X(t)$, $t \in T$, – сл. процесс с известными математическим ожиданием и ковариационной функцией. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t, s)$, если $Y(t) = X(t) + X'(t)$, $t \in T$.

12. Является ли с.к. дифференцируемым винеровский процесс?

13. Пусть $X(t)$, $t \in T$, – процесс, стационарный в широком смысле, с.к. дифференцируемый на T. Является ли стационарным в широком смысле процесс $X'(t)$?

14. Доказать, что производная от гауссовского процесса – гауссовский процесс.

15. Найти одномерный закон распределения СП $Y(t)$, $t \in T$, если $Y(t) = (X(t), X'(t))^{\mathrm{T}}$, а $X(t)$ – нормальный скалярный стационарный в широком смысле процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_X(\tau) = (1 + \tau^2)^{-1}$.

16. Пусть $X(t)$, $t \in T$, – стационарный в широком смысле, дифференцируемый СП. Будет ли стационарным в широком смысле СП $Y(t) = \int\limits_0^t X'(s)ds$?

17. Пусть $X(t)$, $t \in T = [0, \infty)$, – интегрируемый на T скалярный СП с известной ковариационной функцией $K_X(t_1, t_2)$. Найти $K_{XY}(t_1, t_2)$, если $Y(t) = \int_0^t X(s)ds.$

18. Является ли СП $X(t)$, $t \in T = [0, \infty)$, эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если $X'(t) = AX(t)$, $X(0) = X_0$, где X_0 – двумерный СП, распределенный по нормальному закону с параметрами $m_X(t) = 0$, $D_X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

19. Пусть $X(t)$, $t \in T$, – с.к. дифференцируемый на T скалярный СП, имеющий постоянное математическое ожидание и ковариационную функцию $K_X(t, s) = \sigma^2 e^{-\alpha(s-t)^2}$, $\alpha > 0$, $Y(t) = X'(t)$, $t \in T$. Найти $K_Y(t_1, t_2)$, определить ее наибольшее значение. Будет ли СП $Y(t)$, $t \in T$, эргодическим по отношению к его математическому ожиданию?

20. Будет ли с.к. дифференцируемым и с.к. непрерывным пуассоновский процесс?

21. Случайный процесс задан соотношением $X(t) = \nu \cos \omega t$, где ν – сл. величина с $M\nu = 2$, $D\nu = 3$. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t, s)$, $D_Y(t)$, если $Y(t) = X(t) + 3X'(t)$.

22. Пусть $X(t)$, $t \in T$ – СП с $m_X(t) = 3t^2 + 2t + 1$ и $K_X(t, s) = 2e^{-(s-t)^2}$. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t, s)$, $Y(t) = tX'(t) + t^2$.

23. Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, задан выражением $X(t) = Ve^{-\alpha t} \cos \omega t$, где V – сл. величина с $MV = 2$, $DV = 3$. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t,s)$, если $Y(t) = \beta X(t) + \gamma \int_0^t X(s)ds$, где $\alpha > 0$, β, γ, ω – постоянные.

24. Дифференцируем ли в среднем квадратическом стационарный процесс $X(t)$, $t \in T$, с $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$?

25. Сколько раз с.к. дифференцируем процесс $X(t)$ с $K_X(t_1,\ t_2)$, имеющей вид:

а) $\sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$, $\alpha > 0$;

б) $\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - (\alpha/\beta)\sin\beta|\tau|\right)$, $\alpha,\ \beta > 0$.

Записать $K_{X''}(t,\ s)$, если она существует, найти дисперсию $D_{X''}(t)$.

26. Показать, что $K_{XY}(t,\ s)$ стационарной сл. функции $X(t)$, $t \in T$, и ее производной $Y(t) = X'(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию $K_{XY}(t,\ s) = -K_{YX}(t,\ s)$.

27. Нормальный стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики $m_X(t) = 1$, $K_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}\left(\cos 3\tau + \dfrac{2}{3}\sin|\tau|\right)$. Вычислить $P\left\{|X'(t)| < \sqrt{13}\right\}$.

28. Стационарный нормальный процесс $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_X(t) = 0$ и ковариационную функцию $K_X(t) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$, $\alpha > 0$ – постоянная величина. Найти двумерную плотность совместного распределения вероятностей случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = X'(t)$ в один и тот же момент времени.

29. Задана ковариационная функция $K_X(t) = 4e^{-2|\tau|}$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in T$. Найти $D_Y(t)$, если $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Определение стационарных процессов было дано в разделе 2.2. Отметим некоторые свойства таких процессов. Будем полагать их действительными

4.1. СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ (ССП)

1. $D_X(t) = K_X(t,\ t) = K_X(0) = \text{const}$ – ковариационная матрица ССП $X(t)$ (дисперсия в случае скалярного процесса) постоянна.

2. $K_X(\tau) = K_X^{\text{т}}(-\tau)$.

Это свойство вытекает из первого свойства ковариационной функции (см. раздел 1). Если $X(t)$ – скалярный ССП, то $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$ – ковариационная функция является четной.

3. $|K_X(\tau)| \le D_X = K_X(0)$ – ковариационная функция скалярного стационарного процесса не может быть больше ее значения в начале координат.

4. Ковариационная функция непрерывна всюду на R^1, если она непрерывна в точке $t = 0$ – результат свойства 4 ковариационных функций из раздела 1.

5. Производная стационарного процесса также является стационарным процессом: $K_{X'}(t_1,\ t_2) = \dfrac{\partial^2 K_X(t_1,\ t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = -K''_X(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$. В частности, $K_{X'X}(\tau) = -K'_X(\tau)$ и $K'_X(0) = 0$, поскольку в точке $\tau = 0$ функция $K_X(\tau)$ имеет максимум. Это означает, что значения любого ста-

ционарного процесса и его первой производной в одной и той же точке являются **некоррелированными сл. величинами.**

Везде далее в этом разделе мы будем рассматривать сл. процессы $X(t)$, стационарные в **широком** смысле.

4.2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

По своей сути – это применение идей и методов гармонического анализа к случайным функциям. Гармонический анализ решает задачу представления функции в виде суммы гармоник $A\sin(\omega t+\varphi)$, каждая из которых соответствует определенной частоте ω. Множество этих частот $\{\omega\}$ образует спектр функции. Зная спектр функции, ее можно восстановить с любой наперед заданной точностью.

При изучении случайных процессов приходится считаться с тем фактом, что ни одна из реализаций процесса не может быть известна заранее. Однако оказывается возможным заранее установить, как распределяются дисперсии процессов по частотам составляющих их гармоник. Такая информация по значимости не уступает знанию спектра детерминированных (неслучайных) функций.

Использование этой информации при изучении стационарных случайных процессов представляет сущность спектральной теории.

4.2.1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Любой стационарный процесс, как и любой другой случайный процесс, в качестве вероятностных характеристик (кроме законов распределения) имеет математическое ожидание и ковариационную функцию. Но для решения основной задачи спектральной теории необходимо знать спектральные характеристики стационарных процессов. К их числу относятся спектральная функция и спектральная плотность. Понятие спектральной функции вводится следующей теоремой.

Теорема 1 (Герглотц, Бохнер, Хинчин). Пусть $X(t)$, $t\in T$, – стационарный процесс с ковариационной функцией $K_X(t)$. Тогда существует единственная функция $S_X(\lambda)$ такая, что:

1) если $X(t),\ t \in T,$ – процесс с дискретным временем, то

$$K_X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dS_X(\lambda)\,; \tag{4.1}$$

2) если $X(t),\ t \in T,$ – процесс с непрерывным временем и функция $K_X(t)$ непрерывна, то

$$K_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dS_X(\lambda)\,. \tag{4.2}$$

При этом функция $S_X(\lambda)$ – неотрицательная неубывающая вещественная функция, непрерывная справа на промежутке Λ, принимающая в левом конце промежутка нулевое значение. В первом случае промежуток Λ имеет вид $\Lambda = [-\pi,\ \pi]$, $\Lambda = (-\infty,\ \infty)$ – во втором.

