Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 621.3(075.8)
Э 455

Рецензенты:
д-р техн. наук, доцент *Е.И. Алгазин*,
канд. техн. наук, доцент *К.А. Куратов*

Работа выполнена на кафедре электроники и электротехники
для студентов II курса МТФ, обучающихся по направлениям:
15.03.06 «Мехатроника и робототехника»;
22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов»;
23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин»;
28.03.02 – «Наноинженерия»; 29.03.04 – «Технология художественной
обработки материалов»

Э 455 **Электротехника:** учебное пособие / В.В. Богданов, О.Б. Давыденко, Н.П. Савин, А.В. Сапсалев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 148 с.

ISBN 978-5-7782-3954-8

В пособии изложены основные методы расчета электрических цепей постоянного и гармонического тока в установившемся и переходном режимах. Приводятся примеры расчета практических задач и выполнения расчетно-графического задания по дисциплине «Электротехника». Даны краткие теоретические сведения и рекомендации по проведению экспериментальных исследований элементов электрических цепей.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Электротехника», а также всех желающих получить навыки исследования и расчета электрических цепей.

УДК 621.3(075.8)

ISBN 978-5-7782-3954-8

© Богданов В.В., Давыденко О.Б.,
Савин Н.П., Сапсалев А.В., 2019
© Новосибирский государственный
технический университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

1. Анализ линейных цепей постоянного тока 5

1.1. Краткие теоретические сведения 5
1.2. Практические задания 19
1.2.1. Свертывание резистивных цепей 19
1.2.2. Расчет цепей постоянного тока с одним источником 23
1.2.3. Расчет сложных цепей постоянного тока 29
1.2.4. Расчет цепей методом эквивалентного генератора 36
1.3. Экспериментальная часть 44

2. Анализ электрических цепей синусоидального тока 49

2.1. Краткие теоретические сведения 49
2.2. Практические задания 57
2.2.1. Классический метод расчета 57
2.2.2. Символический метод расчета цепей синусоидального тока 66
2.2.3. Анализ электрических цепей в резонансных режимах 73
2.2.4. Цепи с индуктивно связанными элементами 80
2.2.5. Особенности расчета трехфазных электрических цепей 85
2.3. Экспериментальная часть 92

3. Анализ электрических цепей при несинусоидальных воздействиях 108

3.1. Краткие теоретические сведения 108
3.2. Практическое задание 111

4. Анализ электрических цепей в переходных режимах 116

4.1. Краткие теоретические сведения 116
4.2. Практическое задание 121
4.3. Экспериментальная часть 133

5. Расчетно-графическое задание 138

Библиографический список 144

Приложения 145

Приложение 1. Основные математические операции над комплексными числами 145

Приложение 2. Образец титульного листа расчетно-графического задания 147

ВВЕДЕНИЕ

Общепрофессиональная дисциплина «Электротехника» относится к базовой части профессионального цикла для ряда направлений подготовки бакалавров.

В процессе обучения студенты должны ознакомиться с основными понятиями и терминами электротехники, подходами и методами анализа электрических цепей; получить навыки расчета электрических цепей, экспериментального определения параметров электротехнических устройств, работы с электроизмерительными приборами.

Программой изучения дисциплины предусмотрены лекции; практические занятия; лабораторные работы; выполнение и защита расчетно-графического задания. Изучение дисциплины завершается экзаменом.

На занятиях подробно рассматриваются примеры расчета электрических цепей с использованием различных методов, варианты проверки правильности решения задач, анализируются возможные режимы работы электрической цепи и ее отдельных элементов.

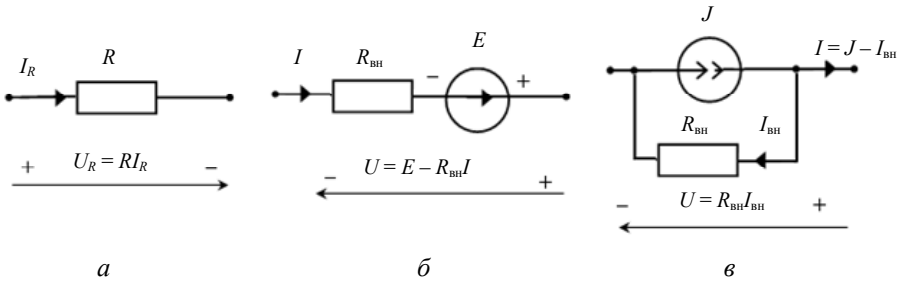
При выполнении лабораторных работ студенты получают практические навыки экспериментального исследования элементов электрических цепей, исследования цепей в различных режимах работы.

Расчетно-графическое задание охватывает вопросы расчета электрических цепей постоянного тока и электрических цепей трехфазного тока.

1. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Электрические цепи постоянного тока являются резистивными. В схемах замещения цепи (далее – просто «схемах») резистор моделируется *активным сопротивлением R*, учитывающим необратимое преобразование электромагнитной энергии в другие виды энергии (рис. 1.1, *а*), измеряется в омах. Ток и напряжение активного сопротивления связаны законом Ома. Источники энергии цепи в схемах замещения моделируются источниками напряжения (ЭДС) или тока (схемы *б* и *в* на рис. 1.1 соответственно).



а *б* *в*

Рис. 1.1

Источник напряжения, имеющий внутреннее сопротивление $R_{вн}$ равное нулю, – идеальный источник напряжения (источник ЭДС). Он создает напряжение *U*, равное ЭДС (*E*), которое не зависит от тока *I*, протекающего через него.

Источник тока, имеющий внутреннюю проводимость $G_{\text{вн}}$, равную нулю $(R_{\text{вн}} = \infty)$, – идеальный источник тока. Он создает ток I, равный току источника J, который не зависит от напряжения U на его зажимах.

Законы Кирхгофа, обобщенный закон Ома

Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в ветвях, соединенных в узел, равна нулю:

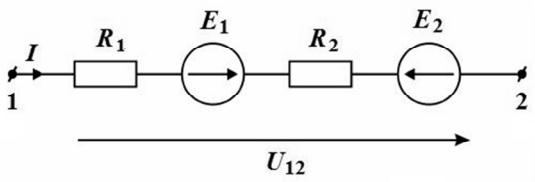
$$\sum_k I_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма напряжений на всех сопротивлениях замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС всех источников того же контура:

$$\sum_j R_j I_j = \sum_j E_j.$$

Обобщенный закон Ома (закон Ома для активного участка электрической цепи):



Из второго закона Кирхгофа (для заданного участка цепи) следует:

$$I = \frac{U_{12} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2}.$$

В общем случае

$$I = \frac{U_{12} + \sum(\pm E_i)}{\sum R_j} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum(\pm E_i)}{\sum R_j}.$$

При использовании обобщенного закона Ома положительное направление напряжения U_{12} необходимо выбрать по току I, а знак у ЭДС «+» $(+E_i)$, если ток и ЭДС совпадают по направлению, и «–» $(-E_i)$, если направлены противоположно.

Преобразования электрической цепи
(*свертывание электрических схем*)

При определении токов в ветвях схемы, питающейся от одного источника питания, задача решается методом свертывания схемы. Постепенным преобразованием схему приводят к одному эквивалентному сопротивлению $R_{\text{экв}}$, входному относительно источника питания. Схема упрощается путем замены группы последовательно или параллельно соединенных элементов одним эквивалентным сопротивлением (рис. 1.2).

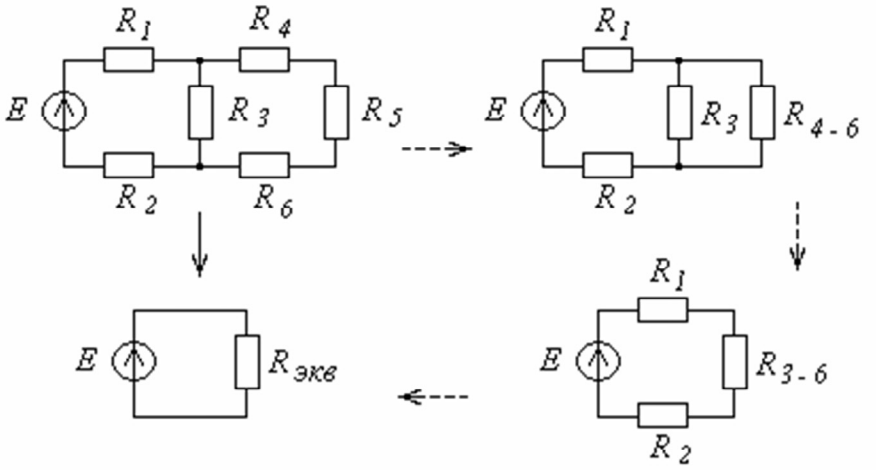


Рис. 1.2

Входной ток определяется по закону Ома: $I = U / R_{\text{экв}}$. Токи в остальных ветвях исходной схемы находят, пользуясь законами Кирхгофа и Ома.

Последовательное соединение резисторов – делитель напряжения (рис. 1.3):

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N = \sum R_i ;$$

$$U = R_{\text{экв}} I = U_1 + U_2 + \ldots + U_N .$$

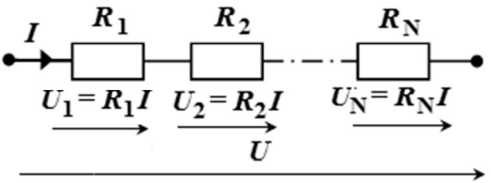


Рис. 1.3

Параллельное соединение резисторов – делитель тока (рис. 1.4):

$$R_{\text{экв}} = 1 / G_{\text{экв}},$$

где эквивалентная проводимость

$$G_{\text{экв}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N} = \sum \frac{1}{R_i}$$

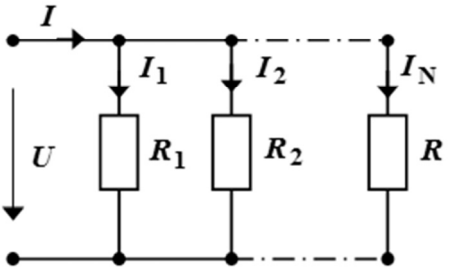


Рис. 1.4

Входной ток определяется по первому закону Кирхгофа:

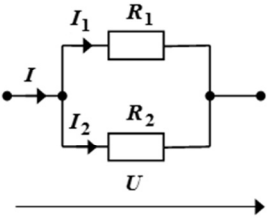
$$I = I_1 + I_2 + \ \ldots + I_N = \sum I_i .$$

Токи в параллельных ветвях находят по закону Ома: $I_i = U / R_i$.

Параллельное соединение двух резисторов:

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$U = R_{\text{экв}} I = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$



Токи в ветвях:

$$I_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \qquad I_2 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_2} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Полученные соотношения называют **правилом параллельного разброса** (рычага): ток в параллельной ветви равен произведению общего тока на сопротивление в противоположной ветви, деленное на сумму сопротивлений ветвей.

В ряде случаев при свертывании сложных электрических цепей встречаются соединения резисторов, которые нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному, – соединения «звездой» и «треугольником». В этом случае целесообразно провести взаимное преобразование «звезда – треугольник» или «треугольник – звезда» (рис. 1.5).

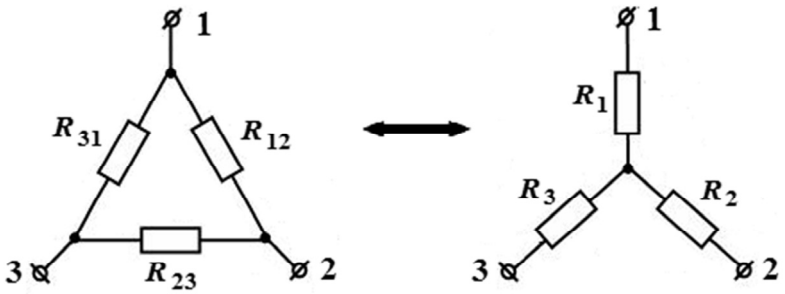


Рис. 1.5

При эквивалентной замене соединения «звезда – треугольник» («треугольник – звезда») сопротивления ветвей рассчитываются по формулам:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_3, \qquad R_1 = R_{12} R_{31} / (R_{12} + R_{23} + R_{31}),$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + R_2 R_3 / R_1, \qquad R_2 = R_{23} R_{12} / (R_{12} + R_{23} + R_{31}),$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + R_3 R_1 / R_2. \qquad R_3 = R_{31} R_{23} / (R_{12} + R_{23} + R_{31}).$$

При равенстве величин сопротивлений лучей звезды – R – эквивалентный треугольник сопротивлений будет иметь равные величины сопротивлений сторон – $3R$.

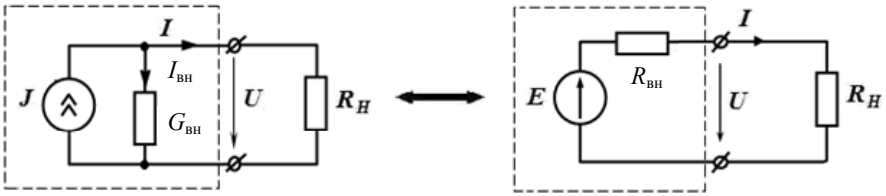


Рис. 1.6

Параметры эквивалентных схем замещения источников (рис. 1.6) связаны между собой соотношениями:

$$J = E / R_{вн}; \quad G_{вн} = 1 / R_{вн}; \quad E = J / G_{вн}; \quad R_{вн} = 1 / G_{вн}.$$

Анализ электрических цепей
с несколькими источниками питания

1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа. Расчет любой электрической цепи можно провести, используя первый и второй законы Кирхгофа.

Общее количество уравнений, которое необходимо составить, равно количеству неизвестных (количеству ветвей с неизвестными токами). Любая система уравнений будет иметь однозначное решение только в том случае, если уравнения системы будут независимыми, т. е. любое последующее уравнение системы не может быть получено как результат алгебраических операций уже записанных уравнений.

Уравнения составляются в следующем порядке. Определяют число ветвей с неизвестными токами[1] (в) и узлов (у) в электрической цепи. По первому закону Кирхгофа составляют у – 1 независимых уравнений. Остальные уравнения составляют по второму закону Кирхгофа (в – у + 1) для независимых контуров[2]. Например, схема, показанная на рис. 1.7, имеет всего семь ветвей: шесть ветвей с неизвестными токами (число ветвей схемы минус ветвь с источником тока) и четыре узла, поэтому необходимо составить три уравнения (4 – 1) по первому закону Кирхгофа и три уравнения по второму закону Кирхгофа.

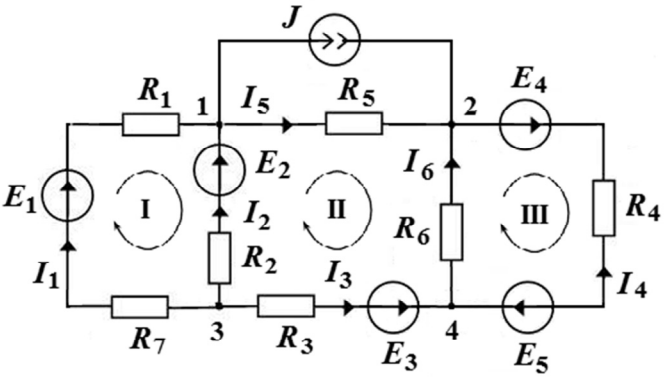


Рис. 1.7

Для записи уравнений необходимо выбрать (произвольно) положительные направления токов в ветвях и направления обхода контуров. В уравнении, составляемом по первому закону Кирхгофа, токи, направленные от узла, записываются со знаком «плюс», направленные к узлу – со знаком «минус». Для узла 1 схемы цепи (рис. 1.7) уравнение имеет вид

$$-I_1 - I_2 + I_5 + J = 0.$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа со знаком «плюс» записываются те слагаемые, в которых ток и ЭДС имеют

[1] Ток в ветви с источником тока равен току источника.

[2] Независимым называется контур, в состав которого входит хотя бы одна не вошедшая в состав других контуров ветвь.

направления, совпадающие с направлением обхода контура. Например, для контура II уравнение имеет вид

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = E_2 - E_3.$$

Решая систему уравнений, составленную по законам Кирхгофа, можно определить токи во всех ветвях схемы заданной цепи. Если в результате решения системы уравнений получаются отрицательные значения токов, то это означает, что истинные направления этих токов противоположны выбранным при составлении уравнений.

2. Метод контурных токов. Сущность метода состоит в уменьшении числа совместно решаемых уравнений (на число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, при решении задачи методом непосредственного применения законов Кирхгофа) путем замены реальных токов ветвей расчетными контурными токами. Благодаря этому число достаточных для расчета уравнений равно количеству независимых контуров схемы электрической цепи.

Алгоритм расчета:

- выбираются независимые контуры и обозначаются условно положительные направления контурных токов[3] на схеме;
- определяются собственные сопротивления контуров (R_{kk}), равные сумме сопротивлений, входящих в *k*-й контур;
- определяются взаимные сопротивления контуров (R_{kn}), равные сопротивлениям в общей ветви контуров *k* и *n*;
- определяются контурные ЭДС (E_{kk}), равные алгебраической сумме источников ЭДС, входящих в *k*-й контур;
- согласно второму закону Кирхгофа для выбранных контуров составляется система уравнений, обход контуров при составлении уравнений выбирается совпадающим с направлениями контурных токов;
- решив систему уравнений, определяем контурные токи;
- токи ветвей определяются алгебраической суммой проходящим по ним контурных токов.

Для учета источников тока в анализируемой цепи необходимо задать дополнительные контуры, включающие ветви с источниками тока. Контурный ток, включающий ветвь с источником тока, равен току источника тока, что позволяет уменьшить число уравнений в системе. Следует помнить, что источник тока должен входить только в один независимый контур.

[3] Направления выбираются произвольно. Целесообразно все контурные токи направить в одном направлении.

Для схемы на рис. 1.8 система уравнений имеет следующий вид:

$$(R_1 + R_2 + R_7)J_1 - R_2J_2 = E_1 - E_2;$$

$$-R_2J_1 + (R_2 + R_3 + R_5 + R_6)J_2 - R_6J_3 = E_2 - E_3 + R5J;$$

$$-R_6J_2 + (R_4 + R_6)J_3 = E_4 + E_5.$$

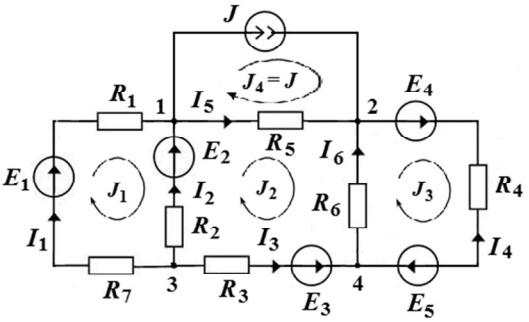


Рис. 1.8

При записи уравнений для *k*-го контура падения напряжения от *k*-го контурного тока записано со знаком плюс, так как направление обхода контура совпадает с направлением контурного тока. В общих ветвях токи смежных контуров направлены противоположно току *k*-го контура, поэтому падение напряжения от токов смежных контуров записано со знаком минус.

3. Метод межузлового напряжения. В реальных электрических цепях часто несколько источников и приемников электрической энергии включаются параллельно. Схема замещения такой цепи, содержащей активные и пассивные ветви, соединенные параллельно, имеет только два узла (узлы 1 и 2 в схеме на рис. 1.9).

Если схема содержит *k* источников тока и *m* источников ЭДС, то напряжение U_{12} между узлами

$$U_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{m} G_i E_i + \sum_{j=1}^{k} J_j}{\sum_{i=1}^{n} G_i}.$$

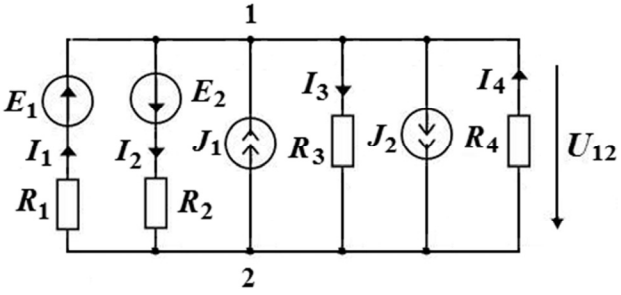


Рис. 1.9

Произведения $G_i E_i$ и J_j берутся со знаком «плюс», когда E_i и J_j направлены к узлу, потенциал которого условно принят за более положительный (к узлу с первым индексом).

Напряжение U_{12} в электрической схеме, показанной на рис. 1.9, рассчитывается по формуле

$$U_{12} = \frac{E_1/R_1 - E_2/R_2 + J_1 - J_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4}.$$

Определив величину напряжения на параллельных ветвях, можно рассчитать токи в ветвях схемы по закону Ома для активной или пассивной ветвей:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R_1}, \qquad I_3 = \frac{U_{12}}{R_3},$$

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{12}}{R_2}, \qquad I_4 = \frac{-U_{12}}{R_4}.$$

Метод расчета применим не только для схем, содержащих два узла, но и для схем, приводимых посредством эквивалентных преобразований к схеме с двумя узлами.

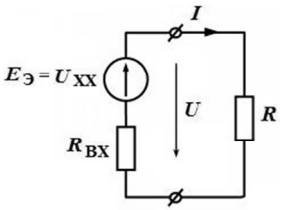
4. Метод наложения. Метод наложения разработан на базе *принципа суперпозиции* (наложения). Принцип суперпозиции является свойством линейных систем. Применительно к электрическим цепям он состоит в том, что для линейных цепей любой ток или напряжение на участке цепи могут быть определены суммой частичных составля-

ющих, рассчитанных отдельно от действия каждого источника или групп источников. Ток (напряжение) в исходной цепи определяется как алгебраическая сумма частичных составляющих.

Метод прост, но громоздок, его целесообразно использовать при определении изменений токов (напряжений) ветвей электрической цепи в зависимости от изменения значений ЭДС (тока источника тока) одного или нескольких источников.

5. Метод эквивалентного активного двухполюсника (эквивалентного генератора). Если при анализе сложных электрических цепей интересует состояние только одной ветви, то расчет рационально производить методом эквивалентного активного двухполюсника. Метод основан на том, что электрическую цепь, независимо от количества входящих в нее активных и пассивных элементов, относительно интересующей ветви можно заменить эквивалентным активным двухполюсником. Последний, в свою очередь, можно представить в виде схемы – источника напряжения (или тока). Весь расчет сводится к определению параметров этого источника. В случае представления двухполюсника схемой источника напряжения его ЭДС равна напряжению холостого хода U_{XX} (напряжению на разомкнутых зажимах ветви, в которой определяется ток), а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению $R_{\text{вх}}$ пассивной электрической цепи относительно этих зажимов. Тогда искомый ток I найдется из выражения

$$I = \frac{U_{\text{XX}}}{R + R_{\text{вх}}},$$

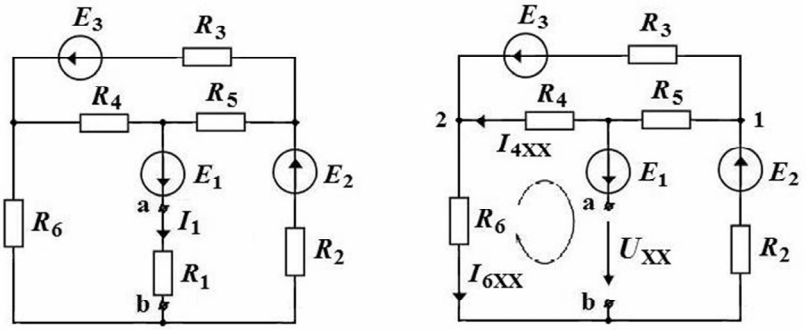


где R – сопротивление ветви, в которой определяется ток.

В качестве примера рассмотрим расчет тока I_1 в схеме, показанной на рис. 1.10, *а*.

Ток в выделенном участке электрической цепи (a – b) в соответствии с методом эквивалентного активного двухполюсника определяется по формуле

$$I_1 = U_{\text{XX}} / (R_1 + R_{\text{вх}}).$$



а *б*

Рис. 1.10

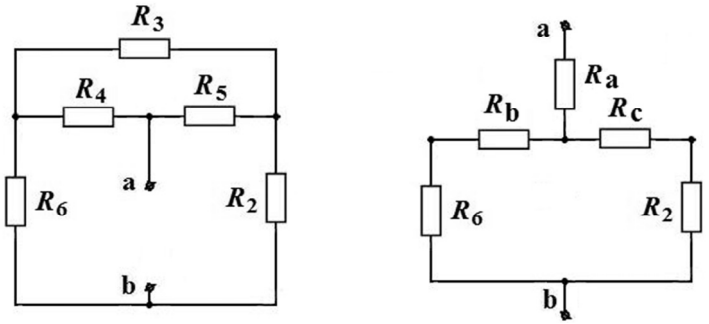
Напряжение холостого хода U_{XX} (на разомкнутых зажимах $a - b$) определяется по схеме на рис. 1.10, *б*. Из уравнения, записанного по второму закону Кирхгофа, для выделенного контура имеем

$$U_{\text{XX}} = E_1 + R_4 I_{4\text{XX}} + R_6 I_{6\text{XX}}.$$

Токи $I_{4\text{XX}}$ и $I_{6\text{XX}}$, входящие в последнее выражение, определяются одним из ранее рассмотренных методов, например при известном напряжении между узлами 1 и 2, определяемом по формуле межузлового напряжения, по закону Ома (обобщенному закону Ома).

Для определения величины внутреннего сопротивления двухполюсника, равного входному сопротивлению $R_{\text{вх}}$ электрической цепи относительно зажимов $a - b$, из схемы рис. 1.10, *б* необходимо устранить источники питания (закоротить источники ЭДС). В полученной эквивалентной схеме (рис. 1.11, *а*) сопротивления $R_3 - R_4 - R_5$ образуют треугольник сопротивлений. После преобразования треугольника сопротивлений в звезду сопротивлений $R_a - R_b - R_c$ схема, приведенная на рис. 1.11, *б*, легко сворачивается. Величина входного сопротивления рассчитывается по выражению

$$R_{\text{вх}} = \frac{(R_6 + R_b)(R_2 + R_c)}{R_6 + R_2 + R_b + R_c} + R_a.$$



а *б*

Рис. 1.11

Подстановка в выражение для искомого тока I_1 значений напряжения холостого хода U_{XX} и входного сопротивления $R_{вх}$ позволяет определить его величину.

Оценка результатов расчета цепей постоянного тока

1. Баланс мощности. Метод используется для проверки правильности расчета любых схем и является наиболее общим критерием правильности произведенного расчета. Баланс мощностей вытекает из закона сохранения энергии, согласно которому в любой электрической цепи мощность, рассеиваемая на пассивных элементах цепи, определяется мощностью входящих в ее состав источников.

Для любой электрической цепи алгебраическая сумма мощностей, генерируемых источниками, равна сумме мощностей потребителей:

$$P_{ист} = P_{потр}.$$

Мощность источников

$$P_{ист} = \sum(\pm E_i I_{Ei}) + \sum(\pm U_{Kj} J_j),$$

где E_i – ЭДС i-го источника напряжения; I_{Ei} – ток, протекающий через i-й источник напряжения; J_j – ток j-го источника тока; U_{Kj} – напряжение на j-м источнике тока.

Знак «+» или «–» у мощности источников зависит от направления напряжения и тока источника (рис. 1.12). Знак «–» означает, что источник не генерирует, а потребляет энергию, т. е. является потребителем.

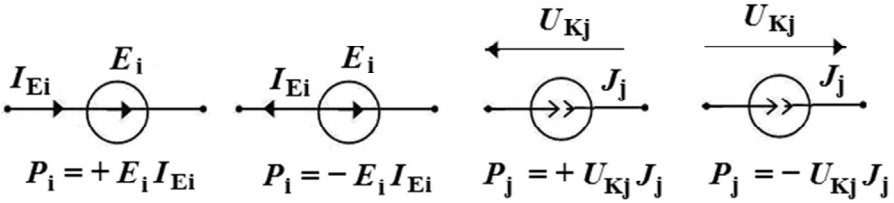


Рис. 1.12

Мощность потребителей

$$P_{\text{потр}} = \sum_i (I_i^2 R_i),$$

где R_i – сопротивление i-го потребителя; I_i – ток i-го потребителя.

Мощности $P_{\text{потр}}$ всегда положительны, это означает, что приемники только потребляют мощность, преобразовывают электрическую энергию в другие виды.

Баланс составляется для исходной, непреобразованной схемы.

2. Проверка соблюдения законов Кирхгофа. Полученные в результате расчета токи (напряжения) подставляются в составленную для исследуемой схемы систему уравнений по законам Кирхгофа. Соблюдение законов позволяет говорить о правильности результатов расчета.

3. Потенциальная диаграмма. Потенциальная диаграмма (график зависимости $\varphi(R)$, построенный при обходе замкнутого контура) является графической интерпретацией второго закона Кирхгофа. Степень достоверности проведенной этим способом проверки возрастает по мере увеличения числа рассмотренных контуров электрической цепи, что требует больших временных затрат.

Потенциальная диаграмма для контура, изображенного на рис. 1.13, показана на рис. 1.14. На участках, содержащих сопротивления, имеет место постепенное изменение потенциала φ.

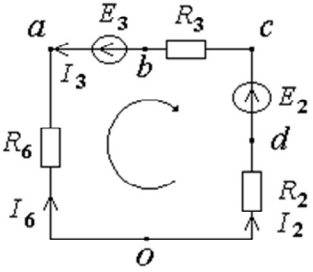


Рис. 1.13

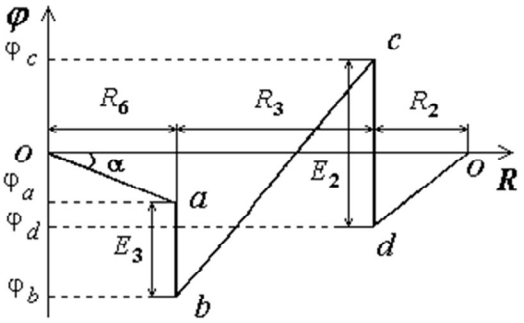


Рис. 1.14

Угол наклона α, характеризующий это изменение, пропорционален величине тока, протекающего через этот участок электрической цепи.

Знак угла определяется направлением тока. При совпадении положительного направления тока с направлением обхода контура знак отрицательный, при несовпадении их направлений – положительный. В идеальных источниках ЭДС потенциал изменяется скачком, поэтому источникам ЭДС соответствуют вертикальные участки потенциальной диаграммы.

1.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1.2.1. СВЕРТЫВАНИЕ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Цель: получить навыки определения входного сопротивления цепи и сопротивления цепи относительно произвольных зажимов.

Контрольные вопросы

1. Что называют узлом, ветвью, контуром схемы электрической цепи?

2. Дать определения последовательного и параллельного соединения элементов электрической цепи. Нарисовать схемы с последовательным и параллельным соединением пассивных элементов, указать основные свойства этих соединений.

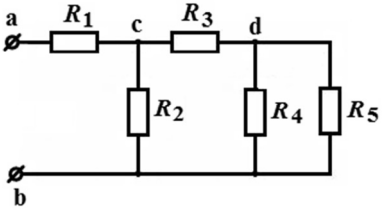
3. Как определяется эквивалентное сопротивление последовательно соединенных резисторов?

4. Как определяется эквивалентное сопротивление двух и более параллельных ветвей?

5. Изобразить схему электрической цепи со смешанным соединением пассивных элементов. Как определить эквивалентное сопротивление цепи относительно ее входных зажимов?

6. Нарисовать схемы соединения пассивных элементов звездой и треугольником и объяснить порядок их расчета.

Задача 1. Определить входное сопротивление (R_{ab}), если: $R_1 = 12$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 30$ Ом; $R_4 = 60$ Ом; $R_5 = 12$ Ом.



Решение

Анализ схемы электрической цепи показывает, что в схеме отсутствуют последовательно соединенные элементы, имеются параллельно соединенные резисторы R_4 и R_5, участок цепи *db*.

Замещаем резисторы R_4 и R_5 эквивалентным резистором R_{45} (схема 1) с сопротивлением

$$R_{45} = R_4 R_5 / (R_4 + R_5) =$$

$$= 60 \cdot 12 / (60 + 12) = 10 \text{ Ом}.$$

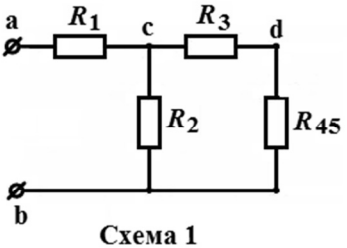


Схема 1

В схеме 1 на участке *cdb* резисторы R_3 и R_{45} соединены последовательно, заменяем их эквивалентным резистором R_{3-5} (схема 2) с сопротивлением

$$R_{3-5} = R_3 + R_{45} = 30 + 10 = 40 \text{ Ом}.$$

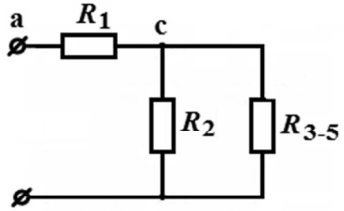


Схема 2

В схеме 2 на участке *cb* резисторы R_2 и R_{3-5} соединены параллельно, заменяем их эквивалентным резистором R_{2-5} (схема 3) с сопротивлением

$$R_{2-5} = R_2 R_{3-5} / (R_2 + R_{3-5}) = 10 \cdot 40 / (10 + 40) = 8 \text{ Ом}.$$

В завершение находим эквивалентное входное (относительно зажимов *a* и *b*) сопротивление всей цепи, учитывая, что резисторы R_1 и R_{2-5} соединены последовательно:

$$R_{ab} = R_1 + R_{2-5} = 12 + 8 = 20 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{ab} = 20$ Ом.

