

В.Я. ЛЮБЧЕНКО, С.В. РОДЫГИНА

ПРИМЕНЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ
В ЗАДАЧАХ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2018

УДК 621.311:001.57(075.8)
Л 935

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент *Д.А. Павлюченко*
канд. техн. наук, доцент *М.А. Купарев*

Работа подготовлена на кафедре
систем электроснабжения предприятий

Любченко В.Я.

Л 935 Применение математического моделирования в задачах электроэнергетики: учебное пособие / В.Я. Любченко, С.В. Родыгина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 72 с.

ISBN 978-5-7782-3627-1

В учебном пособии изложены методологические основы построения математических моделей, используемых при исследовании физических процессов, проектировании и управлении техническими объектами.

Представлены математические модели, применяемые для описания процессов в однородных протяженных линиях электропередач. Основное внимание уделено математическим моделям и методам расчета установившихся режимов электроэнергетических систем.

Предназначено для студентов, обучающихся по образовательной программе подготовки бакалавров по направлению 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения.

УДК 621.311:001.57(075.8)

ISBN 978-5-7782-3627-1

© Любченко В.Я., Родыгина С.В., 2018
© Новосибирский государственный
технический университет, 2018

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены основы математического моделирования, которые находят применение при решении задач электроэнергетики. Наибольшее внимание уделено методологическим аспектам и принципам построения математических моделей, используемых в задачах исследования физических процессов, а также проектирования и управления техническими объектами.

Представлены общие проблемы и принципы моделирования как способа познания окружающего мира и универсального метода решения задач. В основе классификации моделей использованы принципы блочно-иерархического подхода к формированию структуры математических моделей объектов. Выделены три обобщенных иерархических уровня, называемых далее микро-, макро- и метауровнями моделирования, используемые для описания сложных технических объектов, таких как электроэнергетическая система.

Рассмотрено моделирование на микроуровне, представлены математические модели, используемые для описания физических процессов в однородных протяженных линиях электропередач. Также рассмотрены модели макроуровня, применяемые для описания режимов функционирования сложных технических объектов. Основное внимание уделено моделям и методам расчета установившихся режимов электроэнергетических систем.

Наше следующее учебное пособие будет посвящено рассмотрению моделей макроуровня для анализа статической устойчивости режимов энергосистем, а также в нем будут рассмотрены основы метауровня –

информационного и логического моделирования, их применение для решения задач анализа и синтеза устройств релейной защиты.

Изложенный теоретический материал позволит сформировать у студентов целостное представление о моделировании, связать математику как общетеоретическую науку с ее применением в инженерной практике и научных исследованиях, сформировать грамотный технический подход к решению инженерных и научных проблем, а также подготовить к более глубокому и критическому восприятию специальных дисциплин.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.1. ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ

Моделирование представляет собой универсальный и эффективный метод познания окружающего мира, который используется практически во всех сферах человеческой деятельности. При этом наибольшее распространение методы моделирования получили в инженерной деятельности, при проведении научных исследований, проектировании и управлении объектами.

Первоначально слово «модель» сформировано от латинских слов *modus, modulus* – это «мера», «образец», «норма».

Понятие «модель» берет свое начало из строительного искусства, и практически во всех европейских языках оно использовалось для обозначения образа или прообраза предмета, схожего с оригинальным предметом в каком либо отношении.

Термин «модель» имеет множество смысловых значений, каждое из которых определяется предметной областью его употребления. Сюда относятся научные исследования, астрономия, архитектура, энергетика, медицина, изобразительное искусство и т. д.

В качестве примера можно привести модель Земли – глобус; модель звездного неба – экран планетария; модель животного – его чучело; фотография в паспорте и перечень паспортных данных – модель владельца паспорта; модели автомобилей; медицинские модели функционирования отдельных органов человека; картины Айвазовского – модели бушующего моря.

Процесс моделирования представлен на рис. 1.1 и включает три основных элемента:

- субъект (исследователь);
- объект исследования;
- модель, отражающую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

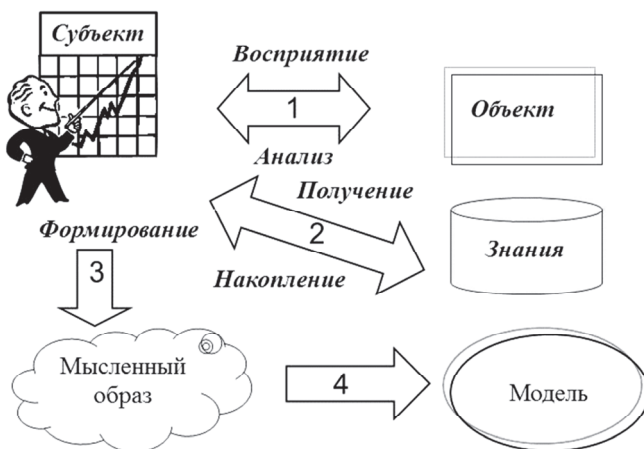


Рис. 1.1. Процесс моделирования

Первый этап предполагает формирование системы некоторых знаний об объекте-оригинале через восприятие и анализ его свойств.

В результате по мере получения и накопления знаний происходит формирование некоторого мысленного образа объекта, который является основой для создания модели.

Далее в ходе исследования осуществляется перенос знаний с модели на оригинал. Знания о модели также могут быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые ранее не нашли отражения или были изменены при построении модели.

Последним этапом является практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им.

Таким образом, моделирование представляет собой циклический процесс. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется.

Процесс решения любой задачи неразрывно связан с формированием того или иного вида модели.

Цель моделирования возникает, когда субъект моделирования решает стоящую перед ним задачу, и зависит как от решаемой задачи, так и от субъекта моделирования. То есть цель моделирования имеет двойственную природу: с одной стороны, она объективна, так как вытекает из задачи исследования, а с другой – субъективна, поскольку зависит от субъекта моделирования (его знаний, опыта, мотивации и т. д.) [1]:

- для одного и того же объекта субъект может построить несколько моделей, если он решает разные задачи, приводящие к разным целям моделирования;
- для одного и того же объекта разные субъекты могут построить разные модели, даже если задача моделирования у них одна;
- возможно совпадение моделей разных объектов, даже если их строили разные субъекты, исходя из разных целей моделирования.

Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отображает какие-либо существенные черты объекта-оригинала, т. е. любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, каждая из которых отображает определенные черты исследуемого объекта или же характеризует объект с разной степенью детализации.

Определение: модель – это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя при этом наиболее типичные его черты, характерные для решаемой задачи [5, 8].

Фундаментальное свойство: модель всегда «беднее» объекта-оригинала.

Задача определяет характеристики модели, вне контекста задачи понятие модели не имеет смысла.

И наконец, для чего люди прибегают к использованию моделей вместо прямого взаимодействия с реальным миром? Можно назвать три основные причины:

1) чтобы понять, как устроен реальный объект, каковы его структура, свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром (с учетом сложности реальных объектов, которая иногда выходит за пределы человеческих возможностей);

2) чтобы научиться управлять объектом (процессом), выбрать наилучший способ управления при заданных целях, когда экспериментальное исследование объектов ограничено высокой стоимостью или вовсе невозможно;

3) чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Среди других причин можно назвать следующие:

- исследуемый объект либо очень велик (модель Солнечной системы), либо очень мал (модель атома);
- процесс протекает очень быстро (модель двигателя внутреннего сгорания) или очень медленно (геологические модели);
- исследование объекта может привести к аварийной ситуации или его разрушению (модель самолета, автомобиля; электроэнергетическая система).

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Моделирование является многофункциональным, так как оно используется для различных целей на различных уровнях исследования или преобразования. Среди ученых нет единой точки зрения на классификацию моделей, поэтому невозможно однозначно классифицировать и виды моделирования. В связи с этим обширная практика применения моделей породила обилие их форм и типов.

Классификацию можно проводить по различным основаниям: по характеру моделей, характеру моделируемых объектов, сферам приложения моделирования, уровням моделирования, начиная, например, с выделения в физике моделирования на микроуровне.

В литературе, посвященной аспектам моделирования, представлены различные классификационные признаки, по которым выделены различные типы моделей [1, 2, 8].

В табл. 1 представлена классификация по классам задач, области использования и способу представления с примерами возможных приложений.

Ниже подробнее рассмотрим еще одну классификацию, предлагаемую Л.М. Фридманом [2]. По способу построения и с точки зрения степени наглядности он все модели разбивает на два класса: материальные и идеальные (табл. 2).

Таблица 1

Общая классификация математических моделей

По классам задач	По области использования	По способу представления
Проектирование Управление Анализ Синтез	Учебные Опытные Игровые Имитационные	Материальные Идеальные

Таблица 2

Классификация моделей по способу представления

Материальные	Идеальные
>Физические >Аналоговые >Геометрически подобные  	> Образные (иконические)  > Вербальные > Знаковые >Графические  >Математические ☐Графо-аналитические ☐Аналитические ☐Алгоритмические $U = I \cdot R$ Например: ☐Информационные ☐Модели искусственного интеллекта 

Материальные модели представляют собой вещественный продукт человеческой деятельности, они могут быть непосредственно чувственно познаны, поскольку существуют реально, объективно. Основным требованием к построению данного класса моделей является требование сходства (подобия, аналогии) между моделью и оригиналом.

Материальные модели отражают работу и конструкцию объекта оригинала (геометрические, физические, динамические, функциональные свойства).

Физические модели представляют собой уменьшенную или увеличенную копию объекта оригинала, допускающую исследование с последующим переносом свойств на реальный объект на основе теории подобия. Они могут быть физически подобны оригиналам и воспроизводить моделируемые явления в каком-то масштабе, например: в астрономии используют глобус звездного неба; в гидроэнергетике для расчета проектируемой гидроэлектростанции строят действующую модель реки и будущей плотины; в электроэнергетике для исследования режимов может быть использована электродинамическая модель.

Геометрически подобные модели передают лишь пространственные (геометрические) особенности оригиналов в определенном масштабе. Геометрическое подобие является основным требованием к построению геометрических моделей, которые представляют собой объект, геометрически подобный своему прототипу и служащий часто для демонстрационных целей. Например, макеты домов и разного рода муляжи, изготовленные из дерева, проволоки, стекла; пространственные модели молекул и кристаллов в химии; модели самолетов, кораблей и других машин.

Еще одним видом материальных моделей являются **аналоговые** (или имитирующие), которые воспроизводят некоторое явление с помощью другого, в каком-то смысле более удобного. При этом модель и оригинал описываются единым математическим соотношением. Примером могут служить электрические модели, используемые для изучения механических, гидродинамических и акустических явлений.

Идеальные модели основаны на идеальной (мысленной) аналогии объекта и модели.

В отличие от материальных моделей, которые чаще всего являются экспериментальными, идеальные модели теоретические и существуют в сознании человека. Они могут быть перенесены на любой носитель информации.

Идеальные модели делят обычно на три вида:

- 1) образные (иконические);
- 2) вербальные;
- 3) знаковые.

Образные (иконические) модели отражают свойства объекта оригинала с помощью наглядных образов, имеющих прообразы в реальном мире, например:

- представление движения молекул газа или жидкости как взаимодействие упругих шаров;

- мысленное представление электрического тока как направленного движения электронов;
- модель атома в физике, предложенная в свое время Бором;
- картины, передающие в образной форме особенности моделируемых предметов или явлений.

Вербальные модели описывают свойства объекта на естественном языке с использованием правил синтаксиса и семантики (например, любое научное представление о каком-либо явлении в форме его описания, текст технической документации и др.).

Знаковое моделирование представляет собой запись структуры или некоторых особенностей моделируемых объектов с помощью знаков-символов какого-то искусственного языка.

Графические – описывают свойства объекта на языке графики, (например, гистограммы, схемы).

Математические – описывают свойства объекта на языке математики, к ним относятся, в частности:

- графоаналитические – графики, чертежи, схемы, графы, блок-схемы;
- аналитические – математические уравнения, химические формулы;
- алгоритмические – компьютерные программы.

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

В настоящее время наиболее востребованным видом моделирования является математическое. **Математическое моделирование** представляет собой средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены математической моделью.

Математическая модель позволяет описать основные свойства объекта-оригинала на языке математики с помощью логико-математических конструкций для его дальнейшего исследования при решении различных задач.

Моделирование как научный метод стало предметом обобщения и анализа, начиная с 40-х годов XX века, что в большей степени связано с появлением первых компьютеров. Методология математического моделирования продолжает постоянно совершенствоваться, охватывая все новые сферы – от разработки сложнейших технических систем и

управления технологическими процессами до анализа в сфере экономики и политики.

Таким образом, современное математическое моделирование предоставляет исследователю исключительно мощные и универсальные средства изучения окружающего мира, сочетая в себе основные достоинства известных теоретических и экспериментальных методов исследования [6].

Замена объекта оригинала его математической моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат и рисков теоретически исследовать его свойства и поведение в различных ситуациях.

В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных средств вычислительной техники, изучить объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам.

По сравнению с экспериментальным исследованием математическое моделирование имеет следующие преимущества:

- экономичность по затратам времени и по стоимости;
- возможность моделирования сложных, опасных объектов и процессов без рисков и аварийных последствий;
- возможность изменения при необходимости в процессе анализа масштаба времени;
- устранение пробелов в знаниях и выявление в ходе исследования новых качественных проблем;
- решение целого класса задач, имеющих одинаковое математическое описание;
- возможность моделирования объекта и процесса по частям при исследованиях сложных технических объектов;
- применение универсального технического и программного обеспечения [6].

