Министерство науки и высшего образования Российской Федерации НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.С. ВОРОНИН

### ФИЗИКА ВЗРЫВА И УДАРА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

> Новосибирск 2019

Рецензенты:

д-р техн. наук, доцент А.В. Гуськов канд. физ.-мат. наук Э.Р. Прууэл

Работа подготовлена на кафедре газодинамических импульсных устройств

#### Воронин М.С.

B 752

Физика взрыва и удара: учебное пособие / М.С. Воронин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 212 с.

ISBN 978-5-7782-4054-4

В пособии изложены теоретические основы механики идеальной сплошной среды и теории детонационных волн, необходимые для понимания взрывных процессов. Предварительно описаны необходимые базовые поняти. Детально рассмотрены вопросы связанные с нестационарным течением идеальной сплошной среды в случаях непрерывного и разрывного волнового движения. В каждом разделе рассматриваются соответствующие задачи в виде качественного анализа либо необходимые методы расчета.

#### УДК 532.5:539.5

ISBN 978-5-7782-4054-4

© Воронин М.С., 2019
© Новосибирский государственный технический университет, 2019

### Оглавление

Списон	к сокращений и условных обозначений	5
Введен	ние	6
Глава	1. Основные уравнения движения сплошной	
	среды	8
1.1	Необходимые базовые понятия	8
1.2	Классификация движений сплошной среды	10
1.3	Упрощённые представления о сжатии сплошной среды	15
1.4	Лагранжево и эйлерово описание движения	20
1.5	Необходимые понятия из термодинамики	25
1.6	Уравнения движения идеальной сплошной среды	39
1.7	Движение несжимаемой идеальной сплошной среды .	47
1.8	Интегралы уравнения Эйлера	49
1.9	Элементарная теория кумулятивных струй	54
1.10	Дифференциальные уравнения одномерного	
	движения идеальной среды	59
Глава	2. Одномерные нестационарные	
	изоэнтропические движения идеальной среды	62
2.1	Акустическое приближение. Плоские звуковые волны	62
2.2	Соотношения вдоль характеристик в общем	
	одномерном случае	69
2.3	Одномерное плоское изоэнтропическое течение	
	идеальной сплошной среды	73
2.4	Простые волны (особые решения)	78
2.5	Характеристики особых решений	80
2.6	Простые волны сжатия	81
2.7	Простые волны разрежения	91
2.8	Одностороннее истечение покоящегося газа в пустоту	98
2.9	Метание поршня сжатым газом	101

2.10	Общие решения	103
Глава	3. Теория ударных волн	107
3.1	Соотношения на ударной волне в идеальной среде	108
3.2	Энтропия ударного сжатия	116
3.3	Геометрическая интерпретация закономерностей	
	ударного сжатия	118
3.4	Невозможность существования ударной волны	
	разрежения в веществе с нормальными свойствами .	123
3.5	Распад произвольного разрыва	126
3.6	Примеры расчета распадов произвольного разрыва .	134
3.7	Косые скачки уплотнения и косые ударные волны	148
3.8	Ударная поляра	152
3.9	Применение ударной поляры для решения задач	154
Глава	4. Теория детонационных волн	164
4.1	Основные понятия и свойства взрывчатых веществ .	164
4.2	Гидродинамическая теория детонации	169
4.3	Уравнения состояния и изоэнтропы продуктов	
	взрыва конденсированных ВВ	178
4.4	Параметры состояния продуктов взрыва за	
	детонационной волной	186
4.5	Теплота взрыва и некоторые методы её расчета	193
Список литературы		

### Список сокращений и условных обозначений

- ВВ Взрывчатое вещество
- ПВ Продукты взрыва
- ПД Продукты детонации
- УрС Уравнение состояния
  - УВ Ударная волна
  - УА Ударная адиабата
  - ВР Волна разрежения или волна разгрузки
  - ДВ Детонационная волна

#### Введение

В данном курсе изучаются процессы взрыва и удара, происходящие в газообразных и конденсированных средах. Главным образом, рассматривается теоретическое описание этих явлений, методы решения основных задач. Пособие составлено на основе [1—13].

С самого начало было бы полезным определить понятия взрыва и удара. В физическом словаре [14] даётся следующее определение взрыва: внезапное изменение физического или химического состояния вещества, сопровождающееся крайне быстрым превращением (выделением) энергии, которое приводит к разогреву, движению и сжатию продуктов взрыва (ПВ) и окружающей среды, возникновению интенсивного скачка давления, разрушению и разбрасыванию. Ключевыми словами в этом определении можно выделить - «крайне быстрое энерговыделение». Взрывы могут быть разными по своей природе, например, в результате химической реакции или протекания мощного электрического тока по проводнику. Но в общем можно сказать, что, как правило, это процесс, в котором изначально имевшаяся потенциальная энергия (энергия связи атомов, заряд на конденсаторной батарее) за очень короткий промежуток времени переходит в кинетическую энергию ПВ (сильно сжатый/разогретый и имеющий большую скорость газ или плазма), которые в свою очередь воздействуют на окружающую среду. Под очень коротким промежутком времени с достаточной точностью можно подразумевать миллионные доли секунды (микросекунды) или более короткие промежутки времени.

Для понятия «удар» в [14] даётся следующее определение: удар твердых тел — совокупность явлений, возникающих при столкновении движущихся твердых тел, а также при некоторых видах взаимодействия твердого тела с жидкостью или газом. В терминах энергии можно сказать, что удар — это передача кинетической энергии (или её части) одного тела другому за очень короткий промежуток времени.

6

Интуитивно ясно, почему взрыв и удар рассматриваются в одном курсе. Не вдаваясь в подробности, скажем, что в процессе взрыва ПВ производят удар по окружающей их среде, т. е. взрыв включает в себя удар. В среде, которая была подвержена взрыву или удару, будут распространяться волны одной и той же природы. Для чуть большей ясности назовём их волнами резкого изменения давления или плотности. Волны, у которых амплитуда изменения давления очень большая (например при взрыве мощных ВВ), скорее всего приведут к разрушению окружающей среды. Волны от слабого удара, у которых амплитуда изменения давления небольшая, не приведут к существенным изменениям среды. Перейдя в воздух (можно сказать ударив по нему) и распространившись до слухового аппарата человека, такая волна будет им воспринята как звук.

Физика взрыва и удара изучает и описывает распространение и взаимодействие волн, возникающих при этих явлениях. Поскольку в зависимости от амплитуды ударного воздействия в среде могут возникать дополнительные явления (фазовые переходы, разрушение и др.), то эта наука является комплексной, так как оперирует понятиями из разных разделов механики, физики и химии.

#### Глава 1. Основные уравнения движения сплошной среды

#### 1.1 Необходимые базовые понятия

Рассмотрим некоторые базовые понятия, которые используются в данном курсе. Для математического описания движения вещества используется аппарат механики сплошных сред (MCC). Механика сплошных сред – раздел механики, в котором изучается движение и взаимодействие газообразных, жидких и твёрдых деформируемых сред. Поскольку ПВ обычно считаются сильно сжатым газом, то наиболее подробно будут рассмотрены некоторые вопросы из газовой динамики, одного из разделов MCC.