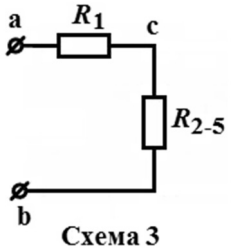
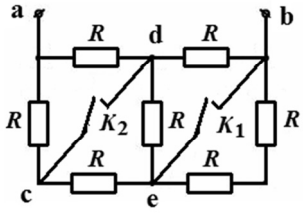


Схема 3

Задача 2. Определить эквивалентное сопротивление цепи при $R = 6$ Ом, если: 1) оба ключа замкнуты; 2) ключ K_1 замкнут, ключ K_2 разомкнут; 3) оба ключа разомкнуты.



Решение

1. Оба ключа замкнуты. Замыкание ключа K_1 закорачивает два резистора, включенные параллельно ключу между точками *e* и *b*. После замыкания ключа K_2 получаем эквивалентную схему 1.

Эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{экв}} = R/2 + R/3 = 5R/6 = 5 \text{ Ом}.$$

2. При замкнутом ключе K_1 и разомкнутом ключе K_2 имеем эквивалентную схему 2. Сопротивление участка *db*

$$R_{db} = R/2.$$

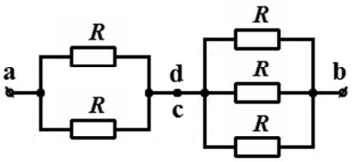


Схема 1

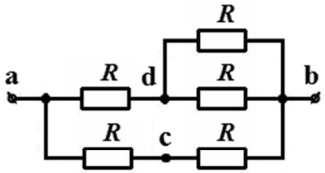


Схема 2

Эквивалентное сопротивление схемы

$$R_{\text{экв}} = 1{,}5R \cdot 2R / (1{,}5R + 2R) = 0{,}857R = 5{,}14 \text{ Ом}.$$

3. При разомкнутых ключах получаем схему 3.

В схеме отсутствуют участки с последовательно или параллельно соединенными элементами. Имеются участки, соединенные по схемам «звезда» и «треугольник» сопротивлений. Преобразуем «звезду» сопротивлений, включенную между точками *a–b–e* в «треугольник» сопротивлений (схема 4). Сопротивления лучей «звезды» равны, поэтому сопротивления сторон «треугольника» также равны, но в три раза больше сопротивления луча «звезды».

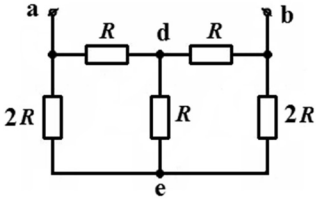


Схема 3

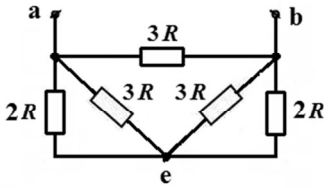


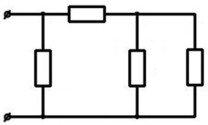
Схема 4

Эквивалентное сопротивление схемы

$$R_{\text{экв}} = \frac{3R\left[2 \cdot 3R \cdot 2R / (3R + 2R)\right]}{3R + \left[2 \cdot 3R \cdot 2R / (3R + 2R)\right]} = 1{,}33R = 8 \text{ Ом}.$$

Ответ: 1) 5 Ом; 2) 5,14 Ом; 3) 8 Ом.

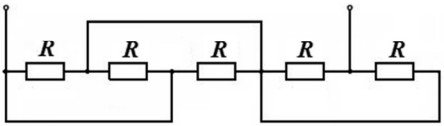
Дополнительные задачи



Задача 1. Какое минимальное количество резисторов по 10 Ом и по какой схеме нужно соединить, чтобы получить эквивалентное сопротивление, равное 6 Ом?

Ответ: см. схему.

Задача 2. Найти эквивалентное сопротивление цепи.



Ответ: 5*R* /6.

1.2.2. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ

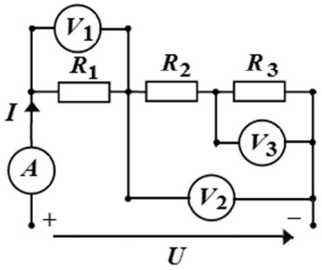
Цель: изучить методику расчета цепей постоянного тока с одним источником питания. Получить навыки определения входного сопротивления цепи, схемы. Освоить методы расчета токов и напряжений цепи, используя законы Ома и Кирхгофа.

Контрольные вопросы

1. Какие исходные данные необходимо иметь для однозначного анализа электрической схемы?
2. Сформулировать законы Ома для пассивного и активного участка цепи.
3. Сформулировать первый и второй законы Кирхгофа, объяснить правила выбора знаков.
4. Каков алгоритм расчета электрической цепи методом свертывания?
5. В чем заключается идея метода пропорционального пересчета? В каком случае целесообразно использовать метод? Каковы ограничения применения метода?
6. Как можно проверить правильность решения задачи?
7. Записать уравнение баланса мощностей.
8. Чем характеризуется режим холостого хода (ХХ)?
9. Чем характеризуется режим короткого замыкания (КЗ)?

Задача 1. Параметры делителя напряжения: U = 15 В, $R_1 = R_2$ = =1 кОм, R_3 = 3 кОм.

Определить показания приборов, мощность источника питания.



Решение

1. Обозначим напряжение и ток, их положительное направление.

2. Определяем входное сопротивление цепи относительно зажимов источника:

$$R_{вх} = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 1 + 3 = 5 \text{ кОм}.$$

3. Определяем ток в цепи – показание амперметра I_A и показания вольтметров U_{V1}, U_{V2} и U_{V3}*:

$$I_A = U / R_{вх} = 15 / 5000 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 3 \text{ мА};$$

$$U_{V1} = I_A \cdot R_1 = 3 \cdot 10^{-3} 1 \cdot 10^3 = 3 \text{ В};$$

$$U_{V2} = I_A (R_2 + R_3) = 3 \cdot 10^{-3} (1+3) \cdot 10^3 = 12 \text{ В};$$

$$U_{V3} = I_A R_3 = 3 \cdot 10^{-3} 3 \cdot 10^3 = 9 \text{ В}.$$

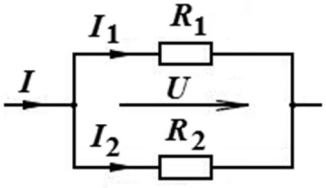
4. Определяем мощность источника:

$$P = U \cdot I_A = I_A{}^2 R_{вх1} = 15 \cdot 3 \cdot 10^{-3} =$$

$$= (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^3 = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 45 \text{ мВт}.$$

Ответ: $I_A = 3$ мА, $U_{V1} = 3$ В, $U_{V2} = 12$ В, $U_{V3} = 9$ В, $P = 45$ мВт.

Задача 2. Определить R_2, если $R_1 = 3$ Ом, $I_2 = 5$ А, $I = 25$ А.



Решение

Напряжение на участке цепи

$$U = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 = (I - I_2) R_1,$$

следовательно, $R_2 = (I - I_2) R_1 / I_2 = 12$ Ом.

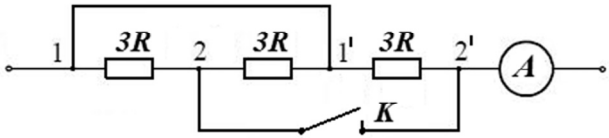
Ответ: $R_2 = 12$ Ом.

Задача 3. Что покажет амперметр после замыкания ключа, если до замыкания он показывал 1 А?

---

* Внутреннее сопротивление вольтметра достаточно велико, поэтому в расчетах его можно принять равным бесконечности.

Внутреннее сопротивление амперметра достаточно мало, поэтому в расчетах его можно принять равным нулю.



Решение

До замыкания ключа $R_{\text{экв}} = 3R$ (узлы 1 и 1′ закорочены). После замыкания ключа все резисторы соединены параллельно (узлы 1 и 1′, 2 и 2′ – устранимые), следовательно, $R'_{\text{экв}} = 3R/3 = R$.

Напряжение на входе цепи не зависит от режима ее работы:

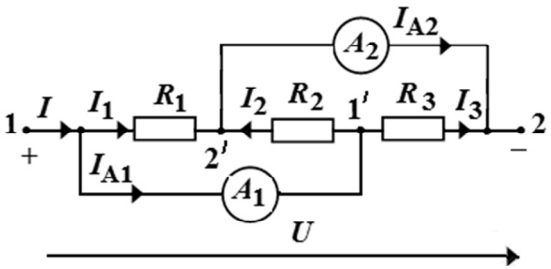
$$U = IR_{\text{экв}} = I'R'_{\text{экв}}.$$

Ток через амперметр (после замыкания ключа)

$$I' = IR_{\text{экв}} / R'_{\text{экв}} = 1 \cdot 3R / R = 3 \text{ А}.$$

Ответ: $I' = 3$ А.

Задача 4. $U = 15$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 50$ Ом. Определить показания амперметров; потребляемую цепью мощность.



Решение

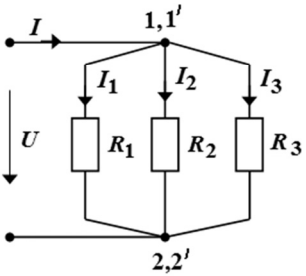
Так как узлы 1, 1′ и 2, 2′ соединены ветвями с идеальными амперметрами A_1 и A_2, имеющими сопротивления, равные нулю, то резисторы R_1, R_2 и R_3 соединены параллельно.

Определим токи в параллельных ветвях по закону Ома:

$$I_1 = U / R_1 = 15 / 20 = 0{,}75 \text{ А};$$

$$I_2 = U / R_2 = 15 / 20 = 0{,}75 \text{ А};$$

$$I_3 = U / R_3 = 15 / 50 = 0{,}3 \text{ А}.$$



Входной ток и токи амперметров определяем по первому закону Кирхгофа:

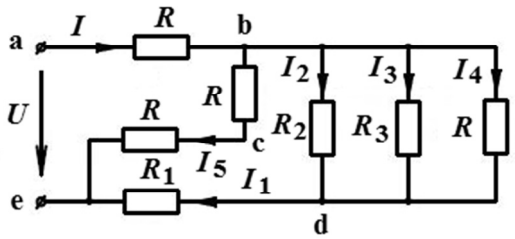
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}3 = 1{,}8 \text{ А};$$

$$I_{A1} = I - I_1 = 1{,}8 - 0{,}75 = 1{,}05 \text{ А};$$
$$I_{A2} = I_1 + I_2 = 0{,}75 + 0{,}75 = 1{,}5 \text{ А}.$$

Потребляемая цепью мощность $P = UI =$ $= 15 \cdot 1{,}8 = 27$ Вт.

Ответ: $I_{A1} = 1{,}05$ А, $I_{A2} = 1{,}5$ А, $P = 27$ Вт.

Задача 5. Определить токи во всех ветвях схемы и напряжения на всех участках цепи, если $R = 6$ Ом; $R_1 = 9$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 10$ Ом; $U = 144$ В.



Решение

Метод свертывания

Определяем сопротивление цепи относительно входных зажимов. Свертывание схемы начинаем с параллельного соединения резисторов R, R_2 и R_3, включенных между точками b и d:

$$R_{bd} = (1/R_2 + 1/R_3 + 1/R)^{-1} = (1/15 + 1/10 + 1/6)^{-1} = 3 \text{ Ом}.$$

Сопротивление R_{bd} включено последовательно с сопротивлением R_1, поэтому сопротивление участка цепи *b–d–e* равно

$$R_{bde} = R_{bd} + R_1 = 3 + 9 = 12 \text{ Ом}.$$

Сопротивление участка цепи *b–c–e* определяется двумя последовательно включенными резисторами *R*:

$$R_{bce} = R + R = 6 + 6 = 12 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление двух параллельно включенных между точками *b* и *e* ветвей

$$R_{be} = R_{bde} R_{bce} / (R_{bde} + R_{bce}) = 12 \cdot 12 / (12 + 12) = 6 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление цепи

$$R_{ae} = R + R_{be} = 6 + 6 = 12 \text{ Ом}.$$

Ток во входной ветви цепи *I* определяем по закону Ома:

$$I = U / R_{ae} = 144 / 12 = 12 \text{ А}.$$

Так как сопротивления параллельных участков цепи *b–d–e* и *b–c–e* одинаковой величины (12 Ом), то токи, протекающие в этих ветвях, равны

$$I_1 = I_5 = I / 2 = 12 / 2 = 6 \text{ А}.$$

Для определения токов в параллельных ветвях с резисторами *R*, R_2 и R_3 рассчитываем напряжение между точками *b* и *d*:

$$U_{bd} = R_{bd} \cdot I_1 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ В}.$$

Тогда токи в параллельных ветвях:

$$I_2 = U_{bd} / R_2 = 18 / 15 = 1{,}2 \text{ А};$$

$$I_3 = U_{bd} / R_3 = 18 / 10 = 1{,}8 \text{ А}; \quad I_4 = U_{bd} / R = 18 / 6 = 3 \text{ А}.$$

Напряжения на отдельных участках цепи по закону Ома:

$$U_{ab} = RI = 6 \cdot 12 = 72 \text{ В}, \quad U_{de} = R_1 I_1 = 9 \cdot 6 = 54 \text{ В},$$

$$U_{bc} = U_{ce} = R \cdot I_5 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ В}.$$

Метод пропорционального пересчета

Если требуется определить ток (или напряжение) только одного участка электрической цепи, то часто целесообразно использовать метод пропорционального пересчета.

В качестве примера определим ток I_4. Положим ток $I_4' = 1$ А. Напряжение $U_{bd}' = R \cdot I_4' = 6 \cdot 1 = 6$ В.

Зная напряжение U_{bd}', определяем токи:

$$I_2' = U_{bd}' / R_2 = 6/15 = 0{,}4 \text{ А и } I_3' = U_{bd}' / R_3 = 6/10 = 0{,}6 \text{ А}.$$

Найдем ток I_1', используя первый закон Кирхгофа:

$$I_1' = I_2' + I_3' + I_4' = 2 \text{ А}.$$

Напряжение U_{be}' определяем по второму закону Кирхгофа:

$$U_{be}' = R_1 \cdot I_1' + U_{bd}' = 9 \cdot 2 + 6 = 24 \text{ В}.$$

Ток $I_5' = U_{be}' / 2R = 2$ А. Ток $I' = I_1' + I_5' = 4$ А.

Напряжение на входе цепи, вызывающее ток $I_4' = 1$ А:

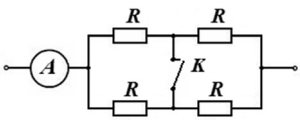
$$U' = R \cdot I' + U_{be}' = 6 \cdot 4 + 24 = 48 \text{ В}.$$

Коэффициент пересчета $K_{\text{п}} = \dfrac{U}{U'} = \dfrac{144}{48} = 3$.

Искомый ток $I_4 = I_4' K_{\text{п}} = 1 \cdot 3 = 3$ А.

Ответ: $I = 12$ А; $I_1 = I_5 = 6$А; $I_2 = 1{,}2$ А; $I_3 = 1{,}8$ А; $I_4 = 3$ А.

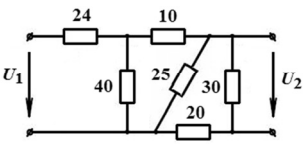
Дополнительные задачи



Задача 1. Как изменится показание амперметра, если замкнуть ключ?

Ответ: не изменится.

Задача 2. Найти отношение напряжений U_2 / U_1. Сопротивления ветвей (в омах) указаны на схеме.

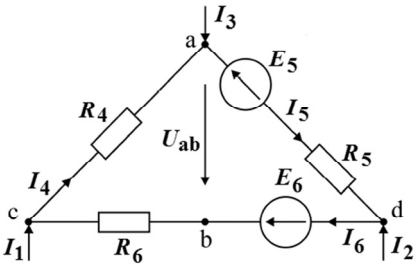


Ответ: 0,15.

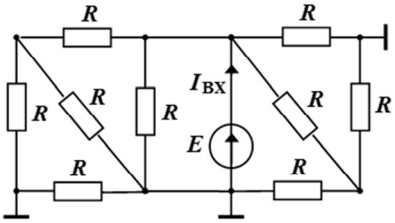
Задача 3. В электрической цепи R_4 = 5 кОм, E_5 = 20 В, R_5 = 3 кОм, E_6 = 40 В, R_6 = 2 кОм, I_1 = 10 мА, I_3 = –20 мА.

Определить напряжение U_{ab}.

Ответ: U_{ab} = –50 В.



Задача 4. E = 10 В, R = 1 Ом. Определить ток $I_{вх}$.



Ответ: $I_{вх}$ = 33,33 А.

1.2.3. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Цели

1. Изучить алгоритмы анализа цепей постоянного тока методами: применения законов Кирхгофа; контурных токов; наложения; узловых потенциалов.

2. Получить навыки:

- выбора метода анализа цепи;
- составления уравнений по законам Кирхгофа при анализе сложных цепей постоянного тока;
- использования метода контурных токов для расчета многоконтурных цепей постоянного тока;
- использования метода наложения для определения зависимости тока в ветвях многоконтурной схемы от параметров одного из источников;

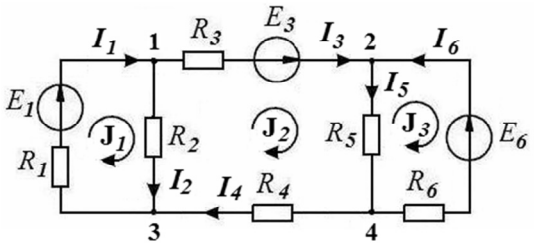
- использования метода узловых потенциалов для двухузловых схем цепей постоянного тока;
- оценки результатов расчета.

Контрольные вопросы

1. Как определяется количество уравнений, составляемых по первому и второму закону Кирхгофа, для расчета сложных электрических цепей при использовании метода непосредственного применения законов Кирхгофа?
2. Каков порядок составления уравнений по методу контурных токов?
3. Каковы особенности составления уравнений по методу контурных токов для цепи, содержащей источники тока?
4. Каково ограничение использования метода наложения?
5. Как формируются схемы для определения частичных токов электрической цепи при использовании метода наложения?
6. В каком случае целесообразно использовать для расчета электрической цепи метод межузлового напряжения и в чем его особенности?
7. Как записывается уравнение для расчета электрической цепи, имеющей два узла, – формула межузлового напряжения?
8. Как определяются токи в ветвях схемы при использовании для расчета формулы межузлового напряжения?

Задача 1. Определить токи в ветвях электрической цепи методом контурных токов, если: $E_1 = 10$ В; $E_3 = 55$ В; $E_6 = 25$ В; $R_1 = R_6 = 1$ Ом; $R_2 = R_5 = 4$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $R_4 = 5$ Ом.

Проверить результаты расчета, используя первый и второй законы Кирхгофа.



Решение

Расчетные уравнения:

$$\begin{cases}(R_1+R_2)J_1-R_2J_2=E_1;\\ -R_2J_1+(R_2+R_3+R_4+R_5)J_2-R_5J_3=E_3;\\ -R_5J_2+(R_5+R_6)J_3=-E_6.\end{cases}$$

После подстановки численных значений:

$$\begin{cases}5J_1-4J_2-0J_3=10;\\ -4J_1+15J_2-4J_3=55;\\ -0J_1-4J_2+5J_3=-25.\end{cases}$$

Основной определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -4 & 0\\ -4 & 15 & -4\\ 0 & -4 & 5\end{vmatrix}=215.$$

Контурные токи:

$$J_1 = \Delta_1/\Delta;\ J_2=\Delta_2/\Delta;\ J_3=\Delta_3/\Delta,$$

где

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}10 & -4 & 0\\ 55 & 15 & -4\\ -25 & -4 & 5\end{vmatrix}=1290;\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 10 & 0\\ -4 & 55 & -4\\ 0 & -25 & 5\end{vmatrix}=1075;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}5 & -4 & 10\\ -4 & 15 & 55\\ 0 & -4 & -25\end{vmatrix}=-215;$$

$$J_1 = 6\text{ A};\ J_2 = 5\text{ A};\ J_3 = -1\text{ A}.$$

Токи в ветвях схемы:

$$I_1 = J_1 = 6 \text{ А};\ I_2 = J_1 - J_2 = 1 \text{ А};\ I_3 = I_4 = J_2 = 5 \text{ А};$$

$$I_5 = J_2 - J_3 = 6 \text{ А};\ I_6 = -J_3 = 1 \text{ А}.$$

Проверка решения

Уравнения по первому закону Кирхгофа:

- для узла 1

$$I_1 - I_2 - I_3 = 6 - 1 - 5 = 0;$$

- для узла 2

$$I_3 - I_5 + I_6 = 5 - 6 + 1 = 0;$$

- для узла 3

$$-I_1 + I_2 + I_4 = -6 + 1 + 5 = 0.$$

Уравнения по второму закону Кирхгофа:

- для контура 1

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 = 1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 10 = 10;$$

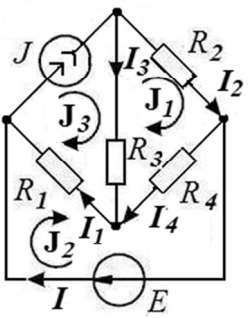
- для контура 2

$$-R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_4 I_4 = E_3 = -4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 55 = 55;$$

- для контура 3:

$$-R_5 I_5 - R_6 I_6 = -E_6 = -4 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = -25 = -25.$$

Задача 2. Определить токи во всех ветвях электрической цепи методом контурных токов и составить баланс мощностей, если: J = 5 А; E = 20 В; R_1 = 4 Ом; R_2 = 2,4 Ом; R_3 = 1,6 Ом; R_4 = 6 Ом.



Решение

Расчетные уравнения:

$$\begin{cases} (R_2 + R_3 + R_4)J_1 - R_4 J_2 - R_3 J_3 = 0; \\ -R_4 J_1 + (R_1 + R_4)J_2 - R_1 J_3 = E; \\ J_3 = J. \end{cases}$$

После преобразований:

$$\begin{cases}(R_2 + R_3 + R_4)J_1 - R_4 J_2 - R_3 J; \\ -R_4 J_1 + (R_1 + R_4)J_2 = E + R_1 J.\end{cases}$$

В матричной форме:

$$|R| \cdot |J| = |E|,$$

где

$$|R| = \begin{vmatrix} R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_1 + R_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix};$$

$$|J| = \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \end{vmatrix}; \quad |E| = \begin{vmatrix} R_3 J \\ E + R_1 J \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 40 \end{vmatrix}.$$

$$|J| = |R|^{-1} |E|,$$

где $|R|^{-1}$ – обратная матрица сопротивлений;

$$|R|^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix},$$

где A_{jk} – алгебраическое дополнение элемента R_{jk};

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 64; \quad A_{12} = A_{21} = 6; \quad A_{11} = A_{22} = 10.$$

Тогда

$$|J| = \frac{1}{64} \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 40 \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \begin{vmatrix} 320 \\ 448 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \end{vmatrix}; \quad J_1 = 5 \text{ А}; \quad J_2 = 7 \text{ А}.$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = J - J_2 = 5 - 7 = -2 \text{ А}; \quad I_2 = J_1 = 5 \text{ А}; \quad I_3 = J - J_1 = 5 - 5 = 0;$$

$$I_4 = J_1 - J_2 = 5 - 7 = -2 \text{ А}; \quad I = J_2 = 7 \text{ А}.$$

Мощность потребителей:

$$P_{\text{потр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 =$$

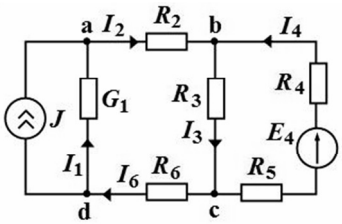
$$= 2^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 2{,}4 + 2^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 6 = 100 \text{ Вт}.$$

Генерируемая мощность

$P_{\text{ист}} = IE + J(I_1 R_1 + I_3 R_3) = 7 \cdot 20 + 5 \cdot (-8) = 100$ Вт; $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$.

Задача 3. Определить токи в ветвях схемы, если $J = 1$ А; $E_4 = 20$ В; $G_1 = 0{,}2$ См; $R_2 = 5$ Ом; $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 6$ Ом, $R_3 = R_6 = 10$ Ом.

Решение



Преобразуем источник тока (участок цепи *a–b*) в источник напряжения.

Параметры источника напряжения:

$$E_1 = J / G_1 = 1 / 0{,}2 = 5 \text{ В};$$

$$R_1 = 1 / G_1 = 1 / 0{,}2 = 5 \text{ Ом}.$$

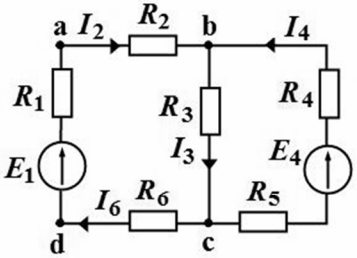
В полученной схеме в ветви *b–a–d–c* резисторы R_2, R_1 и R_6 соединены последовательно. Эквивалентное сопротивление ветви:

$$R_{126} = R_1 + R_2 + R_6 = 5 + 5 + 10 = 20 \text{ Ом}.$$

В ветви *b–c*, содержащей E_4, резисторы R_4 и R_5 соединены последовательно.

Эквивалентное сопротивление ветви

$$R_{45} = 10 \text{ Ом}.$$

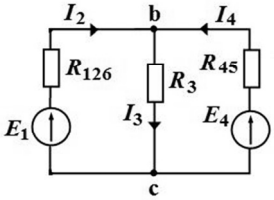


В результате преобразования получим эквивалентную схему замещения, имеющую два узла: *b* и *c*.

Напряжение между узлами *b* и *c* определяем по формуле межузлового напряжения, принимая $\varphi_c = 0$:

$$U_{bc} = \frac{E_1/R_{126} + E_4/R_{45}}{1/R_{126} + 1/R_3 + 1/R_{45}} =$$

$$= \frac{5/20 + 20/10}{1/20 + 1/10 + 1/10} = 9\,\text{В}.$$



При известном напряжении на параллельных ветвях, используя закон Ома (закон Ома для активного участка электрической цепи), определяем токи в ветвях схемы:

$$I_3 = U_{bc} / R_3 = 9/10 = 0{,}9\ \text{А};$$

$$I_2 = (E_1 - U_{bc}) / R_{126} = (5-9)/20 = -0{,}2\ \text{А};$$

$$I_4 = (E_4 - U_{bc}) / R_{45} = (20-9)/10 = 1{,}1\ \text{А}.$$

Из уравнения, записанного для узла *a* исходной схемы, по первому закону Кирхгофа опреляется ток I_1

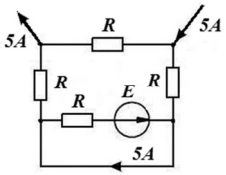
$$I_1 = I_2 - J = -0{,}2 - 1 = -1{,}2\ \text{А}.$$

Ток ветви с резистором R_6 в исходной схеме равен току через резистор R_2:

$$-I_6 = I_2 = -0{,}2\ \text{А}.$$

Ответ: $I_1 = -1{,}2$ А, $I_2 = I_6 = -0{,}2$ А, $I_3 = 0{,}9$ А, $I_4 = 1{,}1$ А.

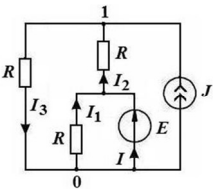
Дополнительные задачи



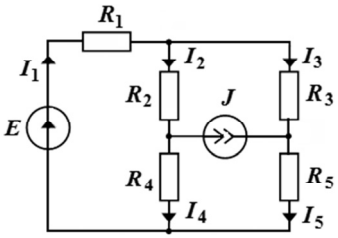
Задача 1. Используя метод контурных токов, определить величину и направление ЭДС, если R = 1 Ом.

Ответ: E = 6,67 В.

Задача 2. Определить токи в ветвях схемы методом наложения, если J = 2 А; E = 120 В; R = 40 Ом.



Ответ: I_1 = 3 А; I_2 = 0,5 А; I_3 = 2,5 А (φ_1 = = 100 В).



Задача 3. Параметры цепи: E_1 = 5 В, J = 4 мА, R_1 = 2,2 кОм, R_2 = 3,2 кОм, R_3 = 1,5 кОм, R_4 =4,3 кОм, R_5 =1,0 кОм.

Определить токи в ветвях схемы методом контурных токов; составить баланс мощности.

Ответ: I_1 =1,562 мА, I_2 = 2,53 мА, I_3 = −0,97 мА, I_4 = − 1,47 мА, I_5 = 3,03 мА, $P_{ист} = P_{потр} = 46$ мВт.

1.2.4. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Цели

1. Изучить алгоритмы анализа цепей постоянного тока методом эквивалентного активного двухполюсника. Оценить возможности его применения.

2. Получить навыки:

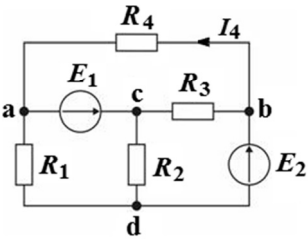
- использования методов расчета при анализе электрических цепей постоянного тока;
- определения сопротивления цепей постоянного тока относительно заданных зажимов.

Контрольные вопросы

1. Назвать основные режимы работы электрических цепей и указать на их особенности.
2. Пояснить, что такое активный и пассивный двухполюсник.
3. Изобразить схемы замещения активного двухполюсника.
4. Чем объясняется наклон внешних характеристик источников ЭДС и тока при работе под нагрузкой?
5. В чем суть метода эквивалентного генератора (эквивалентного активного двухполюсника)?
6. Как определяются параметры эквивалентного генератора (активного двухполюсника) расчетным и экспериментальным путем?
7. Как получить схему, позволяющую определить ЭДС эквивалентного генератора?

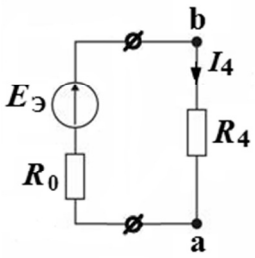
8. Как получить схему пассивного двухполюсника для расчета внутреннего сопротивления эквивалентного генератора?

Задача 1. Определить ток в ветви с резистором R_4 электрической цепи, представленной на рисунке, если $E_1 = 10$ В, $E_2 = 25$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 6{,}36$ Ом.



Решение

Выделяем ветвь с резистором R_4. Остальную часть схемы заменяем эквивалентным генератором (активным двухполюсником) с ЭДС $E_{\text{экв}}$ и внутренним сопротивлением R_0.



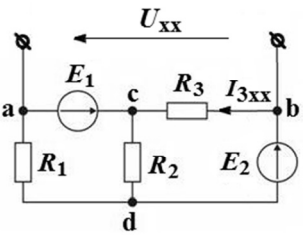
ЭДС эквивалентного генератора ($E_{\text{экв}}$) определяется по результатам расчета режима холостого хода генератора как напряжение между точками *a* и *b* исходной схемы при разомкнутой ветви с резистором R_4.

После размыкания ветви с R_4 получается схема с двумя узлами. Узловое напряжение

$$U_{cd} = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{10/20 + 25/5}{1/20 + 1/40 + 1/5} = 20\,\text{В}.$$

Напряжение между точками *a* и *b* в режиме холостого хода (U_{XX}) определяется из уравнения по второму закону Кирхгофа, записанного для контура «напряжение U_{XX} – источник ЭДС E_1 – резистор R_3»:

$$U_{\text{XX}} = E_1 + R_3 \cdot I_{3\text{XX}}.$$



Ток $I_{3\text{XX}}$, входящий в уравнение, определяется из уравнения по второму закону Кирхгофа, записанного для контура «напряжение U_{cd} – источник ЭДС E_2 – резистор R_3»:

$$U_{cd} + R_3 \cdot I_{3\text{XX}} = E_2.$$

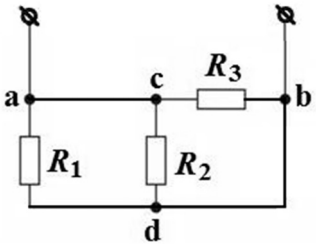
Ток

$$I_{3XX} = (E_2 - U_{cd}) / R_3 = (25 - 20) / 5 = 1 \text{ А}.$$

ЭДС эквивалентного генератора ($E_{экв}$) равна напряжению холостого хода (между зажимами *a* и *b*):

$$U_{XX} = E_1 + R_3 I_{3XX} = 10 + 5 \cdot 1 = 15 \text{ В}.$$

Для определения внутреннего сопротивления генератора (R_0) из схемы исключаются активные элементы (закорачиваются источники ЭДС). Далее рассчитывается сопротивление цепи относительно выделенных зажимов *a* и *b*:



$$R_0 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{5} \right)^{-1} = 3,64 \text{ Ом}.$$

Искомый ток – ветви с резистором R_4:

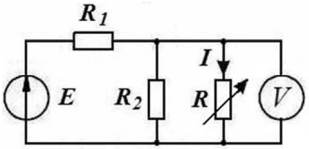
$$I_4 = \frac{E_{экв}}{R_0 + R_4} = \frac{15}{3,64 + 6,36} = 1,5 \text{ А}.$$

Ответ: $I_4 = 1,5$ А.