Можно выделить два подхода к созданию математических моделей:

1) теоретический подход, основанный на использовании известных законов и математических закономерностей;

2) экспериментальный подход, позволяющий получить новые (до этого неизвестные) логико-математические конструкции с использованием математической статистики, необходимые для дальнейшего исследования.

Формирование модели – сложный творческий процесс, требующий от исследователя опыта, интуиции, глубокого знания предметной области и возможностей современной компьютерной техники для принятия компромиссных решений и получения эффективной модели (рис. 1.2).

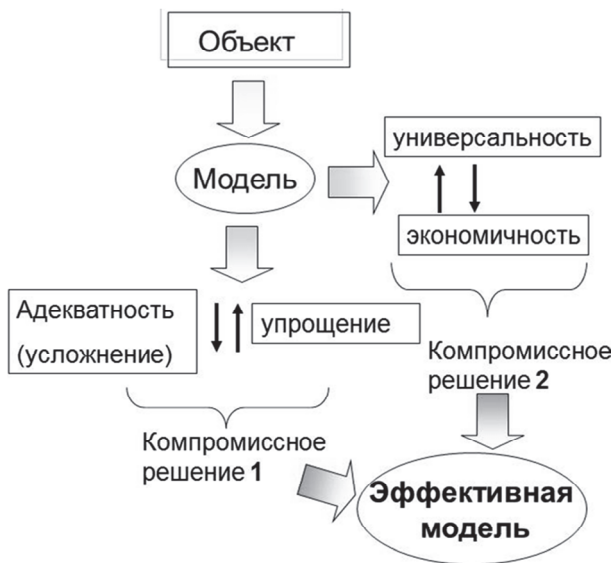


Рис. 1.2. Процесс формирования эффективной модели

Эффективная модель должна обладать рядом свойств, позволяющих в той или иной степени различать либо отождествлять модель с оригиналом [8]:

- *адекватность* – степень соответствия объекту-оригиналу (полнота модели);
- *универсальность* – применимость модели к анализу многочисленной группы объектов и решению широкого класса задач;
- *экономичность* – количество вычислительных ресурсов, необходимых для реализации модели.

Одним из важнейших требований к модели является ее адекватность реальному объекту (процессу, системе и т. д.) относительно выбранного множества его характеристик и свойств.

Под адекватностью модели понимают качественное и количественное описание объекта (процесса) по выбранному множеству ха-

рактических с некоторой степенью точности по тем свойствам модели, которые являются для исследователя существенными. Полная адекватность означает тождество между моделью и прототипом.

Вводится понятие степени (меры) адекватности, меняющейся от нуля (отсутствие адекватности) до единицы (полная адекватность).

Степень адекватности характеризует долю истинности модели относительно выбранной характеристики (свойства) изучаемого объекта. Чем больше свойств объекта оригинала учтено в модели, тем выше степень адекватности модели.

Введение количественной меры адекватности позволяет в количественном отношении ставить и решать такие задачи, как идентификация, устойчивость, чувствительность, адаптация, обучение модели.

Одновременное требование простоты и адекватности модели является противоречивым (рис. 1.2).

С точки зрения адекватности сложные модели предпочтительнее. В них учитывается большее число факторов, влияющих на изучаемые характеристики объектов. Однако хотя сложные модели более точно отражают моделируемые свойства оригинала, они более громоздки и трудны в реализации. Поэтому исследователь всегда стремится к упрощению модели, поскольку простыми моделями легче оперировать. Таким образом, при формировании математической модели необходимо принять компромиссное решение между уровнями ее простоты и адекватности (сложности) (рис. 1.2).

Также противоречивы еще два свойства модели – универсальность, требующая учета большего числа свойств объекта оригинала с точки зрения применимости для широкого класса задач, и экономичность (вычислительные ресурсы, используемые для реализации), которая при этом ухудшается.

Универсальность моделей определяется числом и составом учитываемых в модели входных и выходных параметров. Чем точнее модель, тем выше степень ее адекватности оригиналу, но тем уже класс объектов, который может быть описан данной моделью.

И наоборот, чем более универсальна модель и шире класс описываемых ею объектов, тем с большей степенью приближения она соответствует свойствам каждого реального объекта, но тем хуже ее экономичность. Отсюда необходимость в принятии второго компромиссного решения в процессе формирования модели (рис. 1.2).

В результате принятия этих решений формируется эффективная математическая модель.

Необходимо отметить, что разработка точных и надежных методов проверки адекватности модели остается достаточно трудной задачей.

В качестве примера рассмотрим один из возможных методов анализа адекватности модели.

В этом случае модель выступает как самостоятельный объект исследования (рис. 1.3). Одной из форм такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении».

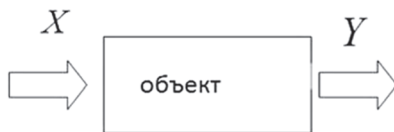


Рис. 1.3. Модель «черный ящик»

Формируются массивы векторов характеристик объекта – выходных параметров Y , которые получаются в ходе натурального эксперимента и в результате расчетов, проведенных с использованием математической модели $\tilde{Y}$:

$Y = \{Y_j\}$ – вектор параметров объекта, полученных в ходе натурального эксперимента;

$\tilde{Y} = \{\tilde{Y}_j\}$ – вектор параметров объекта, рассчитанных по модели.

Алгоритм анализа адекватности модели включает в себя следующие этапы.

1. Рассчитывается вектор относительных погрешностей

$$\varepsilon_j = \frac{Y_j - \tilde{Y}_j}{Y_j}, \quad j=1 \dots n. \quad (1.1)$$

2. Для количественной оценки точности модели вектор погрешности представляется в скалярной форме, переход к которой осуществляется на основе какой-либо выбранной нормы векторов:

m – норма вектора погрешности

$$\varepsilon_m = \max |\varepsilon_j| \quad (1.2)$$

либо L – норма вектора погрешности

$$\varepsilon_L = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}. \quad (1.3)$$

Если предельно допустимая погрешность моделирования определяется величиной $\Delta_{\max}$, то математическая модель будет адекватна объекту-оригиналу при выполнении условия (1.4), которое задает область адекватности модели:

$$\Delta_m(L) \leq \Delta_{\max}. \quad (1.4)$$

Таким образом, точность математической модели определяется степенью совпадения расчетного и действительного процесса и зависит главным образом от точности исходных данных и принятых допущений.

1.4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В настоящем пособии будут рассматриваться математические модели, используемые главным образом при решении задач управления сложными техническими объектами, к которым относятся электро-энергетические системы.

Описания технических объектов должны быть по сложности согласованы с возможностями восприятия человеком и с возможностями компьютера оперировать описаниями моделей в процессе их преобразования.

В этом случае требуется структурирование описаний и соответствующее разделение представлений о сложных объектах на иерархические уровни и аспекты. Использование принципов блочно-иерархического подхода к формированию структуры математических моделей объектов позволяет формализовать процесс их разработки.

Количество иерархических уровней при моделировании определяется сложностью объектов и возможностью средств управления и проектирования.

Иерархические уровни большинства предметных областей можно отнести к одному из трех обобщенных уровней в зависимости от места в иерархии описания математической модели:

- модели микроуровня – распределенные;
- модели макроуровня – сосредоточенные;
- модели метауровня – информационные (логические).

Математические модели на **микроуровне** применяются для описания физических процессов, протекающих в непрерывном пространстве и времени. Они представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных, независимыми переменными являются пространственные координаты и время. С помощью этих уравнений рассчитываются поля механических напряжений и деформаций, электрические потенциалы и напряжения, давления и температуры и т. п.

На **макроуровне** используют укрупненную дискретизацию пространства по функциональному признаку. При этом независимой переменной является время, а вектор зависимых переменных составляют фазовые переменные, характеризующие состояние укрупненных элементов дискретизированного пространства. К ним относятся силы и скорости в механических системах, напряжения и токи в электрических системах и т. п. Универсальные математические модели на этом уровне представляются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, пригодных для анализа как динамических, так и установившихся состояний объектов. Модели для установившихся режимов можно также представить в виде систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений.

На **метауровне** объекты рассматриваются как достаточно сложные совокупности элементов, логика функционирования которых представляется как цепь логически связанных событий в дискретном пространстве. Метауровень характеризуется большим разнообразием типов математических моделей, использующих фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям элементов. Математические модели на метауровне – системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы логических уравнений, имитационные модели систем массового обслуживания.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОУРОВНЯ

2.1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МИКРОМОДЕЛИРОВАНИЯ

Основная цель моделирования – описание физических процессов [7, 9, 10].

На **микроуровне** применяются математические модели, описывающие физическое состояние и процессы в сплошных средах (рис. 2.1).

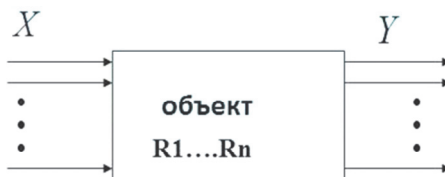


Рис. 2.1. Графическая модель объекта:

X – вектор входных переменных; Y – вектор
выходных переменных; R – вектор внутрен-
них переменных

Объект на микроуровне – это сплошная непрерывная среда (твердая, жидкая, газообразная), в которой время распространения процессов соизмеримо с инерционным эффектом. Такие объекты называются распределенными, например: жидкая фаза парогенератора, резистивный участок интегральной микросхемы, протяженные линии электропередачи. Математические модели этого уровня также называют распределенными.

К типичным фазовым переменным на микроуровне относятся, например:

X – плотность потоков, напряженность полей, концентрация частиц;

R – коэффициент теплопроводности, концентрация примесей;

Y – жесткость пружины, фокусное расстояние линзы.

Независимыми переменными являются время и пространственные координаты.

По распределенности параметров можно выделить следующие виды объектов:

- **одномерные**, соответствующие распределенности параметров вдоль длины, такие объекты часто называют «длинными линиями», например, линии электропередачи, трубопроводы, линии связи и т. п.) (рис. 2.2, а);

- **двумерные**, соответствующие распределенности по сечению, например, трубопроводов, кабелей, проводов и т. д. (рис. 2.2, б);

- **трехмерные**, определяющие распределенность в трехмерном пространстве (например, электромагнитное поле) (рис. 2.2, в).

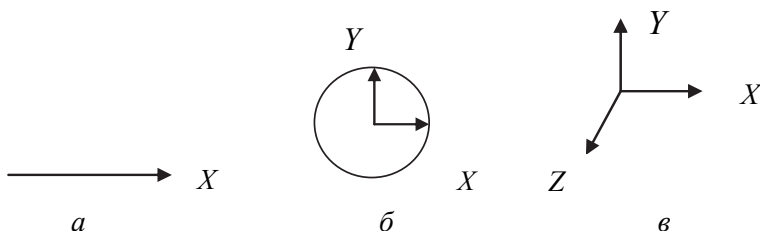


Рис. 2.2. Виды распределенности параметров объектов

Для моделирования применяют аппарат уравнений математической физики. Примерами таких уравнений служат дифференциальные уравнения в частных производных – уравнения электродинамики, теплопроводности, упругости, газовой динамики. Эти уравнения описывают поля электрического потенциала и температуры в полупроводниковых кристаллах интегральных схем, напряженно-деформированное состояние деталей механических конструкций и т. п.

Основной принцип микромоделирования: при создании теоретических моделей микроуровня необходимо исходить из **физических законов в наиболее фундаментальном виде** для обеспечения универсальности моделей.

В основу аналитического метода составления математических моделей положено теоретическое описание конструкции исследуемого объекта (системы) и происходящих в нем физических процессов с использованием фундаментальных законов математической физики, к которым прежде всего относятся:

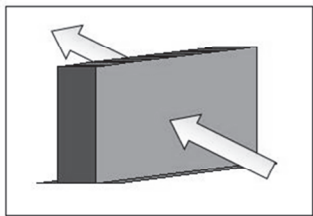
- **закон сохранения массы** – масса физической системы сохраняется при всех природных и искусственных процессах;
- **закон сохранения количества движения** (закон сохранения импульса) – векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная;
- **закон сохранения энергии** – для изолированной физической системы может быть введена скалярная физическая величина, являющаяся функцией параметров системы и называемая энергией, которая сохраняется с течением времени.

При формировании уравнений математической физики (дифференциальных уравнений в частных производных) используется **принцип аналогии** – один из основных принципов моделирования.

2.2. ПРИНЦИП АНАЛОГИИ В МИКРОМОДЕЛИРОВАНИИ

В основе применения принципа аналогии на микроуровне моделирования лежит единая формулировка, соответствующая закону сохранения.

Общая формулировка **закона сохранения** (рис. 2.3) следующая: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме dV равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.



Субстанция: масса, количество движения, энергия, количество теплоты, количество зарядов, количество элементарных частиц и др.

Рис. 2.3. Закон сохранения

Уравнение, соответствующее данной формулировке, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{J} + G, \quad (2.1)$$

где ϕ – некоторая фазовая переменная, выражающая субстанцию (плотность, энергию и т. п.); $\vec{J}$ – поток фазовой переменной; G – скорость генерации субстанции; t – время.