Все тела представляют собой совокупности разных атомов и молекул. Приведём некоторые хорошо известные из физики данные об элементарных частицах. Радиус атома водорода  $1.36\cdot 10^{-8}$  см, а радиус ядра атома водорода имеет порядок  $10^{-13}$  см, т. е. радиус ядра много меньще атома, тогда как именно в нём сосредоточена основная масса вещества: масса электрона  $9.1\cdot 10^{-28}$  г, масса протона  $1.67\cdot 10^{-24}$  г.

При нормальных условиях в одном кубическом сантиметре воздуха содержится  $2.69\cdot 10^{19}$  молекул. Для твёрдых тел, например железа, плотность которого составляет 7.8 г/см<sup>3</sup>, в одном кубическом сантиметре содержится  $8.6\cdot 10^{22}$  молекул. При плотности ядра железа  $1.16\cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup> отношение плотности к плотности ядерного вещества есть  $7\cdot 10^{-14}$ .

Отсюда следует, что объёмы, занимаемые телами, много больше объёмов, в которых сосредоточено само вещество. Все тела, по существу, «состоят из пустоты», и в то же время в практически малых объёмах пространства, занятого телом, всегда заключено большое число частиц. Атомы и молекулы находятся в постоянном хаотическом движении. Между частицами имеются определённые взаимодействия. Сложное строение молекул и удерживающие их силы взаимодействия не всегда известны. Для описания движения реального вещества как целого, так и его взаимодействия с другими физическими телами прямой способ интегрирования уравнений движения всех молекул неприемлем не только из-за очень большого их числа и неизвестности сил взаимодействия между ними, но также ввиду невозможности указать точные начальные условия. Но для решения многих практических задач несущественно знать движение каждой отдельной молекулы, а требуются только некоторые средние характеристики.

Для того чтобы обойти эти трудности в МСС используется следующий подход. Все величины, необходимые для описания механического поведения реальных сред, рассматриваются как «средние» величины для большого числа атомов или молекул, непрерывно распределённые по занимаемому средой объёму. Вместе с этим Эйлером было введено понятие сплошной среды. Сплошная среда – абстрактная среда (тело), заполняющая непрерывным образом какую-либо часть пространства. В качестве точек пространства, занимаемого сплошной средой, рассматриваются бесконечно малые объёмы (также называемые «элемент среды», «частицы сплошной среды» или «жидкие частицы»).

описывать соответствующими дифференциальными уравнениями. Поэтому, когда, например, говорят о смещении жидкой частицы, то речь идет не о смещении отдельной молекулы, а о смещении бесконечно малого объема, содержащего много молекул.

# 1.2 Классификация движений сплошной среды

Каждая точка среды характеризуется соответствующими параметрами: давлением p, плотностью  $\rho$ , температурой T,  $\vec{u}$  – ветором скорости с проекциями на оси координат  $(u_x, u_y, u_z)$ . Скорость  $\vec{u}$ , связанную с движением частиц среды, также будем называть *массовой скоростью*. Возможны и другие параметры среды, в зависимости от сложности описания.

*Стационарное* (или установившееся) движение сплошной среды – это такое движение, при котором все параметры меняются от точки к точке (зависят от координат), но не зависят от времени. Такие движения, например, рассматриваются в аэродинамике при полёте тела с постоянной скоростью.

Для стационарного движения среды

$$p = p(x, y, z), \rho = \rho(x, y, z),$$
$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z), T = T(x, y, z).$$

Также очевидно, что для стационарного движения всегда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

где f – любой из параметров среды. Если бы мы выбрали какуюлибо точку области пространства, через которую сплошная среда протекает стационарно, и стали бы наблюдать за параметрами среды в этой точке, то они всегда принимали бы одни и те же значения (как и для любой другой точки этой области). При *нестационарном* (или неустановившемся) движении все параметры зависят как от координаты, так и от времени:

$$\begin{aligned} p &= p(x,y,z,t), \\ \rho &= \rho(x,y,z,t), \\ \vec{u} &= \vec{u}(x,y,z,t), \\ T &= T(x,y,z,t). \end{aligned}$$

В любой точке области пространства, через которую среда течет нестационарно, значения параметров среды постоянно изменяются. Такие нестационарные движения сплошной среды применительно к взрывным и ударным явлениям рассматриваются в данном курсе.

В общем случае имеет место *трёхмерное движение*. При этом все параметры среды являются функциями трёх пространственных координат – *x*, *y*, *z*.

Двумерные движения сплошной среды можно разделить на плоские и осесимметричные. При таком движении все параметры среды являются функциями двух пространственных координат и времени. В случае двумерного плоского движения для описания используют две декартовы координаты, например x и y, и все параметры являются функциями вида f(x, y, t). Геометрически это означает, что распределение всех параметров среды в плоскостях, параллельных координатной плоскости 0xy (или перпендекулярных оси 0z) являются одинаковыми, т. е. течение среды можно рассматривать только в одной плоскости 0xy, а движение в направлении оси z отсутствует.

На рис. 1.1 для примера показано поле вектора скорости частиц некоторого двумерного плоского течения сплошной среды в плоскости 0*xy*. На рис. 1.2 схематично показано, как выглядит это течение в трёхмерном пространстве.

В случае двумерного осесимметричного движения одной из координатных осей является некоторая ось симметрии 0z, а второй пространственной координатой является расстояние r от оси симметрии до рассматриваемой точки. Все параметры среды являются функциями вида f(r, z, t). Для определения параметров во всём пространстве достаточно определить их вид в какой-либо плоскости, проходящей через ось симметрии, и поворотом этой плоскости



Рис. 1.1.

Рис. 1.2.

вокруг оси симметрии распространить распределения параметров на всё пространство. В качестве дополнительной геометрической интерпретации такого вида движения можно сказать, что на окружностях, центр которых лежит на оси симметрии, параметры течения сплошной среды принимают одно и то же значение, но меняются от окружности к окружности.

На рис. 1.3 показан пример двумерного осесимметричного движения. Приведена одна и та же цилиндрическая поверхность в разные моменты времени. Такое движение характерно для цилиндрической оболочки, метаемой ПВ от детонации ВВ, заключенного в эту оболочку. Осью симметрии задачи в данном случае является ось цилиндра (оболочки), показанная на рисунке прямой черной линией.

На рис. 1.4 показана проекция на плоскость 0xz той же самой оболочки, что и на рис. 1.3. Видно, что вращением этой проекции вокруг оси 0z можно получить пространственную форму оболочки, а также пространственные распределения всех параметров среды, зная эти распределения в плоскости 0xz.

Oдномерное движение сплошной среды описывается при помощи одной пространственной координаты r и времени t. Т. е. все



Рис. 1.3.

Рис. 1.4.

параметры среды являются функциями вида f(r,t). Одномерные движения сред можно разделить на три вида симметрий:

- 1. плоские одномерные движения;
- 2. цилиндрические одномерные движения течения с осевой симметрией;
- сферические одномерные движения течения с точечной симметрией.

При одномерном плоском движении параметры среды одинаковы в точках, имеющих одну координату x. Другими словами, параметры среды одинаковы во всех точках любой плоскости, перпендекулярной координатной оси 0x, но могут меняться от одной такой плоскости к другой (или со временем, если движение не стационарное). В направлениях координатных осей 0y и 0z среду можно считать бесконечной либо ограниченной абсолютно жёсткой трубой.