Задача 2. При изменении сопротивления резистора *R* от ∞ до 10 Ом напряжение, измеряемое вольтметром, изменяется от 100 до 80 В.

Найти ток в этом резисторе при *R* = 7,5 Ом.

Решение



На основании метода эквивалентного активного двухполюсника

$$I = U_{XX} / (R_{вх} + R),$$

где *R* – сопротивление переменного резистора; $U_{XX} = U_V = 100$ В (при $R = \infty$).

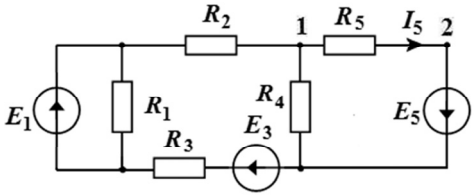
При $R = 10$ Ом $I = 80 / 10 = 100 / (R_{вх} + 10)$, откуда $R_{вх} = 2,5$ Ом.

Тогда при R = 7,5 Ом

$$I = U_{XX} / (R_{вх} + 7{,}5) = 100 / (2{,}5 + 7{,}5) = 10 \text{ А}.$$

Ответ: ток I = 10 А.

Задача 3. Определить ток I_5 методом эквивалентного генератора, если E_1 = 15 В, E_3 =12 В, E_5 = 6 В, $R_1 = R_5 =$ 5 кОм, R_2 = 2 кОм, R_3 = 1 кОм, R_4 = 3 кОм.

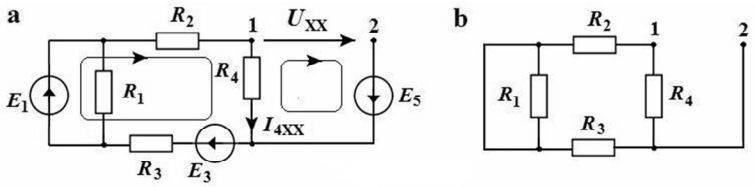


Решение

В соответствии с методом эквивалентного генератора ток

$$I_5 = U_{XX} / (R_{вх} + R_5),$$

где U_{XX} – напряжение холостого хода (напряжение на разомкнутых зажимах 1–2), определяется по схеме *а* (см. рисунок); $R_{вх}$ – входное сопротивление цепи относительно зажимов 1–2, определяется по схеме *б*.



Определяем напряжение холостого хода U_{XX}. Для этого запишем второй закон Кирхгофа для контура «$U_{XX} - R_4 - E_5$», направление обхода контура указано на схеме *а*:

$$U_{XX} - R_4 \cdot I_{4XX} = E_5,$$

отсюда

$$U_{\text{XX}} = E_5 + R_4 \cdot I_{4\text{XX}}.$$

Ток $I_{4\text{XX}}$ определяем из второго закона Кирхгофа, записанного для контура «$E_3 - R_3 - E_1 - R_2 - R_4$»:

$$(R_3 + R_2 + R_4) I_{4\text{XX}} = E_3 + E_1,$$

$$I_{4\text{XX}} = (E_3 + E_1) / (R_3 + R_2 + R_4) =$$

$$= (12 + 15) / (10^3 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3) = 4{,}5 \cdot 10^{-3} = 4{,}5 \text{ мА}.$$

Напряжение холостого хода

$$U_{\text{XX}} = 6 + 3 \cdot 10^3 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-3} = 19{,}5 \text{ В}.$$

Входное сопротивление относительно зажимов 1–2 определяем по схеме *б*, учитывая, что резистор R_1 закорочен:

$$R_{\text{вх}} = (R_3 + R_2) R_4 / (R_3 + R_2 + R_4) =$$

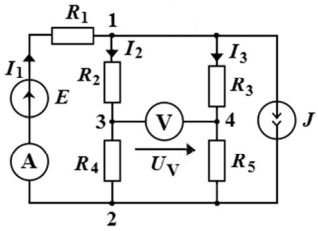
$$= (10^3 + 2 \cdot 10^3) 3 \cdot 10^3 / (10^3 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3) = 1{,}5 \cdot 10^3 = 1{,}5 \text{ кОм}.$$

Искомый ток

$$I_5 = 19{,}5 / (1{,}5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3) = 3 \cdot 10^{-3} = 3 \text{ мА}.$$

Ответ: $I_5 = 3$ мА.

Задача 4. Определить показания вольтметра и амперметра, если E = 15 В, J = 2 А, R_1 = 5 Ом, R_2 = 6 Ом, R_3 = 12 Ом, R_4 = 4 Ом, R_5 = 8 Ом.

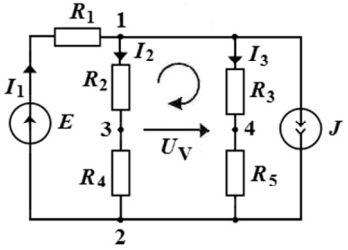


Решение

Показание амперметра равно току в первой ветви I_1. Показание вольтметра равно напряжению U_{V} между точками 3 и 4.

Сопротивление амперметра принимаем равным нулю, а вольтметра – бесконечности.

В эквивалентной схеме замещения амперметр представляем закороткой, а вольтметр – разрывом. В полученной схеме замещения задаемся положительными направлениями токов в ветвях.



Эквивалентная схема замещения имеет четыре параллельных ветви, присоединенные к узлам 1 и 2.

Напряжение между узлами U_{12} определяем по формуле межузлового напряжения (методу двух узлов):

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\frac{E}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3 + R_5}} = \frac{\frac{15}{5} - 2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6+4} + \frac{1}{12+8}} = 2{,}86 \text{ В}.$$

Ток в первой ветви I_1 (ток амперметра) определяем по закону Ома для активной ветви:

$$I_1 = \frac{-U_{12} + E}{R_1} = \frac{-2{,}86 + 15}{5} = 2{,}43 \text{ А}.$$

Токи второй и третьей ветвей вычисляем по закону Ома:

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2 + R_4} = \frac{2{,}86}{6+4} = 0{,}286 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_3 + R_5} = \frac{2{,}86}{12+8} = 0{,}143 \text{ А}.$$

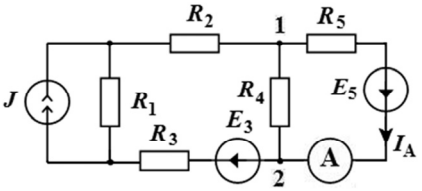
Показание вольтметра (напряжение U_V) находим по второму закону Кирхгофа:

$$U_V + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0,$$

$$U_V = I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0{,}143 \cdot 12 - 0{,}286 \cdot 6 = 0 \text{ В}.$$

Ответ: $I_1 = 2{,}43$ А; $U_V = 0$ В.

Задача 5. Определить показания амперметра методом эквивалентного генератора, если $J = 4$ мА, $E_3 = 12$ В, $E_5 = 6$ В, $R_1 = R_4 = 3$ кОм; $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $R_5 = 5$ кОм.

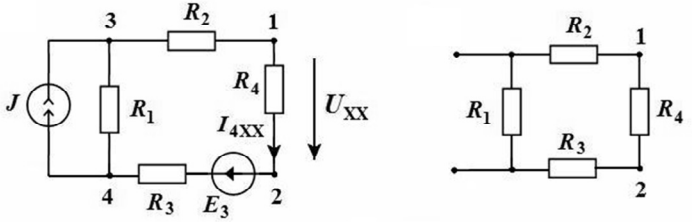


Решение

Амперметр измеряет ток I_A, протекающий в ветви, содержащей резистор R_5 и ЭДС E_5. Принимая сопротивление амперметра равным нулю, в соответствии с методом эквивалентного генератора ток амперметра

$$I_A = (U_{XX} + E_5) / (R_{вх} + R_5),$$

где U_{XX} – напряжение холостого хода (напряжение на разомкнутых зажимах 1–2), определяется по схеме *а*; $R_{вх}$ – входное сопротивление цепи относительно зажимов 1–2, определяется по схеме *б*.



а *б*

Найдем напряжение холостого хода U_{XX}. В нашем случае напряжение холостого хода U_{XX} равно падению напряжения на резисторе R_4 (схема *а*):

$$U_{XX} = R_4 I_{4XX}.$$

Для определения тока I_{4XX} найдем напряжение U_{34} по формуле межузлового напряжения:

$$U_{34} = \varphi_3 - \varphi_4 = \frac{J - \dfrac{E_3}{R_2 + R_3 + R_4}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{4 - \dfrac{12}{2+1+3}}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2+1+3}} = 4 \text{ В}.$$

Ток определяем по обобщенному закону Ома:

$$I_{4XX} = \frac{U_{34} + E_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{4+12}{6} 10^{-3} = 2{,}67 \text{ мА}.$$

Напряжение холостого хода

$$U_{XX} = R_4 I_{4XX} = 3 \cdot 10^3 \cdot 2{,}67 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ В}.$$

Входное сопротивление $R_{вх}$ (сопротивление относительно зажимов 1–2) определяем по схеме *б*:

$$R_{вх} = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot R_4 / (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) =$$

$$= (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 10^3) \cdot 3 \cdot 10^3 / (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 10^3 + 3 \cdot 10^3) =$$

$$= 2 \cdot 10^3 = 2 \text{ кОм}.$$

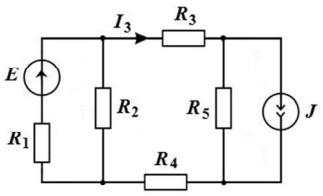
Показания амперметра:

$$I_A = (U_{XX} + E_5) / (R_{вх} + R_5) = (8+6) / (2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3) = 2 \text{ мА}.$$

Ответ: $I_A = 2$ мА.

Дополнительные задачи

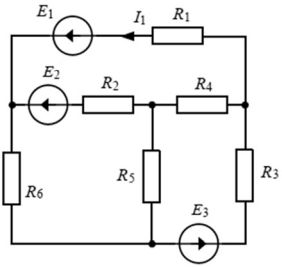
Задача 1. Определить ток I_3 методом эквивалентного генератора, если E = 20 В; J = 1 А; $R_1 = R_2$ = 10 Ом; $R_3 = R_5$ = 5 Ом, R_4 = 15 Ом.

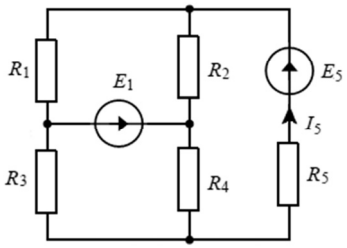


Ответ: $I_3 = 0{,}5$ А.

Задача 2. Определить I_1 методом эквивалентного генератора, если $E_1 = E_2 = E_3 =$ $= 48$ В; $R_2 = R_4 = R_5 =$ 1 Ом; $R_1 = R_3 =$ $= R_6 = 3$ Ом.

Ответ: $I_1 = 5{,}33$ А.





Задача 3. Определить I_5 методом эквивалентного генератора, если $E_1 = 90$ В; $E_5 = 70$ В; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 5$ Ом; $R_4 = 10$ Ом; $R_5 = 10$ Ом.

Ответ: $I_5 = 2{,}22$ А.

1.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Исследование линейной резистивной цепи постоянного тока

Цель: получить навыки экспериментального исследования разветвленной цепи постоянного тока при воздействии двух источников напряжения.

Объект и средства исследования

Исследуемая электрическая цепь собирается из элементов, расположенных на панели стенда. К ним относятся резисторы R_1, R_2, R_4 и два источника E_1 и E_2.

Посредством переключателей (тумблеров) источники питания могут устраняться из электрической цепи. Для измерения токов используются миллиамперметры. Величины сопротивлений резисторов указаны на стенде, напряжения на элементах и потенциалы точек цепи замеряются цифровым мультиметром.

Рабочее задание

1. Цифровым мультиметром измерить величины сопротивления резисторов R_1, R_2, R_4 и напряжения на разомкнутых зажимах источников E_1 и E_2. Результаты измерений занести в табл. 1.1.

Таблица 1.1

R_1	R_2	R_4	E_1	E_2
Ом	Ом	Ом	В	В

2. Собрать электрическую цепь по схеме, представленной на рис. 1.15

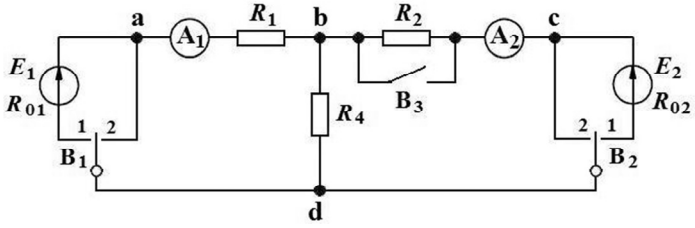


Рис. 1.15

Подключить к цепи оба источника E_1 и E_2 (положение 1 ключей B_1 и B_2). Измерить токи I_1 и I_2, протекающие через резисторы R_1 и R_2, а также напряжения на источниках (U_{a-d}, U_{c-d}). Вычислить по результатам измерений внутренние сопротивления источников R_{01} и R_{02}. Результаты измерений и вычислений занести в табл. 1.2.

Таблица 1.2

I_1	I_2	U_{a-d}	U_{c-d}	R_{01}	R_{02}
А	А	В	В	Ом	Ом

3. Приняв за базисный потенциал φ_d, считая его потенциал равным нулю, измерить потенциалы всех остальных пронумерованных точек. Результаты измерений и расчета занести в табл. 1.3.

Таблица 1.3

φ_a, В	φ_b, В	φ_c, В	φ_d, В	I_1, А	I_2, А	I_4, А
			0			

4. Для внешнего контура электрической цепи (схема на рис. 1.15), используя результаты табл. 1.3, построить потенциальную диаграмму.

5. Поочередно исключая из электрической цепи (схема на рис. 1.15) источники E_2 и E_1 (посредством ключей B_1 и B_2) измерить частичные токи через резисторы R_1 и R_2, обратить внимание на направления токов. Используя принцип суперпозиции, определить токи I_1 и I_2 при действии в цепи обоих источников питания.

Результаты опыта занести в табл. 1.4, проверить при этом принцип суперпозиции.

Таблица 1.4

Источники	I_1, А	I_2, А
E_1		
E_2		
E_1 и E_2		

6*. Опытным путем определить параметры эквивалентного генератора $E_{ЭГ}$ и $R_{вх}$ относительно ветви *b–c*. Для этого измерить напряжение U_{XX} на разомкнутых зажимах ветви *b–c* и ток короткого замыкания $I_{КЗ}$ в этой ветви (см. метод. указ.).

Используя метод эквивалентного генератора, определить ток участка цепи *b–c*.

Методические указания

1. Внутреннее сопротивление источника напряжения при известной величине его ЭДС (*E*) может быть определено по величине напряжения на его зажимах *U* при каком-либо значении потребляемого тока *I*:

$$R_{01} = \frac{E_1 - U_{ad}}{I_1}; \quad R_{02} = \frac{E_2 - U_{cd}}{I_2}.$$

* Факультативно.

2. По методу эквивалентного генератора ток в выделенной ветви электрической цепи (рис. 1.16)

$$I_2 = \frac{E_{\text{ЭГ}}}{R_{\text{вх}} + R_2},$$

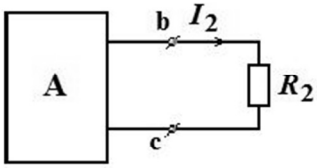


Рис. 1.16

где $E_{\text{ЭГ}}$ – ЭДС эквивалентного генератора $\left(E_{\text{ЭГ}} = U_{\text{XX}}\right)$; $R_{\text{вх}}$ – входное сопротивление эквивалентного генератора.

Экспериментально параметры генератора определяются следующим образом: U_{XX} – путем измерения напряжения, на разомкнутых зажимах *b–c*; входное сопротивление рассчитывается по формуле

$$R_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{XX}}}{I_{\text{КЗ}}},$$

где $I_{\text{КЗ}}$ – ток короткого замыкания двухполюсника, измеряется при $R_2 = 0$ (переключатель B_3 замкнут).

Программа домашней подготовки

По учебным пособиям и конспекту лекций изучить следующие вопросы:

1) правила составления уравнений по законам Кирхгофа и закону Ома для пассивной и активной ветви;

2) принцип суперпозиции;

3) теорему об активном двухполюснике;

4) правила построения потенциальной диаграммы.

Контрольные вопросы

1. Какие электрические цепи называются линейными?

2. Дать определение пассивных и активных элементов и участков электрических цепей.

3. Как изменится вид потенциальной диаграммы, если за базисный потенциал принять другой узел?

4. Как определяется реальный ток в исходной схеме по принципу суперпозиции?

5. Сформулировать правило знаков при записи уравнений по второму закону Кирхгофа.

6. Сформулировать теорему об эквивалентном генераторе и пояснить на любой схеме.

7. Как экспериментально определяется $R_{\text{вх}}$ активного двухполюсника (т. е. $R_{\text{вх}}$ эквивалентного генератора)?

2. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Электрическое состояние цепей синусоидального тока, так же как и цепей постоянного тока, описывается уравнениями Кирхгофа, однако вычисления становятся более сложными, поскольку входное воздействие изменяется по гармоническому закону и уравнения содержат тригонометрические функции:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где e, u, i – мгновенные значения ЭДС, напряжения и тока; I_m, U_m, E_m – амплитудные значения соответствующих величин; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ – круговая частота, рад/с; $f = \dfrac{1}{T}$ – циклическая частота, Гц; T – период синусоидальной величины, с; ψ_i, ψ_u, ψ_e – начальные фазы синусоидальных величин.

Начальная фаза положительная, если перемещение от начала синусоиды к началу координат совпадает с положительным направлением оси времени, в противном случае – отрицательная.

Графическое изображение синусоидального тока и напряжения представлено на рис. 2.1.

Угол $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – разность фаз, фазовый сдвиг между напряжением и током.

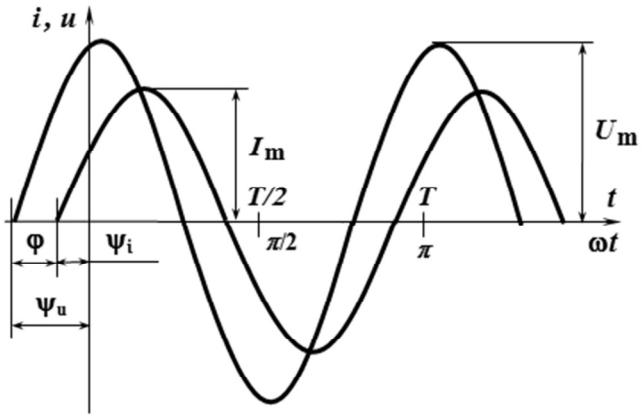


Рис. 2.1

В отличие от цепей постоянного тока в цепях переменного тока кроме необратимого преобразования энергии происходят процессы создания магнитного и электрического полей, которые характеризуются параметрами индуктивность ($L = \psi / i_L$, Гн) и емкость ($C = q / u_C$, Ф) соответственно.

Для упрощения расчета цепей переменного тока гармонические временные функции представляют вращающимися векторами на комплексной плоскости.

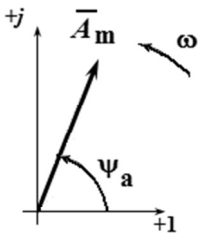
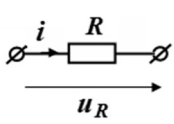
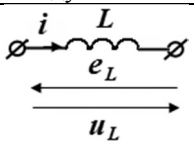
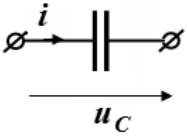
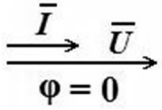
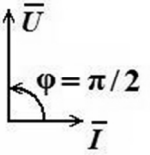
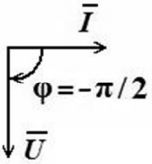


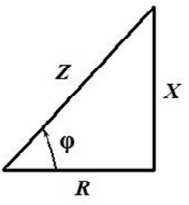
Рис. 2.2

Знание амплитуды A_m и начальной фазы ψ_a позволяет перейти от синусоидальной функции к соответствующей ей комплексной амплитуде $\underline{A}_m = A_m e^{j\psi_a}$ к вектору длиной A_m, расположенному под углом ψ_a относительно оси вещественных чисел (рис. 2.2).

Схемы замещения и взаимосвязь между напряжением и током идеальных элементов цепи переменного тока представлены в таблице (ниже по тексту).

Треугольники сопротивлений и проводимостей. Активные, реактивные и полные сопротивления (проводимости) двухполюсника образуют треугольник сопротивлений (проводимостей) (рис. 2.3).

Элемент	Резистивный	Индуктивный	Емкостный
Обозначение на схеме замещения			
Уравнения связи для мгновенных значений	$u_R = ri$	$u_L = -e_L = L\dfrac{di}{dt}$	$u_C = \dfrac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} idt$
	$i = u_R / R$	$i = \dfrac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} u_L dt$	$i = C\dfrac{du_C}{dt}$
Комплексное сопротивление	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = jX_L = j\omega L$	$\underline{Z} = -j\,X_C = -j/\omega C$
Комплексная проводимость	$\underline{Y} = g = 1/R$	$\underline{Y} = -jb_L = -j/\omega L$	$\underline{Y} = jb_C = j\omega C$
Векторные диаграммы			
Уравнения связи (закон Ома) в комплексной форме*: $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$; $\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = \underline{U}\underline{Y}$			



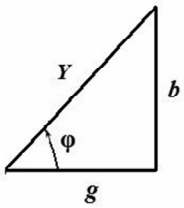
$R = Z\cos\varphi$

$X = Z\sin\varphi$

$X = X_L - X_C$

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X}{R}$



$g = Y\cos\varphi$

$b = Y\sin\varphi$

$b = b_C - b_L$

$Y = \sqrt{g^2 + b^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{g}$

Рис. 2.3

* Уравнения записаны для комплексов действующих значений.

Одной из важных энергетических характеристик электротехнических устройств является коэффициент мощности $\cos\varphi = P/S$. Коэффициент мощности показывает, какую часть потребляемой полной мощности составляет активная мощность, т. е. эффективность использования электрической энергии. В энергетических системах принимают специальные меры для «улучшения» коэффициента мощности.

При расчете цепей переменного тока в установившихся режимах используются классический (графо-аналитический) и символический методы.

Классический метод расчета

Расчет электрических цепей классическим методом выполняется на основе векторных диаграмм, с использованием простейших геометрических соотношений и построений, выполненных в соответствии с законами Кирхгофа, записанными для электрической цепи в векторной форме:

$$\sum \bar{I}_k = 0\,,\ \sum \bar{U}_k = 0\,.$$

Векторная диаграмма – совокупность векторов, отображающих синусоидальные функции одной частоты при $t = 0$.

Преимущество метода – наглядность представления расчета электрической цепи. Недостаток – ограниченность применения; только для простых цепей, для которых построение векторной диаграммы не представляет особой сложности.

Символический метод расчета

Метод основан на представлении гармонических функций комплексными числами. Например, первый и второй законы Кирхгофа для комплексов действующих значений принимают следующий вид.

Первый закон Кирхгофа: $\sum \underline{I}_k = 0$.

Второй закон Кирхгофа: $\sum \underline{U}_k = 0$ или $\sum \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum \underline{E}_i$.

Использование символического метода расчета, а также принципов и методов, применяемых для расчета цепей постоянного тока, позволяет рассчитать любую электрическую цепь переменного тока.

Цепи с индуктивно связанными элементами. Взаимоиндукция – явление наведения ЭДС в какой-либо ветви цепи при изменении тока в

другой ветви этой же или другой цепи. Параметр, характеризующий данное явление, – индуктивность M, единица измерения – Гн. Различают согласное и встречное включение индуктивно связанных элементов. Если магнитные потоки индуктивно связанных элементов совпадают по направлению, то включение согласное, в противном случае – встречное.

На схемах замещения при согласном включении токи в индуктивно связанных элементах ориентированы одинаково относительно их одноименных зажимов («*» на рис. 2.4).

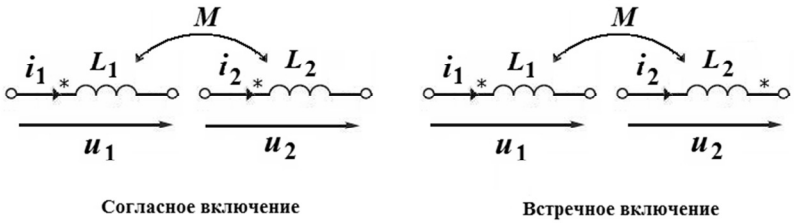


Рис. 2.4

Напряжение на индуктивно связанных элеметах:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad \underline{U}_1 = jX_{L_1}\underline{I}_1 \pm jX_M \underline{I}_2;$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}; \quad \underline{U}_2 = jX_{L_2}\underline{I}_2 \pm jX_M \underline{I}_1.$$

При согласном включении индуктивно связанных катушек напряжения самоиндукции и взаимоиндукции в каждой из катушек – одного знака, при встречном включении – противоположного знака.

При расчете цепей с взаимной индуктивностью используются методы непосредственного применения законов Кирхгофа, контурных токов и наложения.

Развязка индуктивных связей. В ряде случаев при анализе цепей, содержащих индуктивно связанные элементы, целесообразно устранить магнитную связь, произвести развязку индуктивных связей. При определении эквивалентной схемы замещения важно, как одноименные зажимы индуктивно связанных элементов были подключены к общему узлу *c* (рис. 2.5).

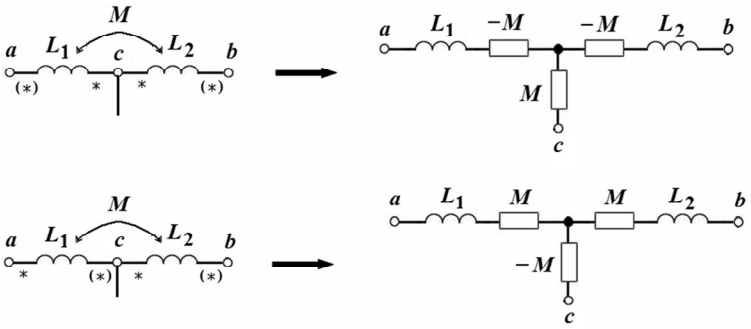


Рис. 2.5

Оценка результатов расчета цепей переменного тока

1. Баланс мощности. Из закона сохранения энергии очевидно, что для любого момента времени сумма мгновенных мощностей всех приемников энергии равна мгновенной мощности источника. Это положение справедливо как для активных мощностей, так и для реактивных и полных, т. е.

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}}; \quad \underline{S}_{\text{ист}} = S_{\text{потр}}.$$

Мощность потребителей:

$$S_{\text{потр}} = P_{\text{потр}} + jQ_{\text{потр}};$$

$$P_{\text{потр}} = \sum_{k=1}^{n} P_{\text{потр}\,k} = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k^2,$$

$$Q_{\text{потр}} = \sum_{k=1}^{n} Q_{\text{потр}\,k} = \sum_{k=1}^{n} X_{Lk} I_k^2 - \sum_{k=1}^{n} X_{Ck} I_k^2.$$

Мощность источников:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = \sum_{k=1}^{m} \underline{E}_k \overset{*}{\underline{I}}_{E\,k} + \sum_{k=1}^{p} \underline{U}_{J\,k} \overset{*}{\underline{J}}_{k}.$$

Мощность потерь индуктивно связанных элементов (при согласном и встречном включении):

$$Q = \underline{U}_{L1} \overset{*}{\underline{I}}_1 + \underline{U}_{L2} \overset{*}{\underline{I}}_2 = jx_{L1} I_1^2 + jx_{L2} I_2^2 \pm j2x_M I_1 I_2.$$

Топографическая диаграмма – векторная диаграмма напряжений, построенная на комплексной плоскости и учитывающая расположение элементов в электрической схеме. Топографическая диаграмма строится по следующим правилам.

1. Потенциал одной из точек схемы принимается равным нулю.

2. Определяются комплексные значения потенциалов всех точек схемы относительно точки, потенциал которой принят за нуль.

3. Найденные значения потенциалов точек переносятся на комплексную плоскость и соединяются в соответствии с расположением последних на схеме.

Резонансные режимы

Отличительной особенностью цепей, содержащих индуктивные и емкостные элементы, является взаимное преобразование энергии: энергии магнитного поля индуктивного элемента в энергию электрического поля емкостного элемента (и наоборот). В резонансных режимах взаимное преобразование энергии индуктивных и емкостных элементов будет полным.

Резонанс напряжений. Резонанс напряжений возникает при последовательном соединении индуктивных и емкостных элементов. Условие резонанса напряжений:

$$\mathrm{Jm}[\underline{Z}_{\mathrm{вх}}] = 0\,,$$

резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При резонансе напряжений:

$$\underline{Z}_{\mathrm{вх}} = \mathrm{Re}[\underline{Z}_{\mathrm{вх}}] = R_{\mathrm{вх}}, \quad I_{\mathrm{вх}} = U / R_{\mathrm{вх}}, \quad U_L = U_C,$$

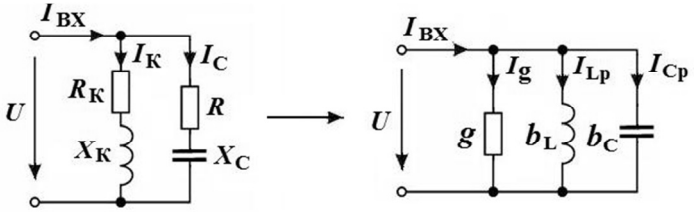
$$P_0 = UI_{\mathrm{вх}} = I_{\mathrm{вх}}^2 R_{\mathrm{вх}}, \quad \cos\varphi = 1, \quad Q_0 = 0,$$

где P_0 и Q_0 – активная и реактивная мощности при резонансе.

Условие резонанса токов:

$$\mathrm{Jm}\,[\underline{Y}] = 0,$$

где $\underline{Y} = g + jb$ – комплекс полной проводимости параллельных ветвей, содержащих индуктивный и емкостный элементы (см. рисунок); $g = X_K \Big/ \left(R_K^2 + X_K^2\right) + R \Big/ \left(R^2 + X_C^2\right)$ – активная составляющая параллельных ветвей; $b_L = R_K \Big/ \left(R_K^2 + X_K^2\right)$ – реактивная проводимость ветви с катушкой индуктивности $(R_K - X_K)$; $b_C = R \Big/ \left(R^2 + X_C^2\right)$ – реактивная проводимость ветви с емкостью $(R - X_C)$.



При резонансе токов: $Y = \mathrm{Re}[\underline{Y}] = g$; $b_L = b_C$; $I_{вх} = UY = Ug$; $I_{Lp} = Ub_L$; $I_{Cp} = Ub_C$; $P_0 = UI_{вх} = U^2 g$; $Q_0 = 0$; $\cos\varphi = 1$.

Особенности анализа трехфазных электрических цепей

1. Трехфазная электрическая цепь питается от симметричного источника питания. Это источник, у которого фазные напряжения одинаковы по амплитуде и частоте, но сдвинуты относительно друг друга на угол 2π/3 (это касается и линейных напряжений). Фазное напряжение – напряжение между началом фазы и нейтральной точкой. Линейные напряжения – напряжения между началами двух фаз.

2. Расчет трехфазных электрических цепей зависит от способа соединения и характера нагрузки. Нагрузка может быть соединена либо звездой с нейтральным или без нейтрального провода, либо треугольником. Нагрузка может быть симметричной, если комплексы сопротивлений всех фаз равны, и несимметричной, если данное условие не выполняется. При симметричной нагрузке по закону Ома рассчитывается ток одной из фаз, токи в двух других будут сдвинуты относительно рассчитанного на угол 2π/3. При несимметричной нагрузке, соединенной треугольником или звездой с нейтральным проводом, при $Z_н = 0$ по закону Ома рассчитываются токи в каждой из фаз. При

несимметричной нагрузке, соединенной в звезду, и $\underline{Z}_{\text{н}} \neq 0$ вначале определяется напряжение между нейтральными точками источника и нагрузки, а после этого по закону Ома для активного участка электрической цепи – токи в фазах.

3. Мощность трехфазной цепи определяется как сумма мощностей фаз.

2.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

2.2.1. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Цель: освоить применение классического (графо-аналитического) метода расчета цепей гармонического тока. Получить навыки построения векторных диаграмм и их использования для расчета цепей синусоидального тока.