Поток фазовой переменной ϕ есть вектор

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z).$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока-стока субстанции через поверхность элементарного объема и представляет собой скалярную величину, образуемую суммой частных производных вектора $\vec{J}$ в системе координат исследуемого объекта:

$$\text{div } \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}. \quad (2.2)$$

На основе общей трактовки закона сохранения могут быть получены уравнения для различных субстанций.

Приведем примеры моделирования для ряда физических процессов.

Уравнение непрерывности гидродинамики (закон сохранения массы) применяется для гидравлических процессов.

Пусть в процессе течения жидкости (газа) в любой точке M определено значение скорости движения частиц, которые в совокупности образуют векторное поле.

Обозначим через ρ плотность потока жидкости в данной точке.

Используя понятие дивергенции, можно описать поведение этой плотности в отдельной точке:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \text{div}(\vec{v}), \quad (2.3)$$

где $\vec{v}$ определяет векторное поле скорости.

С учетом распределения параметров объекта в одном направлении уравнение примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Уравнение теплопроводности описывает связь изменения температуры во времени и пространстве со свойствами среды, применяется для тепловых процессов.

Закон сохранения энергии: изменение теплоты в элементарном объеме равно сумме притока-стока теплоты и изменения теплоты за счет ее превращения в другие виды энергии:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}_Q + G_Q, \quad (2.5)$$

где Q – количество теплоты; G_Q – количество теплоты, выделяемой в единицу времени в элементарном объеме; $\vec{J}_Q$ – вектор плотности теплового потока.

Связь изменения температуры и изменения количества теплоты может быть выражена как

$$dQ = C \rho dT, \quad (2.6)$$

где ρ – плотность тела; C – удельная теплоемкость.

Выразим плотность теплового потока J_Q через градиент температуры:

$$J_Q = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (2.7)$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Градиент температуры представляет собой вектор:

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.8)$$

С учетом (2.5)–(2.8) уравнение теплопроводности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= (C\rho)^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = (C\rho)^{-1} [-\operatorname{div} \vec{J}_Q + G_Q] = \\ &= (C\rho)^{-1} [\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad}(T)) + G_Q]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ НА МИКРОУРОВНЕ

Практически во всем мире для передачи электрической энергии используется система трехфазного переменного тока 50 или 60 Гц. Однако в ряде случаев могут применяться другие системы переменного тока и передачи постоянного тока.

В качестве объекта моделирования в пособии будем рассматривать трехфазные воздушные линии переменного тока высокого напряжения (до 1150 кВ), которые передают электроэнергию на большие расстояния (до нескольких тысяч километров).

В этом случае линия электропередач (ЛЭП) рассматривается как объект с распределенными вдоль одной пространственной координаты параметрами (вдоль линии).

При исследованиях параметры линии электропередачи задаются как погонные, т. е. на единицу длины:

- погонное сопротивление $Z_0 = r_0 + jx_0$ Ом/км;
- погонная проводимость $Y_0 = g_0 + jb_0$ См/км.

Основными характеристиками линии электропередачи являются активные и реактивные мощности, напряжения и токи по концам линии (параметры режима).

С увеличением длины линии увеличивается емкостная проводимость линии, растет индуктивное сопротивление, а также начинает проявляться волновой характер электромагнитных процессов.

В высоковольтных линиях электропередачи (ВЛ) в качестве проводящего материала практически всегда используются сталеалюминиевые провода марки АС. Их удельное сопротивление постоянному току r_0 в среднем равно 29,1 Ом мм²/км. Активное сопротивление в электрических схемах ЛЭП является параметром, определяющим процесс рассеивания энергии в виде отдачи тепла в окружающее пространство.

Индуктивность ЛЭП вызвана явлениями самоиндукции и взаимной индукции фаз линии и зависит от диаметра проводов фазы и расстояния между фазами. При расчетах электрических сетей используется погонное индуктивное сопротивление ВЛ 330...1150 кВ x_0 , которое в среднем равно 0,31 Ом/км.

Вследствие несовершенства изоляции ВЛ и явления короны в местах присоединения проводов к гирляндам изоляторов ВЛ возникают

потери электроэнергии от токов утечки. В зависимости от погоды потери от токов утечки и потери на корону могут изменяться в десятки раз.

Моделирование потерь в изоляции ВЛ выполняется с помощью введения активной проводимости g_0 , величина которой для большинства ВЛ 330...1150 кВ задается в пределах 0,01...0,1 мкСм/км.

Емкостные проводимости между фазами и между проводами и землей, грозозащитными тросами и заземленными частями опоры моделируются емкостной проводимостью фазы. Величина погонной емкостной проводимости ВЛ 330...1150 кВ b_0 в среднем составляет 3,5 мкСм/км.

В ВЛ с распределенными параметрами интервал времени распространения электромагнитных волн вдоль линии сопоставим с интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на заметную величину от полного их изменения.

Таким образом, основные свойства линии электропередачи:

- **стационарность** – неизменность структуры и погонных параметров во времени;
- **распределенность** – распределение параметров вдоль длины линии;
- **статизм** или **динамичность** (в зависимости от исследуемых процессов);
- **одномерность** – распределение параметров вдоль одной пространственной координаты;
- **однородность** – все параметры считают равномерно распределенными вдоль длины;
- **линейность** или **нелинейность** (в зависимости от уравнений, описывающих режим работы линии);
- **непрерывность** – переменные, характеризующие процессы, являются непрерывными величинами.

Физические процессы в ЛЭП

Передача электроэнергии по ЛЭП переменного тока обусловлена распространением электромагнитного поля в проводах и окружающем пространстве. Возникновение переменного электростатического поля приводит к появлению токов смещения – зарядных токов. Зарядные токи накладываются на нагрузочный ток и определяют постепенное изменение тока вдоль линии.

Таким образом, *закон изменения тока* вдоль линии определяется *электростатическим полем* (наложением зарядных токов на нагрузочный ток).

Магнитное поле, обусловленное током линии, характеризуется напряженностью, которая изменяется вдоль линии. Это приводит к наведению ЭДС самоиндукции и взаимоиנדукции, неодинаковых для различных участков линии. Неравенство этих ЭДС определяет сложный закон изменения напряжения вдоль линии, в свою очередь, определяющий изменение токов смещения вдоль линии.

Таким образом, *закон изменения напряжения* вдоль линии обусловлен *электромагнитным полем*, напряженность которого изменяется вдоль линии.

2.4. ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛЭП НА МИКРОУРОВНЕ

Все элементы электроэнергетической системы (ЭЭС), в том числе и ЛЭП, являются, как правило, трехфазными устройствами переменного тока. Далее будем рассматривать только симметричные трехфазные системы, которые вследствие симметрии можно графически изображать в однолинейном виде.

Графическую модель ЛЭП с равномерно распределенными параметрами, обладающую указанными выше свойствами, можно представить в виде условно-принципиальной схемы (рис. 2.4).

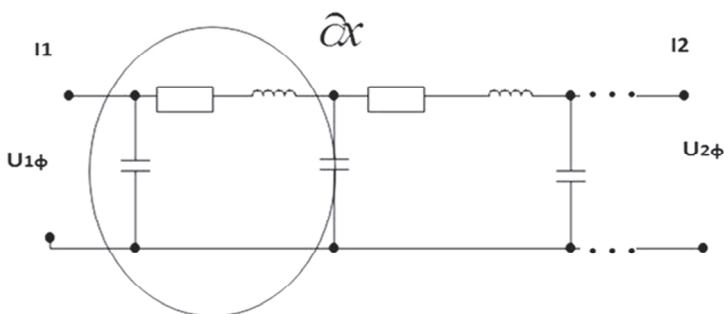


Рис. 2.4. Условно-принципиальная схема ЛЭП с равномерно распределенными параметрами

Выделим элементарный участок бесконечно малой длины ∂x . На этом участке линии электрические параметры можно считать сосредоточенными (рис. 2.4).

Система дифференциальных уравнений в частных производных, связывающая ток и напряжение на границах элементарного участка ∂x , имеет вид [8]

$$\begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2.10) с учетом граничных условий и синусоидальности токов и напряжений в символической форме:

$$\begin{cases} \underline{U}_{1\phi} = \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) \underline{U}_{2\phi} + \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l) \underline{U}_{2\phi} + \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) \underline{I}_2, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$ – волновое сопротивление; $\underline{\gamma} = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta$ – коэффициент затухания; $\alpha = \operatorname{Re}(\underline{\gamma})$ – коэффициент распространения волны; $\beta = \operatorname{Im}(\underline{\gamma})$ – коэффициент фазы; l – длина линии электропередачи.

В трехфазных системах принято использование линейных напряжений

$$U = \sqrt{3} \cdot U_{\phi}.$$

Чтобы не вводить в запись уравнений (2.11) константу $\sqrt{3}$ и в то же время использовать линейные значения напряжений, используют увеличенное в $\sqrt{3}$ значение тока линии. Таким образом, математическая модель длинной линии имеет вид

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l)\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)\underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l)\underline{I}_2. \end{cases} \quad (2.12)$$

В результате получаются фазные токи линии, увеличенные в $\sqrt{3}$ раз.

Полученные уравнения называются уравнениями длинной линии или телеграфными уравнениями.

Если требуется определить напряжение и ток в произвольной точке линии, находящейся на расстоянии x от ее начала, может быть использована модель

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \operatorname{ch}(\underline{\gamma}(l-x))\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}(l-x))\underline{I}_2, \\ \underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}(l-x))\underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\underline{\gamma}(l-x))\underline{I}_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Формально напряжение и ток в любой точке линии можно рассматривать как результат наложения двух волн, движущихся в противоположные стороны:

- волна напряжения перемещается от начала линии к ее концу и носит название прямой или падающей волны;
- волна напряжения, которая перемещается от конца линии к ее началу, носит название обратной или отраженной волны.

Расчеты показывают, что для воздушных линий электропередачи при частоте 50 Гц коэффициент фазы $\beta \approx 0,06$ град/км. С помощью этого значения можно найти длину прямой и обратной волн.

Универсальной графической моделью, применяемой на всех уровнях моделирования, является **четырёхполюсник** (рис. 2.5).

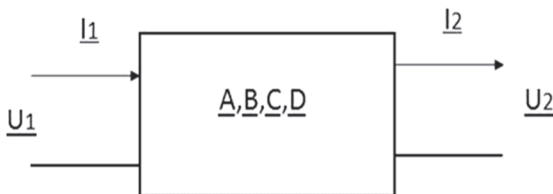


Рис. 2.5. Четырёхполюсник

Уравнения четырехполюсника составляют основу для формирования широкого класса математических моделей любых технических объектов:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) позволяют сформировать различные модели, которые учитывают распределенность параметров однородной протяженной ЛЭП.

Общий вид математической модели ЛЭП на микроуровне включает уравнения четырехполюсника и ограничения, накладываемые на уровни токов и напряжений:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2, \\ U_{\text{ном}} - 10\% &\leq U \leq U_{\text{ном}} + 10\%, \\ I &\leq I_{\text{доп}}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Нижняя граница ограничения по напряжению определяется режимом работы генераторов и требованиями потребителей, а верхняя — условиями работы электрооборудования и изоляции. Допустимые токи регламентируются для каждой марки провода и являются справочными данными.

Таким образом, все виды математических моделей ЛЭП имеют вид (2.15) и отличаются только способом расчета коэффициентов четырехполюсника.

Наиболее полная модель (*модель 1*) получается при сопоставлении уравнений длинной линии (2.12) и уравнений четырехполюсника (2.14).

В этом случае расчет коэффициентов уравнений четырехполюсника производится с использованием выражений следующего вида.

Модель 1

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{D} = \text{ch}(\underline{\gamma}l), \\ \underline{B} &= \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}l), \\ \underline{C} &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}l).\end{aligned}\tag{2.16}$$

В ЛЭП сверхвысокого напряжения характерно следующее соотношение параметров:

$$r_0 \ll x_0, \quad g_0 \ll b_0.$$

Поэтому для упрощения исследования режимов работы часто пользуются понятием «идеальной» линии, в которой активные параметры считаются равными нулю:

$$r_0 = 0, \quad g_0 = 0.$$

Очевидно, что при этом коэффициент распространения волны $\alpha = 0$.

В результате получается модель (**модель 2**) «идеальной» линии, которая фактически соответствует отсутствию потерь мощности.

В этом случае расчет коэффициентов четырехполюсника производится с использованием следующих выражений.

Модель 2

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{D} = \cos(\beta l), \\ \underline{B} &= j \underline{Z}_C \sin(\beta l), \\ \underline{C} &= j \frac{1}{\underline{Z}_C} \sin(\beta l). \end{aligned} \tag{2.17}$$

При анализе режима протяженных линий передачи необходимо рассматривать не только условия по концам линии, но и распределение напряжения и тока вдоль линии.

Режим холостого хода электропередачи без потерь (идеальная линия) характеризуется стоячими волнами, не переносящими вдоль линии активной мощности. Амплитуда стоячих волн в этом режиме меняется во времени, т. е. имеют место пульсации волн, которым отвечает обмен реактивной мощностью между емкостью и индуктивностью линии.

Для линий длиной более 300 км напряжения и токи в промежуточных точках могут значительно отличаться от их значений по концам электропередачи, т. е. использование схемы замещения с сосредоточенными параметрами не дает представления о том, что происходит в промежуточных точках линии. Требуется использование моделей с распределенными параметрами (**модель 1, модель 2**).