На рис. 1.5 показана схема такого движения. Штриховой линией показан произвольный график, например, давления в среде p(x,t). Для плоского одномерного течения верно  $p(x_i, y, z, t) = p(x_i, t), \forall y, z$ .

При *одномерном цилиндрическом движении* выбирается некоторая ось симметрии 0*z* и все параметры среды являются функциями



только от расстояния r от этой оси до рассматриваемой точки, а также функциями времени f(r,t). Т. е. принимают постоянное значение на поверхностях круговых цилиндров, ось которых совпадает с 0z. Эти значения могут отличаться для разных r, а также изменяться со временем если движение нестационарно. На рис. 1.6 показана схема такого движения. Цилиндрическое одномерное движение имеет место, например, при разлёте бесконечно длинного цилиндра с газом под давлением.

При одномерном сферическом движении выбирается некоторая точка 0 – центр симметрии и все параметры среды являются функциями расстояния r от этого центра до рассматриваемой точки, а также функциями времени f(r,t). Т. е. принимают постоянное значение на сферах, центр которых совпадает с 0. Эти значения могут отличаться для разных r, а также изменяться со временем, если движение нестационарно. На рис. 1.7 показана схема такого движения, классическим примером которого является детонация сферических зарядов, начинающаяся из точки симметрии.



Рис. 1.6.

Рис. 1.7.

## 1.3 Упрощённые представления о сжатии сплошной среды

Ввиду ограниченности скорости обработки информации мозгом люди привыкли воспринимать процессы удара и взрыва как процессы, происходящие мгновенно. Например, при ударе движущегося тела по неподвижному нам кажется, что неподвижное тело приходит в движение мгновенно целиком. Но использование соответствующей экспериментальной техники позволяет увидеть, что эти процессы происходят за конечный промежуток времени и могут быть достаточно сложными.

Рассмотрим простую схему удара по телу в одномерной постановке и плоской симметрии. Пусть сплошная среда занимает область  $x_L \leq z \leq x_R, x_L = 0$  см,  $x_R = 10$  см. В начальный момент t = 0частицы среды покоятся во всей области, кроме левой границы:

$$u(x,0) = 0, x_L < x \le x_R,$$
  
$$u(x_L,0) = \delta u,$$



Рис. 1.8. Упрощённая схема сжатия сплошной среды.

где *u* – массовая скорость. Не имеет значения, что привело в движение левую границу – взрыв BB, которое было в контакте с ней, или удар. Постоянство этой скорости означает, что на границу действует постоянная сила.

Визуально разобьем среду на слои пириной  $\delta x$ , подразумевая их бесконечно тонкими (рис. 1.8). Далее представим себе, что среда сжимается дискретно, или прерывисто. Левая граница движится со скоростью  $\delta u$  в направлении 0x и сжимает вещество в первом слое (самом левом). Поэтому через некоторое время  $\delta t$  толщина первого слоя уменьшится, например, в два раза (пусть пока мгновенно), давление в нём увеличится на  $\delta p$  и сам он начнёт двигаться со скоростью  $\delta u$ .

После этого вещество первого слоя начнёт давить на вещество второго слоя и всё повторится для второго слоя. Опять же через время  $\delta t$  толщина второго слоя сократится в два раза, давление в нём увеличится на  $\delta p$  и он также начнёт двигаться со скоростью  $\delta u$ . Очевидно, что то же самое произойдёт и с последующими слоями.

В представленной картине сжатия сплошной среды видно, что по мере сжатия существует невозмущённая покоящаяся область среды и область сжатой и движущейся (или возмущённой) среды. Граница между ними сама по себе движится с некоторой скоростью c большей, чем  $\delta u$ , поскольку она постоянно удаляется от левой границы среды. Для рассматриваемых условий величина этой скорости равна  $c = \delta x/(2\delta t)$ . Такое распространяющееся по сплошной среде возмущение её параметров будем называть *волной*.

Скорость c, с которой распространяется возмущение, характерна для конкретной среды и является её свойством. Для более плотных реальных сред она выше, чем для менее плотных. Если величина  $\delta u$  не превышает некоторую определённую, то скорость c совпадает со скоростью звука в среде. При этом амплитуда такого возмущения будет считаться малой, его также называют звуковой или акустической волной, а *скорость звука* обычно называют скоростью распространения малых возмущений. Для больших значений  $\delta u$  или для большой амплитуды возмущения скорость волны будет сверхзвуковой.

Описанную схему можно также проиллюстрировать спомощью профилей параметров среды, На рис. 1.9 для примера показаны



Рис. 1.9. Профили массовой скорости в упрощённой схеме.



Рис. 1.10. Плоскость событий для упрощённой схемы сжатия.

профили массовой скорости в соответствии с рис. 1.8. Профили давления будут иметь аналогичный вид.

Одномерные задачи удобно рассматривать на так называемой *плоскости событий*. Ось абсцисс на этой плоскости является осью пространственной координаты, а по оси ординат откладывается время. Как правило, на этой плоскости рассматривают траектории движения отдельных частиц, фронтов волн, границ каких-либо областей сплошной среды. Сами эти траектории часто называют x - t-диаграммами.

Для рассматриваемой упрощённой схемы сжатия сплошной среды на плоскости событий можно начертить две траектории, ограничивающие две области (см. рис. 1.10). Первая траектория  $x = \delta ut$ , это траектория левой границы среды, которая движется с постоянной скоростью  $\delta u$ . Вторая траектория x = ct, это траектория волны возмущения, которая движется с постоянной скоростью c. В области, ограниченной этими линиями, среда или все её частицы также движутся со скоростью  $\delta u$ . Правее траектории волны расположена область, в которой среда находится в исходном состоянии, поскольку волна возмущения туда ещё не дошла.

На рассмотренной идеализированной схеме было показано, что сплошная среда, подверженная удару, сжимается (или деформироуется) и приходит в движение не мгновенно во всём своём объёме, а по мере распространения в ней волны, в которой происходит изменение параметров среды. Такая схема качественно отражает сжатие реальных сред.

# 1.4 Лагранжево и эйлерово описание движения

Для того чтобы описать движение системы дискретных материальных частиц (точек), нам необходимо задать систему координат, связанную с пространством. Для того чтобы следить за каждой отдельной частицей или для того, чтобы отличать их друг от друга, необходимо ввести какую-либо их нумерацию. После этого мы можем говорить, что частица с номером *i* в момент времени *t* находится в координатах  $x_i$ ,  $y_i$  и имеет скорость  $\vec{u_i}$ , ускорение  $\vec{a_i}$  и т. д. Это проиллюстрировано на рис. 1.11, где в плоскости 0xy точками показаны положения для четырёх частиц вдоль их траекторий, показанных штриховыми линиями, на моменты времени  $t_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$ . Удобно в качестве номеров частиц брать их координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  для заданного момента времени  $t = t_0$ , обычно начального (рис. 1.12).

Подход, при котором описывают законы движения частиц среды, называют лагранжевым описанием движения, а номера, идентифицирующие частицы, – *лагранжевыми координатами*. Можно сказать, что при этом подходе описывают изменение параметров среды вдоль траекторий частиц среды.

В случае сплошной среды номера частиц или их лагранжевы координаты  $(x_0, y_0, z_0)$  являются действительными числами, поскольку среда заполнена частицами непрерывным образом. Также



Рис. 1.11.