Функция $S_X(\lambda)$ называется спектральной функцией процесса $X(t),\ t \in T,$ и, как следует из теоремы 1, однозначно определяется равенствами (4.1) или (4.2); при этом равенство (4.1) точнее может быть записано как $K_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dS_X(\lambda)$, и именно это соотношение – суть теоремы Герглотца. Сами равенства (4.1), (4.2) называют **спектральным представлением ковариационной функции** $K_X(t)$.

Если функция $S_X(\lambda)$ является абсолютно непрерывной, т. е. существует функция $s_X(\lambda)$ такая, что $\forall \lambda \in \Lambda$:

$$S_X(\lambda) = \int_{-\infty(-\pi)}^{\lambda} s_X(\sigma) d\sigma\,, \tag{4.3}$$

то $s_X(\lambda)$ называется спектральной плотностью процесса, при этом $s_X(\lambda) \ge 0$ в силу монотонности $S_X(\lambda)$, и почти всюду на множестве Λ имеет место соотношение

$$S'_X(\lambda) \overset{\text{п.н.}}{=} s_X(\lambda). \tag{4.4}$$

Тогда равенства (4.1) и (4.2), если выполнено условие (4.3), могут быть переписаны в виде

$$K_X(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} s_X(\lambda)\, d\lambda \tag{4.5}$$

и

$$D_X = K_X(0) = \int_{\Lambda} dS_X(\lambda) = \int_{T} s_X(\lambda) d\lambda =$$

$$= \begin{cases} S_X(\pi) - \text{время дискретное}, \\ S_X(\infty) - \text{время непрерывное}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Если *X*(*t*) – процесс с дискретным временем, то связь спектральных характеристик с ковариационной функцией процесса можно выразить следующим образом. Формулу (4.5) можно рассматривать как формулу для получения коэффициентов ряда Фурье по ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$ системе функций $e^{i\lambda t}$ для функции $s_X(\lambda)$, следовательно, $s_X(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in Z} e^{-i\lambda n} K_X(n)$. Если ряд $\sum_{n \in Z} e^{-i\lambda n} K_X(n)$ сходится абсолютно, т. е. $\sum_{n \in Z} |K_X(n)| < \infty$, то он сходится к функции $s_X(\lambda)$ для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]$:

$$s_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in Z} e^{-i\lambda n} K_X(n). \tag{4.7}$$

В случае же, когда T – непрерывное множество, связь спектральных характеристик с ковариационной функцией выглядит иначе.

Теорема 2. Пусть $X(t),\ t \in T,$ – ССП с непрерывной ковариационной функцией $K_X(t)$. Тогда:

1) для любых точек непрерывности $\lambda, \mu \in \Lambda,\ \lambda < \mu,$ спектральной функции $S_X(\lambda)$ выполнено равенство

$$S_X(\mu) - S_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-i\lambda t} - e^{-i\mu t}}{it} K_X(t) dt; \tag{4.8}$$

2) если ковариационная функция $K_X(t)$ абсолютно интегрируема на R^1, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K_X(t)|dt<\infty,$ то спектральная плотность $s_X(\lambda)$ существует и определяется обратным преобразованием Фурье ковариационной функции

$$s_X(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}K_X(t)dt\,. \tag{4.9}$$

Равенства (4.5) и (4.9) означают, что $K_X(t)$ и $s_X(\lambda)$ связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье и обладают всеми свойствами, присущими этим преобразованиям, в частности, чем «шире» $s_X(\lambda)$, тем «уже» $K_X(t)$ Речь идет о том, что расширение полосы частот, в которой спектральная плотность заметно отличается от нуля, приводит к уменьшению интервала корреляции.

4.2.2. ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пример 1. Пусть заданы центрированные комплексные сл. величины $z_1, z_2, ..., z_N$, удовлетворяющие условию ортогональности, т. е. $(z_i,\, z_j)=\operatorname{cov}(z_i,\, z_j)=\begin{cases}\sigma_i^2, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$ Пусть $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_N$ – некоторые числа из промежутка $[-\pi,\,\pi).$ Введем в рассмотрение сл. последовательность $\{X_n\}$ соотношением $X_n=\sum\limits_{k=1}^{N}z_k e^{i\lambda_k n},\ n\in Z.$ Показать, что последовательность $\{X_n\}$ стационарна, и найти ее спектральные характеристики.

Решение. Последовательность $\{X_n\}$ центрирована: $MX_n = \sum\limits_{k=1}^{N}e^{i\lambda_k n}Mz_k=0.$ Ковариационная функция последовательности

$$K_X(n+m,\, m)=\operatorname{cov}\left(\sum_{k=1}^{N}z_k e^{i\lambda_k(n+m)},\ \sum_{k=1}^{N}z_k e^{i\lambda_k m}\right)=$$

$$= \sum_{k,j=1}^{N} \operatorname{cov}(z_k,\, z_j) e^{i\lambda_k (n+m)} \overline{e^{i\lambda_k m}} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n}.$$

Отсюда $K_X(n+m,\, m)$ зависит только от n. Следовательно, последовательность $\{X_n\}$ стационарна.

Спектральной функцией процесса является функция $S_X(\lambda) = \sum_{k:\lambda_k \le \lambda} \sigma_k^2$, так как она удовлетворяет условиям теоремы 1, в том числе и равенству (4.1): $K_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dS_X(\lambda) = \sum_{k:\lambda_k \le \lambda} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n}$, $\lambda \in \Lambda \equiv [-\pi,\, \pi]$. Такая функция $S_X(\lambda)$ кусочно-постоянна на отрезке $[-\pi,\, \pi]$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ – точки ее разрыва, а $S_X(\lambda_k) - S_X(\lambda_k -) = \sigma_k^2$ – величины скачков в этих точках. Иначе говоря, функция $S_X(\lambda)$ не является абсолютно непрерывной, следовательно, спектральной плотности для нее не существует.

Пример 2. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность центрированных некоррелированных сл. величин: $MX_n = 0$, $DX_n = \sigma^2$. Показать стационарность последовательности, найти ее вероятностные и спектральные характеристики.

Воспользуемся соотношением $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d\lambda = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ 0, & n \ne 0, \end{cases}$ получим спектральное представление для ковариационной функции $K_X(n) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d\lambda \;\; \Rightarrow \;\; s_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ – спектральная плотность последовательности $\{X_n\}$, $n \in Z$.

Спектральную функцию найдем по формуле (4.3), $S_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} s_X(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi}(\lambda + \pi)$, $\lambda \in \Lambda$.

Последовательность $\{X_n\}$ из примера 2 называют стационарным дискретным белым шумом. При $\sigma^2 = 1$ белый шум называют стандартным.

Термин «белый шум» пришел из радиофизики, где белым шумом называют случайный сигнал с равномерным спектром. Белый шум позволяет сформировать различные виды стационарных последовательностей.

Пример 3. Пусть $\{\xi_n\}$ – стандартный белый шум и $\{\alpha_n\}$ – последовательность комплексных чисел таких, что $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty.$

Последовательность $\{X_n\}$, заданная соотношением $X_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \xi_{n-k}$, называется последовательностью двустороннего скользящего среднего; последовательность $\{X_n\}$, заданная соотношением $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi_{n-k}$, называется последовательностью одностороннего скользящего среднего; последовательность $\{X_n\}$, заданная соотношением $X_n = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k \xi_{n-k}$, называется последовательностью скользящего среднего порядка p.

Показать, что все эти последовательности удовлетворяют условиям стационарности, найти их спектральные характеристики.

Решение. Приведем решение для первой из последовательностей, так как две другие являются ее частными случаями.