С практической точки зрения наибольший интерес представляют исследования двух режимов работы однородной протяженной ЛЭП сверхвысокого напряжения, при которых исследуется распределение параметров вдоль длинной линии $U(x)$, $I(x)$, $P(x)$, $Q(x)$:

- режим холостого хода;
- нагрузочный режим.

Режим холостого хода соответствует отсутствию нагрузки в конце линии, в связи с этим ток в конце линии равен нулю: $\underline{I}_2 = 0$.

В случае холостого хода для расчета коэффициентов четырехполосника с учетом идеальной линии используются следующие выражения.

Модель 3

$$\begin{aligned} U_1 &= \cos(\beta l) U_2, \\ I_1 &= j \frac{1}{Z_C} \sin(\beta l) U_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Режим холостого хода наиболее опасен за счет больших значений напряжения в конце линии. Используя **модель 3**, можно оценить уровень этих напряжений. Из уравнений (2.18) имеем

$$U_{2xx} = \frac{U_{1xx}}{\cos(\beta l)}. \quad (2.19)$$

С учетом значения коэффициента фазы $\beta \approx 0,06$ град/км для воздушных ЛЭП при частоте 50 Гц введем обозначение

$$k = \frac{1}{\cos(\beta l)}$$

и представим результаты анализа зависимости величины напряжения от длины линии в виде табл. 3.

Как видно из результатов анализа, при длине ЛЭП 1500 км напряжение в конце линии теоретически равно бесконечности. Однако за счет потерь на корону напряжение увеличивается в 5–6 раз относительно начала линии.

Результаты анализа напряжения в конце ЛЭП

Длина ЛЭП (км)	$\lambda = \beta l$	k	U_2
$l = 0$	0°	1	$U_2 = U_1$
$l = 500$	30°	1,15	$U_2 = 1,15U_1$
$l = 1000$	60°	2	$U_2 = 2U_1$
$l = 1500$	90°	∞	$U_2 = \infty$

Нагрузочный режим

Пропускная способность ЛЭП определяется величиной активной мощности, которую линия может передать при выполнении всех условий, определяющих ее нормальную работу.

Наиболее экономичным, эталонным режимом работы ЛЭП является режим передачи натуральной мощности. Натуральная мощность течет по линии, когда сопротивление нагрузки на ее конце равно волновому сопротивлению

$$Z_H = Z_C.$$

Натуральная мощность линии с номинальным напряжением равна

$$S_{\text{нат}} = \frac{U_{\text{ном}}^2}{Z_C}. \quad (2.20)$$

На элементарном участке длины ЛЭП без потерь имеют место потребление реактивной мощности на индуктивном сопротивлении Q_L и генерация реактивной мощности за счет емкостной проводимости Q_C . При этом мощность Q_L зависит от величины передаваемой мощности, а мощность Q_C – не зависит.

При некотором значении активной мощности будет иметь место равенство $Q_L = Q_C$ (линия станет идеальной). Этот режим работы ЛЭП соответствует передаче натуральной мощности.

Для идеальной линии без потерь натуральная мощность содержит только активную составляющую:

$$S_{\text{нат}} = P_{\text{нат}} = \frac{U_{\text{ном}}^2}{Z_C}. \quad (2.21)$$

В реальной линии $r_0 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, при $Q = 0$ потери активной мощности будут наименьшими. А в режиме передачи натуральной мощности линия будет работать с наибольшим КПД вследствие того, что она самобалансирована по реактивной мощности. В этом случае отсутствует отраженная волна и передача электроэнергии по линии осуществляется в виде прямых волн. Если рассматривать линию без потерь, то отсутствует переток реактивной мощности и величина напряжения вдоль линии не меняется. Для линии с потерями в этом случае имеет место монотонное уменьшение напряжения по направлению от передающего конца передачи к приемному.

Таким образом, основными достоинствами режима передачи натуральной мощности являются:

- минимальные потери передаваемой мощности за счет отсутствия отраженной волны;
- наибольший КПД за счет самобаланса по реактивной мощности: линия генерирует реактивную мощность, достаточную для покрытия потерь;
- благоприятный режим по напряжению.

На практике невозможно обеспечить работу всех линий в режиме, близком к натуральному, но этого добиваются для отдельных линий, когда существует возможность регулировать передаваемую мощность за счет ее перераспределения в электрической сети и генерирования реактивной мощности в местах ее потребления.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОУРОВНЯ

3.1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАКРОМОДЕЛИРОВАНИЯ

На макроуровне моделируются объекты, состоящие из физически однородных элементов. При этом крупные элементы объектов сосредотачиваются в одной точке, такие объекты называются сосредоточенными.

Производится дискретизация пространства, из числа независимых переменных исключают пространственные координаты, а время – непрерывно и относится к независимым переменным. Например: поле потенциалов, задаваемое как фазовая переменная на микроуровне, переходит в величину напряжения, поток электронов – в значение электрического тока. Таким образом, в качестве фазовых переменных фигурируют электрические напряжения, токи, силы, скорости, температуры, расходы и т. д. Они характеризуют проявления внешних свойств элементов при их взаимодействии между собой и внешней средой.

Математические модели на макроуровне представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений или, при рассмотрении системы в статике в установившихся режимах, – системы алгебраических линейных или нелинейных уравнений. Для их получения и решения используют соответствующие численные методы.

При моделировании на макроуровне также действует принцип аналогии (как для представления фазовых переменных, так и при формировании математических моделей). Объекты различной физической природы описываются фазовыми переменными «потенциал» и «поток» (табл. 4).

Таблица 4

Виды фазовых переменных

Система	Потенциал	Поток
Механическая	Скорость	Сила
Электрическая	Напряжение	Ток
Тепловая	Температура	Тепловой поток
Гидравлическая	Давление	Расход воды

В основе формирования моделей лежат три вида простейших пассивных элементов:

R – элемент рассеивания энергии (преобразования энергии в тепловую и ее рассеивания);

C и L – элементы накопления потенциальной и кинетической энергии, а также два активных элемента – источник напряжения и источник тока.

Законы функционирования элементов системы задаются **компонентными уравнениями**, связывающими различные факторы и переменные для заданного компонента системы.

Способ связи между однородными фазовыми переменными, относящимися к разным элементам системы, задается с помощью **топологических уравнений**. Полная модель получается объединением компонентных и топологических уравнений. В результате наблюдается аналогия между формой математических моделей для систем различной физической природы. В качестве примера рассмотрим аналогию между электрической и механической системами (табл. 5)

Таблица 5

Аналогия между механической и электрической системами

Электрическая система	Механическая система
Компонентные уравнения – закон Ома $U = RI, \quad I = C \frac{dU}{dt}, \quad U = L \frac{dI}{dt}$	Компонентные уравнения $V = R_m F, \quad F = m \frac{dV}{dt}, \quad V = L_m \frac{dF}{dt}$ V – скорость; F – сила; R_m – коэффициент, учитывающий зависимость силы трения от скорости;

Электрическая система	Механическая система
Топологические уравнения – законы Кирхгофа $\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0$	m – масса – аналог электрической емкости; L_m – гибкость – параметр, являющийся аналогом электрической индуктивности. Топологические уравнения $\sum_j F_j = 0, \quad \sum_i V_i = 0$ • Закон равновесия сил • Уравнение сложения скоростей (относительной, переносной, абсолютной)

Математическая модель ЛЭП на макроуровне основана на универсальной модели четырехполюсника.

Графическая модель – П-образная схема замещения ЛЭП (рис. 3.1.)

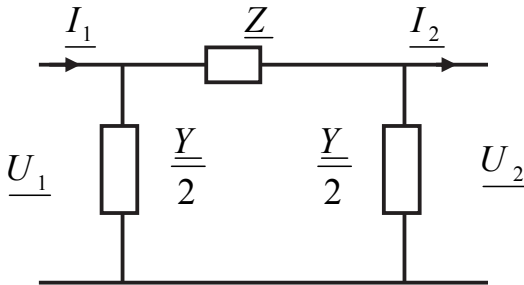


Рис. 3.1. П-образная схема замещения ЛЭП

Сосредоточенные параметры ЛЭП:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0 l; \quad \underline{Y} = \underline{Y}_0 l.$$

Математическая модель ЛЭП имеет вид уравнений (2.15), при этом коэффициенты четырехполюсника рассчитываются с использованием следующих выражений:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{2}, \\ \underline{B} &= \underline{Z}, \\ \underline{C} &= \underline{Y} + \underline{Z}\left(\frac{\underline{Y}}{2}\right)^2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Математические уравнения объектов на макроуровне представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\varphi\left(\frac{dV}{dt}, V, t\right) = 0,\tag{3.2}$$

где V – вектор фазовых переменных; φ – вектор-функция.

Либо возможна форма представления Коши

$$\frac{dV}{dt} = F(V, t).\tag{3.3}$$

Уравнения (3.2) и (3.3) предназначены для анализа переходных процессов, когда исследуется изменение параметров во времени.

Если объект рассматривать в статике при анализе установившихся режимов, то математическая модель – система линейных и нелинейных алгебраических уравнений.

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

Задача расчета и анализа установившихся режимов является базовой как при проектировании, так и при управлении электроэнергетическими системами (ЭЭС). При проектировании ЭЭС расчет установившихся режимов производится с целью выбора и уточнения параметров проектируемой системы. В процессе эксплуатации подобные расчеты позволяют оперативно управлять и планировать работу энергосистемы. При этом осуществляется оценка допустимости режима по техническим условиям оборудования.

Постановка задачи расчета режима функционирования определяется особенностями энергосистемы как сложной технической системы.

Электроэнергетическая система – сложная система кибернетического типа, которая включает в себя большое количество элементов, вырабатывающих, преобразующих, передающих, распределяющих, потребляющих электроэнергию и образующих сложно замкнутую разветвленную структуру.

К основным свойствам системы, характеризующим ЭЭС как объект моделирования, относят следующие:

- непрерывность технологического процесса;
- динамизм характеристик (вероятностный характер параметров объекта);
- сложные внутренние и внешние связи (структура объекта);
- иерархичность структуры и системы управления объектом.

Режимом работы ЭЭС называется состояние системы в любой момент времени или на некотором интервале времени. Режимы бывают установившимися (стационарными) или переходными.

Под **установившимся** режимом понимается такое состояние ЭЭС, когда параметры системы на рассматриваемом интервале времени сохраняются неизменными или изменяются достаточно медленно.

Задача расчета установившихся режимов ЭЭС сводится к определению совокупности параметров, характеризующих работу системы: напряжений в различных точках системы, токов в ее элементах, потоков и потерь мощности и т. д.

Проведение расчета связано с рядом основных этапов:

- предварительное преобразование и переход к расчетной схеме электрической системы;
- формирование уравнения состояния по известным исходным данным с учетом структуры расчетной схемы;
- выбор метода расчета, составление алгоритма и компьютерной программы (использование специализированных комплексов программ);
- проведение расчета установившегося режима на компьютере;
- анализ расчета с учетом поставленной цели и точности полученных результатов.

Современная ЭЭС представляет собой сложную систему, включающую сотни, иногда тысячи элементов, работающих на трехфазном переменном токе: трансформаторы, генераторы, двигатели, линии электропередачи и т. д.

Поэтому решение задачи расчета установившегося режима ее функционирования возможно только на основе математического моделирования с использованием средств современной вычислительной техники.

Процедура моделирования включает два этапа (рис. 3.2).

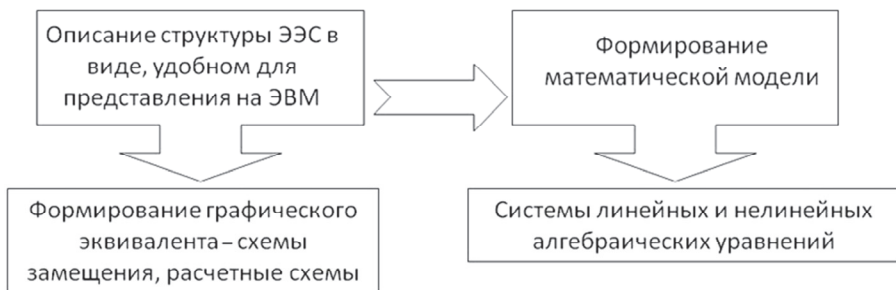


Рис. 3.2. Процедура моделирования

Таким образом, задача расчета установившегося режима предполагает использование графического моделирования для формирования расчетной схемы как основы формирования математических моделей.

3.2.1. МЕТОДЫ ФОРМАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ СТРУКТУРЫ ЭЭС

Предварительный этап перед проведением расчета установившегося режима – формирование графического эквивалента. Проводится переход от принципиальной схемы к схеме замещения, а затем к расчетной схеме, получаемой на основе теории графов.

Под схемой замещения ЭС понимается совокупность схем замещения отдельных элементов, соединенных в той же последовательности, что и в реальной схеме. Теория формирования схем замещения рассматривается в специальных курсах. В пособии ограничимся примером для простейшей электрической системы в объеме, необходимом для понимания структуры расчетной схемы.

Будем рассматривать симметричные установившиеся режимы, при которых используется схема замещения одной фазы.

Принципиальная схема любой ЭС включает три группы элементов (рис. 3.3):

- источники энергии;
- потребители или нагрузка;
- электрические сети, соединяющие источники с потребителями.