Рис. 1.12.

напомним, что в этом случае с каждой частицей связаны дополнительные параметры среды, такие как плотность, давление, температура, и при лагранжевом описании все они имеют вид  $f(x_0, y_0, z_0, t)$ .

Возможно другое описание движения – эйлерово, при котором описывают изменение параметров среды в той или иной точке пространства (x, y, z), через которую, очевидно, могут «протекать» самые разные частицы среды. Координаты точек пространства x, y, z соответственно называют эйлеровыми координатами. Все параметры среды при эйлеровом описании имеют вид f(x, y, z, t).

Например, с точки зрения эйлерова описания при стационарном течении сплошной среды плотность в некоторой точке пространства  $(x_1, y_1, z_1)$  остаётся постоянной во времени  $\rho(x_1, y_1, z_1, t) = \rho_{01} = const, \forall t$ , но может отличаться от плотности в другой точке пространства  $\rho(x_2, y_2, z_2, t) = \rho_{02} = const, \forall t, \rho_{01} \neq \rho_{02}$ . С точки зрения лагранжева описания, во всех частицах этого же стационарного течения плотность может изменяться со временем  $\rho(x_0, y_0, z_0, t) \neq const$ . Связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t), \\ z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t), \end{aligned}$$
(1.1)

где функции  $f_i$  устанавливают связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами частицы. В зависимости от типа описания, исходя из (1.1) можно сказать, что в момент времени t в точке с эйлеровыми координатами (x, y, z) находилась частица с лагранжевыми координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  (или, если удобно, с таким номером). Либо сказать, что в момент времени t частица  $(x_0, y_0, z_0)$  находилась в точке (x, y, z).

Также из (1.1) видно, что в момент времени  $t_0$  эйлеровы координаты частицы совпадают с её лагранжевыми координатами:

$$x_0 = f_1(x_0, y_0, z_0, t_0),$$
  

$$y_0 = f_2(x_0, y_0, z_0, t_0),$$
  

$$z_0 = f_3(x_0, y_0, z_0, t_0).$$
  
(1.2)

Предполагается, что частицы взаимно не проникают друг в друга или не сливаются в одну, поэтому  $f_i$  взаимно однозначны. На этом основании можно утверждать, что также существует обратная связь:

$$x_{0} = g_{1}(x, y, z, t),$$
  

$$y_{0} = g_{2}(x, y, z, t),$$
  

$$z_{0} = g_{3}(x, y, z, t).$$
(1.3)

Если заданы функци<br/>и $f_i$ или  $g_i,$ то задан закон движения сплошной среды.

Традиционно законы движения сплошной среды записывают, используя эйлеровы координаты. Лагранжевы координаты, как правило, присутствуют в начальных и граничных условиях решаемой задачи. В механике сплошных сред вводится понятие субстанциональной производной. Она отражает скорость изменеия любого параметра среды со временем «внутри» частицы среды и по разному выражается в зависимости от типа описания. В лагранжевом представлении все параметры среды являются функциями времени и лагранжевых координат, которые остаются неизменными для выбранной частицы. Поэтому, если мы хотим узнать, как изменялся какой-либо параметр  $F(x_0, y_0, z_0, t)$  в частице по мере её движения, т.е. относительно этой частицы только со временем, необходимо взять частную производную по времени от соответствующей функции  $\frac{\partial F}{\partial t}$ . Например, если задан закон движения (1.1), то скорость и ускорение частицы среды можно рассчитать как

$$u_x(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial f_1}{\partial t}, u_y(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial f_2}{\partial t},$$

$$u_z(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial f_3}{\partial t},$$

$$u_x(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial u_x}{\partial t}, a_y(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial u_y}{\partial t},$$

$$a_z(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial u_z}{\partial t}.$$
(1.4)

В эйлеровом представлении в точке x, y, z в момент времени t находится какая-то частица, которая двигалась в эту точку вдоль своей траектории. Производная какого-либо параметра по времени – это изменение этого параметра за бесконечно малый отрезок времени dt. В случае субстанциональной производной изменение параметра рассматривается в двух бесконечно близких точках на траектории движения частицы среды, в которых она находилась в моменты времени t - dt и t. Таким образом, субстанциональная производная в эйлеровых координатах – это производная по времени вдоль трактории движения частицы среды. Траектория частицы задаётся законами движения (1.1), поэтому любой параметр среды F вдоль неё можно считать сложной функцией времени

F(x(t), y(t), z(t), t) и его субстанциональная производная (или полная производная по времени) выразится как:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 
= \frac{\partial F}{\partial t} + u_x\frac{\partial F}{\partial x} + u_y\frac{\partial F}{\partial y} + u_z\frac{\partial F}{\partial z}.$$
(1.5)

Например, ускорение  $\vec{a}(x,y,z,t)$ частицы в эйлеровом представлении имеет вид

$$a_{x} = \frac{\partial u_{x}}{\partial t} + u_{x} \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + u_{y} \frac{\partial u_{x}}{\partial y} + u_{z} \frac{\partial u_{x}}{\partial z},$$

$$a_{y} = \frac{\partial u_{y}}{\partial t} + u_{x} \frac{\partial u_{y}}{\partial x} + u_{y} \frac{\partial u_{y}}{\partial y} + u_{z} \frac{\partial u_{y}}{\partial z},$$

$$a_{z} = \frac{\partial u_{z}}{\partial t} + u_{x} \frac{\partial u_{z}}{\partial x} + u_{y} \frac{\partial u_{z}}{\partial y} + u_{z} \frac{\partial u_{z}}{\partial z}.$$
(1.6)

В векторном анализе часто используют оператор Гамильтона  $\nabla$  (набла) – символический вектор, значительно упрощающий запись векторных выражений:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{1.7}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты системы координат. Через него можно кратко выразить известные векторные операции:

$$gradU = \nabla U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z},$$
  

$$div\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$
  

$$rot\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}.$$
(1.8)

Используя оператор Гамильтона можно упростить запись субстанциональной производной произвольной функции  $\vec{F}(x, y, z, t)$ :

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{F}$$
(1.9)

Если F скаляр, то (1.9) одно уравнение, в случае, когда  $\vec{F}$  вектор, то (1.9) – это три уравнения для каждой компоненты  $\vec{F}$ . Вообще говоря, субстанциональная производная может браться не только вдоль траектории частицы, но и вдоль любой другой траектории. В этом случае  $\vec{u} = \frac{dx}{dt}$  будет уже не вектором скорости частицы, а скоростью того объекта чья траектория рассматривается, например, траектория распространения возмущения или фронта волны.

#### 1.5 Необходимые понятия из термодинамики

Описание механического поведения реальных сред неотъемлемо связано с описанием их термодинамического состояния, поэтому для дальнейших рассуждений необходимо напомнить смысл некоторых понятий из термодинамики.

Термодинамические системы по характеру взаимодействия с окружающей средой делятся на три типа: изолированные, закрытые и открытые системы [15]. Изолированные системы не обмениваются с внешней средой ни энергией, ни веществом. Закрытые системы обмениваются с внешней средой энергией в форме теплоты и работы, но не обмениваются веществом. Открытые системы обмениваются с внешней средой и энергией, и веществом. Добавим к этому списку адиабатические системы, которые обмениваются с внешней средой энергией в форме работы, но не обмениваются теплом и веществом.