Очевидно, что $X_n = \sum\limits_{k\in Z} \alpha_{n-k}\xi_k \quad \Rightarrow \quad MX_n = 0, \;\; K_X(n+m,\, m) =$

$$= \operatorname{cov}\left(\sum_{k\in Z} \alpha_{n+m-k}\xi_k,\; \sum_{k\in Z} \alpha_{m-k}\xi_k \right) = \sum_{k,q\in Z} \alpha_{n+m-k}\overline{\alpha_{m-q}} \operatorname{cov}(\xi_k,\, \xi_q) =$$

$$= \sum_{k\in Z} \alpha_{n+k}\overline{\alpha_k}.$$

Поскольку $\left|\alpha_{n+k}\overline{\alpha_k}\right| \le \dfrac{|\alpha_{n+k}|^2 + |\alpha_k|^2}{2}$, полученный ряд $\sum\limits_{k\in Z} \alpha_{n+k}\overline{\alpha_k}$ сходится.

Спектральную плотность поможет найти формула (4.7):

$$s_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z} e^{-i\lambda k} K_X(k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in Z} e^{-i\lambda n} \sum_{k\in Z} \alpha_{n+k}\overline{\alpha_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n,k\in Z} e^{-i\lambda(n+k)}\alpha_{n+k}\overline{e^{-i\lambda k}\alpha_k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m,k\in Z} e^{-i\lambda m}\alpha_m \overline{e^{-i\lambda k}\alpha_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k\in Z} e^{-i\lambda k}\alpha_k\right|^2 .$$

Далее, в силу условия $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$ полученная функция $s_X(\lambda)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, потому может быть определена и спектральная функция $S_X(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\lambda} s_X(\omega)d\omega$.

4.2.3. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Используя понятие интеграла по ортогональной стохастической мере (см. раздел 3.10), можно получить спектральное представление и для процессов (не только для ковариационной функции).

Теорема 3. Для любого скалярного стационарного процесса $X(t)$, $t \in T$, с ковариационной функцией $K_X(t)$ и со спектральной функцией $S_X(\lambda)$ имеет место спектральное представление

$$X(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} Z_X(d\lambda), \quad t \in T, \tag{4.10}$$

при этом для любого борелевского множества $\Delta \in B(\Lambda)$

$$M\left|Z_X(\Delta)\right|^2 = \int\limits_{\Delta} dS_X(\lambda), \tag{4.11}$$

и $Z_X(\cdot)$ – ортогональная стохастическая мера, определенная на борелевской σ-алгебре $B(\Lambda)$, $\Lambda = [-\pi,\ \pi]$, для процесса с дискретным временем и $\Lambda = R$ для процесса с непрерывным временем.

Отметим, что если $\Lambda = [-\pi,\ \pi]$, то формулу (4.10) следует воспринимать как $X_n = \int\limits_{\Lambda} e^{i\lambda n} Z_X(d\lambda),\ \ n \in Z.$

Далее, в разделе 3.10 было отмечено, что для любого $\Delta \in B(\Lambda)$ $M\left|Z_X(\Delta)\right|^2 = m(\Delta)$ – значение структурной функции, соответствующей стохастической ортогональной мере $Z_X(\cdot)$. Но тогда, как следует из равенства (4.11), $S_X(\lambda)$ является функцией распределения структурной функции $m(\cdot)$ ортогональной стохастической меры $Z_X(\cdot)$, определенной на борелевской σ-алгебре $B(\Lambda)$. В частности, если $\Delta = (a,\ b) \subset [-\pi,\ \pi]$, то $m(\Delta) = S_X(b) - S_X(a)$; если к тому же существует спектральная плотность $s_X(\lambda)$, то $m(\Delta) = \int\limits_a^b s_X(\lambda)d\lambda.$

Формулу (4.10) называют **спектральным представлением стационарного процесса** $X(t)$. Спектральное представление играет важнейшую роль в задачах линейного оценивания и прогнозирования процессов.

4.2.4. ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пример 4. Пусть $s_X(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2\pi}, & |\lambda| \le \lambda_0, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_0, \end{cases}$ $\lambda_0 > 0$. Вычислить $K_X(t)$.

Решение. По формуле (4.5) запишем $K_X(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}s_X(\lambda)d\lambda=$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\lambda t}d\lambda=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left[\frac{1}{it}e^{i\lambda t}\right]_{-\lambda_0}^{\lambda_0}=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{e^{i\lambda_0 t}-e^{-i\lambda_0 t}}{it}=\frac{\sigma^2}{\pi t}\sin\lambda_0 t;$$

$$D_X(t)=K_X(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_X(\lambda)\,d\lambda=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{-\lambda_0}^{\lambda_0} d\lambda=\frac{\sigma^2\lambda_0}{\pi}.$$

Отметим, что $K_X(t)=0$ при $t_k=\dfrac{\pi k}{\lambda_0}$, $k\in Z$; это означает, что сечения процесса X_t и X_{t+t_k} – некоррелированные сл. величины.

При достаточно больших значениях λ_0 процесс $X(t)$ называют широкополосным белым шумом и используют для аппроксимации белого шума с непрерывным временем.

Пример 5. Существует ли стационарный сл. процесс $X(t)$ с ковариационной функцией $K_X(t)=\begin{cases}\sigma^2, & |t|\le t_0,\\ 0, & |t|>t_0\,?\end{cases}$

Решение. Если формально воспользоваться соотношением (4.9), то получим для спектральной плотности выражение $s_X(\lambda)=$ $=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}K_X(t)dt=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int\limits_{-t_0}^{t_0} e^{-i\lambda t}dt=\frac{\sigma^2}{\pi\lambda}\sin\lambda t_0$. Но полученная функция $s_X(\lambda)$ не может быть спектральной плотностью процесса $X(t)$, так как нарушается условие $s_X(\lambda)\ge 0\;\;\forall\lambda\in\Lambda$. Следовательно, процесса с заданной ковариационной функцией не существует.

Пример 6. Пусть $X(t)$, $t\in T$, – стационарный белый шум, т. е. его ковариационная функция содержит множителем δ-функцию: $K_X(t)=\sigma^2\delta(t)$. Определить спектральные характеристики процесса.

Решение. Опять-таки формально воспользуемся соотношением (4.9):

$$s_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} K_X(t)dt = \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-t_0}^{t_0} e^{-i\lambda t}\delta(t)dt = \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-i\lambda t}\Big|_{t=0} = \frac{\sigma^2}{2\pi},\ \lambda \in R.$$

4.2.5. СПЕКТРЫ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В этом разделе речь пойдет о скалярных процессах.

Итак, по теореме 3 спектральные представления стационарных процессов всегда существуют: $X(t) = \int\limits_{\Lambda} e^{i\lambda t} Z_X(d\lambda),\ t \in T,$ или же (см. раздел 3.10) $X(t) = \int\limits_{\Lambda} e^{i\lambda t} dW(\lambda),\ t \in T.$ Следовательно, для любого стационарного процесса существует определяющая его спектральная функция $S_X(\lambda),\ \lambda \in \Lambda,$ – она является функцией распределения ортогональной стохастической меры процесса.

В зависимости от типа спектральной функции $S_X(\lambda)$ – является ли она абсолютно непрерывной, или ступенчатой, или смешанного типа – различают процессы с различными спектрами.

Если $S_X(\lambda)$ абсолютно непрерывная функция, то процесс $X(t)$, $t \in T,$ состоит из некоррелированных гармонических колебаний всех частот $\lambda \in R$ с бесконечно малыми амплитудами $dW(\lambda)$, дисперсия которых приближенно равна $s_X(\lambda)\Delta\lambda.$

В этом случае процесс $X(t),\ t \in T,$ называется процессом с **непрерывным спектром** $s_X(\lambda)$.

Если $S_X(\lambda)$ ступенчатая функция, то процесс $X(t),\ t \in T,$ представляет собой сумму гармоник, каждая из которых имеет частоту λ_k, случайную амплитуду с дисперсией σ_k^2, k =1, 2,… Числа λ_k, σ_k^2 определяются спектральной функцией $S_X(\lambda): \lambda_k \in \Lambda$ – это точки разрыва функции $S_X(\lambda)$, σ_k^2 – это величины скачков функции $S_X(\lambda)$ в соответствующих точках разрыва λ_k (см. раздел 3.10). Иначе говоря, дисперсия процесса $X(t)$ не «размазана» по непрерывному множеству частот $\lambda \in R$, как в первом случае, а сосредоточена в отдельных точках $\lambda_k \in \Lambda$. Множество пар чисел $\left\{\left(\lambda_k,\ \sigma_k^2\right)\right\}$, $k = 1,\ 2,\ 3,...,$ называют **дискретным спектром** процесса $X(t)$, $t \in T$, сам процесс – процессом с дискретным спектром.