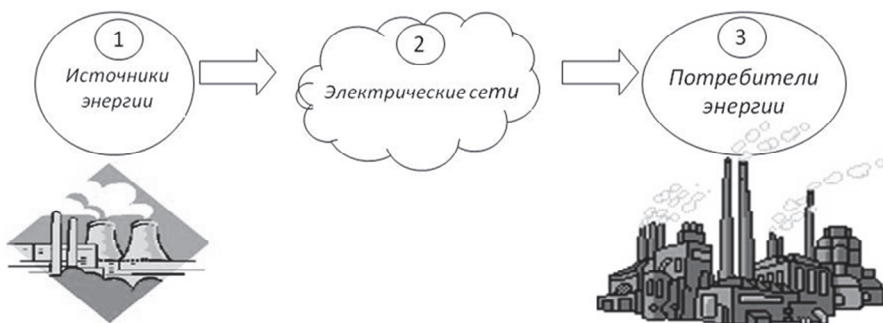


Рис. 3.3. Группы элементов электроэнергетической системы

Возможны следующие варианты схем замещения для источников энергии (рис. 3.4, 1):

- источник напряжения с ЭДС и внутренним сопротивлением Z (рис. 3.4, 1а);
- источник тока J , равный току установившегося режима (рис. 3.4, 1б);
- задающий ток J , равный току источника тока (рис. 3.4, 1с).

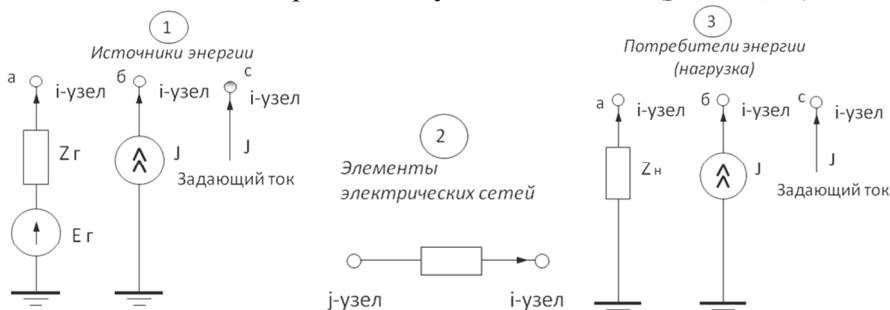


Рис. 3.4. Схемы замещения элементов электроэнергетической системы (задающий ток $J > 0$ – источник энергии; $J < 0$ – нагрузка)

Использование задающих токов J как модели источника энергии повышает наглядность схем замещения сложных электрических систем.

Потребители электроэнергии (нагрузка) моделируются с помощью следующих схем замещения (рис. 3.4, 3):

- сопротивление нагрузки Z (рис. 3.4, 3а);

- источник тока J , равный взятому с обратным знаком току нагрузки (рис. 3.4, 3б);

- задающий ток J , равный току источника тока (рис. 3.4, 3с).

Элементы электрической сети задаются на схеме замещения сопротивлениями Z (рис. 3.4, 2).

В качестве примера рассмотрим реальную схему электрической системы (рис. 3.5), включающую две тепловые электростанции (ТЭС), линии электропередач различных номинальных напряжений (Л1–Л6), понизительные подстанции и обобщенные нагрузки (Н1–Н3).

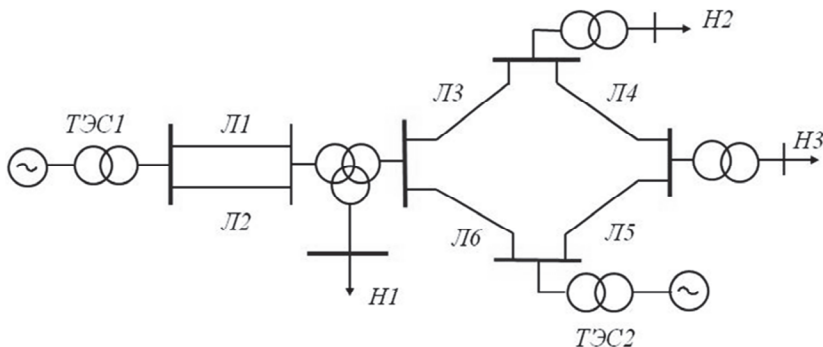


Рис. 3.5. Принципиальная схема энергосистемы

Первый этап преобразования – **формирование схемы замещения**.

Возможны разнообразные варианты схемы замещения ЭЭС, которые зависят от выбранного варианта схем замещения ее элементов.

С учетом рассмотренных вариантов схем замещения отдельных элементов приведем вариант схемы замещения (рис. 3.6) электрической системы, представленной на рис. 3.5.

Далее произведем известные из курса ТОЭ преобразования:

- приведем схемы к одному номинальному напряжению;
- схемы замещения трансформаторов подстанций объединим со схемами замещения источников питания и нагрузок;
- преобразуем звезду в треугольник (штриховая линия на рис. 3.6);
- учтем последовательно-параллельное соединение сопротивлений;
- смоделируем нагрузку и генерацию мощности с помощью задающих токов.

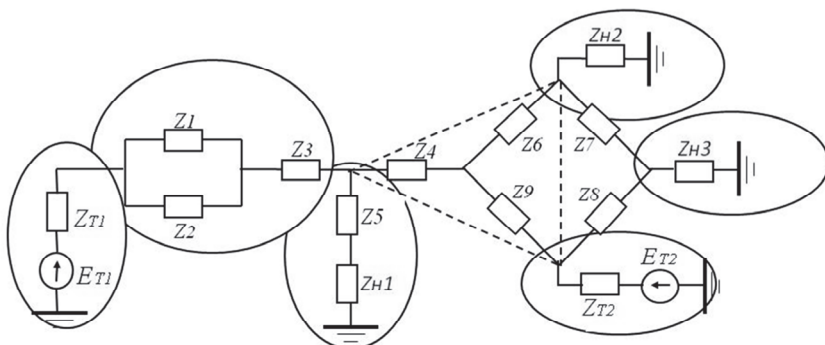


Рис. 3.6. Возможный вариант схемы замещения ЭЭС

Схема замещения после преобразования представлена на рис. 3.7.

Второй этап преобразования – **формирование расчетной схемы**.

Расчетная схема – направленный (ориентированный) граф, который позволяет наглядно отобразить топологию электрической сети ЭЭС, содержащей сотни узлов и ветвей.

Использование графов – универсальный прием макромоделирования для записи топологических уравнений.

Под графом понимается совокупность вершин (узлов) и связывающих их ребер (ветвей), соединяющих некоторые или все пары вершин.

Направленный граф имеет ребра с заданными направлениями, называемые дугами.

Правила перехода от схемы замещения к расчетной схеме в виде направленного графа:

- узлы схемы замещения, где сходятся более двух ее элементов, включая задающие токи, принимаются за вершины графа;
- соединяющие эти узлы ветви принимаются за дуги графа, которым придается произвольное направление.

С учетом приведенных правил можно перейти от схемы замещения (рис. 3.7) к топографическому направленному графу, который используется как расчетная схема (рис. 3.8).

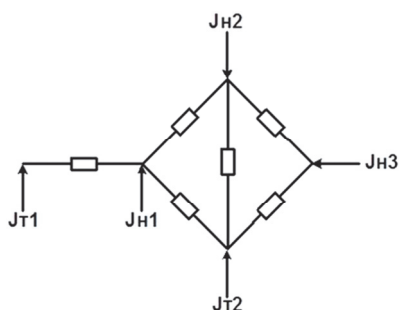


Рис. 3.7. Преобразованная схема замещения

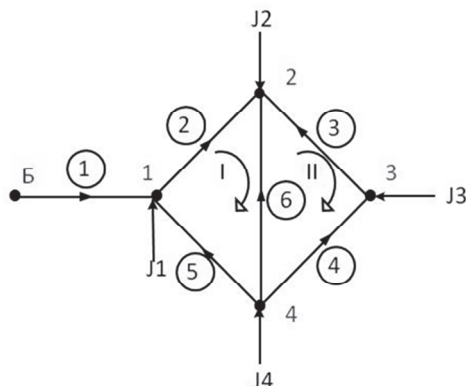


Рис. 3.8. Расчетная схема
электроэнергетической системы

На рис 3.8 расчетная схема содержит четыре независимых узла (1–4) и один балансирующий узел (Б).

Три узла (1–3) являются нагрузочными, и задающий ток в них имеет отрицательное значение ($J < 0$).

Два узла являются генераторными: узел 4, в котором задающий ток задается положительным значением ($J > 0$), и балансирующий узел Б.

Балансирующий узел – это генераторный узел, в котором ток может быть получен из баланса токов в электрической сети на основе первого закона Кирхгофа. Обычно в качестве балансирующего узла выбираются шины мощной электростанции или системы. В этом узле задается базисное напряжение U_B , относительно которого рассчитываются напряжения в остальных узлах схемы.

Каждая ветвь схемы (номер ветви обведен кружком) имеет произвольное направление. Расчетная схема содержит два независимых контура (I, II), направление обхода каждого задано произвольно.

Схемы замещения и расчетные схемы современных электрических систем имеют сотни узлов и ветвей, образующих сложно замкнутую структуру. С использованием графического эквивалента (расчетной схемы) могут быть сформированы математические модели, описывающие режимы работы ЭЭС.

Расчет режимов функционирования подобных технических систем невозможен без использования вычислительной техники. Поэтому важное значение приобретает использование единого формализованного подхода, основанного на аппарате алгебры матриц и позволяющего дать описание схем любой сложности и конфигурации. Матричная форма представления обеспечивает компактность и наглядность представления большого количества исходной и результирующей информации при проведении расчета режимов сложных схем.

При формировании математических моделей возникают две основные проблемы:

- математическое описание топологии схемы;
- математическое представление большого объема информации о режимных параметрах: токи в ветвях, напряжения в узлах, потоки мощности и т. д. (количество узлов и ветвей в ЭЭС составляет сотни, тысячи).

Наиболее компактная и наглядная форма представления большого объема информации – матричная форма записи. Поэтому для решения указанных проблем моделирования универсальным подходом является использование двух видов матриц:

- матрицы описания топологии – матрицы инцидентий;
- матрицы режимных параметров.

3.2.2. ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

Матрицы инцидентий представляют собой компактную форму описания топологических связей схемы электрических сетей, удобную для реализации на компьютере [3, 8, 9].

Существует два вида матриц инцидентий:

- матрица инцидентий 1-го рода M описывает связь ветвей и узлов схемы:

<i>Структура</i>	<i>Правила формирования</i>
$M = \begin{matrix} & \text{Ветви} \\ \begin{matrix} \text{У} \\ \text{Л} \\ \text{В} \end{matrix} & \begin{matrix} j \\ i \\ m_{ij} \end{matrix} \end{matrix} \left[\begin{matrix} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{matrix} \right]$	$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ветвь выходит из узла} \\ -1, & \text{если ветвь входит в узел} \\ 0, & \text{если ветвь не связана с узлом} \end{cases} \quad \begin{matrix} i \xrightarrow{j} \\ i \xleftarrow{j} \end{matrix} \quad (3.4)$

- матрица инциденций 2-го рода N описывает связь ветвей и независимых контуров.

Структура	Правила формирования
$N = \begin{matrix} \text{к} \\ \text{о} \\ \text{н} \\ \text{т} \\ \text{у} \\ \text{р} \\ \text{ы} \end{matrix} \begin{matrix} & \text{В е т в и} \\ & j \\ i & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ n_{ij} \\ \\ \text{---} \end{array} \right] \end{matrix}$	$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если направления ветви и контура совпадают} \\ -1, & \text{если направления ветви и контура не совпадают} \\ 0, & \text{если ветвь не связана с контуром} \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{j} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \xleftarrow{j} \\ \xrightarrow{i} \end{matrix} \quad (3.5)$

(n – число узлов, m – число ветвей, L – число независимых контуров)

Матрицы режимных параметров задают основные параметры режима функционирования ЭЭС: сопротивления, проводимости элементов электрической сети, токи в линиях электропередачи, узловые напряжения, потоки активной и реактивной мощности и т. д. При этом структура матриц и их размерность определяется матричной формой записи основных законов электротехники.

1. Матрицы, размерность которых определяется количеством узлов в схеме (n):

– матрица задающих токов

$$J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_n \end{bmatrix}; \quad (3.6)$$

– матрица узловых напряжений

$$U_{\Delta} = \begin{bmatrix} U_{\Delta 1} \\ U_{\Delta 2} \\ \dots \\ U_{\Delta n} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

2. Матрицы, размерность которых определяется количеством ветвей схемы (m):

– матрица сопротивлений ветвей Z_B , обратная матрице проводимостей ветвей Y_B ,

$$Z_B = \left[\begin{pmatrix} Z_{B1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & Z_{Bm} \end{pmatrix} \right] = Y_B^{-1}; \quad (3.8)$$

Матрица токов ветвей

Матрица ЭДС ветвей

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ \cdots \\ I_{Bm} \end{bmatrix}, \quad E_B = \begin{bmatrix} E_{B1} \\ E_{B2} \\ \cdots \\ E_{Bm} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Математические модели макроуровня, применяемые в задаче расчета установившихся режимов, основаны на законах Ома и Кирхгофа, представленных в матричной форме записи. Эти модели получили название «уравнения состояния», поскольку режим определяет состояние системы в некоторый момент времени.