Состояние среды называется *равновесным*, если оно не изменяется со временем. Это состояние, из которого среда не может выйти самопроизвольно, т. е. для того чтобы среда из него вышла, необходимо внешнее воздействие или обмен энергией с окружающей средой. Неравновесные состояния характеризуются неисчезающими потоками между системой и внешней средой. Если среду перевести в неравновесное состояние и зафиксировать внешние параметры (исключить обмен энергией с окружающей средой), то через некоторое время (релаксации) среда перейдёт в равновесное состояние.

При термодинамическом описании процессов в реальных веществах обычно используют следующие параметры состояния среды:  $\rho$  – плотность, V – объём, p – давление, E – внутренняя энергия, T – температура, S – энтропия. Равновесное состояние определяется заданием любых двух из них. Если в изолированной системе есть области с различными значениями параметров состояния, то это приведет к соответствующим потокам, т. е. такое состояние также неравновесное.

Поскольку равновесное состояние среды вполне определяется заданием каких-либо двух параметров, то они должны быть связаны между собой определёнными соотношениями. Существует три таких эмпирических соотношения: два закона термодинамики и уравнение состояния реального вещества.

Первый закон термодинамики есть не что иное, как выражение закона сохранения энергии, устанавливающее связь между тепловой энергией и механической работой:

$$dQ = d\varepsilon + dA, \tag{1.10}$$

где dQ – элементарное количество теплоты (энергии), подведённое/отведённое к единице массы среды,  $d\varepsilon$  – элементарное изменение внутренней энергии единицы массы среды, dA – работа, совершённая единицей массы среды или над ней. Далее, говоря о величинах единицы массы среды, будем их называть удельными величинами.

Для газов и жидкостей удельная работа выражается через давление и удельный объём  $v\,=\,1/\rho$ :

$$dA = pdv; \tag{1.11}$$

для твёрдых тел:

$$dA = -\frac{\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}}{\rho},\tag{1.12}$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  компоненты тензора напряжений и тензора деформаций соответственно. Обычно анализ мощных ударных волн в твердом теле проводится в гидродинамическом приближении, т. е. когда напряжения по всем главным направлениям можно считать одинаковыми. Такое приближение применимо, если развиваемые давления многократно превышают предел текучести материала и удельная работа для него также рассчитывается по формуле (1.11).

Если в качестве двух независимых термодинамических переменных выбрать температуру T и удельный объём v, то полный дифференциал удельной внутренней энергии будет равен:

$$d\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_{v} dT + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)_{T} dv, \qquad (1.13)$$

а первое начало термодинамики (1.10) можно переписать в виде:

$$dQ = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_{v} dT + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)_{T} dv + pdv.$$
(1.14)

Из (1.14) следует, что при изохорном процессе (v = const) вся подведённая извне энергия (или тепло) идёт на изменение внутренней энергии:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_T = c_V, \qquad (1.15)$$

а количество тепла  $c_V$  (или удельной энергии), необходимое для нагрева единицы массы среды на 1 градус при изохорном процессе, называется удельной изохорной теплоёмкостью.

Первое начало можно преобразовать к виду:

$$dQ = d\varepsilon + pdv = d\varepsilon + pdv + vdp - vdp =$$
  
=  $d\varepsilon + d(pv) - vdp = d(\varepsilon + pv) - vdp.$  (1.16)

Вводя обозначение

$$h = \varepsilon + pv, \tag{1.17}$$

получим

$$dQ = dh - vdp. \tag{1.18}$$

Величину *h* называют удельной энтальпией, или теплосодержанием. Она также является параметром состояния.

Принимая за независимые переменные температуру и давление, дифференциал энтальпии примет следующий вид:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp, \qquad (1.19)$$

и, следовательно, первый закон термодинамики можно записать как:

$$dQ = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] dp.$$
(1.20)

Поэтому при изобарном процессе (*p* = *const*) всё подводимое тепло идёт на изменение энтальпии среды:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p, \qquad (1.21)$$

где  $c_p$  – удельная изобарная теплоёмкость, или количество тепла, необходимое для нагрева единицы массы среды на 1 градус при изобарном процессе.

Уравнением состояния (УрС) среды называется соотношение, связывающее какие-либо из трёх термодинамических параметров в состоянии равновесия, например, в виде f(p, v, T) = 0. УрС может быть задано в калорическом виде  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$ , в термическом виде  $p = p(\rho, T)$ , в виде  $p = p(\rho, s)$  и др.

В общем случае можно рассматривать уравнение состояния в виде

$$p(v,T) = p_x(v) + p_T(v,T) + p_e(v,T), \qquad (1.22)$$

где  $p_x(v)$  – давление, связанное только с потенциальным взаимодействием атомов (также называют давление упругого сжатия), которое зависит только от удельного объёма (или плотности вещества);  $p_T(v,T)$  – тепловая составляющая давления, которая зависит от интенсивности теплового движения атомов;  $p_e(v,T)$  – вклад в давление от теплового возбуждения электронов, который необходимо учитывать при температурах выше 10<sup>4</sup> К.

По аналогии с (1.22) можно представить удельную внутренню энергию вещества:

$$\varepsilon(v,T) = \varepsilon_x(v) + \varepsilon_T(v,T) + \varepsilon_e(v,T), \qquad (1.23)$$

что также является общим видом УрС, причем теоретически (1.22) является следствием (1.23).

Упругие составляющие  $p_x$  и  $\varepsilon_x$  равны полным давлению и удельной внутренней энергии при абсолютном нуле температуры

$$p(v,0) = p_x(v), \varepsilon(v,0) = \varepsilon_x(v),$$

поэтому иногда их также называют «холодными» давлением и энергией. Механически равновесное состояние твердого тела при нуле температуры и нулевом давлении характеризуется взаимной компенсацией между атомными силами притяжения и отталкивания и минимумом потенциальной упругой энергии, который можно принять за начало ее отсчета  $\varepsilon_x = 0$ . Обозначим удельный объем тела в этом состоянии (p=0, T=0) через  $v_{0K}$ . Этот объем немного меньше объема тела  $v_0$  при нормальных условиях (p=1 атм, T=300 K), так как при нагревании вещества от абсолютного нуля до комнатной температуры происходит тепловое расширение. Нормальный объем металлов  $v_0$  обычно больше объема  $v_{0K}$  на 1-2%. Во многих случаях этим небольшим различием объемов  $v_0$  и  $v_{0K}$  можно пренебречь.

Атмосферное давление ничтожно мало по сравнению с давлениями, возникающими даже при чрезвычайно малых изменениях объема твёрдого тела. Поэтому несущественно, находится ли тело в вакууме  $(p_x=0)$ , или при атмосферном давлении  $(p_x=1 \text{ атм})$ .