Контрольные вопросы

1. Какими параметрами характеризуются синусоидальные функции?
2. Что понимают под разностью начальных фаз? Как определяется данная величина?
3. Каково соотношение между амплитудным, действующим и средним значениями синусоидальной функции?
4. Какова связь между синусоидальной функцией и вектором, изображающим эту функцию?
5. Что называют векторной диаграммой?
6. Какова взаимосвязь между током и напряжением переменного тока для идеализированных пассивных элементов электрической цепи?
7. Как выглядят временные и векторные диаграммы для идеализированных пассивных элементов схемы электрической цепи?
8. Как определяется сопротивление (проводимость) идеализированных пассивных элементов синусоидальному току?
9. Как определяются активное, реактивное и полное сопротивления цепи, содержащей несколько последовательно включенных элементов?
10. Как определяются активная, реактивная и полная проводимости цепи, содержащей несколько последовательно включенных элементов?
11. Как определяются активная, реактивная и полная мощности электрической цепи? Какова связь между ними?

12. Какой вид имеют треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей для участка цепи с последовательным соединением R и L (R и C)?

13. Какой вид имеют треугольники токов, проводимостей и мощностей для участка цепи с параллельным соединением R и L (R и C)?

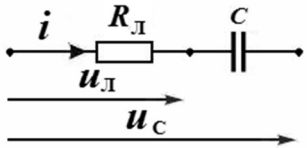
14. Что называют углом нагрузки и коэффициентом мощности цепи (потребителя)?

15. Каково экономическое значение коэффициента мощности? Как повысить коэффициент мощности цепи?

16. Как рассчитать емкость конденсатора, включаемого для полной компенсации реактивной энергии?

17. Как изменится потребляемый из сети ток при повышении коэффициента мощности цепи?

Задача 1. В сеть с переменным напряжением $U_{\text{с}} = 220$ В включается электрическая лампа, номинальное напряжение которой $U_{\text{НЛ}} = 127$ В, мощность $P_{\text{НЛ}} = 60$ Вт. Для «погашения» части напряжения последовательно с лампой включается конденсатор. Определить необходимую емкость конденсатора, если $f = 50$ Гц.



Решение

В схеме замещения электрической цепи (см. рисунок) лампа представляется активным сопротивлением $R_{\text{Л}}$.

Мощность лампы определяется выражением

$$P_{\text{НЛ}} = \frac{U_{\text{НЛ}}^2}{R_{\text{Л}}} \rightarrow R_{\text{Л}} = \frac{U_{\text{НЛ}}^2}{P_{\text{НЛ}}} = \frac{127^2}{60} = 268{,}8 \text{ Ом}.$$

Ток в электрической цепи

$$I = U_{\text{НЛ}} / R_{\text{Л}} = 127 / 268{,}8 = 0{,}472 \text{ А}.$$

Модуль полного сопротивления цепи

$$Z = \frac{U_{\text{с}}}{I} = \sqrt{R_{\text{Л}}^2 + X_C^2} = \frac{220}{0{,}472} = 465{,}7 \text{ Ом} \rightarrow$$

$$\rightarrow X_C = \sqrt{Z^2 - R_{\text{Л}}^2} = 380{,}3 \text{ Ом}.$$

Величина емкости конденсатора

$$C = 1/2\pi f X_C = 1/2\pi \cdot 50 \cdot 380{,}3 = \ 8{,}3 \text{ мкФ}.$$

Ответ: 8,3 мкФ.

Задача 2. Цепь состоит из последовательного соединенных активного сопротивления, индуктивности L = 0,142 Гн и емкости C. Напряжение на зажимах цепи 120 В, ток цепи 4 А, активная мощность 240 Вт, частота 50 Гц.

Определить величины активного сопротивления и емкости. Объяснить, почему существует два значения емкости, удовлетворяющих условию.

Решение

Модуль полного сопротивления цепи

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{120}{4} = 30 \text{ Ом}.$$

Активное сопротивление цепи

$$R = P / I^2 = 240 / 4^2 = \ 15 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление индуктивности

$$X_L = 2\pi f L = \ 44{,}6 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление цепи

$$X = \pm\sqrt{Z^2 - R^2} = \pm\sqrt{30^2 - 15^2} = \pm 26 \text{ Ом}.$$

Реактивное емкостное сопротивление

$$X_C = X_L - X \rightarrow X_{C1} = \ 18{,}6 \text{ Ом}; \quad X_{C2} = \ 70{,}6 \text{ Ом}.$$

Значения емкости:

$$C = \frac{1}{2\pi f \, X_C}, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 18{,}6} = 171 \text{ мкФ};$$

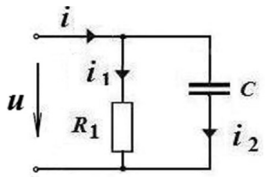
$$C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 70{,}6} = 45 \text{ мкФ}.$$

Получены два значения величины емкости, удовлетворяющие условию, это объясняется тем, что сопротивление цепи с Z = 30 Ом

может иметь как активно-индуктивный характер, так и активно емкостный (R = 15 Ом, X = ±26 Ом).

Ответ: C_1 = 171 мкФ; C_2 = 45 мкФ.

Задача 3. Две параллельные ветви подключены к источнику синусоидального напряжения. Определить напряжение u, токи i и i_1, если



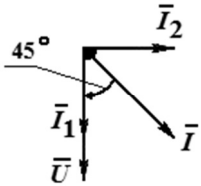
$i_2 = 5\sin\omega t$ А; R = 10 Ом; X_C = 10 Ом.

Решение

Построим векторную диаграмму токов и напряжений для заданной схемы. Последовательность построения $\overline{I}_2 \to \overline{U} \to \overline{I}_1 \to \overline{I}$.

Вектор тока $\overline{I}_2$ имеет длину $5/\sqrt{2}$ и расположен горизонтально (начальная фаза равна нулю).

Вектор напряжения на емкости (входного напряжения) $\overline{U}$ имеет длину $X_C I_2 = 50/\sqrt{2}$ и отстает от вектора тока $\overline{I}_2$ на угол 90°. Вектор тока через резистор $\overline{I}_1$ совпадает по направлению с вектором напряжения и имеет длину $\overline{U}/R = 5/\sqrt{2}$. Вектор входного тока $\overline{I}$ определяется как сумма векторов токов через резистор $\overline{I}_1$ и емкость $\overline{I}_2$. Векторы имеют равную длину $5/\sqrt{2}$ и расположены относительно друг друга под прямым углом. Следовательно, длина вектора $\overline{I}$ равна 5 А и опережает вектор входного напряжения на угол 45°.



В соответствии с векторной диаграммой записываем мгновенные значения искомых величин:

$$u = 50\sin(\omega t - 90°)\ \text{В};\quad i_1 = 5\sin(\omega t - 90°)\ \text{А};$$

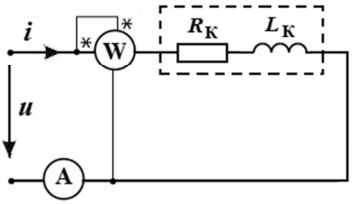
$$i = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 45°)\ \text{А}.$$

Ответ: $u = 50\sin(\omega t - 90°)$ В; $i_1 = 5\sin(\omega t - 90°)$ А;

$i = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 45°)$ А.

Задача 4. Катушка индуктивности подключена к сети с напряжением U = 100 В. Ваттметр показывает значение $P_К$ = 600 Вт, амперметр – значение I = 10 А. Определить параметры катушки $R_К$, $L_К$.

Решение



Вычисляем модуль полного сопротивления катушки:

$$Z_К = U / I = 100 / 10 = \ 10 \text{ Ом}.$$

По показаниям ваттметра и амперметра определяем активное сопротивление катушки $R_К$. Ваттметр, включенный на входе цепи, измеряет потребляемую цепью активную мощность, которая в данной схеме потребляется активным сопротивлением $R_К$:

$$R_К = P_К / I^2 = 600 / 100 = \ 6 \text{ Ом}.$$

Зная величину модуля полного сопротивления катушки и ее активное сопротивление, из треугольника сопротивлений определяем реактивное сопротивление катушки $X_К$:

$$Z_К = \sqrt{R_К^2 + X_К^2}\ ;\ X_К = \sqrt{Z_К^2 - R_К^2} = \sqrt{100 - 36} = \ 8 \text{ Ом}.$$

Найдем индуктивность катушки $L_К$:

$$X_К = 2\pi f L_К; \quad L_К = X_К / (2\pi f) = 8 / (2\pi \times 50) = \ 0{,}025 \text{ Гн}.$$

Ответ: $R_К$ = 6 Ом; $L_К$ = 0,025 Гн.

Задача 5. К электрической сети напряжением U = 220 В и частотой f = 50 Гц подключены параллельно два электроприбора, потребляющие активные мощности P_1 = 0,3 кВт и P_2 = 0,4 кВт, имеющие коэффициенты мощности $\cos\varphi_1$ = 0,6 и $\cos\varphi_2$ = 0,7 соответственно, и электропечь мощностью P_3 = 0,5 кВт.

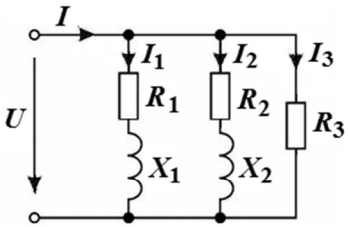
1. Начертить электрическую схему замещения цепи.

2. Определить токи каждого устройства и ток, потребляемый схемой от сети, ее активную, реактивную и полную мощности.

3. Определить емкость конденсатора, подключаемого параллельно нагрузке для повышения $\cos\varphi$ цепи до значения 0,9, рассчитать ток, потребляемый схемой от источника в этом режиме.

Решение

1. Схема замещения каждого электрического прибора может быть представлена в виде последовательного соединения резистивного и индуктивного элементов, так как в приборе происходит необратимое преобразование электрической энергии в механическую и тепловую и колебательный обмен энергией между магнитным полем потребителей и сетью. Схема замещения электропечи представляется активным сопротивлением. Схема замещения всей цепи показана на рисунке.



2. Токи устройств рассчитываются по паспортным данным:

$$I_1 = \frac{P_1}{U\cos\varphi_1} = \frac{0{,}3\cdot 10^3}{220\cdot 0{,}6} = 2{,}27\,\text{А}; \quad I_2 = \frac{P_2}{U\cos\varphi_2} = \frac{0{,}4\cdot 10^3}{220\cdot 0{,}7} = 2{,}6\,\text{А};$$

$$I_3 = \frac{P_3}{U} = \frac{0{,}5\cdot 10^3}{220} = 2{,}27\,\text{А}.$$

Сдвиги токов ветвей по фазе по отношению к напряжению:

$$\varphi_1 = 53{,}1°;\ \varphi_2 = 45{,}5°;\ \varphi_3 = 0°.$$

Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 300 + 400 + 500 = 1200\ \text{Вт}.$$

Реактивные мощности электроприборов:

$$Q_1 = UI_1\sin\varphi_1 = 220 \cdot 2{,}27 \cdot 0{,}8 = 399\ \text{вар};$$

$$Q_2 = UI_2\sin\varphi_2 = 220 \cdot 2{,}6 \cdot 0{,}713 = 407\ \text{вар}.$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = Q_1 + Q_2 = 399 + 407 = 806\ \text{вар}.$$

Полная мощность цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \pm\sqrt{1200^2 + 806^2} = 1445\ \text{ВА}.$$

Ток, потребляемый схемой от сети,

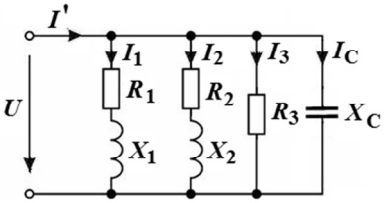
$$I = S / U = 1445 / 220 = 6{,}57 \text{ А}.$$

Коэффициент мощности схемы

$$\cos\varphi = P / S = 1200 / 1445 = 0{,}83.$$

3. Рассчитаем емкость конденсатора, необходимую для повышения коэффициента мощности нагрузки сети до $\cos\varphi' = 0{,}9$.

Включение конденсатора параллельно нагрузке не изменяет ее активную мощность, но позволяет уменьшать реактивную и полную мощность, потребляемую всей схемой от источника. Поэтому по активной мощности цепи и заданному значению $\cos\varphi'$ определим полную мощность цепи:



$$S' = P / \cos\varphi' = 1200 / 0{,}9 = 1333 \text{ ВА}.$$

Реактивная мощность цепи

$$Q' = \sqrt{S'^2 - P^2} = \sqrt{1333^2 - 1200^2} = 580 \text{ вар}.$$

Реактивная мощность всей цепи равна алгебраической сумме реактивных мощностей ее участков. В данном случае $Q' = Q - Q_C$, поэтому мощность конденсатора

$$Q_C = Q - Q' = 806 - 580 = 226 \text{ вар}.$$

Ток в цепи конденсатора и его сопротивление:

$$I_C = Q_C / U = 226 / 220 = 1{,}03 \text{ А};$$

$$X_C = U / I_C = 220 / 1{,}03 = 214 \text{ Ом}.$$

Емкость конденсатора

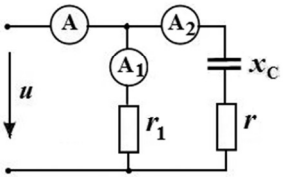
$$C = 1 / (2\pi f X_C) = 1 / (2\pi \cdot 50 \cdot 214) = 14{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 14{,}9 \text{ мкФ}.$$

Результирующий потребляемый цепью ток при подключении к нагрузке компенсирующей емкости

$$I' = S' / U = 1333 / 220 = \ 6{,}06 \text{ А}.$$

Ответ: $S' = \ 1333$ ВА; $Q' = \ 580$ вар; $I' = \ 6{,}06$ А.

Задача 6. Известны показания амперметров:

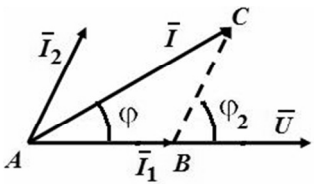


$$I = 2\sqrt{3} \text{ А}; \quad I_1 = I_2 = 2 \text{ А}.$$

Определить значения R и X_C; коэффициент мощности цепи $\cos\varphi$, если $R_1 = 50$ Ом.

Решение

Построим векторную диаграмму для заданной цепи. Построение начинаем с вектора входного напряжения, так как имеем параллельное соединение ветвей. Вектор тока I_1 совпадает по направлению с вектором входного напряжения, так как сопротивление ветви чисто активное. Вектор тока I_2 опережает вектор входного напряжения, потому что ветвь носит активно-емкостный характер. Вектор входного тока $\overline{I}$ равен сумме векторов токов параллельных ветвей ($\overline{I}_1$ и $\overline{I}_2$) в соответствии с первым законом Кирхгофа.



Векторы токов образуют треугольник *ABC*. Применив теорему косинусов, определим угол *ABC* (ψ):

$$\cos\psi = \frac{I_1^2 + I_2^2 - I^2}{2 I_1 I_2} = -0{,}5 \rightarrow \psi = 120°.$$

Угол разности фаз между входным напряжением и током I_2 (в $r - C$ ветви)

$$\varphi_2 = 180° - \psi = 60°.$$

Модуль полного сопротивления $r - C$ ветви

$$Z_2 = R_1 I_1 / I_2 = \ 50 \text{ Ом}.$$

Активная составляющая сопротивления $R = Z_2 \cos\varphi_2 =$ 25 Ом, емкостное сопротивление ветви $X_C = Z_2 \sin\varphi_2 =$ 43,3 Ом.

Определим коэффициент мощности цепи. Треугольник *ABC* равнобедренный $(I_1 = I_2)$, следовательно, угол разности фаз (между векторами входного напряжения и входного тока) φ = 30°. Коэффициент мощности цепи $\cos\varphi = 0{,}866$.

Ответ: $R = 25$ Ом; $X_C = 43{,}3$ Ом; $\cos\varphi = 0{,}866$.

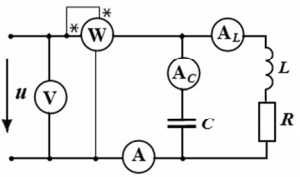
Дополнительные задачи

Задача 1. В последовательном контуре с реальной катушкой индуктивности (R = 50 Ом; L = 20 мГн) и конденсатором (C = 1 мкФ) задан ток $i = 0{,}5\cos 10^4 t$ А.

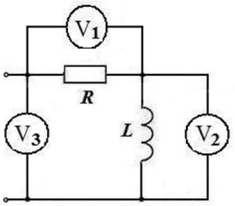
Определить мгновенные значения напряжений на катушке и на входе цепи.

Ответ: $u_K = 103\cos(10^4 t + 76°)$ В; $u = 66\cos(10^4 t + 63{,}5°)$ В.

Задача 2. Определить показания амперметров (электромагнитной системы) и ваттметра, если вольтметр показывает 100 В; f = 50 Гц; R = 10 Ом; L = 0,2 Гн; C = 40 мкФ.

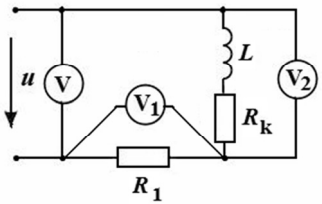


Ответ: I = 0,388 А, I_L = 1,57 А, I_C = = 1,25 А, P = 27,3 Вт.



Задача 3. В цепи R – L известны показания вольтметров U_1 = 100 В; U_2 = 150 В и сопротивление R = 10 Ом. Определить показание третьего вольтметра и индуктивность, если частота тока f = 50 Гц.

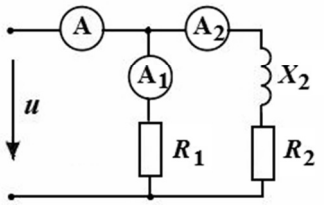
Ответ U_3 = 180 В; L = 47,7 мГн.



Задача 4. Вольтметры электромагнитной системы показывают: V = 220 В, V_1 = 110 В, V_2 = 138 В. Определить параметры катушки индуктивности, если сопротивление R_1 = 22 Ом.

Ответ: Z_K = 27,6 Ом; R_K = 16,63 Ом; X_K = 22,75 Ом.

Задача 5. Показания амперметров электромагнитной системы: I_A = 6,5 А; I_{A_1} = 4 А; I_{A_2} = 3,5 А. Определить мощность, расходуемую катушкой индуктивности (R_2, X_2), если сопротивление резистора R_1 = 30 Ом.



Ответ: *S* = 780 ВА; *P* = 690 Вт; *Q* = 364 вар.

2.2.2. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Цель: изучить методику расчета символическим методом линейных цепей синусоидального тока. Получить практические навыки расчета разветвленных цепей синусоидального тока.

Контрольные вопросы

1. Каковы принципы расчета цепей синусоидального тока комплексным методом?

2. Чему равно комплексное эквивалентное сопротивление участка электрической цепи, содержащего последовательное соединение резистора, катушки индуктивности и конденсатора?

3. Чему равна комплексная эквивалентная проводимость участка электрической цепи, содержащего параллельное соединение резистора, индуктивности и конденсатора?

4. Как рассчитать комплексы действующих токов в двух параллельных ветвях, если известна комплексная амплитуда тока в неразветвленной части цепи?

5. Как записывается выражение баланса мощностей в цепи синусоидального тока?

6. Что называется топографической диаграммой?

7. Каков порядок построения топографической диаграммы?

Задача 1. Записать закон изменения напряжений во времени, если известны их комплексные значения:

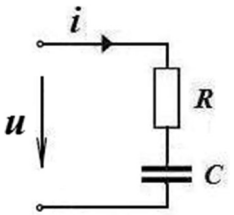
$$\underline{U}_{m1} = 10e^{-j30^\circ};\ \underline{U}_{m2} = (5 + j7);\ \underline{U}_3 = (-5 + j7).$$

Ответ: $u_1(t) = 10\sin(\omega t - 30^\circ)$ В; $u_2(t) = 8{,}6\sin(\omega t + 54{,}46^\circ)$ В; $u_3(t) = 8{,}6\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 126{,}14^\circ)$ В.

Задача 2. Ток на входе пассивного двухполюсника, сопротивление которого имеет емкостный характер, при напряжении $u = 1\sin 5000t$ В равен $i = 0{,}5\sin(5000t + \pi/6)$ А.

Как изменится ток, если частоту напряжения уменьшить вдвое?

Решение



$$\underline{Z} = \underline{U}_m / \underline{I}_m = 1e^{j0^\circ} / 0{,}5e^{j30^\circ} =$$

$$= 2e^{-j30^\circ} = (1{,}73 - j)\ \text{Ом},$$

$R = 1{,}73$ Ом; $X_C = 1$ Ом.

При ω′ = 2500 рад/с $R' = 1{,}73$ Ом; $X'_C = 2$ Ом;

$$\underline{Z}' = R' - jX'_C = 1{,}73 - j2 = 2{,}644e^{-j49^\circ}\ \text{Ом};$$

$$\underline{I}'_m = \underline{U}_m / \underline{Z}' = 1e^{j0^\circ} / 2{,}644e^{-j49^\circ} = 0{,}378e^{j49^\circ}\ \text{А}.$$

Ответ: $i' = 0{,}378\sin(2500t + 49^\circ)$ А.

Задача 3. Определить активную, реактивную и полную мощности пассивного двухполюсника, если напряжение и ток на его входе равны: $u = 14{,}1\sin(314t + 80^\circ)$ В; $i = 14{,}1\sin(314t + 20^\circ)$ А.

Решение

$$\underline{S} = \underline{U}\,\tilde{\underline{I}} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ =$$

$$= 10e^{j80^\circ}\,10e^{-j20^\circ} = 100\,e^{j60^\circ} = (50 + j86{,}6)\ \text{ВА};$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

$S = UI = 100$ ВА; $P = UI\cos\varphi = 50$ Вт; $Q = UI\sin\varphi = 86{,}6$ вар.

Ответ: $S = 100$ ВА; $P = 50$ Вт; $Q = 86{,}6$ вар.

Задача 4. Ток катушки, напряжение на входе которой $u = 120\sin 1000t$ В, равен $i = 8\sin(1000t - 53^\circ)$ А.

Как изменится ток, если частоту напряжения уменьшить вдвое? Определить активную, реактивную и полную мощности цепи в этом случае.

Решение

$$\underline{Z}_\text{К} = \underline{U}_m / \underline{I}_m = 120e^{j0^\circ} / 8e^{-j53^\circ} = 15e^{j53^\circ} = (9 + j12)\ \text{Ом},$$

$$R_\text{К} = 9\ \text{Ом};\ X_{L\text{К}} = 12\ \text{Ом}.$$

При $\omega' = 500$ рад/с $R'_\text{К} = 9$ Ом; $X'_{L\text{К}} = \omega' L = \omega L / 2 = 6$ Ом;

$$\underline{Z}'_\text{К} = R'_\text{К} + jX'_{L\text{К}} = 9 + j6 = 10{,}8e^{j33{,}7^\circ}\ \text{Ом};$$

$$\underline{I}'_m = \underline{U}_m / \underline{Z}'_\text{К} = 120e^{j0^\circ} / 10{,}8e^{j\ 33{,}7^\circ} = 11e^{-j\ 33{,}7^\circ}\ \text{А};$$

$$i' = 11\sin(500t - 33{,}7^\circ)\ \text{А};$$

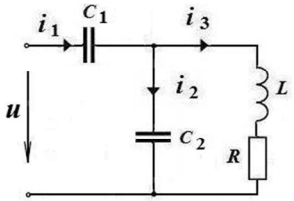
$$\underline{S}'_\text{К} = \underline{U}\,\tilde{\underline{I}} = \left(\frac{120}{\sqrt{2}} \cdot \frac{11}{\sqrt{2}}\right) e^{j0^\circ} \cdot e^{j\ 33{,}7^\circ} = 660e^{j33{,}7^\circ}\ \text{ВА};$$

$$P'_\text{К} = \text{Re}\,[S'] = 544{,}5\ \text{Вт};\ Q'_{L\text{К}} = \text{Im}\,[\underline{S}'] = 363\ \text{вар}.$$

Ответ: $i' = 11\sin(500t - 33{,}7^\circ)$ А; $P'_\text{К} = 544{,}5$ Вт; $Q'_{L\text{К}} = 363$ вар.

Задача 5. Напряжение на конденсаторе C_1 равно $u_1 = 5\sqrt{2}\cdot\sin 10^5 t$ В.

Определить $\underline{U}$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, если C_1 = 10 мкФ; C_2 = 5 мкФ; R = 1 Ом; L = 0,02 мГн.



Решение

$$\underline{U}_1 = 5e^{j0^\circ}\ \text{В};$$

$$X_{C1} = 1/\omega C_1 = 1/10^5\cdot 10\cdot 10^{-6} = 1\ \text{Ом};$$

$$X_{C2} = 1/\omega C_2 = 2\ \text{Ом};$$

$$X_L = \omega L = 10^5\cdot 0{,}02\cdot 10^{-3} = 2\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = -jX_{C2} = -j2\ \text{Ом};\quad \underline{Z}_3 = R + jX_L = (1+j2)\ \text{Ом};$$

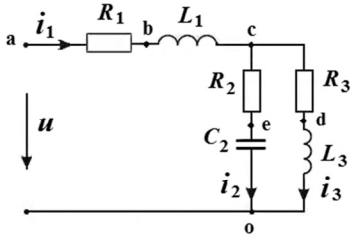
$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / -jX_{C1} = 5/(-j1) = 5e^{j90^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1\,\underline{Z}_3/(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3) = 5e^{j\,90^\circ}(1+j2)/(-j2+1+j2) = 11{,}18e^{j\,153^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1\,\underline{Z}_2/(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3) = 5e^{j90^\circ}(-j2)/(-j2+1+j2) = 10\ \text{А};$$

$$\underline{U} = (-jX_{C1})\underline{I}_1 + (-jX_{C2})\underline{I}_2 = 25e^{j53^\circ}\ \text{В}.$$

Ответ: $\underline{U} = 25e^{j53^\circ}$ В; $\underline{I}_1 = 5e^{j90^\circ}$ А; $\underline{I}_2 = 11{,}18e^{j153^\circ}$; $\underline{I}_3 = 10$ А.



Задача 6. Рассчитать токи в ветвях электрической цепи синусоидального тока, показанной на рисунке, если U = 120 В, R_1 = 10 Ом, R_2 = 24 Ом, R_3 = 15 Ом, L_1 = 19,1 мГн, L_3 = 63,5 мГн, C_2 = 455 мкФ, f = 50 Гц.

Проверить баланс мощностей. Построить топографическую диаграмму.

Решение

Комплексные сопротивления ветвей схемы:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 10 + j2\pi\cdot 50\cdot 19{,}1\cdot 10^{-3} = 10 + j6 = 11{,}6e^{j31^\circ}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_2 = 24 - j10^6 / 2\pi \cdot 50 \cdot 455 = 24 - j7 = 25e^{-j16^\circ 15'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = 15 + j2\pi \cdot 50 \cdot 63{,}5 \cdot 10^{-3} = 15 + j20 = 25e^{j53^\circ 05'} \text{ Ом}.$$

Комплексное эквивалентное сопротивление цепи относительно входных зажимов:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \ /(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) =$$

$$= 10 + j6 + (24 - j7)(15 + j20) / (39 + j13) =$$

$$= 24{,}4 + j10{,}8 = 26{,}7e^{j23^\circ 55'} \text{ Ом}.$$

Ток в неразветвленной части цепи (так как начальная фаза входного напряжения не задана, то принимаем ее равной нулю):

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \ / \underline{Z}_1 = 120 / 26{,}7e^{j23^\circ 55'} = 4{,}5e^{-j23^\circ 55'} \text{ А}.$$

Токи I_2 и I_3 в параллельных ветвях можно выразить через ток в неразветвленной части цепи по «формуле параллельного разброса»:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) =$$

$$= 4{,}5e^{-j23^\circ 55'}(15 + j20) / (39 + j13) = 2{,}74e^{j10^\circ 45'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) =$$

$$= 4{,}5e^{-j23^\circ 55'}(24 - j7) / (39 + j13) = 2{,}74e^{-j58^\circ 35'} \text{ А}.$$

Мощность источника напряжения

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} =$$

$$= 120 \cdot 4{,}5e^{j23^\circ 55'} = 540e^{j23^\circ 55'} = (494 + j219) \text{ ВА}.$$

Активная мощность потребителей

$$P_{\text{потр}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 10 \cdot 4{,}5^2 + 24 \cdot 2{,}74^2 + 15 \cdot 2{,}74^2 = 494 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность потребителей

$$Q_{\text{потр}} = X_1 I_1^2 - X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2 = 6 \cdot 4{,}5^2 - 7 \cdot 2{,}74^2 + 20 \cdot 2{,}74^2 = 219 \text{ вар.}$$

Таким образом, баланс мощностей выполняется.

Построим векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений для решенной задачи:

$$\underline{\varphi}_0 = 0;\ \underline{\varphi}_e = \underline{\varphi}_0 - jX_2\underline{I}_2 = -j7 \cdot 2{,}74e^{j10°45'} =$$

$$= 19{,}8e^{-j79°15'} = (3{,}7 - j19{,}45) \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_e + R_2\underline{I}_2 = (3{,}7 - j19{,}45) + 24 \cdot 2{,}74e^{j10°45'} = (68{,}3 - j7{,}18) \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_d = \underline{\varphi}_0 + jX_{L3}\underline{I}_3 = j20 \cdot 2{,}74e^{-j58°35'} =$$

$$= 54{,}8e^{j31°25'} = (46{,}7 + j28{,}63) \text{ В};$$

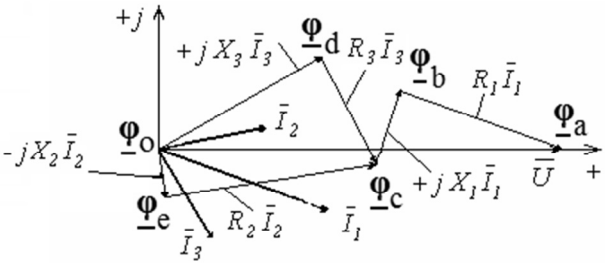
$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + R_3\underline{I}_3 = (46{,}7 + j28{,}63) + 15 \cdot 2{,}74e^{-j58°35'} =$$

$$= (68{,}3 - j7{,}18) \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + jX_1\underline{I}_1 = (68{,}3 - j7{,}18) + j6 \cdot 4{,}5e^{-j23°55'} = (79{,}3 + j17{,}5) \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + R_1\underline{I}_1 = (79{,}3 + j17{,}5) + 10 \cdot 4{,}5e^{-j23°55'} =$$

$$= (120{,}3 - j0{,}5) \approx 120 \text{ В}.$$



Ответ: $\underline{I}_1 = 4{,}5e^{-j23°55'}$ А; $\underline{I}_2 = 2{,}74e^{j10°45'}$ А;

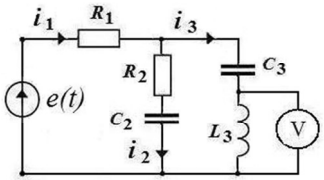
$\underline{I}_3 = 2{,}74e^{-j58°35'}$ А; $\underline{S}_{\text{ист}} = S_{\text{потр}} = (494 + j219)$ ВА.

Дополнительные задачи

Задача 1. В последовательном контуре с реальной катушкой индуктивности (R = 50 Ом; L = 20 мГн) и конденсатором (C = 1 мкФ) задан ток $i = 0{,}5\cos 10^4 t$ А.

Определить мгновенные значения напряжений на катушке и на входе цепи.

Ответ: $u_{\text{К}} = 103\cos(10^4 t + 76°)$ В; $u = 66\cos(10^4 t + 63{,}5°)$ В.



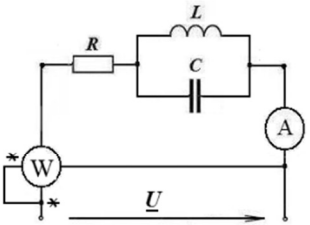
Задача 2. В цепи с $R_1 = 30$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $X_{C2} = 60$ Ом; $X_{C2} = X_{L3} = 20$ Ом; $e = 30\sin(314t + 90°)$ В.

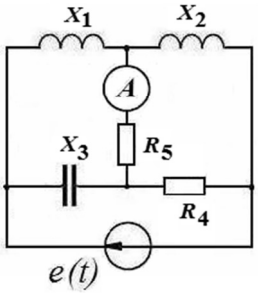
Определить показание вольтметра.

Ответ: $U = 14{,}1$ В.

Задача 3. Определить показания приборов в цепи с $R = X_L = 5$ Ом; $X_C = 2{,}5$ Ом при $u = 100\sin\omega t$ В.

Ответ: $I = 10$ А; $P = 500$ Вт.





Задача 4. Определить показание амперметра методом эквивалентного активного двухполюсника, если $E = 10$ В; $X_1 = X_2 = 5$ Ом; $X_3 = R_4 = 10$ Ом; $R_5 = 2{,}5$ Ом.

Ответ: 0,632 А.