Спектр процесса может быть и смешанного типа – для него спектральная плотность существует, но она содержит множителем δ-функцию.

Можно ли вывести условия существования дискретного спектра стационарного процесса?

Пусть процесс $X(t)$, $t \in T$, представим в виде конечной или бесконечной суммы гармоник $A \sin(\omega t + \varphi)$ со случайными амплитудами A, фазами φ и различными частотами ω, т. е. в виде

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{i\omega_k t}. \tag{4.12}$$

Здесь $\{\omega_k\}$ – последовательность частот; $\{V_k\}$ – последовательность сл. величин. Будем полагать, что $m_X(t) \equiv 0$, ковариационная функция процесса $K_X(\tau)$ непрерывна и зависит от $\tau = t_2 - t_1$. Для того чтобы эти условия сохранялись при представлении процесса в виде ряда (4.12), необходимо и достаточно, чтобы сл. величины V_k, $k = 1, 2,\ldots$, были некоррелированными и имели нулевые математические ожидания:

$$K_X(t_1,\ t_2) = M \overset{\circ}{X}_{t_2} \overset{\circ}{X}_{t_1} = MX_{t_2} X_{t_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M{V_k}^2 e^{-i\omega_k t_1} e^{i\omega_k t_2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k (t_2 - t_1)},$$

или

$$K_X(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k \tau}, \tag{4.13}$$

где D_k – дисперсия сл. величин V_k. Отсюда

$$D_X = K_X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \tag{4.14}$$

и дисперсия процесса конечна тогда и только тогда, когда ряд (4.14) сходится. При этом ряд (4.13) сходится к функции $K_X(\tau)$ равномерно (признак Вейерштрасса). Равномерная же сходимость ряда (4.13) становится необходимым и достаточным условием сходимости ряда (4.12) в среднем квадратическом смысле.

Формула (4.14) определяет распределение дисперсии процесса по частотам его спектра ω_k, $k \in Z$.

Итак, если ковариационная функция процесса $X(t)$ представима равномерно сходящимся к ней рядом Фурье, то сам процесс $X(t)$ представим в виде суммы гармоник со случайными амплитудами и вся дисперсия процесса состоит из суммы дисперсий амплитуд составляющих процесс гармоник.

В общем случае о представлении стационарного процесса $X(t)$ рядом (4.12) больше ничего нельзя сказать. Но вот если все частоты процесса ω_k кратны основной частоте ω_1, соответствующей некоторому периоду 2ℓ: $\omega = \frac{2\pi}{2\ell} = \frac{\pi}{\ell}$, то формула (4.13) представляет собой ряд Фурье для функции $K_X(\tau)$. В этом случае сама эта формула может быть уточнена. Так, в силу четности $K_X(\tau)$ сумму (4.13) можно переписать в виде

$$K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\frac{\pi k \tau}{\ell} \tag{4.14}$$

и $D_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} K_X(\tau)\cos\frac{\pi k \tau}{\ell}\,d\tau$ – коэффициенты ряда Фурье.

В силу непрерывности $K_X(\tau)$ при любых $k,\ m > 0$ существуют интегралы:

$$\frac{4}{\ell^2}\int_0^{\ell}\int_0^{\ell} K_X(t_2 - t_1)\cos\frac{\pi k t_1}{\ell}\cos\frac{\pi m t_2}{\ell}\,dt_1 dt_2,$$

$$\frac{4}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell K_X(t_2-t_1)\cos\frac{\pi k t_1}{\ell}\sin\frac{\pi m t_2}{\ell}\,dt_1 dt_2,$$

$$\frac{4}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell K_X(t_2-t_1)\sin\frac{\pi k t_1}{\ell}\sin\frac{\pi m t_2}{\ell}\,dt_1 dt_2,$$

поэтому процесс $X(t)$ с.к. интегрируем с весами $\cos\frac{\pi kt}{\ell}$, $\sin\frac{\pi kt}{\ell}$, $k =$ $= 1, 2, \dots$ Следовательно, на множестве T определен скалярный процесс

$$S_X^n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\frac{\pi kt}{\ell} + \beta_k \sin\frac{\pi kt}{\ell} \tag{4.15}$$

и $\alpha_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell X(t)\cos\frac{\pi kt}{\ell}dt,\ k=\overline{0,n},\quad \beta_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell X(t)\sin\frac{\pi kt}{\ell}dt,\ k=\overline{1,n}.$

Если процесс $S_X^n(t)$ является стационарным и с.к. сходится к исходному процессу $X(t)$, $t \in T$, то можно говорить о спектре частот $\left\{\frac{\pi k}{\ell}\right\}_{k=0}^{\infty}$ стационарного процесса $X(t)$.

Последний вывод является корректным, так как справедлива

Теорема 4. Если $K_X(\tau)$ – ковариационная функция скалярного процесса $X(t)$, $t \in T$, с $m_X(t) \equiv 0$, непрерывна на отрезке $[-\ell, \ell]$, представима на нем равномерно сходящимся к ней рядом Фурье $K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos\frac{\pi k\tau}{\ell}$, то:

1) процесс $S_X^n(t)$, определяемый формулой (4.15), является стационарным;

2) процесс $S_X^n(t)$ с.к. сходится к исходному процессу $X(t)$.

Доказательство. Заметим, что с целью упрощения доказательства теоремы будем полагать числа k в формуле (4.14) четными и, кроме того, вместо символов D_k в ней будем пользоваться обозначениями σ_k^2.

Из условия, что $m_X(t) \equiv 0$, следует: $m\alpha_k = m\beta_k = 0$, $mS_X^n(t) = 0$.

$$\mathrm{Cov}(\alpha_p,\ \alpha_q) = M\,\frac{4}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell X(t_1)X(t_2)\cos\frac{2\pi p t_1}{\ell}\cos\frac{2\pi q t_2}{\ell}\,dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{4}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell K_X(t_2 - t_1)\cos\frac{2\pi p t_1}{\ell}\cos\frac{2\pi q t_2}{\ell}\,dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{4}{\ell^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k^2\left(\int_0^\ell \cos\frac{2\pi k t_1}{\ell}\cos\frac{2\pi p t_1}{\ell}\,dt_1 \int_0^\ell \cos\frac{2\pi k t_2}{\ell}\cos\frac{2\pi q t_2}{\ell}\,dt_2 -\right.$$

$$\left.-\int_0^\ell \sin\frac{2\pi k t_1}{\ell}\cos\frac{2\pi p t_1}{\ell}\,dt_1 \int_0^\ell \sin\frac{2\pi k t_2}{\ell}\cos\frac{2\pi q t_2}{\ell}\,dt_2\right) = \begin{cases}\sigma_p^2, \text{ если } & p = q,\\ 0, \text{ если } & p \neq q.\end{cases}$$

Точно также доказываются равенства:

$$\mathrm{Cov}(\beta_p,\ \beta_q) = \begin{cases}\sigma_k^2, & p = q,\\ 0, & p \neq q.\end{cases} \qquad \mathrm{Cov}(\alpha_p,\ \beta_q) = 0.$$

Далее покажем, что существует с.к. предел $S_X^n(t)$ при $n \to \infty$ и он равен $X(t)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} M\left[S_X^n(t) - X(t)\right]^2 = 0 \quad \forall t \in T$.