Ниже рассмотрим две формы линейных уравнений состояния, которые позволяют произвести расчет установившегося режима при упрощенном представлении нагрузки и генерации мощности с помощью линейных источников тока (задающего тока).

К основным законам электротехники, лежащим в основе моделирования установившихся режимов, на макроуровне относятся следующие.

1. Закон Ома, устанавливающий связь силы электрического тока с сопротивлением и напряжением. *Формулировка:* сила тока в проводнике прямо пропорциональна напряжению на его концах (разности потенциалов) и обратно пропорциональна сопротивлению этого проводника.

В матричной форме записи можно записать закон Ома для всех ветвей сложной электрической сети большой размерности одновременно и компактно.

Пример. Записать закон Ома для трехузловой схемы (рис. 3.9).

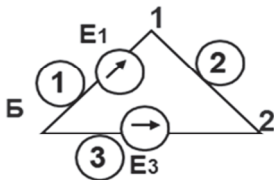


Рис. 3.9. Трехузловая расчетная схема

$$U_B = Z_B I_B - E_B. \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} U_{B1} \\ U_{B2} \\ U_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{B1} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{B3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{B1} \\ 0 \\ E_{B3} \end{bmatrix}.$$

2. Первый закон Кирхгофа, задающий баланс токов в узлах схемы.

Формулировка: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю. Матричная форма записи позволяет записать первый закон Кирхгофа для всех узлов сложной электрической сети большой размерности одновременно и компактно:

$$M I_B = J, \quad (3.11)$$

где M – матрица инциденций первого рода (3.4); I_B – токи в ветвях схемы (3.10).

Пример. Записать для расчетной схемы (рис. 3.10) первый закон Кирхгофа в матричной форме.

Представим первый закон Кирхгофа в матричной форме, а затем, используя алгоритм умножения матриц, перейдем к системе уравнений.

В матричной форме:

$$\boxed{M} \cdot \boxed{I_B} = \boxed{J}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \\ I_{B4} \\ I_{B5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}.$$

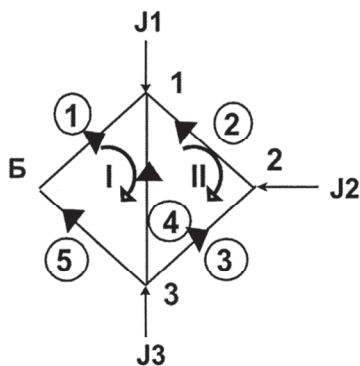


Рис. 3.10. Четырехузловая расчетная схема

В виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -I_{B1} - I_{B2} - I_{B4} = J_1, \\ I_{B2} - I_{B3} = J_2, \\ I_{B3} + I_{B4} + I_{B5} = J_3. \end{cases}$$

Как видно из полученных результатов, число уравнений меньше, чем количество неизвестных токов.

3. Второй закон Кирхгофа определяет зависимость между падениями напряжений и ЭДС в замкнутых контурах. *Формулировка:* а) алгебраическая сумма (с учетом знака) падений напряжений на всех ветвях любого замкнутого контура цепи равна алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура; б) при отсутствии в контуре ЭДС сумма падений напряжений равна нулю.

Перейдем от вербальных моделей, описывающих связи параметров, к математическим моделям.

Формулировке б соответствует математическая запись вида

$$NU_B = 0. \quad (3.12)$$

Получим вид модели, определяемый формулировкой а.

Для этого преобразуем запись второго закона Кирхгофа, используя матричную форму закона Ома (3.10):

$$N(Z_B I_B - E_B) = 0; \quad (3.13)$$

перемножим и перенесем с обратным знаком:

$$NZ_B I_B = NE_B; \quad (3.14)$$

введем понятие контурной ЭДС

$$E_K = \begin{bmatrix} E_{K1} \\ E_{K2} \\ \dots \\ E_{KL} \end{bmatrix},$$

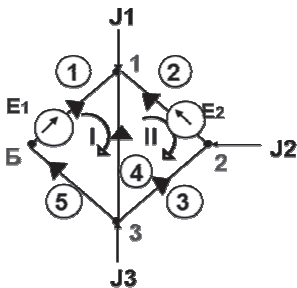


Рис. 3.11. Расчетная схема

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} Z_{B1} & 0 & 0 & -Z_{B4} & Z_{B5} \\ 0 & -Z_{B2} & -Z_{B3} & Z_{B4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \\ I_{B4} \\ I_{B5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{B1} \\ -E_{B2} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

В виде системы уравнений:

$$\begin{cases} Z_{B1}I_{B1} - Z_{B4}I_{B4} + Z_{B5}I_{B5} = E_{B1}, \\ -Z_{B2}I_{B2} - Z_{B3}I_{B3} + Z_{B4}I_{B4} = -E_{B2}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Как видно из полученных результатов, число уравнений меньше, чем количество неизвестных токов.

За счет объединения матричных моделей первого и второго законов Кирхгофа ((3.11) и (3.16)) может быть сформирована классическая форма линейной математической модели расчета установившегося режима, получившая название «обобщенное уравнение состояния»:

$$AI_B = F, \quad (3.19)$$

где $A = \begin{bmatrix} M \\ \bar{N} \bar{Z}_B \end{bmatrix}$ – блочная матрица коэффициентов;

$F = \begin{bmatrix} J \\ \bar{E}_K \end{bmatrix}$ – блочная матрица свободных членов уравнений.

где L – количество независимых контуров в схеме;

$$NE_B = E_K. \quad (3.15)$$

Отсюда запись второго закона Кирхгофа:

$$NZ_B I_B = E_K. \quad (3.16)$$

Пример. Записать для расчетной схемы (рис. 3.11) второй закон Кирхгофа в матричной форме.

Для приведенных выше примеров обобщенное уравнение состояния имеет вид

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline Z_{B1} & 0 & 0 & -Z_{B4} & Z_{B5} \\ 0 & -Z_{B2} & -Z_{B3} & Z_{B4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \\ I_{B4} \\ I_{B5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \hline E_{B1} \\ -E_{B2} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Алгоритм расчета установившегося режима по обобщенному уравнению состояния включает следующие этапы:

- расчет токов в ветвях схемы по уравнению (3.19), при этом размерность системы уравнений равна m – количеству ветвей;
- расчет падений напряжений в ветвях схемы по уравнению закона Ома (3.10);
- расчет узловых напряжений по уравнению

$$U_B = M^T U_\Delta; \quad (3.21)$$

- расчет потоков активной и реактивной мощности.

Представленная линейная математическая модель, основанная на обобщенном уравнении состояния, – универсальна, но не экономична в связи с большой размерностью системы уравнений (3.19), равной количеству ветвей схемы.

Как известно, количество узлов схемы обычно в полтора раза меньше, чем количество ветвей, поэтому на первом этапе расчета более эффективно определение узловых напряжений. Эта идея лежит в основе формирования второго вида математической модели расчета установившегося режима, получившей название «уравнение узловых напряжений» [4, 8].

Уравнение узловых напряжений представляет собой наиболее эффективную математическую модель, поэтому является основой алгоритма всех промышленных программ расчета установившихся режимов ЭЭС.

Эта форма модели может быть получена из первого закона Кирхгофа (3.11) и уравнения закона Ома (3.10).

Выразим ток ветвей из уравнения (3.10) и подставим в уравнение (3.11):

$$I_B = Z_B^{-1}(U_B + E_B) = Y_B(U_B + E_B); \quad (3.22)$$

$$MY_B(U_B + E_B) = J. \quad (3.23)$$

Раскроем скобки в уравнении (3.23) и применим уравнение связи параметров (3.21). В результате получим

$$MY_B M^T U_\Delta = J - MY_B E_B. \quad (3.24)$$

Произведение трех матриц позволяет получить матрицу узловых проводимостей

$$MY_B M^T = Y_y. \quad (3.25)$$

Таким образом, уравнение узловых напряжений имеет вид

$$Y_y U_\Delta = J - MY_B E_B, \quad (3.26)$$

где $U_\Delta = [U_i - U_B]$ – вектор узловых напряжений, рассчитанный относительно базисного напряжения балансирующего узла U_B .

Форма уравнения узловых напряжений может быть упрощена, если в схеме замещения нагрузку и генерацию мощности моделировать с помощью задающих токов. Тогда вектор $E_B = 0$ и уравнение узловых напряжений имеет вид

$$Y_y U_\Delta = J. \quad (3.27)$$

Матрица узловых проводимостей Y_y – квадратная матрица размерностью $n \times n$ (в силу способа ее получения), неособенная, симметричная относительно главной диагонали. Каждый элемент матрицы имеет физический смысл:

- на главной диагонали расположены собственные проводимости узлов Y_{ii} , $i = 1 \dots n$, которые равны сумме проводимостей ветвей, связанных с узлом i ;

- симметрично относительно главной диагонали расположены взаимные проводимости узлов Y_{ij} , которые равны проводимости ветви, расположенной между узлами $i-j$ со знаком минус.

$$Y_y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Матрица узловых проводимостей используется для анализа различных режимов функционирования ЭЭС.

Необходимо отметить, что для реальных схем электрических сетей матрица узловых проводимостей слабозаполненная [5]. Из n^2 ее элементов только примерно $4n$ элементов являются ненулевыми (принимая, что число ветвей схемы $m \geq 1,5n$). В большинстве промышленных программ при разработке алгоритмов расчета установившегося режима ЭЭС используются методы компактного хранения этой симметрической слабо заполненной матрицы. При этом исключаются действия с нулевыми элементами, что позволяет снизить требуемый объем памяти и повышает быстродействие компьютерных программ. Это остается актуальным и в настоящее время, несмотря на большие ресурсы и быстродействие современных компьютеров.

Если базисное напряжение $U_B \neq 0$, уравнение узловых напряжений можно представить в следующей форме:

$$Y_y U + Y_B U_B = J, \quad (3.29)$$

где Y_B – матрица проводимостей ветвей, связывающих независимые узлы с балансирующим узлом Б.

Алгоритм расчета установившегося режима по уравнению узловых напряжений включает в себя следующие этапы [9, 10].

1. Расчет напряжений в узлах электрической сети, который можно реализовать двумя способами:

а) рассчитать узловые напряжения, используя уравнение узловых напряжений $U_\Delta = Y_y^{-1} J$, затем найти уровни напряжений в узлах схемы:

$$U = U_\Delta + U_B;$$

б) второй вариант расчета сводится к определению уровней напряжений в узлах по уравнению

$$U = Y_y^{-1}(J - Y_B U_B).$$

2. Расчет падений напряжений в ветвях схемы:

$$U_B = M^T U_\Delta = M^T (U - U_B).$$

3. Расчет токов ветвей схемы по закону Ома:

$$I_B = Y_B (U_B + E_B).$$

4. Расчет потоков активной и реактивной мощности.

3.2.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

Использование линейных моделей расчета установившегося режима (уравнений состояния) является идеализацией процесса, основанной на упрощенной модели представления нагрузки и генерации мощности в схемах замещения с помощью задающих токов – линейных источников тока [8, 9].

В реальных схемах замещения модель нагрузки и генерации мощности – нелинейный источник тока

$$J_k(U) = \frac{S_k^*(U)}{\sqrt{3} \cdot U_k^*}, \quad (3.30)$$

где $S_k^*(U)$ – мощность трех фаз узла k ; U_k^* – сопряженный комплекс междуфазного напряжения узла k ; $J_k(U)$ – нелинейный источник тока.

Учет нелинейности связей параметров режима производится на этапе задания исходных данных, когда нагрузка и генерация мощности задаются следующим образом:

- генерация мощности $P_G = \text{const}$, $Q_G = \text{const}$;
- нагрузка как $S_H = \text{const}$ либо с помощью статических характеристик нагрузки

$$P_H(U), \quad Q_H(U).$$

В результате имеем зависимость

$$J_k(U) = \frac{P_k(U) - jQ_k(U)}{\sqrt{3} \cdot U_k^*}, \quad (3.31)$$

и соответственно уравнения состояния становятся нелинейными.

Существует две формы представления нелинейных уравнений узловых напряжений:

- уравнения узловых напряжений в форме баланса токов

$$Y_y U_\Delta = \sqrt{3} \cdot J(U) = \frac{S^*}{U^*} \quad (3.32)$$

или

$$Y_y U = \sqrt{3} \cdot J(U) - Y_B U_B.$$

В качестве примера приведем запись уравнения узловых напряжений в форме баланса токов для трехузловой схемы:

$$\begin{cases} Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 + Y_{13} U_3 = \frac{S_1^*}{U_1^*} - Y_{1B} U_B, \\ Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 + Y_{23} U_3 = \frac{S_2^*}{U_{21}^*} - Y_{2B} U_B, \\ Y_{31} U_1 + Y_{32} U_2 + Y_{33} U_3 = \frac{S_3^*}{U_{31}^*} - Y_{3B} U_B. \end{cases} \quad (3.33)$$

где $Y_{iB} = -Y_{i1} - Y_{i2} - Y_{i3}$, $i = 1 \dots 3$;

- уравнения узловых напряжений в форме баланса мощности

$$U_{\text{diag}} (Y_y U + Y_B U_B) = S^*. \quad (3.34)$$

В качестве примера приведем запись уравнения узловых напряжений в форме баланса мощности для трехузловой схемы:

$$\begin{cases} U_1 (Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 + Y_{13} U_3 + Y_{1B} U_B) = S_1^*, \\ U_2 (Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 + Y_{23} U_3 + Y_{2B} U_B) = S_2^*, \\ U_3 (Y_{31} U_1 + Y_{32} U_2 + Y_{33} U_3 + Y_{3B} U_B) = S_3^*. \end{cases} \quad (3.35)$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & U_n^* \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{1Б} \\ Y_{2Б} \\ \dots \\ Y_{nБ} \end{bmatrix} U_{Б} \right) = \begin{bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ \dots \\ S_n^* \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим особенности расчета режима для сети переменного тока.