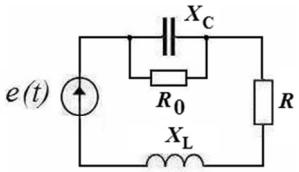
2.2.3. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМАХ

Цель: получить навыки расчета резонансных режимов в цепях синусоидального тока.

Контрольные вопросы

1. Каково условие резонанса напряжений?
2. Как определить резонансную частоту неразветвленной электрической цепи?
3. Как определить частоту резонанса напряжений разветвленной электрической цепи, параметры которой (R, L, C) заданы?
4. Каковы свойства цепи при резонансе напряжений (характер и величина входного сопротивления, тока в неразветвленной части цепи, напряжения на элементах цепи)?
5. Каково условие резонанса токов?
6. Каковы свойства цепи при резонансе токов?

Задача 1. Определить X_C, при котором цепь будет находиться в состоянии резонанса, и ток через источник в этом режиме, если: E = 10 В; R = 15 Ом; X_L = 5 Ом; R_0 = = 10 Ом.



Решение

В цепи возможен резонанс напряжений, условие резонанса: $\mathrm{Jm}[Z_{\text{вх}}] = 0$.

Двухполюсник, состоящий из параллельного соединения X_C и R_0, представим последовательной схемой замещения элементов $X_{C\,\text{экв}}$ и $R_{\text{экв}}$. Условие резонанса для полученной схемы принимает вид $\mathrm{Jm}[Z_{\text{вх}}] = X_L - X_{C\,\text{экв}} = 0$ или

$$X_L = X_{C\,\text{экв}} = \frac{b_C}{y^2} = \frac{1/X_C}{1/R_0^2 + 1/X_C^2} = \frac{R_0^2 X_C}{R_0^2 + X_C^2}, \rightarrow$$

$$\rightarrow X_C^2 X_L - X_C R_0^2 + X_L R_0^2 = 0.$$

Из решения уравнения: X_C = 10 Ом.

Входное сопротивление цепи, при резонансе:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R + R_{\text{экв}};$$

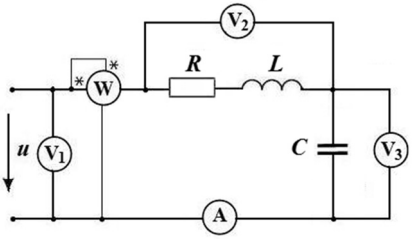
$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R + \frac{g}{y^2} = R + \frac{1/R_0}{1/R_0^2 + 1/X_C^2} = 20 \text{ Ом}.$$

Действующее значение тока через источник $I = E / Z_{\text{вх}}$ = 0,5 А.

Ответ: X_C = 10 Ом; I = 0,5 А.

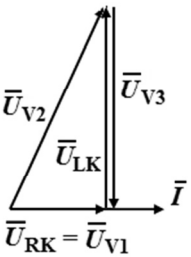
Задача 2. Цепь находится в состоянии резонанса. Частота сети f = 50 Гц. Даны показания вольтметров электромагнитной системы: $U_{\text{V}2}$ = 100 В, $U_{\text{V}3}$ = 80 В и ваттметра электродинамической системы P_{W} = 300 Вт.

Определить параметры элементов цепи: R, L и C.



Решение

1. На рисунке представлена векторная диаграмма для цепи, находящейся в состоянии резонанса напряжений.



Из векторной диаграммы следует, что для векторов действующих значений $\overline{U}_{\text{V}1} = \overline{U}_{\text{V}2} + \overline{U}_{\text{V}3}$ или для действующих значений показаний вольтметров

$$U_{\text{V}1} = \sqrt{U_{\text{V}2}^2 - U_{\text{V}3}^2} = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60 \text{ В}.$$

При резонансе ток $\overline{I}(\overline{I}_{\text{A}})$ и напряжение $\overline{U}_{\text{V}1}$ на входе цепи совпадают по фазе.

Показание ваттметра можно определить двумя способами:

$$P_{\mathrm{W}} = U_{\mathrm{V1}} I_{\mathrm{A}} \cos\varphi = U_{\mathrm{V1}} I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{A}}^2 R, \text{ где } \cos\varphi = 1.$$

Ток амперметра

$$I_{\mathrm{A}} = P_{\mathrm{W}} / U_{\mathrm{V1}} = 300 / 60 = 5 \text{ А}.$$

Величина активного сопротивления катушки индуктивности:

$$R = P_{\mathrm{W}} / I_{\mathrm{A}}^2 = 300 / 25 = 12 \text{ Ом}.$$

Модуль комплексного сопротивления катушки индуктивности

$$Z_{\mathrm{K}} = U_{\mathrm{V2}} / I_{\mathrm{A}} = 100 / 5 = 20 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление индуктивности

$$X_L = \sqrt{Z_{\mathrm{K}}^2 - R^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ Ом}.$$

Величина индуктивности:

$$L = X_L / \omega = 16 / 314 \approx 0{,}051 \text{ Гн}.$$

Реактивное сопротивление емкости

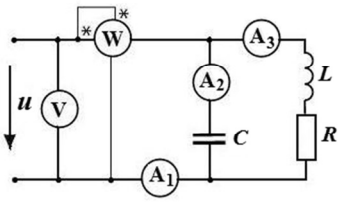
$$X_C = U_{\mathrm{V3}} / I_{\mathrm{A}} = 80 / 5 = 16 \text{ Ом}.$$

Величина емкости

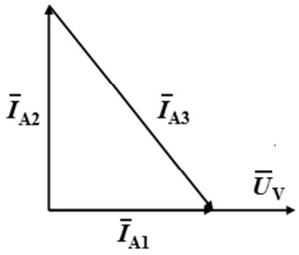
$$C = 1 / \omega X_C = 1 / (314 \cdot 16) = 199 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Ответ: R = 12 Ом; L = 0,051 Гн; $C = 199 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Задача 3. Цепь находится в состоянии резонанса. Частота сети f = 50 Гц. Даны показания приборов электромагнитной системы: I_{A2} = 8 А, I_{A3} = 10 А, P_{W} = 300 Вт.



Определить показания U_{V}, I_{A1} и значения R, L и C.



Решение

Векторная диаграмма токов для цепи, находящейся в состоянии резонанса токов, представлена на рисунке. По первому закону Кирхгофа:

$$\bar{I}_{A1} = \bar{I}_{A2} + \bar{I}_{A3}.$$

Из векторной диаграммы следует, что для действующих значений токов в ветвях

$$I_{A1} = \sqrt{I_{A3}^2 - I_{A2}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ А}.$$

При резонансе ток I_{A1} и напряжение U_V на входе цепи совпадают по фазе, из чего определим показание ваттметра:

$$P_W = U_V I_{A1} \cos\varphi = U_V I_{A1} = I_{A3}^2 R, \text{ где } \cos\varphi = 1.$$

Напряжение вольтметра

$$U_V = P_W / I_{A1} = 300 / 6 = 50 \text{ В}.$$

Величина активного сопротивления катушки индуктивности

$$R = P_W / I_{A3}^2 = 300 / 100 = 3 \text{ Ом}.$$

Модуль комплексного сопротивления катушки индуктивности

$$Z_K = U_V / I_{A3} = 50 / 10 = 5 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление индуктивности

$$X_L = \sqrt{Z_K^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ Ом}.$$

Величина индуктивности

$$L = X_L / \omega = 4 / 314 \approx 0{,}0127 \text{ Гн} = 12{,}7 \text{ мГн}.$$

Реактивное сопротивление емкости

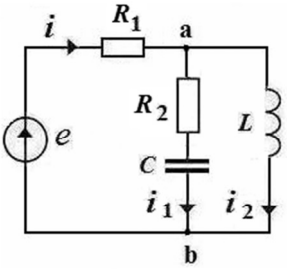
$$X_C = U_V / I_{A2} = 50 / 8 = 6{,}25 \text{ Ом}.$$

Величина емкости

$$C = 1/\omega X_C = 1/(314 \cdot 16) = 510 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф}.$$

Ответ: U_V = 50 В; I_{A1} = 6 А; R = 3 Ом; L = 0,0127 Гн; $C = 510 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Задача 4. Определить мощность, потребляемую цепью в режиме резонанса, индуктивность и токи ветвей, если $u = 24\sqrt{2} \cdot \sin(2000t - 45°)$ В; $R_1 = R_2 = 2$ Ом; X_C = 2 Ом.



Решение

Из условия резонанса токов $\text{Jm}[\underline{Y}_{ab}] = 0$ находим:

$$b_C = b_L;\ \ X_C / \left(R_2^2 + X_C^2\right) = 1/X_L;$$

$$X_L = \left(R_2^2 + X_C^2\right) \Big/ X_C = (4+4)/2 = 4\ \text{Ом};$$

$$L = X_L/\omega = 2\ \text{мГн};$$

$$\underline{Y}_{ab} = g_{ab} = R_2 \Big/ \left(R_2^2 + X_C^2\right) = 2/(4+4) = 0{,}25\ \text{См};$$

$$\underline{Z}_{ab} = 1/\underline{Y}_{ab} = 4\ \text{Ом}.$$

Входной ток цепи

$$\underline{I} = \underline{E}/(R_1 + \underline{Z}_{ab}) = 24e^{-j45°} \Big/ 6 = 4e^{-j45°}\ \text{А},$$

$$i = 4\sqrt{2} \cdot \sin(2000t - 45°)\ \text{А}.$$

Токи i_1 и i_2 рассчитываем по формуле делителя тока (разброса):

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \cdot jX_L / (R_2 - jX_C + jX_L) = 4e^{-j\ 45°} \cdot 4e^{j\ 90°} / (2 + j2) = 4\sqrt{2}\ \text{А},$$

$$i_1 = 8 \sin 2000t\ \text{А}.$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}(R_2 - jX_C)/(R_2 - jX_C + jX_L) = 4e^{-j\ 45^\circ}\ 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}\Big/(2+j2) =$$
$$= 4\sqrt{2}e^{-j135^\circ}\ \text{А},\ i_2 = 4\sqrt{2}\cdot\sin(2000t - 135^\circ)\ \text{А}.$$

Потребляемая цепью мощность

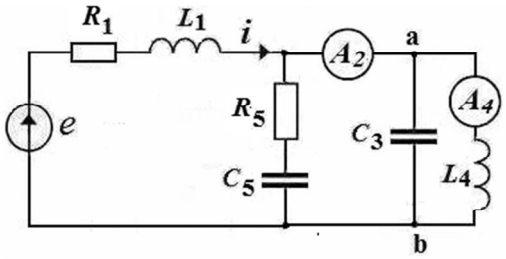
$$P = I^2R_1 + I_1{}^2R_2 = 4^2\cdot 2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot 2 = \ 96\ \text{Вт или}$$

$$P = \text{Re}\left[\underline{E}\cdot\overset{*}{\underline{I}}\right] = \text{Re}[24e^{-j45^\circ}\cdot 4e^{j45^\circ}] = 96\ \text{Вт}.$$

Ответ: $P = 96$ Вт; $L = 2$ мГн; $i = 4\sqrt{2}\cdot\sin(2000t - 45^\circ)$ А;

$i_1 = 8\sin 2000t$ А; $i_2 = 4\sqrt{2}\cdot\sin(2000t - 135^\circ)$ А.

Задача 5. Определить показание амперметра А_4, если E = 20 В; R_1 = 50 Ом; L_1 = 0,2 Гн; C_3 = 10 мкФ; L_4 = 0,1 Гн; C_5 = 5 мкФ; R_5 = 50 Ом, показание амперметра А_2 равно нулю.



Решение

Так как показание амперметра А_2 равно нулю, то в ветвях C_3–L_4 резонанс токов на частоте

$$\omega = 1\Big/\sqrt{L_4C_3} = 1\Big/\sqrt{0{,}1\cdot 10\cdot 10^{-6}} = 10^3\ \text{рад/с}.$$

Тогда

$$X_1 = \ \omega L_1 = \ 200\ \text{Ом};\quad X_4 = \omega L_4 = \ 100\ \text{Ом};$$

$$X_3 = 1/\omega C_3\ = 100\ \text{Ом};\quad X_5\ = 1/\omega C_5\ = 200\ \text{Ом};$$

$$Z_{\text{вх}} = \sqrt{(R_1 + R_5)^2 + (X_1 - X_5)^2} = 100 \text{ Ом};$$

$$I = E / Z_{\text{вх}} = 200 / 100 = 2 \text{ А};$$

$$U_{ab} = I\sqrt{R_5^2 + X_5^2} = 2\sqrt{50^2 + 200^2} = 412{,}3 \text{ Ом};$$

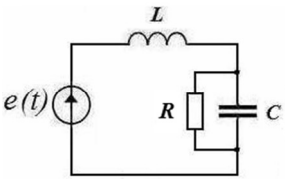
$$I_4 = U_{ab} / X_4 = 412{,}3 / 100 = 4{,}123 \text{ А}.$$

Ответ: $I_4 = 4{,}123$ А.

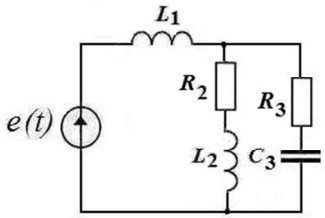
Дополнительные задачи

Задача 1. Цепь находится в состоянии резонанса. При $\omega = 0$ $Z_{\text{вх}}(0) = 5$ Ом; при резонансной частоте $\omega = \omega_0$ $Z_{\text{вх}}(\omega_0) = 2{,}5$ Ом.

Определить параметры R, X_L, X_C.



Ответ: $R = 5$ Ом; $X_L = 2{,}5$ Ом; $X_C = 5$ Ом.

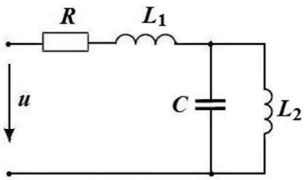


Задача 2. Параметры цепи: $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $L_1 = 6{,}37$ мГн; $C_3 = 637$ мкФ; $f = 50$ Гц.

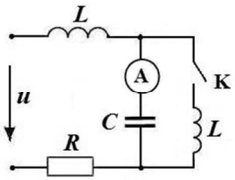
Определить индуктивность L_2, при которой будет иметь место: а) резонанс токов; б) резонанс напряжений.

Ответ: а) 2,07 и 19,6 мГн; б) 25,5 мГн.

Задача 3. Определить резонансные частоты цепи, если $R = 50$ Ом, $C = 40$ мкФ, $L_1 = 0{,}1$ Гн, $L_2 = 0{,}25$ Гн.



Ответ: $\omega_1 = 316{,}2$ рад/с, $\omega_2 = 519{,}6$ рад/с.



Задача 4. Определить показания амперметра при замкнутом и разомкнутом ключе K, если $X_L = X_C = R = 10$ Ом; $U = 10$ В.

Ответ: ключ замкнут – 1 А;
ключ разомкнут – 1 А.

2.2.4. ЦЕПИ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Цель: получить навыки расчета электрических цепей с индуктивно связанными элементами.

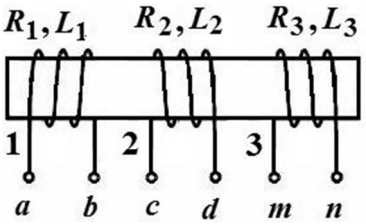
Контрольные вопросы

1. Какие зажимы индуктивно связанных катушек называются одноименными? Как производится разметка зажимов катушек?
2. Что называется коэффициентом связи индуктивно связанных катушек, как он определяется?
3. Какие индуктивно связанные катушки называются согласно включенными, какие – встречно включенными?
4. Как составляются уравнения по законам Кирхгофа для цепей с индуктивно связанными катушками?
5. Каков принцип составления уравнений для цепей с индуктивно связанными катушками по методу контурных токов?
6. Каково правило развязки индуктивных цепей?
7. Каковы особенности составления баланса мощностей для цепей с индуктивно связанными катушками?

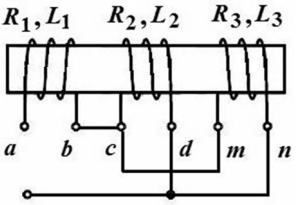
Задача 1

А. Определить одноименные зажимы трех катушек, имеющих общий немагнитный сердечник.

Б. Зажимы катушек соединены между собой в последовательности $b – c$, $d – m$. Изобразить эквивалентную электрическую схему, записать в общем виде выражение входного сопротивления.



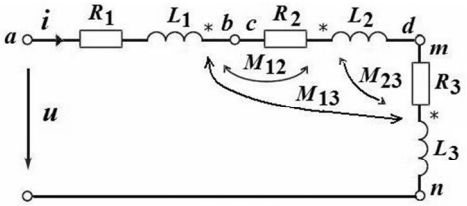
В. Зажимы тех же катушек соединены, как показано на рисунке. Изобразить эквивалентную электрическую схему и составить уравнения по законам Кирхгофа.



Решение

А. Если ориентировать токи одинаковым образом относительно зажимов *a*, *c*, *m*, то магнитные потоки второй и третьей катушек направлены согласно, а первой – встречно:

Б. Эквивалентная электрическая схема:



Входное сопротивление:

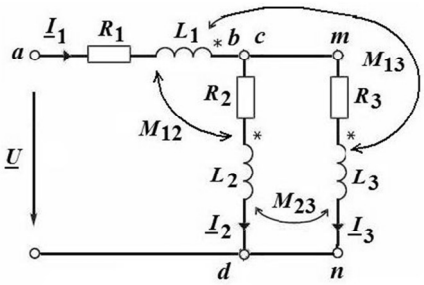
$$Z_{\text{вх}} = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M_{12} - j\omega M_{13} + R_2 +$$

$$+ j\omega L_2 - j\omega M_{12} + j\omega M_{23} + R_3 + j\omega L_3 -$$

$$- j\omega M_{13} + j\omega M_{23} = R_1 + R_2 + R_3 +$$

$$+ j\omega(L_1 + L_2 + L_3 - 2M_{12} - 2M_{13} + 2M_{23}).$$

В. Эквивалентная электрическая схема:



Уравнения по законам Кирхгофа:

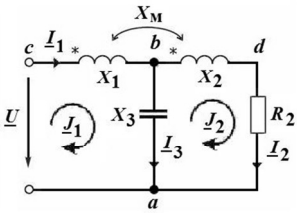
$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0;$$

$$(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M_{12}\underline{I}_2 - j\omega M_{13}\underline{I}_3 +$$

$$+(R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega M_{12}\underline{I}_1 + j\omega M_{23}\underline{I}_3 = \underline{U};$$

$$-(R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega M_{23}\underline{I}_3 + j\omega M_{12}\underline{I}_1 +$$

$$+(R_3 + j\omega L_3)\underline{I}_3 - j\omega M_{13}\underline{I}_1 + j\omega M_{23}\underline{I}_2 = 0.$$



Задача 2. Определить токи электрической цепи и построить топографическую диаграмму, если U = 100 В; $X_1 = X_2 = X_3 =$ = 20 Ом; R_2 = 10 Ом; K = 0,5.

Решение

Уравнения по методу контурных токов:

$$\underline{J}_1(jX_1 - jX_3) - \underline{J}_2(-jX_3) + \underline{J}_2\, jX_M = \underline{U};$$

$$\underline{J}_2(jX_2 - jX_3 + Rr_2) - \underline{J}_1(-jX_3) + \underline{J}_1\, jX_M = 0,$$

где $X_M = K\sqrt{X_1 X_2} = 10$ Ом.

После подстановки численных значений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & j30 \\ j30 & 10 \end{vmatrix} = 900; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & j30 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 100 \\ j30 & 0 \end{vmatrix} = j3000.$$

Контурные токи:

$$\underline{J}_1 = \Delta_1 / \Delta = 1{,}11 \text{ А}; \quad \underline{J}_2 = \Delta_2 / \Delta = -j3{,}33 \text{ А}.$$

Токи в ветвях схемы:

$$\underline{I}_1 = J_1 = 1{,}11 \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = \underline{J}_2 = -j3{,}33 \text{ А}; \quad \underline{I}_3 = \underline{J}_1 - \underline{J}_2 = 3{,}51e^{j71{,}56^\circ} \text{ А}.$$

Для построения топографической диаграммы вычисляем комплексы потенциалов точек схемы, приняв $\varphi_a = 0$:

$$\underline{\varphi}_d = R_2\underline{I}_2 = 10(-j3{,}33) = -j33{,}33 \text{ В};$$

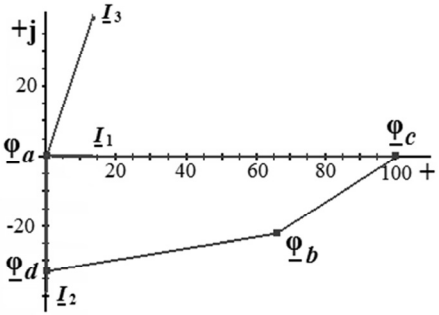
$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_d + (jX_2\underline{I}_2 + j\,X_M\underline{I}_1) =$$

$$= -j33{,}33 + \left[(j\ 20)(-j3{,}33) + (j10)1{,}11\right] = (66{,}66 - j22{,}22) \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_b = -jX_3\underline{I}_3 = -j20 \cdot 3{,}51e^{j71{,}56^\circ} = 70{,}2e^{-j18{,}44^\circ} = (66{,}66 - j22{,}22) \text{ В};$$

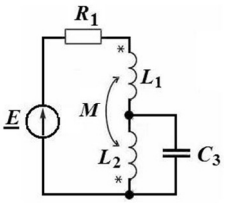
$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_b + (jX_1\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2) =$$

$$= (66{,}66 - j22{,}22) + \left[(j20)\ 1{,}11\ + (j10)(-j3{,}33)\right] = 100 \text{ В}.$$



Ответ: $\underline{I}_1 = 1{,}11$ А; $\underline{I}_2 = -j3{,}33$ А; $\underline{I}_3 = 3{,}51e^{j71{,}56^\circ}$ А.

Задача 3. Определить взаимоиндуктивность M между индуктивно связанными катушками, при которой в цепи имеет место резонанс напряжений, если L_1 = 20 мГн; L_2 = 60 мГн; R_1 = 50 Ом; C_3 = 1,5 мкФ; ω = 10^4 рад/с.



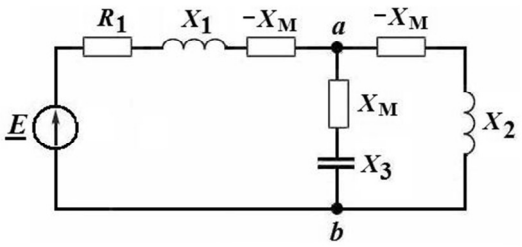
Решение

Определяем сопротивления элементов схемы:

$$X_1 = \omega L_1 = 200 \text{ Ом}; \ X_2 = \omega L_2 = 600 \text{ Ом};$$

$$X_3 = 1/\omega C_3 = 66{,}67 \text{ Ом}.$$

Произведем развязку индуктивной связи (см. эквивалентную схему замещения).



Условие резонанса напряжений:

$$\mathrm{Jm}[\underline{Z}_{\text{вх}}] = 0 \;\text{ или }\; \mathrm{Jm}\left[R_1 + j(X_1 - X_M) + \underline{Z}_{ab}\right] = 0;$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j(X_2 - X_M)\, j(X_M - X_3)}{jX_2 - jX_M + jX_M - jX_3} = \frac{j(600 - X_M)\, j(X_M - 66{,}67)}{j533{,}33} =$$

$$= j\frac{-X_M^2 + 666{,}67X_M - 40\,000}{533{,}33};$$

$$\mathrm{Jm}\,\underline{Z}_{\text{вх}} = 200 - X_M + \frac{-X_M^2 + 666{,}67X_M - 40\,000}{533{,}33} = 0.$$

Получаем квадратное уравнение

$$X_M^2 - 133{,}367X_M - 66666{,}67 = 0,$$

откуда X_M = 333,33 Ом (второй корень X_M = –200 Ом отбрасываем, как не имеющий смысла).

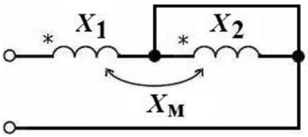
Взаимная индуктивность

$$M = X_M / \omega = 33{,}33 \text{ мГн}.$$

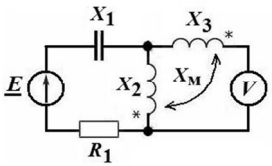
Ответ: M = 33,33 мГн.

Дополнительные задачи

Задача 1. Определить входное сопротивление цепи, где $X_1 = X_2 = 9$ Ом; $X_M = 3$ Ом.



Ответ: $\underline{Z}_{\text{вх}} = j8$ Ом.



Задача 2. Определить показание вольтметра, если $\underline{E} = 100$ В; $X_M = 5$ Ом; $R_1 = X_1 = X_2 = X_3 = 10$ Ом.

Ответ: $U_{\text{V}} = 50$ В.

2.2.5. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Цель: получить навыки расчета трехфазных цепей при несимметричной нагрузке. Усвоить особенности расчета трехфазных цепей при симметричной нагрузке.

Контрольные вопросы

1. Почему при соединении обмоток трехфазного генератора предпочтение отдают схеме звезда?
2. Что называют трехфазной симметричной системой ЭДС?
3. Какая нагрузка называется симметричной, какая равномерной, какая однородной?
4. Каково соотношение между фазовыми и линейными токами и напряжениями при симметричной нагрузке, соединенной звездой и треугольником?
5. В чем особенности расчета трехфазной цепи при соединении симметричной нагрузки звездой?
6. В чем особенности расчета трехфазной цепи при соединении симметричной нагрузки треугольником?
7. Какие основные методы расчета и преобразования лежат в основе расчета трехфазных цепей?

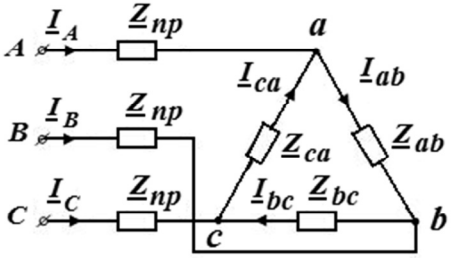
8. Что называют напряжением смещения нейтрали, как оно определяется?

9. В каком случае напряжение смещения нейтрали равно нулю?

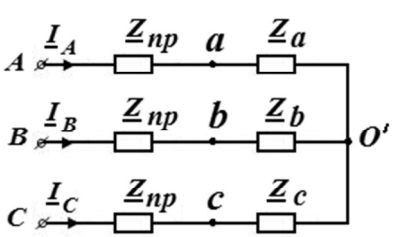
10. Как изменяется положение потенциала нейтральной точки нагрузки при равенстве сопротивлений двух фаз и изменении сопротивления третьей фазы от 0 до ∞?

11. По какой схеме измеряется потребляемая мощность несимметричной трехпроводной трехфазной цепи?

Задача 1. Определить линейные и фазовые токи трехфазной электрической цепи, если $U_Л$ = 380 В; $\underline{Z}_{пр} = (1 + j3)$ Ом; $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = (20 + j15)$ Ом; $\underline{Z}_{ca} =$ 20 Ом.



Решение



Преобразуем треугольник сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду. Сопротивления лучей эквивалентной звезды:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_{ab}\ \underline{Z}_{ca} / (\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}) =$$

$$= (20 + j15)20 / (60 + j30) =$$

$$= 7,45e^{j10,3°}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_b = \underline{Z}_{bc}\ \underline{Z}_{ab} / (\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}) =$$

$$= (20 + j15) \cdot (20 + j15) / (60 + j30) = 9,317e^{j47,2°}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_{ca}\ \underline{Z}_{bc} / (\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}) =$$

$$= 20(20 + j15) / (60 + j30) = 7,45e^{j10,3^\circ}\ \text{Ом}.$$

Определим напряжение смещения нейтрали в эквивалентной схеме замещения:

$$\underline{U}_{0'0} = (\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C) / (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C).$$

Фазные напряжения источника питания:

$$U_\Phi = U_\text{Л}\big/\sqrt{3};\ U_A = 220\ \text{В};\quad U_B = 220e^{-j120^\circ}\ \text{В};$$

$$U_C = 220e^{j120^\circ}\ \text{В}.$$

Проводимости фаз:

$$\underline{Y}_A = \underline{Y}_C = 1 / (\underline{Z}_a + \underline{Z}_\text{пр}) =$$

$$= 1 / (7,45e^{j10,3^\circ} + 1 + j3) = 0,1065e^{-j27,5^\circ}\ \text{См};$$

$$\underline{Y}_B = 1 / (\underline{Z}_b + \underline{Z}_\text{пр}) = 1 / (9,317e^{j47,2^\circ} + 1 + j3) = 0,08152e^{-j53,3^\circ}\ \text{См}.$$

Напряжение смещения нейтрали, с учетом значений фазных напряжений и комплексов полных проводимостей:

$$\underline{U}_{0'0} = 37,45e^{j114,1^\circ}\ \text{В}.$$

Линейные токи:

$$\underline{I}_A = (\underline{U}_A - \underline{U}_{0'0})\underline{Y}_A = (220 - 7,45e^{j114,1^\circ})0,1065e^{-j27,5^\circ} =$$

$$= 25,29e^{-j35,7^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = (\underline{U}_B - \underline{U}_{0'0})\underline{Y}_B = -19,85e^{-j13,8^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = (\underline{U}_C - \underline{U}_{0'0})\underline{Y}_C = -19,51e^{-j86,3^\circ}\ \text{А}.$$

Комплексы потенциалов точек *a*, *b* и *c*:

$$\underline{\varphi}_a = (\underline{U}_A - \underline{Z}_\text{пр}\ \underline{I}_A) = \left[220 - 25,29e^{-j35,7^\circ}(1 + j3)\right] = 162,16e^{-j16,8^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{\varphi}_b = (\underline{U}_B - \underline{Z}_{\text{пр}}\underline{I}_B) = -165,47e^{j50,7^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_c = (\underline{U}_C - \underline{Z}_{\text{пр}}\underline{I}_C) = -181,95e^{-j74^\circ} \text{ В}.$$

Фазные токи нагрузки:

$$\underline{I}_{ab} = (\underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_b) / \underline{Z}_{ab} = (162,16e^{-j16,8^\circ} + 165,47e^{j50,7^\circ}) \big/ (20 + j15) =$$

$$= 10,9e^{-j19,6^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = (\underline{\varphi}_b - \underline{\varphi}_c) / \underline{Z}_{bc} = (-165,47e^{j50,7^\circ} + 181,95e^{-j74^\circ}) \big/ (20 + j15) =$$

$$= -12,31e^{j42,9^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = (\underline{\varphi}_c - \underline{\varphi}_a) / \underline{Z}_{ca} = (-181,95e^{-j74^\circ} - 162,16e^{-j16,8^\circ}) / 20 =$$

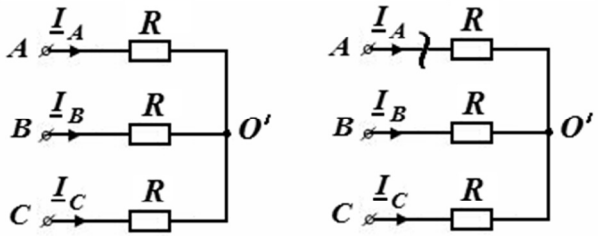
$$= -15,12e^{-j47,2^\circ} \text{ А}.$$

Проверка:

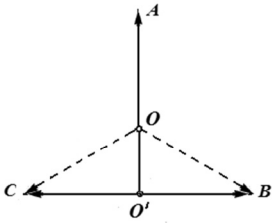
$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 25,29e^{-j35,7^\circ} + (-19,85e^{-j13,8^\circ}) + (-19,51e^{-j86,3^\circ}) \approx 0;$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 10,9e^{-j19,6^\circ} - (-15,12e^{-j47,2^\circ}) = (20,54 - j14,74) \approx \underline{I}_A.$$

Задача 2. Три одинаковых резистора включены в трехпроводную цепь сначала звездой, а затем треугольником. Во сколько раз будут отличаться линейные токи в обоих случаях при обрыве линейного провода фазы *A*?