Кривая потенциальной энергии тела в зависимости от его удельного объема v качественно имеет такой же характер, как и кривая



потенциальной энергии взаимодействия двух атомов в молекуле в зависимости от расстояния между ядрами. Эта кривая схематически изображена на рис. 1.13. Если объем v больше нулевого  $v_{0K}$ , то преобладают силы притяжения. Силы взаимодействия быстро убывают при удалении атомов друг от друга, поэтому при увеличении объема, т. е. при разведении атомов потенциальная энергия, возрастая асимптотически, стремится к постоянному значению U, связанному с энергией связи атомов в теле. U – это энергия, которую нужно затратить, чтобы развести все атомы одного грамма вещества на «бесконечность»; она равна примерно теплоте испарения тела. Силы сцепления ослабевают на расстояниях порядка размеров атомной ячейки, так что кривая  $\varepsilon_x(v)$  приближается к своей асимптоте  $\varepsilon_x(v) = U$  при расширении тела на порядок (при увеличении между атомного расстояния вдвое).

При сжатии тела преобладающую роль играют силы отталкивания, которые резко возрастают по мере сближения атомов, поэтому при объемах меньше нулевого, потенциальная энергия  $\varepsilon_x(v)$  быстро увеличивается. Упругое давление связано с потенциальной энергией соотношением

$$p_x(v) = -\frac{d\varepsilon_x}{dv},\tag{1.24}$$

которое имеет естественный механический смысл (приращение энергии равно работе сжатия) и может рассматриваться как уравнение изотермы или адиабаты холодного сжатия. В самом деле, формула (1.24) следует из первого начала термодинамики, если учесть, что температура T равна нулю. Но при T=0 энтропия S=0 (по теореме Нернста), т. е. остается постоянной. Поэтому изотерма T=0 является одновременно и адиабатой S=0.

Кривая давления  $p_x(v)$  также схематически изображена на рис. 1.13. В точке  $v = v_{0K}$  упругое давление равно нулю; при сжатии давление быстро возрастает, а при расширении формально становится отрицательным. Отрицательный знак давления описывает тот физический факт, что для расширения тела от нулевого объема, отвечающего механическому равновесию при p=0, T=0, к телу необходимо приложить растягивающее усилие. Это усилие должно преодолеть силы сцепления, стремящиеся вернуть тело к равновесному объему  $v_{0K}$ . На опыте нельзя непосредственно исследовать ход кривой холодного расширения  $p_x(v)$  при  $v > v_{0K}$ , так как невозможно практически осуществить сильное всестороннее растяжение твёрдого тела.

При рассмотрении теплового движения атомов в самом простом случае можно не делать различия между твердым телом и жидкостью и не рассматривать эффект плавления. Тепловое движение в жидкости мало чем отличается от теплового движения атомов в твердом теле. Энергетически плавление мало сказывается на термодинамических функциях вещества при высоких температурах.

Если температура не слишком высока, атомы твердого тела (и жидкости) совершают малые колебания около положений равновесия (узлов кристаллической решетки в твердом теле). Колебания являются гармоническими до тех пор, пока амплитуда их гораздо меньше междуатомного расстояния, иначе говоря, пока энергия колебаний, которая порядка kT на атом, значительно меньше высоты потенциального барьера для перескоков атомов из узлов решетки в междоузлия или в другие свободные узлы. При нормальной плотности твердого тела величина kT сравнивается с высотой потенциального барьера при температурах порядка десятка или нескольких десятков тысяч градусов. При более высоких температурах атомы могут почти свободно перемещаться по телу. Тепловое движение при этом теряет характер колебаний и приближается скорее к хаотическому, наподобие газового: вещество превращается в плотный газ из сильно взаимодействующих атомов.

Положение, однако, меняется, если одновременно с нагреванием вещество сжимается. При сжатии очень резко возрастают силы отталкивания между соседними атомами, благодаря чему резко возрастает высота потенциального барьера, который нужно преодолеть атому, чтобы уйти из своей ячейки (из своего узла кристаллической решетки). Свободные перемещения атомов в теле при этом сильно затрудняются, и движение атома остается ограниченным пространством своей ячейки. В грубом приближении тепловое движение атомов в сжатом веществе можно рассматривать как малые колебания около положений равновесия даже при температурах порядка 10<sup>4</sup> К.

При температурах выше комнатной теплоемкость тела, атомы которого совершают гармонические колебания, равна своему классическому значению 3k на 1 атом или  $c_V = 3Nk$  на 1г, где N – число атомов в грамме. Поэтому запишем выражение для тепловой энергии, связанной с колебаниями атомов, в виде

$$\varepsilon_T = c_V (T - T_0) + \varepsilon_0, \ c_V = 3NkT, \tag{1.25}$$

где  $\varepsilon_0 = \int_0^{T_0} c_V(T) dT$  – тепловая энергия при комнатной температуре  $T_0$ , которую можно найти или рассчитать, используя справочную литературу.

При температурах T, значительно превышающих  $T_0$ , можно пренебречь  $c_V T_0$  и  $\varepsilon_0$ , так как обе эти величины малы по сравнению с  $c_V T$ . Таким образом, выражение для удельной внутренней энергии имеет вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_x(v) + c_V T. \tag{1.26}$$

Температурную зависимость теплового давления  $p_T$  можно сразу же установить при помощи общего термодинамического тождества:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p. \tag{1.27}$$

Упругие члены, в соответствии с уравнением (1.24), удовлетворяют этому соотношению автоматически. Замечая, что теплоемкость  $c_V = 3Nk$  не зависит от объема, получим из формулы (1.27), что тепловое давление пропорционально температуре:  $p_T = \varphi(V)T$ , где  $\varphi(V)$  – некоторая функация объема.

Перепишем эту формулу в виде

$$p_T = \Gamma(V) \frac{c_V T}{V} = \Gamma(V) \frac{\varepsilon_T}{V}.$$
 (1.28)

Величина Г, характеризующая отношение теплового давления к тепловой энергии решётки, называется коэффициентом Грюнайзена.

Уравнение состояния сплошной среды в виде

$$p(\rho, T) = p_x(\rho) + p_T(\rho, T) = p_x(\rho) + \rho \Gamma(\rho) \varepsilon_T, \quad (1.29)$$
  
$$\varepsilon(\rho, T) = \varepsilon_x(\rho) + \varepsilon_T(\rho, T) = \varepsilon_x(\rho) + c_V T$$

называют уравнением состояния Ми-Грюнайзена. Его часто используют для описания поведения металлов в области умеренных сжатий ( $p < 100 \ \Gamma \Pi a$ ). В этом случае коэффициент Грюнайзена считают постоянным  $\Gamma(\rho) = \Gamma_0$ .

Приведём вид зависимостей  $p_x$ , которые часто используются на практике:

$$p_{x}(\delta) = \frac{\rho_{0}c_{0}^{2}}{n} \left(\delta^{n} - 1\right), n > 0;$$
  

$$p_{x}(\delta) = \frac{\rho_{0}c_{0}^{2}}{n - k} \left(\delta^{n} - \delta^{k}\right), n > 0, k > 0, n > k;$$
  

$$p_{x}(\delta) = A_{i}\delta^{n_{i}} + B_{i}\delta^{m_{i}}, A_{i} > 0, n_{i} > 0, B_{i} < 0, m_{i} > 0.$$
  
(1.30)

В приведенных соотношениях  $\delta$  есть относительное сжатие  $\delta = \frac{\rho}{\rho_{0K}}$ ;  $n, k, A_i, B_i, n_i, m_i$  – постоянные. Строго говоря, нормировку следует проводить относительно плотности  $\rho_{0K}$  вещества при абсолютном нуле температуры. Однако, имея в виду малое отличие  $\rho_0$  от  $\rho_{0K}$ , это делают относительно  $\rho_0$ .