В этом случае уравнение узловых напряжений для сети переменного тока имеет вид

$$Y_y U_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot J. \quad (3.36)$$

Практический опыт моделирования расчетов установившегося режима непосредственно с комплексными переменными подтверждает трудоемкость и погрешность результатов.

Поэтому при реализации расчета режима для сети переменного тока производится замена n уравнений узловых напряжений с комплексными коэффициентами на $2n$ уравнения с действительными коэффициентами.

Матрицы с комплексными элементами уравнения узловых напряжений (3.36) в декартовой системе координат могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_y &= G_y + jB_y, \\ U_{\Delta} &= U'_{\Delta} + jU''_{\Delta}, \\ J &= J' + jJ''. \end{aligned} \quad (3.37)$$

После подстановки в (3.36) и преобразований получим матричные уравнения отдельно для действительных и мнимых составляющих:

$$\begin{aligned} G_Y U'_{\Delta} + B_Y U''_{\Delta} &= \sqrt{3} \cdot J', \\ -B_Y U'_{\Delta} + G_Y U''_{\Delta} &= \sqrt{3} \cdot J''. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В матричной форме (размерность, коэффициенты $2n$ действительные):

$$\begin{bmatrix} G_Y & B_Y \\ -B_Y & G_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_\Delta \\ U''_\Delta \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} J' \\ J'' \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

3.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

3.3.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Выбор метода и алгоритма реализации расчета установившегося режима определяется исследователем с учетом выбранной формы математической модели. Первый этап анализа приведен на рис. 3.12.

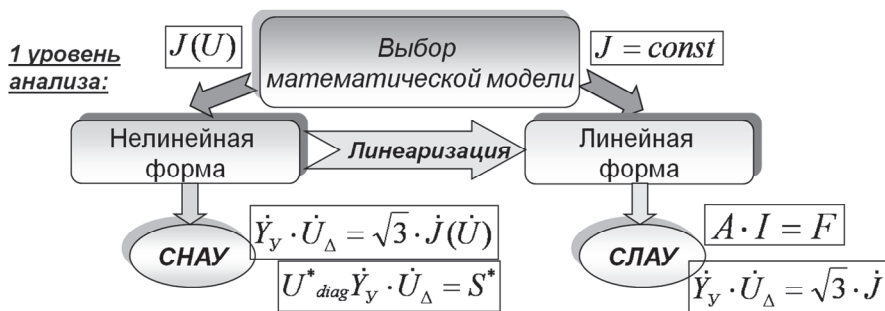


Рис. 3.12. Выбор вида математической модели

На втором этапе выбирается соответствующий модели математический метод (рис. 3.13).

Цель расчета установившегося режима электрической системы – определение мощностей и токов в ветвях расчетной схемы и значений напряжений в ее узловых точках. Для выполнения расчета установившегося режима необходима информация о схеме и параметрах сети электрической системы, о потребителях (нагрузках) и источниках электроэнергии (электростанциях).

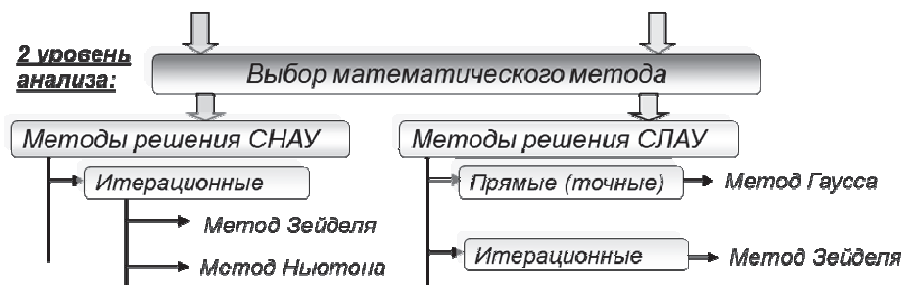


Рис. 3.13. Выбор математического метода

В общем случае с математической точки зрения задача сводится к решению системы нелинейных уравнений из-за нелинейной зависимости мощности от тока и напряжения. Конкретный вид этих уравнений определяется формами уравнений состояния, положенных в основу математического описания установившегося режима.

Из уравнений состояния наиболее широко применяются уравнения узловых напряжений, характеризующиеся как простотой формирования, так и большими возможностями эффективной организации процесса их решения и составляющие основу для реализации промышленных программ расчета установившихся режимов ЭЭС.

Система нелинейных уравнений при заданных мощностях узлов в общем случае может быть решена только итерационным методом (например, методом Ньютона). При этом на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений, получаемую в ходе линеаризации (см. рис. 3.12) в виде идентичных по структуре линеаризованных уравнений.

В связи с этим вычислительная эффективность расчета установившегося режима ЭЭС во многом определяется эффективностью решения системы линейных алгебраических уравнений.

Методы решения систем уравнений состояния можно разделить на две большие группы: прямые и итерационные [4, 8, 9].

К прямым относятся методы, которые позволяют получить решение в результате конечного числа арифметических операций, зависящего только от вычислительной схемы, а также от порядка и структуры матрицы коэффициентов системы уравнений.

В математике методы этой группы называются также точными, поскольку при точном задании исходных данных (в виде целых чисел или обыкновенных дробей) и точном вычислении (например, по правилам действия над обыкновенными дробями) решение также получается точным.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений позволяют получить значения искомых неизвестных в результате многократного выполнения единообразных шагов вычислений, называемых последовательными приближениями или итерациями. Эти методы называются приближенными, поскольку даже при вычислении без округлений решение системы уравнений возможно только с заданной степенью точности, причем с увеличением требуемой точности растет и количество итераций.

В основе практически всех прямых методов решения линейных алгебраических уравнений установившегося режима ЭЭС лежит алгоритм последовательного исключения неизвестных, называемый методом Гаусса (см. рис. 3.13). Алгоритм метода Гаусса, подробно представленный в работах [4, 7], дает абсолютно точный результат. Возможными причинами погрешности, возникающими при программной реализации этого метода, являются:

- погрешность в задании исходных данных;
- погрешность, возникающая за счет округления;
- близость режима к аварийному, в результате чего резко возрастает погрешность от применения линейных или линеаризованных уравнений состояния (признак близости режима к аварийному – близкое к нулевому значение определителя матрицы узловых проводимостей).

К числу наиболее характерных вычислительных схем этого метода, широко используемых в программных комплексах расчета режимов, относятся [8, 9]:

- алгоритм с обратным ходом;
- алгоритм без обратного хода;
- алгоритм расчета через обращение матриц (матрицу узловых сопротивлений).

Реализации алгоритма метода Гаусса во многом определяет эффективность расчета установившегося режима энергосистем как на основе

линейных уравнений состояния, так и при применении нелинейных моделей с учетом линеаризации уравнений.

В практике расчетов установившихся режимов ЭЭС наибольшее применение получили два итерационных метода решения систем линейных алгебраических уравнений – метод простой итерации и метод Зейделя. Эти методы допускают простое обобщение на решение нелинейных уравнений установившегося режима, связывающих мощности и напряжения в узлах электрической системы. При этом многие свойства итерационного процесса, характерные для решения нелинейных уравнений установившегося режима электрической системы, можно объяснить, рассмотрев более простой случай – решение линейных уравнений состояния.

На первом этапе производится преобразование системы уравнений к виду, удобному для реализации итерационного процесса. Например, для линейной модели уравнения узловых напряжений, записанной для трехузловой схемы, преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} U_{\Delta 1} = \frac{1}{Y_{11}}(J_1 - Y_{12}U_{\Delta 2} - Y_{13}U_{\Delta 3}), \\ U_{\Delta 2} = \frac{1}{Y_{22}}(J_2 - Y_{21}U_{\Delta 1} - Y_{23}U_{\Delta 3}), \\ U_{\Delta 3} = \frac{1}{Y_{33}}(J_3 - Y_{31}U_{\Delta 1} - Y_{32}U_{\Delta 2}). \end{cases} \quad (3.40)$$

На основе преобразованной системы уравнений (3.40) можно реализовать итерационный процесс, состоящий из набора итераций, каждая из которых включает:

- подстановку и расчет текущего приближения $U_{\Delta k}^{(i)}$;
- расчет суммарной невязки $r_{\Sigma}^{(i)}$;
- анализ сходимости итерационного процесса $r_{\Sigma}^{(i)} \leq r_{\Sigma}^{(i-1)}$;
- анализ критерия окончания итерационного процесса $r_{\Sigma}^{(i)} \leq \varepsilon$.

Отличие всех итерационных методов заключается в способе подстановки. В качестве примера приведем подстановку для расчета текущего приближения для метода Зейделя:

$$\begin{cases} U_{\Delta 1}^{(i)} = \frac{1}{Y_{11}}(J_1 - Y_{12}U_{\Delta 2}^{(i-1)} - Y_{13}U_{\Delta 3}^{(i-1)}), \\ U_{\Delta 2}^{(i)} = \frac{1}{Y_{22}}(J_2 - Y_{21}U_{\Delta 1}^{(i)} - Y_{23}U_{\Delta 3}^{(i-1)}), \\ U_{\Delta 3}^{(i)} = \frac{1}{Y_{33}}(J_3 - Y_{31}U_{\Delta 1}^{(i)} - Y_{32}U_{\Delta 2}^{(i)}). \end{cases}$$

Такой способ подстановки позволяет ускорить сходимость итерационного процесса по сравнению с методом простой итерации.

По условию сходимости итерационные процессы делятся на сходящиеся, когда суммарная невязка уменьшается от итерации к итерации:

$$r_{\Sigma}^{(i)} \leq r_{\Sigma}^{(i-1)},$$

и расходящиеся, когда суммарная невязка увеличивается:

$$r_{\Sigma}^{(i)} \geq r_{\Sigma}^{(i-1)}.$$

Основные преимущества метода Зейделя:

- универсальность – применимость как для линейных, так и для нелинейных моделей;
- быстрая сходимость, особенно для линейных моделей (в 1,5 раза быстрее по сравнению с методом простой итерации);
- самоисправляемость – ошибка в вычислениях воспринимается как новое начальное приближение;
- меньшее влияние на результат ошибок округления по сравнению с методом Гаусса.

Существенный недостаток метода Зейделя – его медленная сходимость или даже расходимость при расчете электрических систем с устройствами продольной компенсации, с трехобмоточными трансформаторами, когда сопротивление обмотки среднего напряжения очень мало, а также при расчетах предельных и неустойчивых режимов [4].

Наиболее эффективным для реализации в программах расчета установившегося режима является метод Ньютона, так как при сравнительно несложной схеме вычисления он обладает быстрой сходимостью. Метод Ньютона (метод касательных) пригоден для решения обширного класса нелинейных уравнений.

3.3.2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Основная идея алгоритма метода Ньютона состоит в том, что на каждой итерации производится линеаризация – замена нелинейной системы уравнений на линейную, решение которой дает близкие значения корней [4].

Рассмотрим решение по методу Ньютона системы нелинейных алгебраических уравнений с действительными переменными:

$$\begin{cases} w_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ w_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ w_3(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Будем использовать вектор-столбец X и вектор-функцию $W(X)$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad W(X) = \begin{bmatrix} w_1(x_1, x_2, x_3) \\ w_2(x_1, x_2, x_3) \\ w_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Тогда систему уравнений можно представить в матричном виде:

$$W(X) = 0. \quad (3.43)$$

Далее каждое из нелинейных уравнений системы заменяется на линейное, полученное разложением в ряд Тейлора (берутся первые члены ряда). Это процесс линеаризации уравнений. Например, первое уравнение в системе (3.41) после линеаризации будет иметь следующий вид (для двух остальных уравнений преобразования аналогичны):

$$\begin{aligned}
& w_1 \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \right) \left(x_1 - x_1^{(0)} \right) + \\
& + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \right) \left(x_2 - x_2^{(0)} \right) + \\
& + \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \right) \left(x_3 - x_3^{(0)} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Из системы уравнений можно выделить матрицу производных, получившую название «матрица Якоби»:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

Тогда систему линеаризованных уравнений в матричном виде можно представить следующим образом (для первой итерации):

$$W(X^{(0)}) + \frac{\partial W}{\partial X}(X^{(0)})(X^{(1)} - X^{(0)}) = 0. \tag{3.46}$$

Эта система линейна относительно поправок

$$\Delta X^{(1)} = X^{(1)} - X^{(0)}. \tag{3.47}$$

Полученную линейную систему уравнений (3.46) можно решить с помощью метода Гаусса и определить поправки (3.47).