Решение



1. Соединение звездой. Нагрузка симметричная, следовательно,

$$I_A = I_B = I_C = I_{Л\,зв} = U_Ф / R = U_Л / R\sqrt{3}.$$

При обрыве линейного провода A (см. векторную диаграмму)

$$I_A = 0;$$

$$U_B = U_C = U_Л / 2\ ;$$

$$I_B = I_C = U_Л / 2R.$$

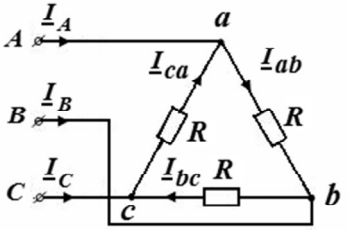
2. Соединение треугольником. Нагрузка симметричная:

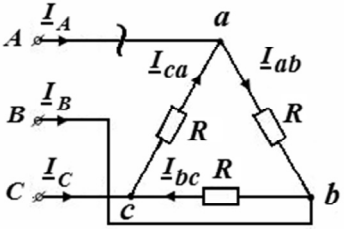
$$U_Ф = U_Л; \quad I_Ф = U_Л / R;$$

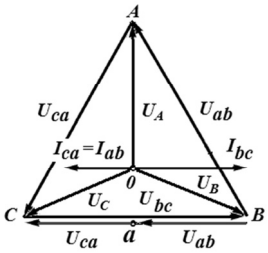
$$I_{Л\Delta} = \sqrt{3} \cdot I_Ф = \sqrt{3} \cdot U_Л / R.$$

Отношение линейных токов при симметричной нагрузке

$$I_{Л\Delta} / I_{Л зв} = 3.$$







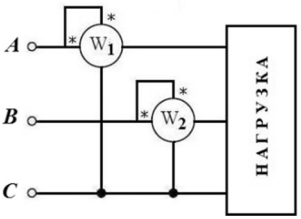
При обрыве линейного провода A (см. векторную диаграмму) величины линейных и фазных токов в модулях:

$$I_{ab} = I_{ca} = I_{bc} / 2 = U_Л / 2R;$$

$$I_A = 0; \quad I_B = I_{bc} + I_{ab} = 3U_Л / 2R = I_C.$$

Отношение линейных токов при обрыве

$$I_{\text{В}\Delta}/I_{\text{В зв}} = 3.$$

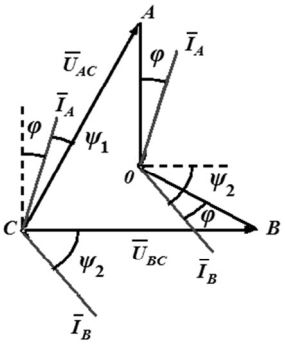


Задача 3. Найти показания ваттметров и активную мощность трехфазной симметричной цепи при углах нагрузки, равных 0; 30 °; 60 °; 90 °, если $U_{\text{Л}} =$ 120 В; $I_{\text{Л}} = 5$ А.

Решение

Воспользуемся векторной диаграммой, построенной для произвольной симметричной нагрузки индуктивного характера с углом φ.

Угол ψ_1 между векторами напряжения U_{AC} и тока I_A, воздействующими на ваттметр 1, равен $\psi_1 = 30° - \varphi$.



Соответственно угол $\psi_2 = 30° + \varphi$.

Показания ваттметров:

$$W_1 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos(30° - \varphi);$$

$$W_2 = U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos(30° + \varphi);$$

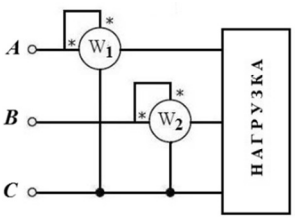
$$W = W_1 + W_2.$$

φ	0	30°	60°	90°
W_1	520	600	520	300
W_2	520	300	0	–300
W	1040	900	520	0

Дополнительные задачи

Задача 1. Мгновенное значение ЭДС фазы *A* симметричной трехфазной системы положительно, максимально и равно 310 В. Чему равно мгновенное значение ЭДС фаз *B* и *C* через четверть периода?

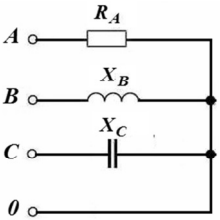
Ответ: e_B = 268 В; e_C = –268 В.



Задача 2. По показаниям ваттметров 600 Вт (W_1) и 200 Вт (W_2) найти cos φ симметричной нагрузки.

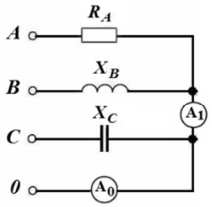
Ответ: cos φ = 0,756.

Задача 3. Определить фазные токи и ток в нейтральном проводе, если $U_Ф$ =127 В, $R_A = X_B = X_C$ = 25,4 Ом.



Определить ток в нейтральном проводе, если нагрузку фаз *B* и *C* поменять местами.

Ответ: $I_Ф$ = 5 А; $\underline{I}_0$ = 3,65 А; $\underline{I}_0$ = 13,65 А.

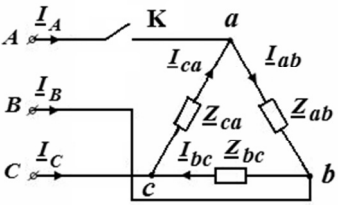


Задача 4. В трехфазной цепи известны значения токов: I_A = 5 А, $I_B = I_C$ = 10 А.

Определить показания амперметров A_0 и A_1.

Ответ: I_{A_1} = 6,2 А; I_{A_0} = 12,3 А.

Задача 5. Определить суммарную активную мощность, потребляемую от сети при замкнутом и разомкнутом ключе *K*, если $U_Л$ = 220 В; $\underline{Z}_{ab}$ = (110 – *j*110) Ом; $\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}$ = (110 + *j*110) Ом.



Ответ: ключ замкнут: токи через все резисторы равны $I_{ф}$ = 1,41 А, $P_{\sum}$ = 660 Вт; ключ разомкнут: I_{bc} = 1,41 А; I_{ba} = I_{ac} = 1А; $P_{\sum}$ = 440 Вт.

2.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА ПРИ ПИТАНИИ ОТ ИСТОЧНИКА СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Цель: овладеть навыками экспериментального определения параметров пассивного двухполюсника. Изучить способ повышения коэффициента мощности ($\cos\varphi$) электрической цепи.

Объект и средства исследования

В качестве исследуемого двухполюсника используется катушка индуктивности с параметрами $L_{К}$, $R_{К}$.

Питание двухполюсника осуществляется от фазного напряжения трехфазного источника. Повышение коэффициента мощности ($\cos\varphi$) электрической цепи в лабораторной работе реализуется с помощью магазина емкостей.

Для измерения электрических параметров используются приборы: ваттметр; амперметры; цифровой мультиметр (измерение напряжения).

Рабочее задание

1. Собрать электрическую цепь по схеме, представленной на рис. 2.6.

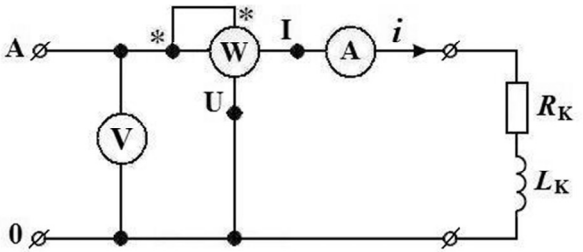


Рис. 2.6

2. Подать на входные зажимы электрической цепи напряжение питания. Произвести измерения. По данным измерений рассчитать параметры катушки и cos $\varphi_К$. Данные измерения и расчета записать в табл. 2.1.

Таблица 2.1

U_1, В	$I_К$, А	P, Вт	$Z_К$, Ом	$R_К$, Ом	$X_К$, Ом	$L_К$, Гн	cos $\varphi_К$	$\varphi_К$, градус

3. Рассчитать емкость конденсатора C, необходимую для увеличения cos φ электрической цепи до 0,8. Включить параллельно катушке индуктивности полученное значение емкости C в соответствии со схемой (рис. 2.7).

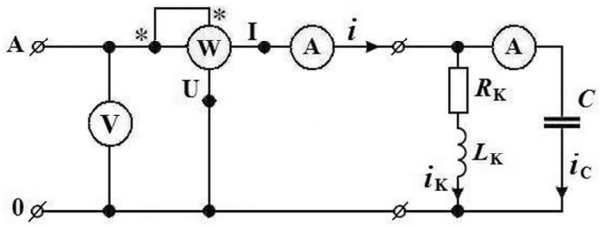


Рис. 2.7

4. Произвести измерения по схеме (рис. 2.7), результат измерений записать в табл. 2.2. Величину тока, протекающего через катушку индуктивности, взять из табл. 2.1.

Таблица 2.2

C, мкФ	U_{A0}, В	I, А	P, Вт	$I_К$, А	I_C, А	cos φ

Рассчитать по результатам эксперимента коэффициент мощности cos φ цепи. По данным табл. 2.1 и 2.2 построить векторные диаграммы токов и напряжений.

Методические указания

1. Для измерения активной мощности в цепь включается ваттметр. Этот прибор имеет две обмотки: параллельную и последовательную. Входные зажимы этих обмоток обозначены значком «*» и подключаются к источнику питания, поэтому эти зажимы между собой соединяются перемычкой. Обмотки относительно друг друга подвижны. Отклонение светового луча (или стрелки) пропорционально активной мощности $P = UI \cos \varphi$.

Цена деления ваттметра определяется с учетом пределов измерения по току и по напряжению:

$$C_{\mathrm{W}} = \frac{U_N I_N}{\alpha_{\max}} \text{ Вт/дел.},$$

где U_N и I_N – пределы измерений прибора по току и напряжению; $\alpha_{\max}$ – число делений шкалы прибора.

2. Параметры катушки индуктивности можно определить, используя следующие выражения:

$$Z_{\mathrm{K}} = \frac{U}{I}; \quad R_{\mathrm{K}} = \frac{P}{I^2}; \quad X_{\mathrm{K}} = \sqrt{Z_{\mathrm{K}}^2 - R_{\mathrm{K}}^2}; \quad L_{\mathrm{K}} = \frac{X_{\mathrm{K}}}{2\pi f},$$

где f – частота сети 50 Гц.

3. Коэффициент мощности электрической цепи определяется по показаниям трех приборов (ваттметра, амперметра и вольтметра):

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI},$$

где U и I – напряжение и ток на входе цепи; P – потребляемая цепью активная мощность.

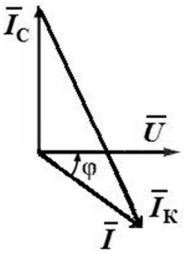
4. Включив параллельно катушке емкость, мы изменяем потребляемый из сети ток, следовательно, меняется и cos φ.

Требуемая величина емкости для изменения коэффициента мощности до заданного значения определяется из выражения

$$C = \frac{P}{U^2 2\pi f}(\mathrm{tg}\,\varphi_{\mathrm{K}} - \mathrm{tg}\,\varphi),$$

где $\varphi_К$ – угол разности фаз между напряжением и током катушки индуктивности (см. табл. 2.2); φ – угол разности фаз, соответствующий желаемому значению коэффициента мощности cos φ = 0,8.

5. Треугольник токов на векторной диаграмме (по данным табл. 2.2) строится методом засечек по известным величинам модулей токов: I, $I_К$, I_C. Прежде всего при построении диаграммы необходимо задаться направлением вектора U. Далее строим вектор тока через конденсатор I_C, который опережает вектор напряжения на 90° (считаем, что конденсатор без потерь). Векторы входного тока I и тока через катушку индуктивности $I_К$ строим методом засечек:



- из конца вектора тока через конденсатор I_C раствором циркуля, равным модулю тока через катушку индуктивности $I_К$, проводим дугу;
- из начала вектора тока через конденсатор раствором циркуля, равным модулю входного тока I, проводим вторую дугу;
- точка пересечения дуг соответствует месту расположения концов векторов $I_К$ и I.

Программа домашней подготовки

По учебным пособиям и конспекту лекций изучить следующие темы:
- параметры элементов электрических цепей переменного тока;
- простейшие двухполюсники в цепи синусоидального тока;
- векторные диаграммы.

Контрольные вопросы

1. Какими параметрами характеризуются электрические цепи переменного тока?

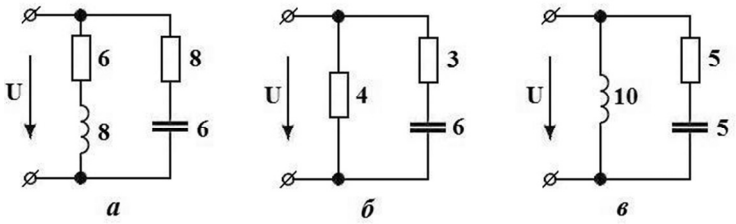
2. Записать выражения, связывающие напряжение и ток для простейших двухполюсников при синусоидальном питании. Уравнения записать для мгновенных значений и в символической форме.

3. Изобразить векторные диаграммы токов и напряжений для простейших двухполюсников с различным характером реактивных сопротивлений.

4. Изменится ли величина активной мощности, потребляемой установкой, после повышения cos φ цепи с помощью батареи конденсаторов?

5. Как графически определить ток в неразветвленной части электрической цепи, если известны токи в двух параллельных ветвях и коэффициенты мощности этих ветвей?

6. Определить активные и реактивные составляющие токов в ветвях изображенных схем, если U = 20 В, а сопротивления элементов указаны на схемах в омах.



7. Для схем, изображенных в п. 6, определить величины полной, активной и реактивной мощностей, потребляемых электрической цепью.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Цель: получить навыки настройки в резонанс последовательного и параллельного колебательного контура.

Объект и средства исследования

При сборке колебательных контуров используются катушка индуктивности L и магазин емкостей C. Питание контуров осуществляется от генератора синусоидальных сигналов. Ток на входе колебательного контура определяется косвенным методом – измерением напряжения на измерительном резисторе $R_{И}$ с известной величиной сопротивления. Напряжения измеряются с помощью цифрового мультиметра.

Рабочее задание

1. Собрать последовательный колебательный контур, включив на вход контура измерительное сопротивление $R_И$ величиной 50 Ом (рис. 2.8). На вход электрической цепи подключить генератор синусоидального напряжения. Установить емкость C = 2,5 мкФ.

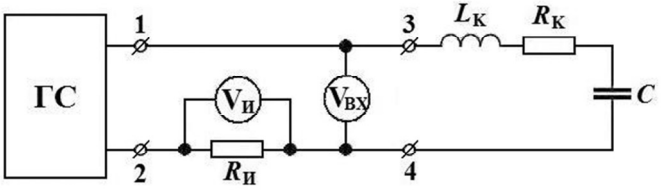


Рис. 2.8

2. Рассчитать значение резонансной частоты, используя параметры последовательного колебательного контура:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_К C}}.$$

3. Включить генератор сигналов. Подключив первый канал осциллографа к входу цепи (точки 1–2), а второй к резистору $R_И$ (точки 4–2), установить на входе колебательного контура максимально возможное напряжение (ручка «регулирование сигнала» ГС до упора по часовой стрелке) и расчетную резонансную частоту. Изменяя частоту входного сигнала, подстроить колебательный контур в резонанс напряжений. Значение резонансной частоты f_0 записать в табл. 2.3.

Таблица 2.3

f, Гц	$U_{вх}$, В	$U_К$, В	U_C, В	$U_И$, В	I, мА
f_0 = $f_Н$ = $f_В$ =					

4. Измерить значения напряжений на катушке индуктивности $U_К$, конденсаторе U_C и $U_И$ на измерительном сопротивлении $R_И$.

Величины напряжений занести в табл. 2.3. Значение тока в контуре $I = U_{И} / R_{И}$.

5. Экспериментально найти значения нижней и верхней граничных частот $f_{Н}$ и $f_{В}$, при которых $U_{И} = U_{И\,рез} \big/ \sqrt{2}$. Повторить измерения п. 4 при $f_{Н}$ и $f_{В}$, результаты измерений занести в табл. 2.3.

6. По результатам пп. 4 и 5 методом засечек построить векторные диаграммы напряжений при частотах f_0, $f_{Н}$ и $f_{В}$.

7. Собрать параллельный колебательный контур, на входе контура включить измерительное сопротивление величиной $R_{И}$ = 2 кОм (рис. 2.9). На вход электрической цепи подать напряжение с генератора синусоидального напряжения.

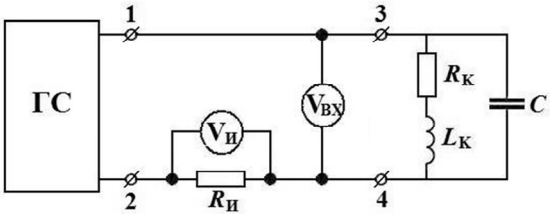


Рис. 2.9

8. Установить емкость C = 2,5 мкФ. Включить генератор сигналов, установить на входе колебательного контура максимально возможное напряжение $U_{вх}$. Подключив первый канал осциллографа к входу цепи (точки 1–2), а второй к резистору $R_{И}$ (точки 4–2), настроить колебательный контур в резонанс токов, изменяя частоту входного сигнала. Данные измерений занести в табл. 2.4.

Таблица 2.4

$f_р$	$I_К$	$I_С$	$I_И$

По данным табл. 2.4 построить векторную диаграмму токов.

Методические указания

1. О настройке последовательного контура в резонанс напряжений можно судить по наибольшему току в электрической цепи (т. е. по наибольшему $U_{И}$).

2. О настройке параллельного колебательного контура в резонанс тока можно судить по наименьшему току входной цепи контура.

3. При построении векторной диаграммы параллельного контура токи $I_{К}$ и I_{C} следует рассчитать. Параметры катушки $L_{К}$, $R_{К}$, которые заданы на стенде, позволяют определить $Z_{К}$ и $I_{К} = U_{вх} / Z_{К}$. Ток I_{C} определяется по формуле

$$I_{C} = \frac{U_{вх}}{1/C2\pi f_{р}},$$

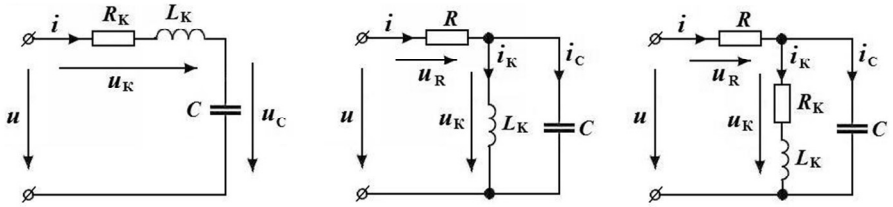
где C = 2,5 мкф, а значение $f_{р}$ берется из табл. 2.4. Векторная диаграмма строится методом засечек. Задаемся на диаграмме вектором $U_{вх}$, относительно $U_{вх}$ откладываем ток I_{C}, опережающий входное напряжение на угол $\pi/2$. Далее, зная токи $I_{К}$ и I, достраиваем треугольник токов: из конца вектора тока I_{C} делаем засечку радиусом, равным току $I_{К}$, а из начала координат – засечку радиусом, равным I. Две дуги пересекутся в одной точке, которая и будет вершиной треугольника тока.

Программа домашней подготовки

По учебным пособиям и конспекту лекций изучить тему «Резонансы в электрических цепях».

Контрольные вопросы

1. Что называется резонансом в электрических цепях?
2. Каково условие резонанса напряжений?
3. Каково условие резонанса токов?
4. Построить качественно векторные диаграммы для изображенных схем, настроенных на резонанс (рис. 2.10).



а *б* *в*

Рис. 2.10

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ С ПРИЕМНИКАМИ, СОЕДИНЕННЫМИ ПО СХЕМЕ ЗВЕЗДА

Цель: исследовать режимы работы трехфазной цепи с нагрузкой, соединенной по схеме звезда.

Объект и средства исследования

Исследуемая электрическая цепь питается от трехфазного генератора промышленной частоты $f = 50$ Гц с фазным напряжением $U_Ф = 36$ В.

В качестве нагрузки используется набор однофазных приемников: резистивные элементы R_1, R_2, R_3 и R_4; катушка индуктивности с параметрами $R_К$, $L_К$ и магазин емкостей C.

Для измерения напряжений и сопротивлений резисторов используется цифровой мультиметр.

Рабочее задание

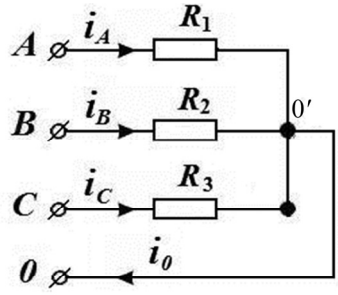


Рис. 2.11

1. Измерить сопротивления резисторов R_1, R_2, R_3 и R_4.

2. Собрать цепь по схеме (рис. 2.11), соединив три резистивных элемента R_1, R_2 и R_3 звездой с нейтральным проводом.

3. Измерить напряжения на фазах нагрузки. Токи I_A, I_B, I_C определить косвенным методом измерения (см. методи-

ческие указания). Ток в нейтральном проводе I_0 определяется по векторной диаграмме как геометрическая сумма векторов фазных токов.

Результаты эксперимента записать в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Характер нагрузки	$U_{A0'}$, В	$U_{B0'}$, В	$U_{C0'}$, В	I_A, А	I_B, А	I_C, А	I_0, А
Симметричный режим							
Несимметричный режим							

4. Изменить нагрузку в фазе A, включив вместо резистора R_1 резистор R_4. Измерить напряжения на фазах нагрузки. Определить токи в фазах электрической цепи и нейтральном проводе. Результаты эксперимента занести в табл. 2.5.

5. Отсоединить нейтральный провод. Измерить напряжения на фазах нагрузки, т. е. на резисторах R_4, R_2, R_3, и напряжение между нейтральными точками генератора и нагрузки $U_{00'}$. Все напряжения измерять с помощью цифрового мультиметра. Токи в фазах определить по закону Ома. Результаты эксперимента записать в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Характер нагрузки	$U_{A0'}$, В	$U_{B0'}$, В	$U_{C0'}$, В	$U_{00'}$, В	I_A, А	I_B, А	I_C, А
Симметричный режим							
Несимметричный режим							
Режим ХХ фазы A							
Режим КЗ фазы A							

6. Восстановить симметричный режим трехфазной электрической цепи (рис. 2.12), включить в фазу A вместо резистора R_4 резистор R_1. Измерить напряжения на фазах нагрузки и напряжение смещения нейтрали $U_{00'}$. Косвенным методом определить токи в фазах нагрузки. Результаты эксперимента записать в табл. 2.6.

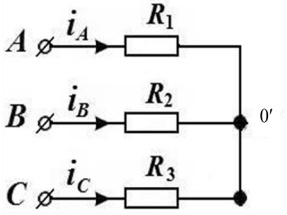


Рис. 2.12

7. Создать в фазе *A* режим холостого хода, отсоединив провод, соединяющий R_1 с фазой *A*.

Измерить напряжения на фазах нагрузки $U_{A0'}$, $U_{B0'}$, $U_{C0'}$ и напряжение смещения нейтрали $U_{00'}$. Токи в фазах определить косвенным методом. Результаты измерений занести в табл. 2.6.

8. Создать в фазе *A* режим короткого замыкания. Для этого вместо резистора R_1 включить электронный амперметр. Произвести измерения напряжений и токов. Результаты измерений занести в табл. 2.6.

9. Собрать электрическую цепь по схеме (рис. 2.13).

На магазине емкостей набрать емкость *C* = 15 мкФ. Измерить напряжения на фазах нагрузки *A*, *B*, *C* и в нейтральном проводе. Токи в фазах *A*, *B*, *C* определить косвенным методом.

Результаты эксперимента занести в табл. 2.7.

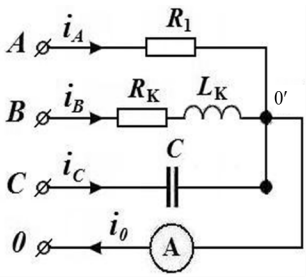


Рис. 2.13

Таблица 2.7

Характер нагрузки	$U_{A0'}$, В	$U_{B0'}$, В	$U_{C0'}$, В	$U_{00'}$, В	I_A, А	I_B, А	I_C, А	I_0, А
Четырехпроводная схема								
Трехпроводная схема								

10. Отключить в электрической цепи (рис. 2.13) нейтральный провод. Произвести измерение напряжений и токов. Результаты эксперимента занести в табл. 2.7.

11. По данным всех пунктов построить в масштабе векторные диаграммы токов и напряжений.

Методические указания

1. Косвенным методом токи в фазах приемника определяются по закону Ома (параметры фаз R, L, C приведены на стенде).

2. Схемы электрических цепей в режимах ХХ и КЗ фазы A должны быть представлены в отчетах.

3. Построение векторной диаграммы токов и напряжений при любой нагрузке следует начинать с построения симметричной звезды фазных напряжений источника питания.

4. При построении векторных диаграмм пп. 3–6 использовать метод «засечек», так как векторные диаграммы строятся на комплексной плоскости, а при экспериментальных исследованиях известны только значения модулей напряжений и токов.

Этот графический метод заключается в следующем:

а) строят симметричную звезду фазных напряжений источника:

$$\mathring{U}_A = U_A; \quad \mathring{U}_B = U_A e^{-j120^\circ}; \quad \mathring{U}_C = U_A e^{j120^\circ};$$

б) раствором циркуля, равным фазным напряжениям на приемнике, поочередно делают засечки из точек A, B и C, а затем раствором циркуля, равным напряжению смещения нейтрали, – засечку из точки 0;

в) точка пересечения окружностей всех фазных напряжений и напряжения смещения нейтрали определяет положение на комплексной плоскости значения потенциала нейтральной точки приемника $0'$;

г) соединив точку $0'$ с точками A, B, C, получаем звезду фазных напряжений приемника.

Программа домашней подготовки

1. По учебным пособиям и конспекту лекций повторить раздел «Трехфазные цепи».

2. Заготовить бланки протокола с необходимыми таблицами и схемами.

3. Записать в протокол все расчетные формулы.

Контрольные вопросы

1. В чем различие трехпроводных и четырехпроводных цепей?

2. Почему при симметричной нагрузке нейтральный провод не влияет на режим работы цепи?

3. Каково соотношение между линейными и фазными напряжениями при симметричной нагрузке, соединенной звездой?

4. Какова роль нейтрального провода при несимметричной нагрузке?

5. Какими способами можно измерить активную мощность в трехпроводных и четырехпроводных трехфазных цепях при симметричной и несимметричной нагрузке?

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ КАТУШКАМИ

Цель: экспериментально определить параметры двух индуктивно связанных катушек. Изучить влияние «направления» включения индуктивно связанных катушек на эквивалентные параметры двухполюсника при их последовательном соединении.

Объект и средства исследования

В качестве индуктивно связанных элементов используются катушки индуктивности L_1 и L_2 со следующими параметрами: R_{K1}, L_{K1} и R_{K2}, L_{K2}. Питание электрической цепи осуществляется от фазного напряжения трехфазного источника питания промышленной частоты $f = 50$ Гц.

Измерение напряжения проводится цифровым мультиметром.

Рабочее задание

1. Собрать электрическую цепь воздушного трансформатора (схема на рис. 2.14). Подать на вход электрической цепи напряжение, показания приборов записать в табл. 2.8.

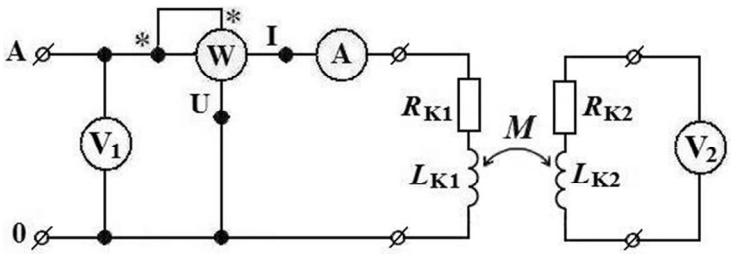


Рис. 2.14

Таблица 2.8

Измерено				Вычислено				
U_1	U_2	I	P	Z	$R_К$	$X_К$	X_M	M
В	В	А	Вт	Ом	Ом	Ом	Ом	Гн

2. Повторить предыдущий опыт при обратном питании (поменять местами катушки). Результаты измерений занести в табл. 2.8.

3. По результатам измерений пп. 1 и 2 определить параметры катушек индуктивности ($R_{К1}$, $L_{К1}$ и $R_{К2}$, $L_{К2}$) и взаимную индуктивность M. Результаты вычислений занести в табл. 2.8.

4. Собрать электрическую цепь по схеме, представленной на рис. 2.15 Подать на схему напряжение. Измерить величины напряжения, тока и активной мощности.

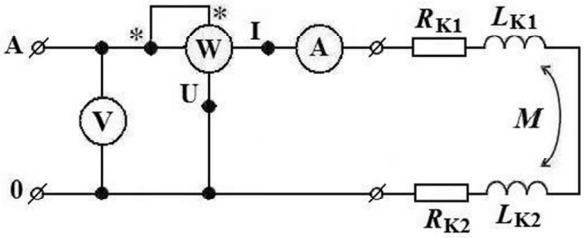


Рис. 2.15

5. Поменять местами зажимы одной из катушек индуктивности. Повторить измерения (п. 4). Результаты эксперимента пп. 4 и 5 записать в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Измерено			Вычислено					Включение катушки
U	I	P	$Z_{экв}$	$R_{экв}$	$X_{экв}$	$L_{экв}$	M	
В	А	Вт	Ом	Ом	Ом	Гн	Гн	

6. На основании измеренных в пп. 4 и 5 величин рассчитать значения параметров $Z_{экв}$, $R_{экв}$, $X_{экв}$, $L_{экв}$ двухполюсника и величину взаимной индуктивности M. Определить способ включения катушек (согласно, встречно) индуктивности. Построить топографические диаграммы.

Методические указания

1. При отсутствии электрической связи между катушками индуктивности и при разомкнутых зажимах второй катушки индуктивности (рис. 2.14) напряжение на последней равно ЭДС взаимной индуктивности:

$$U_2 = E_2 = 2\pi fMI_1,$$

поэтому величина взаимной индуктивности $M = U_2 / 2\pi fI_1$.

2. При последовательном включении катушек индуктивности (рис. 2.15) величина взаимной индуктивности может быть определена по известным значениям эквивалентной индуктивности двухполюсников, соответствующих согласному и встречному включению катушек.

При согласном включении катушек эквивалентная индуктивность двухполюсника $L_{экв.\,согл} = L_{К1} + L_{К2} + 2M$, при встречном включении катушек эквивалентная индуктивность $L_{экв.\,встр} = L_{К1} + L_{К2} - 2M$. Поэтому величина взаимной индуктивности

$$M = \frac{L_{экв.\,согл} - L_{экв.\,встр}}{4}.$$

Величина индуктивности двухполюсника определяется по методике, рассмотренной в экспериментальной части (с. 94).

3. Величина взаимной индуктивности неподвижно закрепленных в пространстве относительно друг друга катушек не зависит от схемы их включения, M – постоянный параметр.

Контрольные вопросы

1. Объяснить физическую сущность явлений самоиндукции и взаимной индукции.

2. Какое включение индуктивных катушек называется согласным, а какое – встречным?

3. Какими способами можно определить взаимную индуктивность между двумя индуктивными катушками?

4. Как построить топографические диаграммы напряжений двух последовательно соединенных индуктивно связанных катушек для случая согласного и встречного включения при известных параметрах каждой катушки?

3. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

3.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Периодическая функция $f(\omega t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая на всяком конечном интервале времени конечное число разрывов только первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k-1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

где A_0 – постоянная составляющая; A_{km} и ψ_k – соответственно амплитуда и начальная фаза *k*-й гармоники функции;

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t; \quad A_{km} = \sqrt{(A'_{km})^2 + (A''_{km})^2}; \quad \psi_k = \operatorname{arctg} \frac{A''_{km}}{A'_{km}};$$

$$A'_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \cdot d\omega t; \quad A''_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t \cdot d\omega t.$$

Состав гармонических составляющих функции зависит от вида симметрии графика функции (см. таблицу).

Представление периодического несинусоидального воздействия рядом Фурье позволяет представить несинусоидальный источник напряжения несколькими последовательно соединенными и одновременно действующими источниками ЭДС или напряжений, а несинусо-

идальный источник тока – несколькими параллельно соединенными источниками тока. Анализ электрического состояния цепей, содержащих несколько источников, можно осуществлять на основе метода наложения. При расчете цепи от ЭДС (тока источника) высших гармоник необходимо производить пересчет значений реактивных сопротивлений X_L и X_C ветвей, так как они зависят от частоты: $X_{Lk} = k\omega L;\ \ X_{Ck} = 1/k\omega C$.

Вид симметрии	Аналитическое выражение	A_0	A'_{km}	A''_{km}
1. Относительно оси абсцисс	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	–	Только нечетные	
2. Относительно оси ординат	$f(\omega t) = f(-\omega t)$	+	–	+
3. Относительно начала координат	$f(\omega t) = -f(-\omega t)$	–	+	–
4. Относительно оси абсцисс и оси ординат	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi) = f(-\omega t)$	–	–	Нечет-чет-ные
5. Относительно оси абсцисс и начала координат	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi) = -f(-\omega t)$	–	Нечет-ные	–

Действующие значения несинусоидальных величин

$$A = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{km}^2}{2}} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}.$$

Среднее значение несинусоидальной величины за период равно ее постоянной составляющей:

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\omega t)dt = A_0.$$

Среднее по модулю значение несинусоидальных величин

$$A_{\text{ср.мод}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|f(\omega t)\right| dt.$$

Если функция симметрична относительно оси абсцисс и в течение полупериода ни разу не изменяет знак, то среднее по модулю значение определяется за полпериода:

$$A_{\text{ср.мод}} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(\omega t)\,dt.$$

Для оценки отклонения формы несинусоидальной функции от синусоиды используется ряд коэффициентов. Наибольшее применение нашли коэффициент амплитуды $k_{\text{А}} = A_m / A$; коэффициент формы $k_{\Phi} = A / A_{\text{ср}}$ и коэффициент искажения $k_{\text{И}} = A_1 / A$.