Все соотношения в (1.30) построены таким образом, что они содержат члены, положительные для описания сил отталкивания и отрицательные для описания сил притяжения. В первых двух формулах в (1.30) n, k – подгоночные параметры, величина  $c_0$  обычно выбирается близкой к объемной скорости звука при нормальных условиях  $c_B$ . Третья формула в (1.30) кусочногладкая, на каждом *i*-ом интервале подбираются свои значения  $A_i, B_i, n_i, m_i$ . На границе интервалов согласовываются как сами функции, так и их первые производные по плотности. Как правило, формулы (1.30) имеют ограниченный диапазон применения.

УрС *идеального газа* основано на формуле Клапейрона-Менделеева:

$$pV_m = \frac{m}{\mu}R_0T,\tag{1.31}$$

где  $R_0$  – универсальная газовая постоянная, m – масса газа, занимающая объём  $V_m$ ,  $\mu$  – молекулярный вес газа, а  $n = \frac{m}{\mu}$  – число молей газа, заключенного в объёме  $V_m$ . Используя удельный объём и плотность  $v = \frac{V_m}{m}$ ,  $\rho = \frac{1}{v}$  можно переписать (1.31):

$$p = \frac{R_0}{\mu} \rho T = \rho RT, \qquad (1.32)$$

где  $R = \frac{R_0}{\mu}$  – индивидуальная газовая постоянная. Сравнивая УрС идеального газа (1.32) и общий вид УрС для сплошной среды (1.22), видим, что в УрС идеального газа имеется только одно слагаемое вида  $p = p_T(\rho, T)$ , т.е. отсутствует слагаемое вида  $p_x(\rho)$  (далее, если не оговорено, то слагаемым  $p = p_e(\rho, T)$  во всех УрС пренебрегаем). Это соответствует тому, что в идеальном газе структурные элементы (атомы, молекулы) не взаимодействуют между собой силовым образом и давление в таком газе вызвано только их тепловым движением. Следствием этого является и то, что внутренняя энергия идеального газа является функцией только температуры  $\varepsilon = \varepsilon_T(T)$ .

Имея в виду, что для идеального газа  $R = c_p - c_v$ , где  $c_p$  и  $c_v$ являются удельными теплоёмкостями единицы массы,  $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ , его УрС можно переписать в виде

$$pv = (\gamma - 1)\varepsilon_T, \varepsilon_T = c_V T. \tag{1.33}$$

Идеальный газ, теплоёмкость которого является константой, называется политропным. Внутренняя энергия такого газа является линейной функцией температуры. Величина  $\Gamma = \gamma - 1$ , представляющая, как следует из (1.33), отношение теплового давления к плотности тепловой энергии  $\varepsilon_T$ , есть коэффициент Грюнайзена для идеального газа.

В общем виде УрС идеального газа может быть записан в форме

$$p = \Gamma \rho \varepsilon_T. \tag{1.34}$$

Для одноатомного идеального газа  $\gamma = 5/3$  и  $\Gamma = 2/3$ . Для двухатомного  $\gamma = 7/5$  и  $\Gamma = 0.4$ . Модель политропного газа благодаря ее аналитической простоте и хорошему приближению к действительности получила широкое распространение в прикладных исследованиях. Отметим, что термин «политропный газ» применяется и для среды, описываемой уравнениями состояния вида (1.33), (1.34), хотя она не обязательно является идеальным газом, т.е. может не удовлетворять уравнению (1.32) в каких-то диапазонах изменения *p*, *p*, *T*. В этом

случае показатель политропы  $k \neq \gamma = \frac{c_P}{c_V}$  может иметь произвольное значение, скорее всего, полученное в результате аппроксимации соответствующих экспериментальных данных. В случае строгого выполнения равенства  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  идеальный газ называется собершенным.

Притяжение молекул газа между собой приводит к уменьшению давления в системе по сравнению с идеальным газом. Одновременно возрастает относительная доля удельного объема, занимаемого собственно молекулами, что можно учесть вычитанием объема молекул, рассматриваемых как твердые шары, из удельного объема газа. Рассмотренные особенности состояния газа отражаются в интерполяционном УРС реального газа, предложенном Ван-дер-Ваальсом,

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \tag{1.35}$$

В этом уравнении *a* и *b* – постоянные. Слагаемое  $\frac{a}{v^2}$  учитывает взаимодействие частиц, слагаемое *b* – есть их собственный объем. Уравнение Ван-дер-Ваальса часто используется для жидкостей в области малых давлений и невысоких температур.

Другим видом интерполяционного УрС реального газа является вириальное уравнение, предложенное Камерлингом,

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{B(T)}{v^2} + \frac{C(T)}{v^3} + \dots, \qquad (1.36)$$

в котором вириальные коэффициенты *B*, *C*, ... есть функции температуры. Первое слагаемое в правой части отвечает УрС идеального газа, остальные слагаемые есть поправки, учитывающие соответственно парное взаимодействие частиц, взаимодействие трех частиц и т. д. Заметим, что переход от УрС идеального газа к более точным УрС следует выполнять, когда энергия потенциального взаимодействия составляет заметную долю от тепловой энергии. В противном случае УрС идеального газа является приемлемым приближением.

Ещё одно понятие из термодинамики, которое необходимо напомнить, является понятие об энтропии. Можно показать, что интеграл от величины  $\frac{dQ}{T}$  по пути, представляющему собой обратимый термодинамический процесс из состояния 1 в состояние 2, зависит только
от состояний и не зависит от пути [15]. Q – тепло, которым система обменивалась с окружающей средой в ходе процесса. Т.е.  $\frac{dQ}{T}$  является полным дифференциалом некоторой функции, называемой энтропией:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow \int_{1}^{2} \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1 \Rightarrow dS = \frac{dQ}{T}, \quad (1.37)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – значения энтропии в состояниях 1 и 2.

Теплообмен dQ не является характеристикой состояния среды, поскольку тепловая энергия может произвольным образом поступать со стороны окружающей среды. Но вводя понятие энтропии, мы можем определить, как меняется состояние среды при теплообмене. В адиабатической системе тепло может выделяться внутри самой системе, например, в результате химической реакции. При таком тепловыделении энтропия системы также изменяется. Поэтому энтропию можно определить как функцию состояния тела, изменение которой характеризует теплообмен этой системы за счет внутренних необратимых процессов. По аналогии подобное определение можно было бы применить к объёму и механической работе dA = pdv: объём – это функция состояния тела, изменение которой характеризует обмен механической энергией (или работу) этой системы с окружающей средой.

Соотношение (1.37) верно для очень медленного или квазистатического обратимого процесса. Обычно, говоря «обратимый», подразумевают лишь макроскопическое состояние. В действительности в любом процессе всегда происходят изменения и на микроуровне структуры вещества. При квазистатических процессах этими изменениями можно пренебречь, т.е. проводя процесс в прямом и обратном направлениях состояние системы в начале и в конце этого процесса практически одинаково и макроскопически, и на микроуровне. В аналогичном динамическом процессе (который протекает быстрее установления термодинамического равновесия) конечное и начальное состояния системы всегда отличаются из-за изменений, произошедших на микроуровне. Термодинамика, являясь макроскопической теорией, не вдаётся в подробности этих изменений, а лишь связывает с ними некоторую долю тепловой энергии среды. Обычно её называют тепловыми потерями  $Q_{\text{потерь}}$ , поскольку работа, совершённая над системой, идет в том числе и на микроскопические изменения структуры и, как показывает опыт, обратно эту часть энергии уже не удаётся вернуть в механическую.