$$M\left[S_X^n(t) - X(t)\right]^2 = M\left[X(t)X(t)\right] - 2M\left[X(t)S_X^n(t)\right] + M\left[S_X^n(t)S_X^n(t)\right],$$

$$MS_X^n(t)X(t) = \frac{1}{2}MX(t)\alpha_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(M\left(X(t)\alpha_k\right)\cos\frac{2\pi k t}{\ell} + M\left(X(t)\beta_k\right)\sin\frac{2\pi k t}{\ell}\right),$$

$$MX(t)\alpha_k \cos\frac{2\pi kt}{\ell} + MX(t)\beta_k \sin\frac{2\pi kt}{\ell} =$$

$$= M\left(X(t)\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} X(\tau)\cos\frac{2\pi k\tau}{\ell}d\tau \right)\cos\frac{2\pi kt}{\ell} +$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} MX(t)X(\tau)\cos\frac{2\pi k(t-\tau)}{\ell}d\tau = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} K_X(t-\tau)\cos\frac{2\pi k(t-\tau)}{\ell}d\tau =$$

$$= \frac{2}{\ell}\sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2\int_0^{\ell}\cos\frac{2\pi k(t-\tau)}{\ell}\int_0^{\ell}\cos\frac{2\pi p(t-\tau)}{\ell}d\tau = \sigma_k^2,\ k = \overline{1,n}.$$

Аналогично доказывается равенство $M\left(X(t)\alpha_0\right) = 2\sigma_0^2$. Следовательно, $M\left[S_X^n(t) - X(t)\right]^2 = DX(t) + DS_X^n(t) - 2DS_X^n(t) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\sigma_k^2 \to 0$ при $n \to \infty$ как остаток сходящегося ряда.

Замечание. В результате получаем, что дисперсии сл. величин V_k являются коэффициентами ряда Фурье для ковариационной функции исходного процесса $X(t)$ при соответствующих частотах, т. е. $K_X(\tau) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sigma_k^2 e^{i\omega_k\tau}$, и $\sigma_k^2 = DV_k$.

Пример 7. Пусть $X(t)$, $t \in T = [0, \ell]$, – стационарный скалярный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_X(\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha|\tau|}, & |\tau| \le \frac{\ell}{2}, \\ e^{-\alpha\left(\ell-|\tau|\right)}, & \frac{\ell}{2} \le |\tau| \le \ell, \end{cases}$ $\alpha > 0$ – известная константа. Убедимся в том, что процесс $X(t)$ представим рядом Фурье.

Решение. Ковариационная функция $K_X(\tau)$ непрерывна, кусочно-монотонна на отрезке $[-\ell,\ \ell]$, а значит, имеет на отрезке ограниченное изменение, в концах отрезка имеет равные значения, следовательно, по признаку Дирихле ее ряд Фурье равномерно к ней сходится: $K_X(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sigma_k^2\cos\frac{\pi k\tau}{\ell}$, где σ_k^2 – коэффициенты ряда Фурье. Пусть $k=2m$.

$$\sigma_k^2=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}K_X(\tau)\cos\frac{2\pi m\tau}{\ell}d\tau=$$

$$=\frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}}e^{-\alpha\tau}\cos\frac{2\pi m\tau}{\ell}d\tau+\frac{2}{\ell}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}e^{-\alpha(\ell-\tau)}\cos\frac{2\pi m\tau}{\ell}d\tau=$$

$$=\frac{4\alpha\ell}{(2m\pi)^2+(\ell\alpha)^2}\left(1-(-1^m)e^{-\alpha\frac{\ell}{2}}\right).$$

При $k=2m+1$ $\sigma_k^2=0$. Но тогда

$K_X(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4\alpha\ell}{(2k\pi)^2+(\ell\alpha)^2}\left(1-(-1)^k e^{-\alpha\frac{\ell}{2}}\right)\cos\frac{2\pi k\tau}{\ell}$, и тогда по теореме 4 процесс $X(t),\ t\in T$, представим рядом Фурье.

Пример 8. Пусть ковариационная функция стационарного сл. процесса $X(t),\ t\in R,$ имеет вид $K_X(t)=\sigma e^{-\alpha|t|}$, $\sigma,\alpha>0.$ Найти спектральные характеристики и спектральное представление процесса.

Решение. По теореме 2 существует спектральная плотность процесса, поскольку функция $K_X(t)$ непрерывна на R и абсолютно интегрируема, так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K_X(t)|dt=\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|t|}dt=2\sigma\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha t}dt=\frac{2\sigma}{\alpha}<\infty.$

Согласно равенству (4.9) $s_X(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}K_X(t)\,dt=$

$$=\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}e^{-\alpha|t|}dt=\frac{\sigma}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{t(i\omega-\alpha)}dt+\int\limits_{0}^{\infty} e^{t(i\omega+\alpha)}dt\right]=$$

$$=\frac{\sigma}{2\pi}\left(\frac{1}{i\omega-\alpha}+\frac{1}{i\omega+\alpha}\right)=\frac{\sigma\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}.$$

В данном примере роль спектра выполняет функция $s_X(\omega)$ – спектральная плотность. Она показывает, **как** распределена дисперсия D_X стационарного процесса $X(t)$, $t\in R$, по непрерывному спектру частот элементарных гармоник: промежутку $(\omega,\ \omega+\Delta\omega)$ соответствует дисперсия, обозначим ее через D_ω, равная $D_\omega=s_X(\omega)\Delta\omega+o(\Delta\omega)$, $\Delta\omega\to 0.$ Последнее слагаемое в формуле обычно не пишут: $D_\omega\cong s_X(\omega)\Delta\omega.$

Сам процесс $X(t)$ в этом случае представим в виде стохастического интеграла вида (4.10), где ортогональная стохастическая мера $Z(\bullet)$ определяется выражением (4.11). Можно считать в этом случае, что $X(t)$ состоит из некоррелированных гармонических колебаний всех частот ω с бесконечно малыми амплитудами $dW(\omega)$, дисперсия которых приближенно равна $s_X(\omega)\Delta\omega.$ Таким образом, процесс $X(t)$ является процессом с непрерывным спектром $s_X(\omega)$.

Замечание. Спектр стационарного процесса $X(t)$ называют еще энергетическим спектром. Этот термин вызван следующими обстоятельствами. В радио- и электротехнических приложениях СП встречаются обычно в виде напряжений и токов в различных цепях. Из физики известно, что энергия чисто синусоидального тока пропорциональна квадрату амплитуды описывающей его гармоники. Поэтому, имея дело со случайным током и случайным напряжением, полагают, что дисперсия всего процесса пропорциональна энергии всего тока, а дисперсия отдельных составляющих процесса пропорциональна энергии составляющих его гармоник. Поэтому и удобно рассматривать в качестве спектра СП пары $\{(D_k,\ \omega_k)\}$, по ним не только восстанавливается СП, но и виден вклад в суммарную дисперсию каждой отдельной гармоники.

4.2.6. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Будем считать процесс $X(t)$ скалярным вещественным, если не будет оговорено противное.

1. Спектральная плотность является неотрицательной функцией, т. е. $s_X(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Lambda.$

Это свойство очевидно, если вспомнить, что $s_X(\omega) \overset{\text{п.в.}}{=} S'_X(\omega)$ и $S_X(\omega)$ – неубывающая функция.

2. Спектральная плотность является четной функцией, т. е. $s_X(-\omega) = s_X(\omega)$.

Запишем формулу для вычисления спектральной плотности для отрицательного аргумента:

$$s_X(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_X(-\tau)e^{i\omega\tau}d\tau =$$

$$= \left|\tau = -\tau\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = s_X(\omega).$$

Полученный результат есть частный случай более общего утверждения относительно спектральной плотности векторного стационарного процесса, а именно: $s_X(\omega) = \overset{*}{s}_X(\omega)$, и знак «*» означает комплексное сопряжение.

Если процесс $X(t)$ – векторный, то спектральная плотность представляет собой матрицу, диагональные элементы которой – спектральные плотности $s_{ii}(\omega)$ компонент вектора $X_i(t)$, недиагональные элементы $s_{ij}(\omega)$ – так называемые спектральные взаимные плотности компонент $X_i(t)$ и $X_j(t)$ вектора $X(t)$.