Мощность цепи несинусоидального тока

Активная мощность, как и мощность синусоидального тока, есть среднее значение мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = U_0 I_0 + \sum_{k-1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k.$$

Реактивная мощность цепи несинусоидального тока определяется как сумма реактивных мощностей всех гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Полная мощность несинусоидального тока $S = UI$, при этом в отличие от синусоидального $S^2 \neq P^2 + Q^2$.

Мощность искажений, характеризующая отличие форм кривых напряжения и тока:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

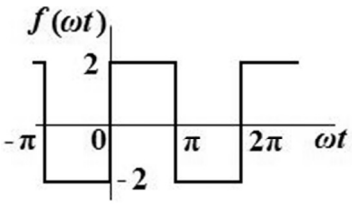
3.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Расчет электрических цепей при несинусоидальных входных воздействиях

Цель: изучить принципы расчета цепей при несинусоидальных входных воздействиях. Получить навыки: представления несинусоидальных сигналов в виде ряда гармонических воздействий; расчета параметров, характеризующих электрические цепи при несинусоидальных входных воздействиях.

Задача 1. Определить три первых гармоники напряжения, заданного графиком.

Решение



Периодическая последовательность прямоугольных импульсов задана последовательностью

$$u(t) = \begin{vmatrix} 2\ [0,\ \pi] \\ -2\ [\pi,\ 2\pi]. \end{vmatrix}$$

Заданная функция имеет симметрию относительно начала координат. Поэтому значения постоянной составляющей A_0 и амплитуды косинусоидальных составляющих A''_{km} равны нулю.

Определяем амплитуду A'_{km} синусоидальных составляющих:

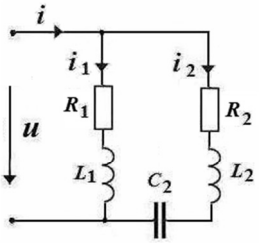
$$A'_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 2\sin k\omega t\, d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin k\omega t\, d\omega t\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos k\omega t}{k}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos k\omega t}{k}\Bigg|_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi k}(1 - \cos k\pi) = \begin{cases} 0 \text{ при } k \text{ четном}, \\ \dfrac{8}{\pi k} \text{ при } k \text{ нечетном}. \end{cases}$$

После подстановки значений k получим

$$u(t) = u_1 + u_3 + u_5 =$$

$$= 2{,}546\sin\omega_1 t + 0{,}8488\sin 3\,\omega_1 t + 0{,}509\sin 5\omega_1 t.$$



Задача 2. $u(t) = 60 + 100\sin\omega t + 50\sin 3\,\omega t$ В. $R_1 = 6$ Ом; $L_1 = 47{,}8$ мГн; $R_2 = 8$ Ом; $L_2 = 31{,}8$ мГн; $C_2 = 159$ мкФ; $f = 50$ Гц.

Определить i, i_1, i_2 и действующее значение I.

Решение

Используем принцип суперпозиции для определения токов в ветвях цепи от действия каждой гармоники в отдельности:

при $n = 0$

$$u_{(0)} = 60 \text{ В}, \quad i_{(0)} = i_{1\,(0)} = u_{(0)} / R_1 = 10 \text{ А}, \quad i_{2\,(0)} = 0;$$

при $n = 1$

$$u_{(1)} = 100\sin\omega t \text{ В}; \quad U_{m(1)} = 100 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{m1(1)} = \underline{U}_{m(1)} / (R_1 + j\,\omega L_1) =$$

$$= 100 / (6 + j314 \cdot 47{,}8 \cdot 10^{-3}) = 100 / (6 + j15) = 6{,}2e^{-j68{,}2^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{m2(1)} = \underline{U}_{m(1)} / (R_2 + j\,\omega L_2 - j1 \ / \ \omega C_2) =$$

$$= 100 / (8 + j314 \cdot 31{,}8 \cdot 10^{-3} - j / 314 \cdot 159 \cdot 10^{-6}) =$$

$$= 100 / (8 - j10) = 7{,}8e^{j51{,}3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{m(1)} = \underline{I}_{m1(1)} + \underline{I}_{m2(1)} = 7{,}2\,e^{j2{,}8^\circ} \text{ А};$$

при $n = 3$

$$u_{(3)} = 50\sin 3\omega t \text{ В}; \quad \underline{U}_{m(3)} = 50 \text{ В};$$

$$I_{m1(3)} = U_{m(3)} / (R_1 + j\,3\omega L_1) =$$

$$= 50 / (6 + j3 \cdot 314 \cdot 47{,}8 \cdot 10^{-3}) = 50 / (6 + j45) = 1{,}1e^{-j82{,}4^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{m2(3)} = \underline{U}_{m(3)} / (R_2 + j3\omega L_2 - j1/3\omega C_2) =$$

$$= 50/(8 + j23{,}33) = 2{,}04e^{-j71^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{m(3)} = \underline{I}_{m1(3)} + \underline{I}_{m2(3)} = 3{,}12e^{-j75^\circ} \text{ А};$$

$$i = i_{(0)} + i_{(1)} + i_{(3)} = 10 + 7{,}2\sin(\omega t + 2{,}8^\circ) + 3{,}12\sin(3\omega t - 75^\circ) \text{ А};$$

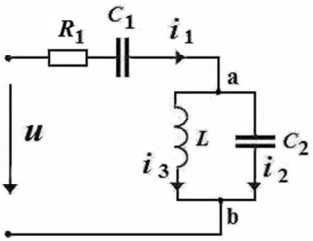
$$i_1 = i_{1\,(0)} + i_{1\,(1)} + i_{1\,(3)} = 10 + 6{,}2\sin(\omega t - 68{,}2^\circ) + 1{,}1\sin(3\omega t - 82{,}4^\circ) \text{ А};$$

$$i_2 = i_{2(1)} + i_{2(3)} = 7{,}8\sin(\omega t + 51{,}3^\circ) + 2{,}04\sin(3\omega t - 71^\circ) \text{ А};$$

$$I = \sqrt{I_0{}^2 + \frac{I_{m(1)}^2}{2} + \frac{I_{m(3)}^2}{2}} = \sqrt{100^2 + \frac{7{,}2^2}{2} + \frac{3{,}12^2}{2}} = 11{,}435 \text{ А}.$$

Ответ: $I = 11{,}435$ А.

Задача 3. Подобрать емкость C_1 и C_2 так, чтобы цепь была настроена на резонанс напряжений для основной гармоники и не пропускала бы токи третьей гармоники, если $R_1 = 50$ Ом; $L = 2$ мГн; $u(t) = 20\sin\omega t + 10\sin 3\omega t$ В; $\omega = 5000$ рад /с.



Найти: i_1, i_2, i_3.

Решение

Чтобы цепь не пропускала токи третьей гармоники, она должна находиться в режиме резонанса токов на этой гармонике:

$$3\omega C_2 = 1/3\omega L; \quad C_2 = 1/9\omega^2 L = 1/9 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2{,}22 \text{ мкФ}.$$

При резонансе напряжений $\mathrm{Jm}\,\underline{Z}_{\text{вх}(1)} = 0$ (на первой гармонике), т. е.

$$-j1/\omega C_1 + \underline{Z}_{ab} = 0;$$

$$\underline{Z}_{ab} = j\omega L(-j1/\omega C_2)\ /\ (j\omega L - j1/\omega C_2)\ = j11,24;\ \ 1/C_1 = 11,25;$$

$$C_1\ = 17,8 \text{ мкФ}.$$

Определив C_1 и C_2, находим токи:

при n = 1

$$u_{(1)} = 20\sin\omega t \text{ В};\ \ i_{(1)} = u_{(1)} / R_1 = 0,4\sin\omega t \text{ А};$$

$$\underline{U}_{mab(1)} = \underline{Z}_{ab} \cdot \underline{I}_{m1(1)} = j11,25 \cdot 0,4 = j4,5 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{m2(1)} = \underline{U}_{mab(1)} / (-j/\omega C_2) = 4,5e^{j90^\circ} / 90,9e^{-j90^\circ} = -0,0495 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{m3(1)} = \underline{U}_{mab(1)} / j\omega L = \ 4,5e^{j90^\circ} \ / \ j5000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,45 \text{ А};$$

$$i_{2(1)} = -0,0495\sin\omega t \ \text{ А};\ \ i_{3(1)} = 0,45\sin\omega t \text{ А};$$

при n = 3

$$u_{(3)} = 10\sin 3\omega t \text{ В};$$

$$U_{mab(3)} = U_{m(3)};$$

$$\underline{I}_{m2(3)} = \underline{U}_{m(3)} / (-j/3\omega C_2)\ = 10/30,3e^{-j90^\circ} = 0,33e^{j90^\circ} \text{ А};$$

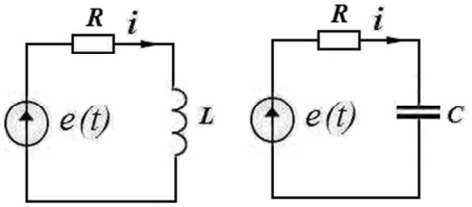
$$\underline{I}_{m3(3)} = \underline{U}_{m(3)} / j3\omega L = 10/j30 = 0,33e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$i_{2(3)} = \ 0,33\sin(3\omega\ t + 90^\circ) \text{ А};\ \ i_{3(3)} = 0,33\sin(3\omega t - 90^\circ) \text{ А}.$$

Дополнительные задачи

Задача 1. Определить мгновенные значения токов в схемах, если R = 10 Ом; L = 0,01 Гн; C = 1 мкФ; ω = 100 рад/с; $e(t) = 100\sin\omega t +$ $+ 100\sin 2\omega t$ В.

Сравнить отношение амплитуд токов первой и второй гармоник $I_{m(2)} / I_{m(1)}$ для данных схем.

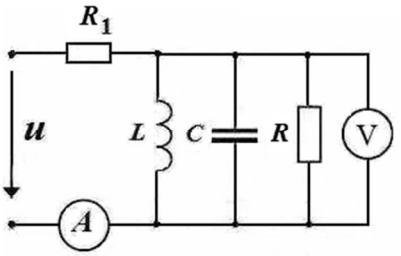


а *б*

Ответ: $I_{m(2)} / I_{m(1)} = 0{,}63$ (схема *а*); $I_{m(2)} / I_{m(1)} = 1{,}26$ (схема *б*). Индуктивность подавляет высшие гармоники в кривой тока.

Задача 2. Найти активную мощность, потребляемую двухполюсником, и показания амперметра и вольтметра электромагнитных систем. Что покажут эти же приборы, если они будут магнитоэлектрической системы?

Параметры схемы: $u(t) = 20 + 50\sin\omega t + 25\sin(3\omega t + 90°)$ В; $R_1 = 11{,}2$ Ом; $R = 7$ Ом; $\omega L = 100$ Ом; $1/\omega C = 90$ Ом.



Ответ: $P = 157$ Вт; 1-й случай: 23, 1 В и 3,96 А; 2-й случай: 0 В и 2,86 А.

4. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

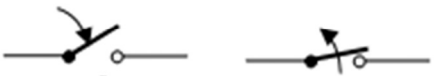
4.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Переходные процессы – электромагнитные процессы, возникающие в электрической цепи в результате коммутации (скачкообразного изменения параметров элементов цепи).

Задача исследования переходного процесса заключается в том, чтобы выяснить, по каким законам будут изменяться токи и напряжения на участках электрической цепи и длительность переходного процесса – время заметного отклонения токов и напряжений от их установившихся значений.

При анализе переходных процессов принимаются следующие допущения.

- Коммутация происходит мгновенно и без возникновения дуги. Характер коммутации на схеме указывается посредством ключа K со стрелкой. По направлению стрелки легко понять, замыкается рубильник (рис. 4.1, *а*) или размыкается (рис. 4.1, *б*).



а *б*

Рис. 4.1

- Начало отсчета времени переходного процесса $t = 0$ обычно совмещают с моментом времени, непосредственно следующим после коммутации.

• Электрическая цепь моделируется элементами с сосредоточенными параметрами.

• Предыдущая коммутация, если это специально не оговорено, происходила в момент времени, равный $t = -\infty$.

• Время переходного процесса (теоретически бесконечно длительное, так как переходный режим асимптотически приближается к новому установившемуся режиму бесконечно долго) ограничим *условным пределом*, который определяется практическими соображениями.

Переходный процесс в линейной электрической цепи описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами. Порядок уравнения определяется в общем случае количеством реактивных элементов, входящих в цепь, а в качестве коэффициентов выступают параметры пассивных элементов цепи и их комбинации.

Для электрической цепи (рис. 4.2), содержащей два реактивных элемента, после коммутации (переключения ключа из положения 1 в положение 2) уравнение, записанное по второму закону Кирхгофа для внешнего контура, имеет вид

$$u_R + u_L + u_C = E.$$

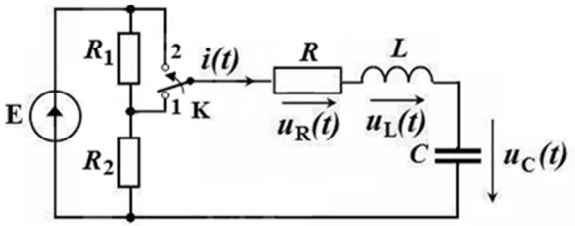


Рис. 4.2

В этом уравнении $u_R = Ri;\ u_L = Ldi/dt;\ i = Cdu_C/dt$. В результате (относительно напряжения конденсатора) получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Полное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами находят в виде суммы *частного* решения неоднородного уравнения и *общего* решения соответствующего однородного уравнения.

При анализе переходных процессов в электрических цепях составляющую, определяющую частное решение, называют *принужденной*, а общее решение – свободной.

Следовательно, полное решение неоднородного уравнения – напряжение конденсатора (как и любая другая величина в переходном режиме) определяется суммой принужденной и свободной составляющих:

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

Принужденный режим работы электрической цепи – режим работы цепи в установившемся режиме после окончания переходного режима. Соответственно токи и напряжения, найденные в этом режиме, называют *принужденными*.

Однородное дифференциальное уравнение получают путем приравнивания к нулю правой части неоднородного дифференциального уравнения, что соответствует анализу цепи при отсутствии внешних источников энергии (активных элементов цепи):

$$\frac{d^2 u_{C\text{св}}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_{C\text{св}}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{C\text{св}} = 0.$$

Свободные составляющие токов или напряжений являются результатом действия внутренних источников схемы (энергией, запасенной в индуктивных и емкостных элементах в режиме работы до коммутации).

Решение однородного дифференциального уравнения представляется в виде суммы экспонент:

$$u_{C\text{св}} = \sum_{1}^{n} A_i e^{p_i t},$$

где число слагаемых n равно порядку дифференциального уравнения.

Для рассматриваемой схемы $n = 2$, следовательно,

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий; p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения.

Наиболее простой алгоритм составления характеристического уравнения цепи:

1) записываем формулу входного сопротивления пассивной цепи после коммутации относительно разрыва любой ветви в комплексной форме;

2) в формуле $\underline{Z}_{вх}$ производим замену сомножителя $j\omega$ на p;

3) полученное выражение $Z(p)$ приравниваем нулю: $Z(p) = 0$.

Для цепи с двумя реактивными элементами характеристическое уравнение является квадратным.

Характер процесса свободной составляющей зависит от вида корней характеристического уравнения, которые в свою очередь зависят от соотношения параметров пассивных элементов. Возможны три случая.

1. Корни характеристического уравнения действительные отрицательные и разные по модулю. Характер свободного процесса – апериодический.

2. Корни действительные отрицательные и равные по модулю. Характер свободного процесса – предельно апериодический.

3. Пара комплексных сопряженных корней. Характер свободного процесса – колебательный периодический затухающий.

В цепях первого порядка (с одним реактивным элементом) корень всегда один: $p = -1/\tau$, где τ – постоянная времени [с], для цепи с конденсатором $\tau = CR_{экв}$, для цепи с индуктивностью $\tau = L / R_{экв}$.

Здесь $R_{экв}$ – входное сопротивление схемы после коммутации относительно зажимов реактивного элемента (C или L).

К начальным условиям, позволяющим определить постоянные интегрирования, относятся значения искомой величины и $(n - 1)$ ее производных в момент коммутации.

Начальные условия разделяются на независимые и зависимые. Независимые начальные условия определяются из законов коммутации.

Первый закон коммутации формулируется для токов катушек индуктивности: *ток через катушку индуктивности не может измениться скачком, и в момент коммутации его значение равно значению в момент, непосредственно предшествующий коммутации,* $i_L(0) = i_L(0_-)$.

Второй закон коммутации формулируется относительно напряжений конденсаторов: *напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, и в момент коммутации равно его значению в момент, непосредственно предшествующий коммутации,* $u_C(0) = u_C(0_-)$.

Значения всех остальных токов ветвей, не содержащих катушек, и напряжений катушек и резисторов в момент коммутации являются зависимыми начальными условиями. Зависимые начальные условия не подчиняются законам непрерывности и в момент коммутации могут изменяться скачком.

Значения независимых начальных условий определяются из схемы цепи до коммутации.

Значения зависимых начальных условий определяются на основе законов Кирхгофа из схемы после коммутации с учетом найденных ранее независимых начальных условий.

Алгоритм расчета

1. Рассчитать принужденный (установившийся) режим. Определить значения принужденных токов и напряжений при $t = \infty$.

2. Рассчитать режим до коммутации. Определить токи в ветвях с индуктивностью и напряжения на конденсаторах – значения независимых начальных условий.

3. Определить зависимые начальные условия.

4. Найти выражение характеристического уравнения и определить его корни.

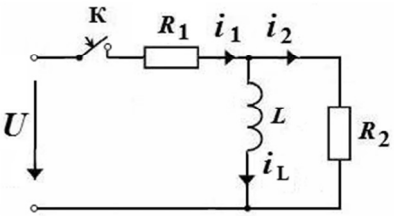
5. Записать общие выражения для искомых напряжений и токов в соответствии с видом корней характеристического уравнения.

6. Используя начальные условия и значения принужденных составляющих токов и напряжений при $t = 0$, найти постоянные интегрирования.

7. Записать выражения искомых величин в переходном режиме.

4.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

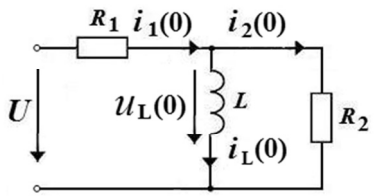
Задача 1. В цепи, приведенной на рисунке, найти токи в ветвях схемы и напряжение на индуктивности, а также производную тока через индуктивность в момент коммутации при следующих исходных данных: U = 12 В; R_1 = 20 Ом; R_2 = 30 Ом; L = 0,3 Гн.



Решение

Решение начинаем с определения независимых начальных условий. В данной задаче независимое начальное условие – ток в ветви с индуктивностью $i_L(0)$. Так как до коммутации электрическая цепь была обесточена, то в соответствии с первым законом коммутации $i_L(0) = i_L(-0) = 0$.

Зависимые начальные условия определяем из схемы после коммутации при замкнутом ключе *K*.



Из первого закона Кирхгофа

$$i_1(0) = i_L(0) + i_2(0),$$

учитывая, что $i_L(0) = 0$, следует:

$$i_1(0) = i_2(0).$$

Из второго закона Кирхгофа для внешнего контура

$$U = R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0)$$

определяем:

$$i_1(0) = i_2(0) = U / (R_1 + R_2) = 12 / (20 + 30) = 0{,}24 \text{ А}.$$

Так как индуктивность подключена параллельно резистору R_2, то напряжение на индуктивности в момент коммутации

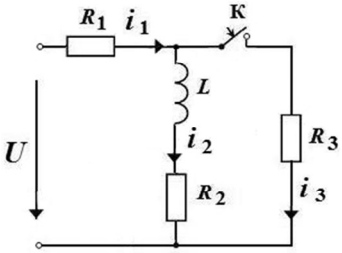
$$u_L(0) = R_2 i_2(0) = 30 \cdot 0{,}24 = 7{,}2 \text{ В}.$$

Учитывая взаимосвязь между током и напряжением на индуктивности $u_L = L(di_L / dt) = Li'_L$, определяем значение производной тока индуктивности в момент коммутации:

$$i'_L(0) = u_L(0) / L = 7,2 / 0,3 = 24 \text{ А/с}.$$

Ответ: $i_L(0) = 0$; $i_1(0) = i_2(0) = 0,24$ А; $u_L(0) = 7,2$ В; $i'_L(0) = 24$ А/с.

Задача 2. В цепи, приведенной на рисунке, $U = 24$ В; $R_1 = R_3 = 6$ Ом; $R_2 = 12$ Ом; $L = 0,018$ Гн. Определить начальные условия.

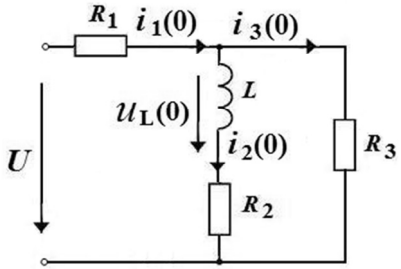


Решение

Независимое начальное условие, ток через индуктивность $i_2(0)$, определяем из схемы до коммутации при разомкнутом ключе *K*. При этом учитываем, что индуктивность в цепи постоянного тока представляет закоротку, т. е. $u_L(-0) = 0$.

$$i_2(0) = i_2(-0) = U / (R_1 + R_2) = 24 / (6 + 12) = 1,33 \text{ А}.$$

Зависимые начальные условия определяем из схемы после коммутации, при замкнутом ключе. Запишем для данной схемы уравнения по законам Кирхгофа:



$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0);$$

$$R_1 i_1(0) + u_L(0) + R_2 i_2(0) = U;$$

$$R_1 i_1(0) + R_3 i_3(0) = U.$$

В третье уравнение подставляем значение тока $i_1(0)$ из первого уравнения, в результате получим

$$R_1 \left[i_2(0) + i_3(0) \right] + R_3 i_3(0) = U.$$

Из полученного уравнения определяем значение $i_3(0)$:

$$i_3(0) = [U - R_1 i_2(0)] / (R_1 + R_3) = [24 - 6 \cdot 1{,}33] / (6 + 6) = 1{,}33 \text{ А}.$$

Из первого уравнения:

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) = 1{,}33 + 1{,}33 = 2{,}66 \text{ А}.$$

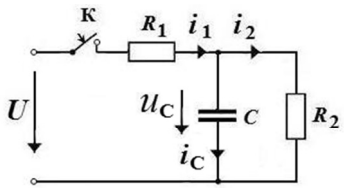
Из второго уравнения системы:

$$u_L(0) = U - R_1 i_1(0) - R_2 i_2(0) = 24 - 6 \cdot 2{,}66 - 12 \cdot 1{,}33 = -8 \text{ В}.$$

Учитывая взаимосвязь между током и напряжением на индуктивности $u_L = L(di_2 / dt) = Li_2'$, определяем значение производной тока через индуктивность в момент коммутации:

$$i_2'(0) = u_L(0) / L = -8 / 0{,}018 = -444 \text{ А/с}.$$

Ответ:
$i_1(0) = 2{,}66$ А; $i_2(0) = 1{,}33$ А; $i_3(0) = 1{,}33$ А; $u_L(0) = -8$ В;
$i_2'(0) = -444$ А/с.



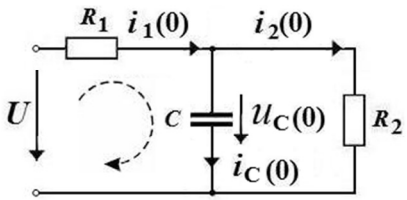
Задача 3. Для цепи, приведенной на рисунке, найти начальные условия при следующих исходных данных: U = 10 В; R_1 = 40 Ом; R_2 = 10 Ом; C = 25 мкФ.

Решение

Независимое начальное условие $u_C(0) = u_C(-0)$ определяется из схемы до коммутации. При разомкнутом ключе K схема обесточена, токи в цепи равны нулю, при разряженном конденсаторе напряжение на емкости

$$u_C(0) = u_C(-0) = 0.$$

Зависимые начальные условия определяются из схемы после коммутации (ключ замкнут) с учетом независимого начального условия.



Резистор R_2 включен параллельно конденсатору, поэтому напряже-

ние на нем в момент коммутации равно $u_C(0) = u_C(-0) = 0$, а следовательно и ток через резистор R_2 равен нулю $(i_2(0) = u_C(0) / R_2)$.

Запишем второй закон Кирхгофа для контура «входное напряжение U – сопротивление R_1 – емкость C»:

$$U = R_1 i_1(0) + u_C(0).$$

Из уравнения следует:

$$i_1(0) = \big(U - u_C(0)\big) / R_1 = (10 - 0) / 40 = 0{,}25 \text{ А}.$$

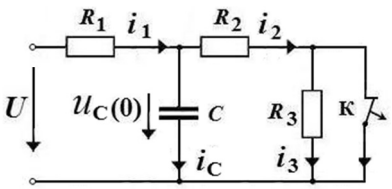
Из первого закона Кирхгофа, $i_1(0) = i_C(0) + i_2(0)$, следует:

$$i_1(0) = i_C(0) = 0{,}25 \text{ А}.$$

Значение производной напряжения на емкости в момент коммутации определяем, учитывая взаимосвязь между напряжением и током через емкость: $i_C = C(du_C / dt) = Cu'_C$, откуда

$$u'_C(0) = i_C(0) / C = 0{,}25 / 25 \cdot 10^{-6} = 10^4 \text{ В/с}.$$

Ответ: $u_C(0)$ = 0 В; $i_1(0)$ = 0,25 А; $i_C(0)$ = 0,25 А; $i_2(0)$ = 0 А; $u'_C(0) = 10^4$ В/с.



Задача 4. Определить начальные условия для цепи, представленной на рисунке, если U = 75 В; R_1 = 50 Ом; $R_2 = R_3$ = 25 Ом; C = 10 мкФ.

Решение

По схеме до коммутации (ключ K замкнут) определяем независимое начальное условие $u_C(0) = u_C(-0)$.

При замкнутом ключе резистор R_3 закорочен, ток через него не протекает. Емкость при постоянном токе (установившийся режим до коммутации) представляет собой разрыв, ток через элемент равен нулю. Поэтому ток в цепи до коммутации протекает по контуру

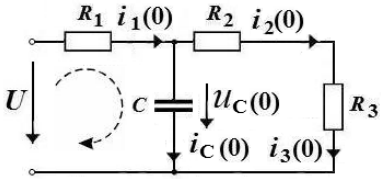
«источник питания – резистор R_1 – резистор R_2 – ключ». Величина тока в контуре

$$i_1(-0) = i_2(-0) = U / (R_1 + R_2) = 75 / (50 + 25) = 1 \text{ А}.$$

Значение независимого начального условия, напряжения на емкости:

$$u_C(0) = u_C(-0) = R_2 i_2(-0) = 25 \cdot 1 = 25 \text{ В}.$$

По схеме цепи после коммутации, с учетом независимого начального условия, определяем зависимые начальные условия.



После размыкания ключа K резисторы R_2 и R_3 образуют ветвь последовательно соединенных элементов, включенную параллельно емкости C, поэтому

$$i_2(0) = i_3(0) = u_C(0) / (R_2 + R_3) = 25 / (25 + 25) = 0{,}5 \text{ А}.$$

Запишем второй закон Кирхгофа для входного контура:

$$U = R_1 i_1(0) + u_C(0).$$

Из последнего уравнения определяем значение тока $i_1(0)$:

$$i_1(0) = (U - u_C(0)) / R_1 = (75 - 25) / 50 = 1 \text{ А}.$$

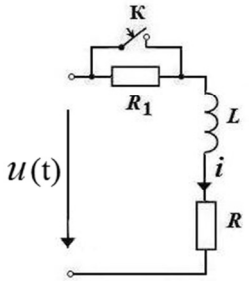
Из уравнения, записанного по первому закону Кирхгофа для узла, определяем значение тока через емкость:

$$i_C(0) = i_1(0) - i_2(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \text{ А}.$$

Первую производную функции изменения напряжения на емкости при $t = 0$ определяем из уравнения взаимосвязи между напряжением и током емкости $i_C = C(du_C / dt) = Cu'_C$:

$$u'_C(0) = i_C(0) / C = 0{,}5 / 10 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^4 \text{ В/с}.$$

Ответ: $u_C(0) = 25$ В; $i_1(0) = 1$ А; $i_2(0) = i_3(0) = 0{,}5$ А; $i_C(0) = 0{,}5$ А; $u'_C(0) = 5 \cdot 10^4$ В/с.

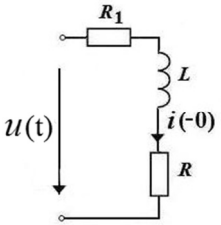


Задача 5. Для схемы, приведенной на рисунке, задано: $u = 120\sqrt{2} \cdot \sin \omega t$ В; f = 50 Гц; R = 3 Ом; R_1 = 10 Ом; L = 25 мГн.

Определить начальные условия: $i(0)$; $u_L(0)$; $u_R(0)$.

Решение

Решение начнем с определения независимых начальных условий. До коммутации ($t < 0$, ключ разомкнут) схема состоит из последовательного соединения резистора R_1 и катушки индуктивности (L, R).



Определяем: 1) полное комплексное сопротивление схемы до коммутации:

$$\underline{Z} = R + R_1 + j\omega L = 3 + 10 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,025 =$$

$$= 13 + j7,85 = 15,2e^{j31,1^\circ} \text{ Ом};$$

2) комплексную амплитуду тока ветви:

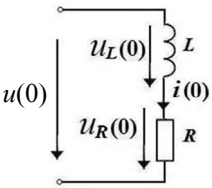
$$\underline{I}_m = \underline{U}_m / \underline{Z} = \sqrt{2} \cdot 120 / 15,2e^{j31,1^\circ} = \sqrt{2} \cdot 7,9e^{-j31,1^\circ} \text{ А};$$

3) мгновенное значение тока и его величину при $t < 0$:

$$i(t) = Im\left(\underline{I}_m e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2} \cdot 7,9 \sin(314t - 31,1^\circ) \text{ А};$$

4) независимое начальное условие для данной схемы:

$$i(0) = i_L(0) = i_L(-0) = \sqrt{2} \cdot 7,9 \sin(-31,1^\circ) = -5,77 \text{ А}.$$



Для определения зависимых начальных условий, каковыми являются напряжения на индуктивности катушки (L) и ее внутреннем сопротивлении (R), рассмотрим схему замещения для момента коммутации (при $t = 0$).

В данной схеме в соответствии с первым законом коммутации $i_L(0) = i(0) = i(-0)$, а входное напряжение

принимается равным его значению в момент коммутации. Так как $\psi_u = 0$, то $u(0) = U_m = \sqrt{2} \cdot U$.

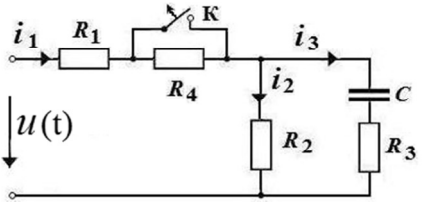
В результате получим

$$u_R(0) = Ri_L(0) = 3(-5,77) = -17,3 \text{ В},$$

$$u_L(0) = u(0) - u_R(0) = \sqrt{2} \cdot 120 \sin 0 - (-17,3) = 17,3 \text{ В}.$$

Ответ: $i(0) = -5,77$ А; $u_L(0) = 17,3$ В; $u_R(0) = -17,3$ В.

Задача 6. Для цепи, схема которой приведена на рисунке, найти токи ветвей в момент коммутации при следующих исходных данных: $u(t) = 50\sin(\omega t + \pi/4)$ В; $f = 800$ Гц; $R_1 = 8$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 10$ Ом; $R_4 = 2$ Ом; $C = 20$ мкФ.

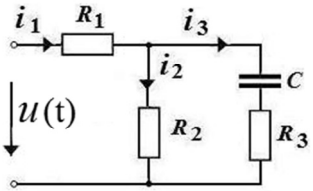


Решение

Независимые начальные условия определяем из схемы до коммутации ($t < 0$, ключ замкнут).

Для расчета используем символический метод анализа. Находим реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = 1/2\pi fC = 9,95 \text{ Ом}.$$



Далее определяем комплексное входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2(R_3 - jX_C)}{R_2 + R_3 - jX_C} = 11,84 - j0,786 \text{ Ом};$$

комплекс амплитудного значения тока первой ветви:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{50e^{j45^\circ}}{11,84 - j0,786} = 4,213e^{j48,71^\circ} \text{ А}.$$

Используя правило делителя токов, определяем комплекс амплитуды тока третьей ветви:

$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{m1}\frac{R_2}{R_2 + R_3 - jX_C} = 1{,}17e^{j82{,}26^\circ}\ \text{А}.$$

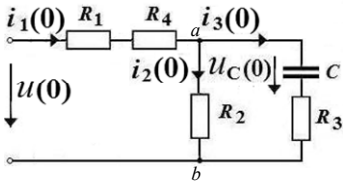
Комплекс амплитуды напряжения конденсатора

$$\underline{U}_{Cm} = -jX_C\underline{I}_{m3} = 11{,}64e^{-j7{,}74^\circ}\ \text{В}.$$

Мгновенное значение напряжения конденсатора и его значение при $t = 0$, т. е. независимое начальное условие схемы,

$$u_C(t) = Im(\underline{U}_{mC}e^{j\omega t}) = 11{,}64\sin(\omega t - 7{,}74^\circ)\ \text{В},$$

$$u_C(0) = u_C(-0) = 11{,}64\sin(-7{,}74^\circ) = -1{,}568\ \text{В}.$$



Для определения зависимых начальных условий построим схему замещения для момента коммутации (при $t = 0$, ключ разомкнут). Входное напряжение принимается равным его значению в момент коммутации:

$$u(0) = 50\sin(\pi/4) = 35{,}36\ \text{В}.$$

Для расчета токов ветвей схемы определим предварительно в соответствии с методом двух узлов напряжение u_{ab}:

$$u_{ab} = \frac{u(0)\dfrac{1}{R_1 + R_4} + E_C\dfrac{1}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1 + R_4} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = 8{,}447\ \text{В},$$

где $E_C = u_{C(0)}$.