Отсюда каждый шаг итерационного процесса состоит:

1) из решения линейной системы вида

$$\frac{\partial W}{\partial X}(X^{(i)})\Delta X^{(i+1)} = -W(X^{(i)}); \tag{3.48}$$

2) из определения следующего приближения неизвестных:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \Delta X^{(i+1)}. \quad (3.49)$$

Контроль сходимости и окончания итерационного процесса осуществляется по вектору невязок

$$\left| r_{\Sigma}(X^{(i+1)}) \right| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим особенности реализации метода Ньютона на примере нелинейных уравнений узловых напряжений в форме баланса мощности, которые чаще всего используются в промышленных программах расчета установившегося режима.

В качестве неизвестных в уравнении узловых напряжений в форме баланса мощности для сети переменного тока могут использоваться:

- модули U и фазы δ напряжений в узлах – полярная система координат;
- вещественные U' и мнимые U'' составляющие напряжения – декартова система координат.

В компьютерных программах при расчетах установившегося режима обычно используют модули и фазы напряжений узлов. Уравнения баланса мощностей для k -го узла при переменных U, δ имеют вид

$$\begin{aligned} w_{P_k} &= P_k - g_{kk} U_k^2 - U_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} U_j (\cos \delta_{kj} - b_{kj} \sin \delta_{kj}), \\ w_{Q_k} &= Q_k - b_{kk} U_k^2 - U_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} U_j (b_{kj} \cos \delta_{kj} + g_{kj} \sin \delta_{kj}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

где $\delta_{kj} = \delta_k - \delta_j$ при $k, j = 1 \dots n$.

Функции w_{P_k}, w_{Q_k} соответствуют небалансу по активной и реактивной мощности в k -м узле.

В этом случае элементы матрицы Якоби – это частные производные небалансов активной и реактивной мощностей по модулям и

фазам напряжений узлов (блочная матрица – квадратная размерностью $2n \times 2n$):

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_P}{\partial U} & \frac{\partial W_P}{\partial \delta} \\ \frac{\partial W_Q}{\partial U} & \frac{\partial W_Q}{\partial \delta} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Определитель матрицы Якоби (3.51) называется якобиан уравнений установившегося режима в форме баланса мощности (3.50).

Значение якобиана соответствует свободному члену характеристического уравнения переходных процессов в электрической системе и может использоваться в задаче анализа статической устойчивости установившегося режима по методу Ньютона.

Важнейшие преимущества метода Ньютона:

- быстрая квадратичная сходимость метода в расчетах установившихся режимов на компьютере, которая значительно быстрее и надежнее метода Зейделя;
- возможность успешного применения метода Ньютона не только для расчетов установившихся режимов, но и в более сложных алгоритмах (например, при комплексной оптимизации режимов).

3.3.3. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОГРАММНЫЕ КОМПЛЕКСЫ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ

Расчет установившегося режима – базовая задача электрических расчетов, которая обязательно должна предшествовать любой другой из всего спектра традиционно решаемых электрических задач [10].

Программное обеспечение расчетов электрических режимов, в частности, используемое в СО-ЦДУ ЕЭС, применяется:

- для определения областей допустимых электрических режимов во всех возможных регламентируемых схемно-режимных ситуациях, разрабатываемых с учетом требований государственных стандартов, руководящих указаний по устойчивости и прочих нормативно-технологических документов;
- для выбора типов, структуры и уставок устройств противоаварийной автоматики;

- для подготовки на основе проделанных расчетов режимных инструкций, в том числе и для диспетчера ЦДУ ЕЭС.

Выполнение указанных работ в полном объеме предусматривает наличие программных средств для расчетов установившихся режимов электрических систем и для расчетов переходных электромеханических процессов, возникающих в них после заданных возмущений.

В настоящий момент в России имеется несколько программных комплексов, имеющих перечисленные выше модификации, которые способны решать задачи управления режимами в электроэнергетических сетях:

- RastrWin – Региональное общественное объединение «Фонд кафедры АЭС им. Д.А. Арзамасцева» (г. Екатеринбург);
- Mustang (Латвия);
- DAKAR – ELEKS Software (Украина);
- АНАРЭС-2000 – ООО «ИДУЭС» (г. Новосибирск);
- PSS/E – компания Siemens (Германия);
- EUROSTAG – компания Tractebel Engineering (Бельгия);
- «Космос» – ЗАО «Институт энергетических систем» (г. Москва).

Все указанные выше программные комплексы имеют индивидуальные особенности, однако обладают и рядом общих черт. В частности, исходные данные во всех комплексах программ представляются в текстовой форме ЦДУ, разработанной уже почти 30 лет назад. Для программ России и стран СНГ характерна возможность обмена данными между программами. Также можно отметить, что во всех программах используются специальные базы данных, а графический редактор разрабатывается под каждую программу отдельно [10].

Программно-вычислительный комплекс «КОСМОС» позволяет выполнять расчет установившегося режима, оптимизацию его по реактивной мощности и коэффициентам трансформации с целью снижения потерь, решать задачи краткосрочного планирования. Кроме этого, подразумевается работа с графическими изображениями схемы энергосистемы. Программа достаточно хорошо выполняет сочетание преимуществ анализа результатов расчета, представленных в виде таблиц, и анализа их непосредственно по схеме.

К положительным сторонам программы можно отнести хорошее оценивание состояния энергосистемы, а также широкие воз-

возможности переноса данных в другие комплексы через механизм форматов ЦДУ.

К недостаткам можно отнести использование устаревших технологий пользовательского интерфейса, а также ограниченный по возможностям графический редактор схем [Там же].

Программно-вычислительный комплекс АНАРЭС-2000 способен выполнять оперативные расчеты, анализ и планирование режимов работы электроэнергетических систем (ЭЭС). Основные пользователи комплекса – ЦДУ, промышленные предприятия и проектные организации. Комплекс АНАРЭС-2000 имеет достаточно большое количество функций, позволяющих использовать его как в производстве, так и в исследовательских целях, а также для обучения персонала [Там же]. В нем используется эргономичный пользовательский интерфейс, позволяющий гибко настраивать отображение данных в таблицах под требования пользователя. Также имеется возможность представления данных в виде схем с нанесением на них исходных данных, результатов расчета, с выполнением различных коммутаций. Имеется возможность изменения данных не только при взаимодействии с таблицами, но и непосредственно на схеме.

В комплекс АНАРЭС включена оптимизации режима сети по критерию минимума потерь активной мощности. В ходе решения данной задачи подразумевается контроль над реактивными мощностями и напряжениями генерирующих узлов, коэффициентами трансформации с возможностью изменения отпаяк трансформаторов. В программе предусмотрено решение задачи поддержания требуемого уровня напряжения.

Однако в настоящее время доминирующее положение на рынке отечественных программных продуктов занимает следующее программное обеспечение:

- **RastrWin** – для расчета установившихся режимов;
- **MUSTANG** – для расчета переходных электромеханических процессов.

Программа RastrWin разработана коллективом авторов Уральского политехнического института (г. Екатеринбург, Россия) и предназначена для расчета и анализа установившихся режимов электроэнергетиче-

ских систем. Предельный объем схемы полной версии программы – 32 000 узлов. Студенческая версия RastrWin, применяемая для выполнения лабораторных работ, имеет ограничения по числу узлов, максимальное количество которых не может превышать 60.

RastrWin используется более чем в 150 организациях на территории России, Казахстана, Киргизии, Беларуси, Молдовы, Монголии, Сербии. В России основными пользователями являются Системный оператор Единой энергетической системы (СО ЕЭС) и его филиалы, Федеральная сетевая компания (ФСК), проектные и научно-исследовательские институты и т. д.

Программа RastrWin позволяет:

- производить расчет, эквивалентирование и утяжеление режима электрических сетей любой сложности и любого напряжения (от 0,4 до 1150 кВ);
- обеспечивает возможности экранного ввода и коррекции исходных данных, быстрого отключения узлов и ветвей схемы;
- имеет возможность районирования сети и графического представления схемы или отдельных ее фрагментов вместе с любыми исходными параметрами и результатами расчетов [11].

Расчетные модули:

- расчет установившихся режимов электрических сетей произвольного размера и сложности, любого напряжения (от 0,4 до 1150 кВ). Полный расчет всех электрических параметров режима (токи, напряжения, потоки и потери активной и реактивной мощности во всех узлах и ветвях электрической сети);
- расчет установившихся режимов с учетом частоты;
- проверка исходной информации на логическую и физическую непротиворечивость;
- эквивалентирование электрических сетей;
- оптимизация электрических сетей по уровням напряжения, потерям мощности и распределению реактивной мощности;

Выбор этого программного комплекса в качестве основного расчетного инструмента был сделан исходя из следующих соображений:

- широкая распространенность DOS-версии программы Rastr, многолетний положительный опыт ее использования;

- возможность проведения расчетов электрических режимов схем большой размерности;
- удобная графическая подсистема для отображения электрической схемы и режима;
- наличие средств расширения функциональных возможностей программы за счет создаваемых пользователем макрокоманд;
- возможность автоматизации часто выполняемых однотипных операций с помощью встроенного макроязыка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены методологические основы моделирования как основного способа познания окружающего мира. Особое внимание уделено математическим моделям и их свойствам.

Выделены три основных уровня моделирования, используемые для описания технических объектов:

- микроуровень – для описания физических процессов;
- макроуровень – для описания режимов функционирования сложных технических объектов;
- метауровень – информационный (логический) уровень моделирования.

В качестве объекта моделирования выбрана электроэнергетическая система и ее элементы. В частности, представлены особенности моделирования на микроуровне с использованием принципа аналогии в качестве основы для формирования ряда математических моделей, позволяющих описать физические процессы в однородных протяженных линиях электропередач как для холостого хода, так и нагрузочного режима.

На макроуровне моделирования рассмотрены модели и методы расчета установившихся режимов электроэнергетических систем. Задача расчета установившихся режимов является базовой для проведения любых электрических расчетов в энергосистеме, и может быть использована как самостоятельная задача, так и подзадача в более сложных алгоритмах.

Представлены линейные и нелинейные матричные модели – уравнения состояния, уделено особое внимание уравнению узловых напряжений как наиболее эффективной форме моделей. Приведена

классификация математических методов и алгоритмов расчета режима, а также примеры современных программных комплексов, используемых в электроэнергетике.

В нашем следующем учебном пособии будет продолжено рассмотрение моделей макроуровня на примере задачи анализа статической устойчивости режимов энергосистем. Кроме этого, будут представлены основы метауровня (логического моделирования) и применение этих моделей для решения задач анализа и синтеза устройств релейной защиты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Штофф В.А.* Моделирование и философия: монография / В.А. Штофф. – М.: Наука, 1966. – 302 с.
2. *Фридман Л.М.* Наглядность и моделирование в обучении // Педагогика и психология (Подписная научно-популярная серия) / Л.М. Фридман. – М.: Знание, 1984. – 80 с.
3. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: учебник для вузов / под ред. В.А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1981. – 288 с.
4. *Идельчик В.И.* Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
5. Математическое моделирование электроэнергетических систем: учебное пособие / А.В. Лыкин, Н.О. Русина, Т.А. Филиппова, В.И. Зотов. – М.: Изд-во МГОУ, 1993. – 198 с.
6. Математическое моделирование в системах электроснабжения: учебное пособие / С.Г. Обухов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 84 с.
7. *Любченко В.Я., Манусов В.З.* Физико-математические основы электроэнергетики: учебное пособие; в 2 ч. Часть 1. – Новосибирск, 1994. – 58 с.
8. Математическое моделирование в задачах электроэнергетики: учеб.-метод. пособие / В.Я. Любченко, С.В. Родыгина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 68 с.
9. Математические задачи электроэнергетики: метод. указания к выполнению расчет.-граф. задания для 3 курса ФЭН дневной формы обучения / сост.: В.Я. Любченко, С.В. Родыгина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 68 с.
10. Единая расчетная модель ЕЭС России для аукциона на конкурентном оптовом рынке электроэнергии / А.А. Ган, В.П. Герих, В.Г. Неуймин и др. // Новое в российской электроэнергетике (электронный журнал). – 2002. – № 8.
11. *Неуймин В.Г.* Программный комплекс RastrWin3, 2012. – 243 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Моделирование как универсальный способ решения задач	5
1.1. Понятие модели	5
1.2. Классификация моделей	8
1.3. Математические модели и их свойства	11
1.4. Математические модели технических объектов	16
2. Математические модели микроуровня	18
2.1. Общие принципы микромоделирования	18
2.2. Принцип аналогии в микромоделировании	20
2.3. Моделирование линии электропередач на микроуровне	23
2.4. Виды математических моделей ЛЭП на микроуровне	25
3. Математические модели макроуровня	33
3.1. Общие принципы макромоделирования	33
3.2. Математические модели в задаче расчета установившегося режима	36
3.2.1. Методы формального описания структуры ЭЭС	38
3.2.2. Линейные математические модели расчета установившегося режима	43
3.2.3. Нелинейные математические модели расчета установившегося режима	52
3.3. Математические методы расчета установившегося режима	55
3.3.1. Общая характеристика методов решения уравнений состояния	55
3.3.2. Применение метода Ньютона для решения уравнений узловых напряжений	60
3.3.3. Современные программные комплексы расчета установившихся режимов	63
Заключение	68
Библиографический список	70

**Любченко Валентина Яковлевна
Родыгина Светлана Викторовна**

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ**

Учебное пособие

Редактор *М.О. Мокшанова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 18.07.2018. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 4,18. Печ. л. 4,5. Изд. 17. Заказ № 1046
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20