3. $\lim\limits_{\omega\to\infty} s_X(\omega) = 0.$

Результат следует из выражения для $s_X(\omega)$:

$$s_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

4. $s_X(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}K_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$

Действительно, $s_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_X(\tau)\left(\cos i\omega\tau-i\sin\omega\tau\right)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_X(\tau)\sin\omega\tau d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}K_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

в силу четности подынтегральной функции по τ в первом интеграле и нечетности – во втором.

5. $K_X(\tau)=2\int\limits_{0}^{\infty}s_X(\omega)\cos\omega\tau d\omega.$

6. $D_X=K_X(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_X(\omega)d\omega$.

4.2.7. СТАЦИОНАРНЫЙ БЕЛЫЙ ШУМ

Белый шум в п. 3.9 был определен как слабая с.к. производная процессов с некоррелированными приращениями. При этом слабая с.к. производная может быть обобщенной сл. функцией или просто сл. функцией.

Оказывается, что любой процесс с независимыми приращениями, имеющий конечный момент второго порядка, является и процессом с некоррелированными приращениями, следовательно, имеет слабую с.к. производную, называемую белым шумом в строгом смысле. Это только обобщенные случайные функции.

Если же рассматривать слабые с.к. производные процесса с некоррелированными, но с зависимыми приращениями, то получаются обычные случайные функции. Пусть $V(t)$ – белый шум постоянной интенсивности ν, т. е. $K_{\nu}(t_1,\ t_2)=\nu\delta(t_1-t_2)$. Такой белый шум называется стационарным белым шумом. Для стационарного белого шума спектральная плотность постоянна на всей вещественной прямой:

$$s_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{\nu}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu\delta(t_2-t_1)e^{-i\omega(t_2-t_1)}d(t_2-t_1)=\frac{\nu}{2\pi}.$$

Мы уже говорили, что белый шум физически неосуществим. Из физических же соображений ясно, что любая динамическая система является инерционной системой и очень высокие частоты не могут оказывать значимого влияния на ее поведение. Это открывает возможность моделировать белый шум с помощью реальных процессов, например, имеющих постоянную (или почти постоянную) спектральную плотность в определенной полосе частот, пренебрегая поведением спектральной плотности вне этой полосы.

Так, скалярный стационарный процесс $X(t)$, $t\in[0,\ \infty)$, со спектральной плотностью $s_X(\omega)=\begin{cases}C, & \text{если } |\omega|<N\\ 0, & \text{если } |\omega|>N\end{cases}$ используют в качестве модели белого шума. Чтобы процесс $X(t)$ обладал свойствами белого шума, значение параметра N должно быть большим, но тогда большой будет и дисперсия. Интервалы корреляции в этой модели сравнительно велики (см. также пример 4).

В качестве другой модели белого шума часто используют процесс $X(t)$, $t\in T$, с экспоненциальной ковариационной функцией $K_X(\tau)=\pi\alpha e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha>0$. В этом процессе сечения его в различные моменты времени являются некоррелированными сл. величинами.

Отметим еще в заключение, что термин «белый шум» возник по двум причинам. Во-первых, из физики известно, что белый свет имеет на всех частотах одинаковую интенсивность, стационарный белый шум обладает тем же свойством; во-вторых, подобные процессы впервые привлекли внимание в радиотехнике, где их наличие приводит к возникновению шумов в линиях радиопередач.

4.3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть скалярный стационарный процесс $X(t)$, $t \in T$, имеет спектральное представление (4.10) и $S_X(\omega)$ – его спектральная функция. Пусть $H(\lambda)$ – некоторая комплексная в общем случае функция, $\lambda \in R$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 \, dS_X(\lambda) < \infty. \tag{4.16}$$

Определение. Если процесс $Y(t)$ допускает спектральное представление

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} H(\lambda) Z_X(d\lambda), \tag{4.17}$$

где $H(\lambda)$ удовлетворяет условию (4.16), то говорят, что процесс $Y(t)$ получен в результате стационарного линейного преобразования стационарного процесса $X(t)$. Функция $H(\lambda)$ называется **частотной** характеристикой этого преобразования.

Линейность преобразования понимается в том смысле, что для любого $t \in T$ процесс $Y(t)$ является либо линейной комбинацией сечений процесса $X(t)$, либо с.к. пределом таких комбинаций.

Стационарность преобразования означает, что процесс $Y(t)$ будет стационарным процессом, если $X(t)$ – стационарный процесс.

Следующая теорема устанавливает связь вероятностных и спектральных характеристик процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Теорема 5. Процесс $Y(t)$, $t \in T$, полученный с помощью преобразования (4.16), является стационарным процессом с ортогональной стохастической мерой $Z_Y(\bullet)$, спектральной функцией $S_Y(\bullet)$ и ковариационной функцией $K_Y(\bullet)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$Z_Y(\lambda) = H(\lambda) Z_X(\lambda), \ \ \lambda \in \Lambda, \tag{4.18}$$

$$S_Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |H(\sigma)|^2 \, dS_X(\sigma), \tag{4.19}$$

$$K_Y(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \left| H(\lambda) \right|^2 dS_X(\lambda). \qquad (4.20)$$

Если процесс $X(t),\ t \in T,$ имеет спектральную плотность $s_X(\lambda)$, то процесс $Y(t),\ t \in T,$ также имеет спектральную плотность $s_Y(\lambda)$, причем

$$s_Y(\lambda) = \left| H(\lambda) \right|^2 s_X(\lambda). \qquad (4.21)$$

Обратим внимание на то, что стохастическое представление процесса $X(t)$ играет в теореме важную роль: зная стохастическую ортогональную меру $Z_X(\bullet)$, все характеристики процесса $Y(t),\ t \in T,$ можно выразить с ее помощью на основе функции $H(\lambda)$, определяющей линейное преобразование.

Рассмотрим прикладной аспект задачи линейного преобразования стационарных процессов. В практических задачах линейное преобразование осуществляется некоторой системой, причем все преобразования задаются не в частотной форме, а во временной.

Системы – это совокупность взаимодействующих предметов любой природы. Математической моделью системы называется совокупность четырех элементов: 1) пространства состояний; 2) пространства входных сигналов; 3) пространства выходных сигналов; 4) соотношений, связывающих элементы этих пространств. Система считается заданной, если задана ее математическая модель.

Основной характеристикой модели является оператор системы, связывающий входные и выходные сигналы. Нас будут интересовать только линейные операторы: $Y(t) = A(t)X(t),\ t \in T$, где $X(t)$ – входной сигнал; $Y(t)$ – выходной сигнал системы.

Стационарной (однородной) системой называется такая система, у которой при любом сдвиге входного сигнала во времени без изменения его формы, т. е. при замене $X(t)$ на $X(t-h)$ при любом $h,$ выходной сигнал претерпевает тот же сдвиг во времени, не изменяя своей формы.

Далее будем рассматривать только такие линейные системы и называть их просто системами.

Входной сигнал $X(t)$ как с.к. непрерывную функцию можно представить разложением на бесконечно малые мгновенные импульсы

$X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$, тогда получим выражение для выходного сигнала

$$Y(t) = AX(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\tau)A\delta(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t,\ \tau)X(\tau)d\tau. \qquad (4.22)$$

Функцию $h(t, \tau)$ – реакцию системы в момент времени t на единичный мгновенный импульс $\delta(t-\tau)$ в момент времени τ называют **импульсной переходной функцией** системы. Для стационарных систем $h(t, \tau) = h(t-\tau)$.