Токи ветвей определим по закону Ома:

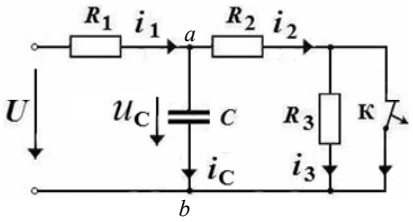
$$i_1(0) = \frac{u(0) - u_{ab}}{R_1 + R_4} = 2{,}691\ \text{А}, \quad i_2(0) = \frac{u_{ab}}{R_2} = 1{,}689\ \text{А},$$

$$i_3(0) = \frac{u_{ab} - E_C}{R_3} = 1{,}001 \text{ А}.$$

Ответ: $i_1(0) = 2{,}691$ А; $i_2(0) = 1{,}689$ А, $i_3(0) = 1{,}001$ А.

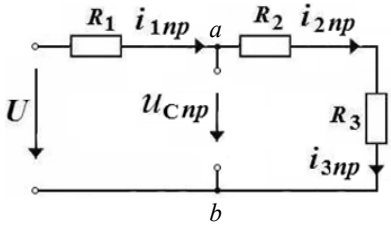
Задача 7. Определить законы изменения напряжения на конденсаторе и токов ветвей цепи в переходном режиме.

Параметры схемы: $U = 75$ В; $R_1 = 50$ Ом; $R_2 = R_3 = 25$ Ом; $C = 10$ мкФ.



Решение

В цепях первого порядка переходная величина определяется в виде



$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t) = f_{\text{пр}}(t) + Ae^{pt} =$$

$$= f_{\text{пр}}(t) + Ae^{(-t/\tau)}.$$

Определяем принужденные составляющие токов и напряжения на емкости.

Так как для постоянного тока конденсатор представляет разрыв, то $i_{C_{\text{пр}}}(t) = 0$ и, следовательно,

$$i_{1_{\text{пр}}}(t) = i_{2_{\text{пр}}}(t) = i_{3_{\text{пр}}}(t) = U / (R_1 + R_2 + R_3) =$$

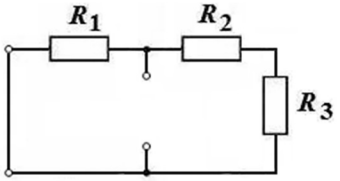
$$= 75 / (50 + 25 + 25) = 0{,}75 \text{ А}.$$

Принужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C_{\text{пр}}}(t) = i_{2_{\text{пр}}}(t)(R_2 + R_3) = 0{,}75(25 + 25) = 37{,}5 \text{ В}.$$

Воспользуемся результатами расчета задачи 4: независимое начальное условие $u_C(0) = 25$ В; зависимые начальные условия:

$$i_1(0) = 1 \text{ А}; \; i_2(0) = i_3(0) = 0{,}5 \text{ А}; \; i_C(0) = 0{,}5 \text{ А}.$$



Постоянная времени переходного процесса для цепи, содержащей емкость,

$$\tau = CR_{\text{экв}},$$

где $R_{\text{экв}}$ – входное сопротивление цепи после коммутации относительно зажимов емкости при устранении из цепи источников питания:

$$R_{\text{экв}} = R_1(R_2 + R_3)/(R_1 + R_2 + R_3) =$$

$$= 50(25 + 25)/(50 + 25 + 25) = 25 \text{ Ом}.$$

Постоянная времени

$$\tau = CR_{\text{экв}} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 25 = 0,25 \text{ мс}.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -1/\tau = 4000 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянная интегрирования для цепи с одним реактивным элементом равна значению свободной составляющей при $t = 0$:

$$A = f(0) - f_{\text{пр}}(0).$$

Постоянная интегрирования свободной составляющей напряжения на емкости

$$A = u_C(0) - u_{C_{\text{пр}}}(0) = 50 - 37,5 = 12,5 \text{ В}.$$

Постоянные интегрирования свободных составляющих токов (индекс постоянной составляющей соответствует индексу тока):

$$A_1 = i_1(0) - i_{1\text{пр}}(0) = 1 - 0,75 = 0,25 \text{ А};$$

$$A_2 = i_2(0) - i_{2\text{пр}}(0) = 0,5 - 0,75 = -0,25 \text{ А};$$

$$A_3 = i_3(0) - i_{3\text{пр}}(0) = 0,5 - 0,75 = -0,25 \text{ А};$$

$$A_C = i_C(0) - i_{C_{\text{пр}}}(0) = 0,5 - 0 = 0,5 \text{ А}.$$

Переходные функции искомых величин:

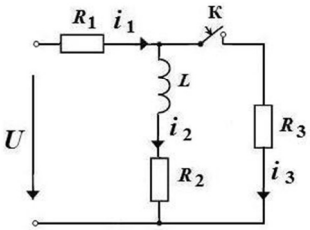
$$u_C(t) = 37,5 + 12,5e^{-4000t} \text{ В};$$

$$i_1(t) = 0,75 + 0,25e^{-4000\,t}\ \text{А};$$

$$i_2(t) = i_3(t) = 0,75 - 0,25e^{-4000t}\ \text{А};$$

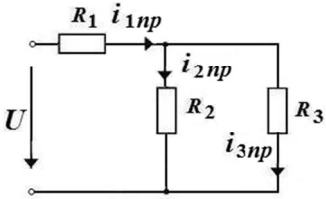
$$i_C(t) = 0,5e^{-4000t}\ \text{А}.$$

Задача 8. Определить законы изменения токов схемы и напряжения на индуктивности в переходном режиме, если $U = 12$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = 4$ Ом; $L = 0,1$ Гн.



Решение

По схеме после коммутации (в установившемся режиме) определяем принужденные составляющие тока напряжения на индуктивности.



Из схемы следует:

$$i_{1\text{пр}} = U / (R_1 + R_{23}) = 12 / (4 + 2) = 2\ \text{А},$$

где $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 2$ Ом.

Токи в параллельных ветвях по формуле разброса:

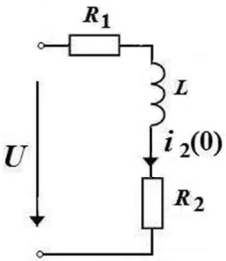
$$i_{2\text{пр}} = i_{1\text{пр}} R_3 / (R_2 + R_3) =$$

$$= 2 \cdot 4 / (4 + 4) = 1\ \text{А};$$

$$i_{3\text{пр}} = i_{1\text{пр}} - i_{2\text{пр}} = 2 - 1 = 1\ \text{А};\ U_{l\text{пр}} = 0.$$

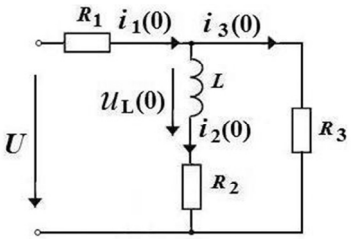
Из схемы до коммутации (ключ K разомкнут) определяем независимое начальное условие – ток через индуктивность:

$$i_2(0) = i_2(-0) = U / (R_1 + R_2) = 12 / (4 + 4) = 1,5\ \text{А}.$$



Из схемы после коммутации (при $t = 0$) определяем зависимые начальные условия.

Для данной схемы запишем систему уравнений по законам Кирхгофа:



$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0);$$

$$R_1 i_1(0) + R_3 i_3(0) = U;$$

$$u_L(0) + R_2 i_2(0) - R_3 i_3(0) = 0.$$

Подставим во второе уравнение выражение тока $i_1(0)$ из первого уравнения, в результате получаем

$$R_1 \left[i_2(0) + i_3(0) \right] + R_3 i_3(0) = U.$$

Из уравнения следует:

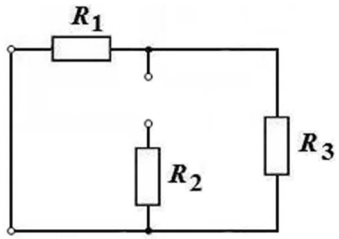
$$i_3(0) = [U - R_1 i_2(0)] / (R_1 + R_3) = \left[12 - 4 \cdot 1{,}5\right] / (4 + 4) = 0{,}75 \text{ А}.$$

Из первого уравнения системы определяем ток $i_1(0)$:

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) = 1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25 \text{ А}.$$

Из третьего уравнения системы:

$$u_L(0) = R_3 i_3(0) - R_2 i_2(0) = 4 \cdot 0{,}75 - 4 \cdot 1{,}5 = -3 \text{ В}.$$



Постоянная времени переходного процесса

$$\tau = L / R_{\text{экв}} = 0{,}1 / 6 = 0{,}0167 \text{ с},$$

где $R_{\text{экв}}$ – эквивалентное входное сопротивление относительно зажимов индуктивности (в схеме после коммутации) после устранения источника напряжения:

$$R_{\text{экв}} = R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3) = 4 + 4 \cdot 4 \ / (4 + 4) = 6 \text{ Ом}.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -1 / \tau = -1 / 0{,}0167 = -60 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянные интегрирования свободных составляющих токов:

$$A_1 = i_1(0) - i_{1\text{пр}}(0) = 2{,}25 - 2 = 0{,}25 \text{ А};$$

$$A_2 = i_2(0) - i_{2\text{пр}}(0) = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ А};$$

$$A_3 = i_3(0) - i_{3\text{пр}}(0) = 0,75 - 1 = -0,25 \text{ А}.$$

Постоянная интегрирования свободной составляющей напряжения на индуктивности (учитывая, что $u_{L\text{пр}}(0) = 0$)

$$A = u_L(0) - u_{L\text{пр}}(0) = -3 \text{ В}.$$

Выражения токов и напряжения на индуктивности в переходном режиме:

$$i_1(t) = 2 + 0,25e^{-60t} \text{ А};$$

$$i_2(t) = 1 + 0,5e^{-60t} \text{ А};$$

$$i_3(t) = 1 - 0,25e^{-60t} \text{ А};$$

$$u_L(t) = -3e^{-60t} \text{ В}.$$

4.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Цель: экспериментально исследовать переходные процессы в линейных электрических цепях с одним и двумя реактивными элементами.

Объект и средства измерения

Исследуемые электрические цепи включают в себя: переменное сопротивление R_1 (магазин сопротивлений), емкость C (магазин емкостей) и катушки индуктивности L_1 и L_2 с параметрами R_{K1}, L_{K1}, R_{K2}, L_{K2}.

Питание исследуемых цепей осуществляется от генератора прямоугольных импульсов (ГПИ). Измерение параметров переходных процессов и их визуальное наблюдение производятся с помощью электронного осциллографа.

Рабочее задание

1. Собрать электрическую цепь, содержащую последовательно соединенные магазины сопротивлений и емкостей (рис. 4.3). Установить на магазине емкостей C = 0,25 мкФ. Подключить осциллограф к зажимам батареи емкостей. Подобрать такую величину сопротивления R_1, чтобы переходной процесс заканчивался за время $t_{\text{п}} = \dfrac{T_{\text{им}}}{2}$, где $T_{\text{им}}$ – период прямоугольного импульса источника питания. Зарисовать с осциллографа (друг под другом) кривые входного импульса и переходных напряжений на конденсаторе и резисторе.

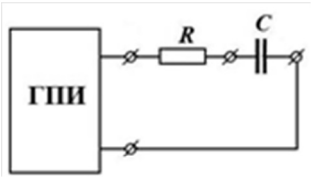


Рис. 4.3

2. Измерить начальные (при t = 0) и установившиеся значения снятых напряжений и занести данные опыта в таблицу. Обратить внимание на выполнение законов Кирхгофа в момент коммутации и в установившемся режиме, а также законов коммутации.

$U_{\max}$		$U_R(0)$		$U_{R\,\text{пр}}$		$U_C(0)$		$U_{C\,\text{пр}}$		R_1 =
мм	В	мм	В	мм	В	мм	В	мм	В	Ом
										$R = R_1$
										$R = 2R_1$
										$R = R_1 / 2$

3. Увеличить сопротивление R_1 в два раза. Зарисовать осциллограммы изменения напряжения на емкости и сопротивлении.

4. Уменьшить (по сравнению с п. 1) сопротивление R_1 вдвое, зарисовать осциллограммы напряжений на емкости и сопротивлении.

5. Определить постоянную времени переходного процесса в электрической цепи по результатам эксперимента пп. 1, 3 и 4.

6. Собрать электрическую цепь по схеме (рис. 4.4), используя при этом сопротивление R_1 и катушку индуктивности $R_{\text{К1}}$, $L_{\text{К1}}$.

Подключив осциллограф к зажимам магазина сопротивлений, подобрать такую величину сопротивления, чтобы переходной процесс

заканчивался за время $t_{\text{п}} = \dfrac{T_{\text{им}}}{2}$. Зарисовать осциллограммы на сопротивлении и катушке индуктивности. Определить постоянную времени переходного процесса.

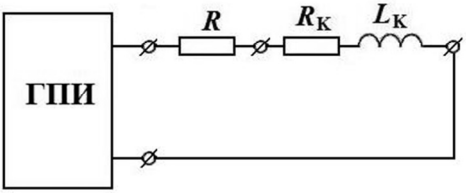


Рис. 4.4

7. Собрать электрическую цепь по схеме, представленной на рис. 4.5. Установить на магазине емкостей величину, равную 0,25 мкФ. Подключить осциллограф к магазину емкостей. Подобрать на магазине сопротивлений такую величину, чтобы переходной процесс в электрической цепи имел колебательный характер. Зарисовать осциллограммы напряжений на емкости, сопротивлении и катушке индуктивности. Определить угловую частоту собственных затухающих колебаний и коэффициент затухания.

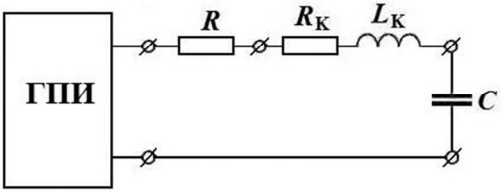


Рис. 4.5

8. Установить на магазине сопротивлений величину сопротивления, при которой переходной процесс в электрической цепи будет иметь апериодический характер. Зарисовать осциллограммы напряжений на емкости, сопротивлении и катушке индуктивности.

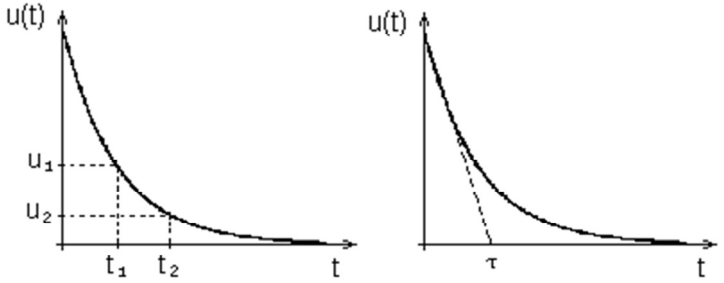
9. Прокомментировать результаты эксперимента.

Методические указания

1. Постоянная времени переходного процесса экспериментально может быть определена следующим образом (рис. 4.6, *а*):

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln U_1 / U_2} \text{ (с)}$$

или как подкасательная в любой точке графика переходного процесса (рис. 4.6, *б*).



а *б*

Рис. 4.6

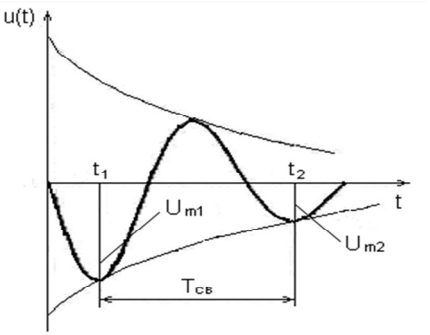


Рис. 4.7

2. Колебательный переходной процесс характеризуется коэффициентом затухания δ и угловой частотой собственных затухающих колебаний контура $\omega_{св}$. Эти параметры экспериментально определяются следующим образом (рис. 4.7):

$$\delta = \frac{\ln \frac{U_{m1}}{U_{m2}}}{T_{св}}; \qquad \omega_{св} = \frac{2\pi}{T_{св}}.$$

Программа домашней подготовки

1. По учебным пособиям и конспекту лекций повторить раздел курса «Переходные процессы в линейных электрических цепях».

2. Заготовить бланк протокола испытаний. В бланке должны быть вычерчены схемы к каждому пункту задания.

Контрольные вопросы

1. Какие начальные условия называются зависимыми и какие – независимыми?

2. Что называется постоянной времени переходного процесса?

3. Какие виды корней может иметь характеристическое уравнение второго порядка?

4. Как определить индуктивность и емкость неразветвленной цепи *R–L–C*, если известны ее коэффициент затухания и частота свободных колебаний?

5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

К выполнению РГЗ следует приступать после изучения необходимого материала по данной теме из рекомендованной литературы. В начале каждой задачи надо привести краткое условие, расчетную схему и исходные данные для своего варианта. При оформлении решения не следует приводить выводы формул и уравнений, имеющихся в учебной литературе. Графики и диаграммы следует вычерчивать на миллиметровой бумаге с помощью чертежных инструментов. На осях координат должны быть указаны откладываемые значения и единицы их измерения. Образец титульного листа РГЗ представлен в прил. 2.

Вариант РГЗ определяется номером в групповом журнале.

Задача 1. Расчет электрической цепи постоянного тока

Для электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, а параметры заданы в табл. 5.1, выполнить следующее.

1. Составить систему уравнений, необходимых для определения токов по первому и второму законам Кирхгофа.

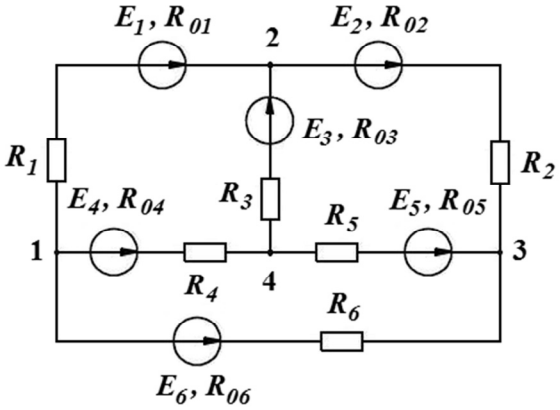
2. Найти все токи, пользуясь методом контурных токов.

3. Составить баланс мощностей для заданной электрической цепи.

4. Определить ток в ветви, указанной в графе «*I*» табл. 5.1, методом эквивалентного активного двухполюсника. При расчете токов, необходимых для определения напряжения холостого хода U_{XX}, использовать метод межузлового напряжения.

5. Определить напряжение между точками, заданными в графе «*U*» табл. 5.1.

6. Построить в масштабе потенциальную диаграмму для внешнего контура электрической цепи.



Задача 2. Расчет трехфазной электрической цепи

Для трехфазной электрической цепи, параметры которой заданы в табл. 5.2, выполнить следующее.

1. Определить фазные и линейные токи, ток в нейтральном проводе (для нагрузки, соединенной по схеме звезда).

2. Составить баланс мощностей.

3. Изобразить схему измерения активной мощности, потребляемой заданной электрической цепью. Определить величину этой мощности по показаниям ваттметров.

4. На комплексной плоскости построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

5. Рассчитать токи в ветвях схемы в заданном аварийном режиме.

Схема соединения нагрузки:

- четный вариант (и 00) – звезда с нейтральным проводом ($\underline{Z}_n = 0$);
- нечетный вариант – треугольник.

Таблица 5.1

№ варианта	E_1, В	R_{01}, Ом	R_1, Ом	E_2, В	R_{02}, Ом	R_2, Ом	E_3, В	R_{03}, Ом	R_3, Ом	E_4, В	R_{04}, Ом	R_4, Ом	E_5, В	R_{05}, Ом	R_5, Ом	E_6, В	R_{06}, Ом	R_6, Ом	I	U
00	–	–	8	25	0,5	7,5	–	–	4	12	1	11	18	–	6	–	–	4	5	2–4
01	24	–	2	–	–	4	–	–	6	10	1,2	8	–	–	10	20	0,2	6	3	1–4
02	50	0,5	8	20	0,5	4	–	–	5	–	–	2	10	–	4	–	–	4	6	1–3
03	–	–	4	36	–	8	10	0,4	3	–	–	1	25	0,5	2	–	–	6	4	3–4
04	–	–	5	15	0,8	2	–	–	8	–	–	2	25	1,2	2	30	–	6	2	2–3
05	–	-	1	–	–	2	20	0,1	6	–	–	3	25	–	8	10	1	4	1	1–2
06	5	0,4	6	15	–	4	–	–	3	30	0,8	2	–	–	5	–	–	3	5	2–4
07	10	0,8	4	–	–	5	–	–	6	16	0,2	6	24	–	4	–	–	2	4	4–1
08	–	–	5	8	–	6	20	0,8	4	10	1,2	4	–	–	3	–	–	3	1	3–1
09	–	–	5	20	–	7	–	–	2	5	0,2	8	–	–	2	10	0,5	1	2	4–3
10	–	–	2,5	–	–	10	4	0,8	4	10	–	8	–	–	10	20	0,4	2	6	3–2
11	5	0,8	10	25	–	8	–	–	2	–	–	6	–	–	10	10	0,5	4	3	2–1
12	16	0,2	2,5	–	–	6	8	0,5	6	–	–	5	–	–	10	10	–	5	5	4–2
13	–	–	4	50	1	5	–	–	2	24	1	10	12	–	6	–	–	2	1	2–4
14	12	0,2	3	24	0,4	5	12	–	2	–	–	5	–	–	8	–	–	10	3	2–3
15	12	1,2	2	–	–	4	6	0,6	8	–	–	5	18	–	8	–	–	8	5	1–3
16	–	–	3	–	–	2	–	–	2	8	1	6	16	1,2	8	24	–	6	2	1–2
17	36	0,8	6	–	–	1	24	1,5	8,5	12	–	4	–	–	10	–	–	4	4	1–4
18	–	–	2,5	12	–	1	36	0,4	4	–	–	10	–	–	2	24	0,4	3	6	3–4

19	–	–	5	–	–	2	10	–	8	8	1	12	24	0,8	4	–	–	3	6	4–2
20	18	1	6	–	–	3	–	–	5	–	–	4	30	–	3	18	0,5	4,5	5	3–2
21	24	–	4	–	–	6	–	–	8	15	1	8	–	–	10	30	0,4	8	4	1–4
22	40	1	11	20	1	8	–	–	10	–	–	4	10	–	8	–	–	10	3	1–3
23	–	–	6	30	–	8	15	0,5	5	–	–	4	20	0,5	4	–	–	9	2	2–1
24	–	–	8	20	1	5	–	–	10	–	–	5	20	1	8	40	–	10	1	4–1
25	–	–	10	–	–	4	40	0,5	8	–	–	10	50	–	12	20	0,5	8	5	3–4
26	12	–	2	–	–	4	–	–	6	10	1,2	8	–	–	6	10	0,2	6	5	1–4
27	30	0,5	8	20	0,5	8	–	–	5	–	–	2	15	–	4	–	–	4	1	1–3
28	–	–	10	16	–	8	10	0,4	3	–	–	1	20	0,5	12	–	–	6	2	3–4
29	–	–	15	15	0,8	12	–	–	8	–	–	12	25	1,2	12	30	–	16	3	2–3
30	–	–	10	–	–	12	20	1	9	–	–	10	25	–	8	10	1	8	4	1–2
31	15	0,4	6	5	–	4	–	–	3	10	0,8	2	–	–	5	–	–	3	6	2–4
32	10	0,8	14	–	–	15	–	–	16	16	0,2	16	24	–	14	–	–	12	5	4–1
33	–	–	10	8	–	6	10	0,8	4	10	1,2	4	–	–	6	–	–	6	6	3–1
34	–	–	5	10	–	7	–	–	2	15	0,2	8	–	–	2	10	0,5	1	1	4–3
35	–	–	5	–	–	10	4	0,8	4	10	–	8	–	–	5	20	0,4	4	4	3–2

Таблица 5.2

№ варианта	$U_л$, В	$R_а$, Ом	$X_а$, Ом	$R_в$, Ом	$X_в$, Ом	$R_с$, Ом	$X_с$, Ом	$R_{ав}$, Ом	$X_{ав}$, Ом	$R_{вс}$, Ом	$X_{вс}$, Ом	$R_{са}$, Ом	$X_{са}$, Ом	Авар. режим
00	127	6	8	8	–6	6	–8	–	–	–	–	–	–	кз а
01	220	–	–	–	–	–	–	6	8	8	–6	6	–8	хх ав
02	380	4	3	3	4	3	–4	–	–	–	–	–	–	кз в
03	220	–	–	–	–	–	–	4	3	3	4	3	–4	хх вс
04	127	4	4	6	8	4	–4	–	–	–	–	–	–	кз с
05	220	–	–	–	–	–	–	9	12	9	9	9	–12	хх са
06	127	6	6	4	4	4	–6	–	–	–	–	–	–	хх а
07	380	–	–	–	–	–	–	9	9	12	–12	12	–9	кз ав
08	127	5	5	8	6	5	–5	–	–	–	–	–	–	хх в
09	220	–	–	–	–	–	–	3	4	4	3	4	–3	кз вс
10	220	12	9	9	12	9	–12	–	–	–	–	–	–	хх с
11	380	–	–	–	–	–	–	8	6	6	–8	8	–6	кз са
12	127	3	4	4	3	4	–3	–	–	–	–	–	–	кз а
13	220	–	–	–	–	–	–	12	9	12	12	12	–9	хх ав
14	220	10	–	6	8	6	–8	–	–	–	–	–	–	кз в
15	380	–	–	–	–	–	–	10	–	6	–8	6	8	хх вс
16	127	6	8	–	–10	6	–8	–	–	–	–	–	–	кз с
17	220	–	–	–	–	–	–	–	10	8	–6	10	–	хх са
18	220	5	–	3	4	3	–4	–	–	–	–	–	–	хх а

19	380	–	–	–	–	–	–	6	–8	10	–	6	8	кз ав
20	127	5	–5	10	–	3	4	–	–	–	–	–	–	хх в
21	220	–	–	–	–	–	–	6	8	–	–10	8	–6	кз вс
22	220	3	–4	3	4	5	–	–	–	–	–	–	–	хх с
23	380	–	–	–	–	–	–	15	–	8	–6	6	8	кз са
24	380	8	6	15	–	6	–8	–	–	–	–	–	–	кз а
25	220	–	–	–	–	–	–	6	8	–	15	15	–	хх ав
26	127	6	–8	–	10	6	8	–	–	–	–	–	–	кз в
27	220	–	–	–	–	–	–	–	–10	8	+6	10	–	хх вс
28	220	5	–	3	–4	3	4	–	–	–	–	–	–	кз с
29	380	–	–	–	–	–	–	6	8	10	–	6	–8	хх са
30	127	5	5	10	–	3	–4	–	–	–	–	–	–	хх а
31	220	–	–	–	–	–	–	6	–8	–	10	8	6	кз ав
32	220	3	4	3	–4	5	–	–	–	–	–	–	–	хх в
33	380	–	–	–	–	–	–	15	–	8	6	6	–8	кз вс
34	380	8	–6	15	–	6	8	–	–	–	–	–	–	хх с
35	220	–	–	–	–	–	–	6	–8	–	–15	15	–	кз са

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Белов Н.В.* Электротехника и основы электроники / Н.В. Белов, Ю.С. Волков. – М.: Лань, 2011.

2. *Григораш О.В.* Электротехника и электроника: учебник для вузов / О.В. Григораш. – Гриф УМО. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 462 с.

3. *Данилов И.А.* Общая электротехника: учебное пособие для бакалавров / И.А. Данилов. – М.: Юрайт, 2012. – 673 с.

4. *Катаенко Ю.К.* Электротехника: учебное пособие / Ю.А. Катаенко. – М.: Дашков и К; Ростов н/Дону: Академцентр, 2010. – 287 с.

5. *Новогородцев А.Б.* Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей: учебное пособие. – 2-е изд. / А.Б. Новогородцев. – СПб.: Питер, 2006. – 575 с.

6. *Новожилов О.П.* Электротехника и электроника / О.П. Новожилов. – М.: Юрайт, 2012.

7. *Рекус Г.Г.* Основы электротехники и электроники в задачах и решениях: учебное пособие для вузов по неэлектротехническим специальностям / Г.Г. Рекус. – М.: Высшая школа, 2005. – 342 с.

8. Сборник задач по основам электротехники и электроники / под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1983.

9. Электротехника и электроника: учебник. В 2 т. Том 1. Электротехника / А.Л. Марченко, Ю.Ф. Осадчий – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 574 с.

10. Электротехника и электроника. Кн. 1. Электрические и магнитные цепи: учебник для неэлектр. спец. вузов. В 3 кн. / под ред. В.Г. Герасимова. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 288 с.

11. Электротехника и электроника: учебное пособие / М.А. Жаворонков. – М.: Академия, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Основные математические операции над комплексными числами

Сложение (вычитание). Заданы два комплексных числа $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ Для сложения (вычитания) достаточно сложить (вычесть) соответственно действительные и мнимые их части. Для этой цели наиболее удобно представлять комплексные числа в алгебраической форме. Геометрический смысл этих операций сводится к сложению (вычитанию) векторов $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$, построенных на комплексной плоскости.

Зададимся двумя комплексными числами:

$$\underline{Z}_1 = a + jb \text{ и } \underline{Z}_2 = c + jd.$$

Сумма:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a + c) + j(b + d).$$

Разность:

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (a - c) + j(b - d).$$

Сумма сопряженных комплексных чисел – действительное число.

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1^* = (a + jb) + (a - jb) = (a + a) + j(b - b) = 2a.$$

Умножение (деление). Для умножения (деления) комплексных чисел целесообразно представлять их в показательной форме. Чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) аргументы. Заданы два комплексных числа $\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi 1}$ и $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi 2}$. Произведение этих чисел определится формулой

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = Z_1 Z_2 e^{j(\varphi 1 + \varphi 2)}.$$

Если комплексные числа заданы в алгебраической форме $\underline{Z}_1 = a + jb$ и $\underline{Z}_2 = c + jd$, то для выполнения операции умножения

возможен либо переход к показательной форме, либо умножение двух многочленов с учетом, что $j^2 = -1$:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = (a + jb)(c + jd) = (ac + j^2 bd) + j(bc + ad) =$$

$$= (ac - bd) + j(bc + ad).$$

Произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля комплексного числа:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_1^* = (a + jb)(a - jb) = (a^2 + b^2) + j(ab - ab) = a^2 + b^2 = \left|\underline{Z}_1\right|^2.$$

Геометрический смысл умножения $\underline{Z}_1$ на $\underline{Z}_2$ означает, что радиус-вектор, соответствующий числу $\underline{Z}_1$, следует повернуть на угол φ_2, а затем растянуть его в $\left|\underline{Z}_2\right|$ раз, если $\left|\underline{Z}_2\right| > 1$, или сжать его в $\left|\underline{Z}_2\right|$ раз, если $\left|\underline{Z}_2\right| < 1$.

Частное от деления $\underline{Z}_1$ на $\underline{Z}_2$, если они заданы в показательной форме, определится формулой

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi 1 - \varphi 2)}.$$

Если комплексные числитель и знаменатель заданы в алгебраической форме, то для выполнения операции деления возможен либо переход к показательной форме, либо формирование в знаменателе действительного числа (домножение и знаменателя, и числителя на сопряженное знаменателю комплексное число):

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{a + jb}{c + jd} \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{(ac - bd) + j(ad + bc)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + j\frac{ad + bc}{c^2 + d^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Образец титульного листа расчетно-графического задания

Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра электроники и электротехники

Расчетно-графическое задание

Анализ линейных электрических цепей

Выполнил:

Студент

Группа

Дата

Принял:

Преподаватель

Выполнение	**Защита**	**Общий**

Новосибирск
20___

Богданов Вадим Валентинович
Давыденко Ольга Борисовна
Савин Николай Петрович
Сапсалев Анатолий Васильевич

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Учебное пособие

Редактор *М.О. Мокшанова*
Выпускающий редактор *И.П. Бровановa*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 25.07.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 8,6. Печ. л. 9,25. Изд. № 283/18. Заказ № 1114. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20