Реакция системы (4.22) в момент времени t зависит от значений функции на входе как в момент времени $s < t$, так и в момент времени $s > t$. В физических устройствах это невозможно, поэтому для них $h(t, s) = 0$ для всех $s > t$. Это условие называют условием физической осуществимости системы. Таким образом, функцию $h(t, s)$ следует определить так: $h(t,\ s) = \begin{cases} A\delta(t-s), & s \le t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$

Основной характеристикой систем (линейных однородных) является тот факт, что такая система неограниченно долго усиливает без изменения его формы действующий входной сигнал, представляющий собой экспоненту e^{st}. Воспользуемся формулой (4.22):

$$Y(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)e^{s\tau}d\tau = e^{st}\int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int\limits_{0}^{\infty} h(\sigma)e^{-s\sigma}d\sigma.$$

Функцию

$$H(s) = \int\limits_{0}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad (4.23)$$

называют **передаточной функцией** (линейной однородной) системы. Это та же самая функция из равенства (4.16): поскольку система физически преобразовывает входной сигнал, по своей сути **передаточная** функция системы есть не что иное, как **частотная** характеристика преобразования СП $X(t)$, осуществляемого этой системой.

Так как функции H и h связывает преобразование Лапласа, при этом функция $H(s)$ – функция комплексного переменного s, регулярная в полуплоскости $b = \mathrm{Re}\, s > \alpha$, где α – показатель роста функции $h(t)$ (показатель роста функции α определяется из соотношения $|h(t)| \le Ce^{\alpha t}$, $t \ge 0$, C – некоторая константа), то обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)e^{i\omega t}d\omega\,. \tag{4.24}$$

Из последнего соотношения (4.24) и соотношения (4.22) можно получить выражение для передаточной функции (частотной характеристики) линейной однородной системы. Умножим обе части равенства (4.22) на $e^{-i\omega t}$ и проинтегрируем полученное равенство по t:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)e^{-i\omega t}ds \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{-i\omega s}ds \text{ (после замены } t-s \text{ на } \tau).$$

Приняв во внимание равенство (4.24), получаем $Y(i\omega) = H(i\omega)X(i\omega) \quad \Rightarrow$

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}. \tag{4.25}$$

Функция $H(i\omega)$ равна отношению преобразований Лапласа выходной и входной функций.

Рассмотрим связь моментных характеристик входного и выходного процессов. Пусть на вход системы (4.22) поступает процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t)$ и ковариационной функцией $K_X(t_1, t_2)$. Найдем $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1, t_2)$.

Поскольку $Y(t)$ представляет собой с.к. интеграл от процесса $X(t)$ с весом $h(t, s)$, согласно формулам (3.3) гл. 3 имеем:

$$m_Y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t, s)m_X(s)ds,$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, u)h(t_2, v)K_X(u, v)dudv.$$

Если процесс $X(t)$ стационарен, то $m_Y(t) = m_X \int_0^{\infty} h(\tau)d\tau = \text{const}$,

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} h(t_1 - s_1)h(t_2 - s_2)K_X(s_2 - s_1)ds_1 ds_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(u)h(v)K_X(t_2 - t_1 + u - v)dudv =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(u)h(v)K_X(\tau + u - v)dudv. \qquad (4.26)$$

Таким образом, если на вход подается стационарный (в широком смысле) процесс, то на выходе процесс также стационарен (в широком смысле), утверждение этого факта содержится в теореме 5.

Спектральная плотность процесса $Y(t)$ согласно формуле (4.21) имеет вид

$$s_Y(\omega) = |H(i\omega)|^2 s_X(\omega).$$

Найдем взаимную ковариационную функцию процессов $X(t)$, $Y(t)$ с использованием все тех же формул (3.3) гл. 3:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = M\overset{\circ}{X}_{t_1}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_2, \sigma)\overset{\circ}{X}(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2, \sigma)K_X(t_1, \sigma)d\sigma.$$

Для стационарного процесса $X(t)$ получим формулу

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \sigma)K_X(\sigma - t_1)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)K_X(\tau - u)du. \qquad (4.27)$$

Обратимся теперь к вычислению взаимной спектральной плотности $s_{XY}(\omega)$ процессов $X(t)$ и $Y(t)$. Пусть $X(t)$ представим стохастическим интегралом: $X(t) = m_X(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega)\, d\omega$, а процесс $Y(t)$ – интегралом $Y(t) = m_Y(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V_1(\omega) d\omega$, где $V(\cdot)$, $V_1(\cdot)$ – с.к. производные некоторых процессов с некоррелированными приращениями, задающих ортогональную стохастическую меру для процессов $X(t)$ и $Y(t)$. Тогда

$$K_{XY}(t_1,\, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\omega_1 t_1}} e^{i\omega_2 t_2} MV(\omega_1) V_1(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2 t_2 - i\omega_1 t_1} s_{XY}(\omega_2) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t_2 - t_1)} s_{XY}(\omega) d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} s_{XY}(\omega) d\omega,$$

где $s_{XY}(\omega) = MV(\omega_1) V_1(\omega_2)$.

Таким образом, $K_{XY}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} s_{XY}(\omega) d\omega$ – тем самым для взаимной ковариационной функции процессов $X(t)$ и $Y(t)$ получен аналог формул из теоремы 1.

Полагают также, что для взаимной спектральной плотности $s_{XY}(\omega)$ справедлива формула, аналогичная формуле (4.9):

$$s_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} K_{XY}(t) dt .$$

Поставим задачу выразить взаимную спектральную плотность входного и выходного процессов $s_{XY}(\omega)$ через спектральную плотность входного процесса $s_X(\omega)$. Для этого поработаем с формулой (4.27):

$$K_{XY}(\tau)=\int_0^{\infty}h(u)K_X(\tau-u)\,du=\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}H(i\omega)e^{i\omega u}d\omega\right)K_X(\tau-u)\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(i\omega)e^{-i\omega v}e^{i\omega\tau}K_X(v)dvd\omega=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}s_X(\omega)H(i\omega)d\omega.$$

Здесь $\tau=t_2-t_1$, $\tau-u=v$.

Сравнивая полученные выражения для взаимных ковариационных функций $K_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}s_{XY}(\omega)d\omega$ и $K_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}s_X(\omega)H(i\omega)d\omega$, получаем

$$e^{i\omega\tau}s_{XY}(\omega)=e^{i\omega\tau}s_X(\omega)H(i\omega)\quad\Leftrightarrow$$

$$s_{XY}(\omega)=s_X(\omega)H(i\omega).\qquad(4.28)$$

Рассмотрим теперь некоторые конкретные модели линейных стационарных преобразований.

1. Пусть $Y(t)=X^{(n)}(t)$, т. е. $Y(t)$ является с.к. производной порядка n процесса $X(t)$. Обобщая результаты раздела 3.3 на случай с.к. производной порядка n, получим соотношения:

1) $m_Y(t)=m_X^{(n)}(t)$, 2) $K_Y(t_1,t_2)=\dfrac{\partial^{2n}K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1^n\partial t_2^n}$.

Если $X(t)$ – стационарный процесс, то $m_Y(t)=0$ уже при $n=1$ и

$$K_Y(\tau)=(-1)^n\frac{d^{2n}K_X(\tau)}{dt^{2n}}=(-1)^nK_X^{(2n)}(\tau).\qquad(4.29)$$

Для отыскания выражения для $s_Y(\omega)$ воспользуемся только что полученной формулой (4.29) и формулой (4.2). По формуле (4.2) $K_Y(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_Y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$; по формуле (4.29)

$$K_Y(\tau)=(-1)^n\frac{d^{2n}K_X(\tau)}{d\tau^{2n}}=(-1)^n\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=$$

$$=(-1)^n\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_X(\omega)(i\omega)^{2n}e^{i\omega\tau}d\omega=(-1)^{2n}\ .$$

Сравнение полученных результатов дает соотношение

$$s_Y(\omega)=\omega^{2n}s_X(\omega). \tag{4.30}$$

Законность дифференцирования под знаком интеграла следует из существования n-й производной процесса $X(t)$, что равносильно сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^{2n}e^{i\omega\tau}s_X(\omega)d\omega$.

Для получения передаточной функции (частотной характеристики преобразования $Y(t)=X^{(n)}(t)$) $H(i\omega)$ воспользуемся спектральным представлением процесса $X(t)$ и формулой Ито: $Y(t)=X^{(n)}(t)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^n e^{i\omega t}dW(\omega)$. Но тогда по соотношению (4.17) для $H(i\omega)$ получим выражение

$$H(i\omega)=(i\omega)^n. \tag{4.31}$$

2. Пусть $Y(t)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\frac{d^k}{dt^k}X(t)$, $t\in T$, b_k – известные постоянные, k = 0, 1, …, n, и $X(t)$ – скалярный стационарный процесс, n раз с.к. дифференцируемый на $T=[0,\ \infty)$, со спектральной плотностью $s_X(\omega)$.

Воспользуемся, как и в предыдущем случае, стохастическим представлением процесса $X(t)$: $X(t) = m_X + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) d\omega$.

С использованием формулы (4.17) получим спектральное представление процесса $Y(t)$: $Y(t) = m_Y(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} H(i\omega) V(\omega) d\omega$.

Теперь получим выражение для $Y(t)$ с использованием формулы Ито, формулы спектрального представления процесса $X(t)$ и соотношения $Y(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k}{dt^k} X(t)$: $Y(t) = b_0 m_X + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) \sum\limits_{k=0}^{n} b_k (i\omega)^k d\omega.$

Сравнение формул дает результаты:

$$m_Y(t) = b_0 m_X, \quad H(i\omega) = \sum_{k=0}^{n} b_k (i\omega)^k. \qquad (4.32)$$

3. Рассмотрим достаточно общий случай преобразований стационарного процесса при его прохождении через линейную динамическую систему.

Пусть $X(t)$, $t \in T = [0, \infty)$, – стационарный n раз с.к. дифференцируемый на T скалярный процесс с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $s_X(\omega)$, а скалярный процесс $Y(t)$, $t \in T$, – m раз с.к. дифференцируемый на T процесс имеет место соотношение: $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k}{dt^k} Y(t) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} b_\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell} X(t)$, $t > 0$, в котором a_k, b_ℓ – известные постоянные.

При достаточно больших $t \in T$, когда в системе затихли переходные процессы и система начинает работать в установившемся режиме, процесс $Y(t)$, $t \in T$, можно считать скалярным стационарным процессом с математическим ожиданием m_Y, спектральной плотностью $s_Y(\omega)$.

Воспользуемся по-прежнему стохастическими представлениями процессов $X(t)$ и $Y(t)$: $X(t) = m_X + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) d\omega$, $Y(t) = m_Y(t) +$

$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V_1(\omega)d\omega$. Применив к последним двум выражениям формулу Ито, получим соотношение:

$$a_0 m_Y + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V_1(\omega)\sum_{k=0}^{m} a_k(i\omega)^k d\omega = b_0 m_X + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V(\omega)\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell(i\omega)^\ell d\omega.$$

$$\Rightarrow\ a_0 m_Y = b_0 m_X, \quad \Rightarrow\ m_Y = \frac{b_0}{a_0}m_X. \tag{4.33}$$

Принимая во внимание полученное соотношение (4.33), перепишем предпоследнее равенство в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V_1(\omega)\sum_{k=0}^{m} a_k(i\omega)^k d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V(\omega)\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell(i\omega)^\ell d\omega$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V_1(\omega)d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V(\omega)\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{n} b_\ell(i\omega)^\ell}{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k(i\omega)^k}d\omega.$$

В левой части последнего равенства стоит стохастическое представление центрированного процесса $Y(t)$, в правой части, согласно формуле (4.17), – его выражение через стохастическое представление процесса $X(t)$. Следовательно, получаем соотношение

$$H(i\omega) = \frac{\sum\limits_{\ell=0}^{n} b_\ell(i\omega)^\ell}{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k(i\omega)^k}. \tag{4.34}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти ковариационную функцию $K_X(\tau)$ стационарного процесса $X(t),\ t\in T=[0,\ \infty)$, если $s_X(\omega)=\begin{cases} C, & |\omega|\in[\omega_1,\ \omega_2], \\ 0, & |\omega|\notin[\omega_1,\ \omega_2]. \end{cases}$

2. Пусть $X(t),\ t\in T$, – с.к. дифференцируемый скалярный процесс и $Y(t)=X'(t)$. Найти $DY(t)$, если $s_X(\omega)=\dfrac{a^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$, где α и a – известные величины.

3. Определить $s_X(\omega)$, если $X(t),\ t\in T=[0,\ \infty)$ – стационарный скалярный процесс, $DX(t)=\sigma^2,\ K_X(\tau)=\begin{cases} 1-\dfrac{\tau}{\tau_0}, & |\tau|<\tau_0, \\ 0, & |\tau|\ge\tau_0, \end{cases}$

где τ_0 – известная величина.

4. Пусть $X(t),\ t\in T=[0,\ \infty)$, – скалярный стационарный процесс с ковариационной функцией $K_X(\tau)=\sigma^2\left(1+\alpha|\tau|\right)e^{-\alpha|\tau|}$, α, σ^2 – известные величины. Найти $s_X(\omega)$.

5. Два скалярных стационарных процесса $Y(t),\ X(t),\ t\in T=[0,\ \infty)$, связаны равенством $5Y'(t)+Y(t)=4X'(t)+3X(t),\ t\in T.$ Найти математическое ожидание и дисперсию процесса $Y(t)$, если $m_X(t)=0,$ $K_X(\tau)=2e^{-\alpha|\tau|},\ \ \alpha>0$ – известная постоянная.

6. Работу дифференцируемой RC-цепочки описывает уравнение $RCY'(t)+Y(t)=RCX'(t),\ t\in T=[0,\ \infty).$ Найти математическое ожидание и дисперсию СП $Y(t)$, если $m_X(t)\equiv 0,\ \ K_X(\tau)=\sigma^2\cos\beta\tau,$ где σ^2, β – известные величины.

7. Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса $X(t),\ t\in T,$ имеет вид $s_X(\omega)=\dfrac{\sigma^2}{\omega_2-\omega_1},$ если $\omega_1<|\omega|<\omega_2,$

$(\omega_2 > \omega_1 > 0)$, и равна нулю в остальных случаях (полосовой белый шум). Вычислить $K_X(\tau)$, рассмотреть случай, когда $\omega_2 \to \omega_1$. Какому СП соответствует предельный случай?

8. Пусть $s_X(\omega) = \dfrac{b\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$, где $\alpha,\ b > 0$. Найти $K_X(\tau)$, $D_X(t)$ и величину $\Delta\tau \cdot \Delta\omega$ для стационарного СП $X(t)$.

9. Найти $\Delta\tau \cdot \Delta\omega$ и $s_X(\omega)$ для стационарного СП $X(t)$ с $K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha^2\tau^2}$, $\alpha > 0$.

10. Стационарный СП $X(t),\ t \in T,$ имеет $s_X(\omega)$. Найти $s_Y(\omega)$, если $Y(t) = aX(t) + bX'(t)$.

11. Пусть $X(t),\ t \in T,$ – нормальный стационарный СП с $m_X(t) \equiv m$ и с a) $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$; b) $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$, $\alpha > 0$. Найти $s_Y(\omega)$, если $Y(t) = X^2(t),\ t \in T$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дуб Дж.* Случайные процессы: пер. с англ. / Дж. Дуб. – М.: Иностранная литература, 1962.
2. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов: пер. с англ. / С. Карлин. – М.: Мир, 1971.
3. *Кемени Дж.* Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М.: Наука, 1970.
4. *Пугачев В.С.* Стохастические дифференциальные системы / В.С. Пугачев, И.Н. Синицын. – М.: Наука, 1985.
5. *Скороход А.В*. Элементы теории вероятностей и случайные процессы / А.В. Скороход. – Киев: Вища школа, 1980.
6. *Медич Дж.* Статистические оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. – М.: Энергия, 1973.
7. *Волков И.К.* Случайные процессы / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2000.
8. *Лоэв М*. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М.: Иностранная литература, 1962.
9. *Радюк Л.Е.* Теория вероятностей и случайных процессов / Л.Е. Радюк, А.Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во Томского университета, 1988.
10. *Беллман Р*. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1976.

Бекарева Нина Даниловна

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 24.10.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 7,44. Печ. л. 8,0. Изд. № 188. Заказ № 1483. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20