В результате изменение теплоты в системе складывается из притока теплоты извне  $dQ_{\rm BHem}$  и тепловых потерь в самой системе:

$$dQ = dQ_{\rm BHeIII} + dQ_{\rm потерь}.$$
 (1.38)

Тогда изменение энтропии можно выразить:

$$dS = \frac{dQ_{\text{внеш}} + dQ_{\text{потерь}}}{T}.$$
(1.39)

Изменение энтропии, связанное с внешним теплообменом может быть как положительным (приток тепла), так и отрицательным (отток). Тепловые потери, как показывает опыт, всегда больше нуля, т.е.  $dQ_{\text{потерь}} > 0$ , поэтому для адиабатической (или теплоизолированной) системы можно записать:

$$dS \ge 0. \tag{1.40}$$

Таким образом, в теплоизолированной системе энтропия не может уменьшаться.

Как видно из неравенства (1.40), существуют два вида процессов в теплоизолированной системе:

- 1. dS > 0 энтропия возрастает в результате процесса. Такой процесс называется неизоэнтропическим и необратимым.
- 2. dS = 0, S = const энтропия не изменяется. Такой процесс называется изоэнтропическим и обратимым.

Поскольку процессы теплопроводности гораздо более медленные, чем любой взрывной процесс, то процесс взрыва с большой точностью можно считать адиабатическим.

# 1.6 Уравнения движения идеальной сплошной среды

Будем полностью пренебрегать процессами диссипации энергии, которые могут возникнуть в среде вследствие внутреннего трения (вязкости), теплообмена между отдельными элементами среды вследствие теплопроводности, а также прочностными свойствами среды. О таком движении говорят как о движении идеальной жидкости. Если при этом не происходит теплообмена с окружающей средой, то движение является *адиабатическим*.

В идеальной жидкости силы, действующие на заданный элемент среды, нормальны к поверхности и их интенсивность не зависит от ориентации поверхности элемента относительно соседних масс жидкости. Эта интенсивность Р называется гидростатическим давлением. Идеальная жидкость сопротивляется при ее нагружении изменению объема и не сопротивляется изменению формы (т. е. не обладает прочностью).

Уравнения движения сплошной среды являются выражениями основных законов физики – закона сохранения массы, закона сохранения импульса и закона сохранения энергии.

**Уравнение непрерывности**. Будем рассматривать движение в эйлеровом представлении, т. е. считать, что все функции относятся к определённой точке в пространстве. Выделим некоторый объём  $V_0$  пространства, который охватывается замкнутой поверхностью  $S_0$ (рис. 1.14).

Масса вещества в объеме  $V_0$  равна  $\int_{V_0} \rho dV$ , где  $\rho$  – плотность вещества. Изменение массы вещества в объеме может происходить за счет вытекания (втекания) среды в объем  $V_0$  через поверхность  $S_0$ .



Количество массы, вытекающей из объёма  $V_0$  в единицу времени, равно  $\oint_{S_0} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$ , где  $\rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$  – количество вытекающей массы в единицу времени через элемент поверхности  $d\vec{S}$  и  $\rho = \rho(x,y,z,t)$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z,t)$ . При вытекании массы интеграл  $\oint_{S_0} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$  положителен, так как скорость  $\vec{u}$  имеет одинаковое направление с внешней нормалью  $\vec{n}$  поверхности  $S_0$ . Напротив, при втекании вещества в объем  $V_0$  интеграл  $\oint_{G} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$  отрицателен.

Изменение массы вещества в объеме  $V_0$  равно  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV$  (при уменьшении массы отрицательно) если внутри объёма  $V_0$  отсутствуют источники вещества. Приравнивая выражения для изменения массы среды в объеме  $V_0$ , получаем уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_0} \rho dV = \oint\limits_{S_0} \rho \vec{u} \cdot \vec{dS}.$$
 (1.41)

Применив формулу Гаусса–Остроградского, преобразуем поверхностный интеграл в правой части формулы (1.41) в интеграл по объему:  $\oint_{S_0} \rho \vec{u} \cdot \vec{dS} = \int_{V_0} \text{div}(\rho \vec{u}) dV$ . Тогда уравнение (1.41) сводится

к виду

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho dV = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV \Leftrightarrow \int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u})\right) dV = 0. \quad (1.42)$$

Поскольку соотношение (1.42) справедливо для любого выделенного объема, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \tag{1.43}$$

Уравнение (1.43) выражает закон сохранения массы и называется *уравнением непрерывности*. Как видно из этого выражения, изменение плотности в движущейся среде происходит в силу двух причин:

- изменения потока массы из-за наличия перепада скорости (слагаемое ρdiv*ū* при постоянной плотности);
- изменения потока массы из-за наличия градиента плотности течения (слагаемое *u*gradρ при постоянной скорости течения).
   В декартовых координатах уравнение (1.43) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$
(1.44)

Используя определение субстанциональной производной, выражение (1.44) можно переписать в другом виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$
(1.45)

В соотношениях (1.44) и (1.45)  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , есть проекции вектора скорости  $\vec{u}$  на оси x, y, z прямоугольной системы координат.

**Уравнение Ньютона**–**Эйлера**. Вторым уравнением, необходимым для описания движения сплошной среды, является выражение закона сохранения количества движения или, другими словами, закон сохранения импульса. Чтобы его получить, вновь выделим некоторый объем  $V_0$  пространства, поверхность  $S_0$  которого ограничивает область сплошной среды. Силы, действующие на элементарные объёмы среды этой области, можно разделить на два класса.

К первым отнесем силы, действующие на каждый элементарные объём dV, независимо от взаимодействия между самими объёмами. Такие силы называют *массовыми*, наиболее знакомой из которых является сила тяжести. Если обозначить через  $\vec{\mathcal{F}}$  вектор массовой силы, отнесённый к единице массы, то к элементу объёма dV жидкости плотности  $\rho$  будет приложена массовая сила  $\vec{\mathcal{F}}\rho dV$ . Главный вектор массовых сил, приложенный ко всему объёму  $V_0$ , есть  $\int \vec{\mathcal{F}}\rho dV$ .

К другому классу сил, действующих на рассматриваемый объем  $V_0$ , отнесем силы взаимодействия между различными частицами жидкости. В силу принципа равенства действия и противодействия происходит уравновешивание сил взаимодействия между всеми внутренними жидкими частицами объема  $V_0$ , лежащего внутри поверхности  $S_0$ . Неуравновешенными остаются только силы взаимодействия частиц, лежащих снаружи поверхности  $S_0$  и приложенных к по верхностным частицам объема  $V_0$ . Это поверхностные силы. Полная сила, действуютря на этот объём со стороны окружающей среды по его поверхности, равна  $\vec{F} = -\oint_{S_0} pd\vec{S}$ , где  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ . Преоб-

разуя этот поверхностный интеграл в интеграл по объему, получаем

$$\vec{F} = -\oint_{S_0} p d\vec{S} = -\int_{V_0} \text{grad} p dV.$$
(1.46)

Масса вещества, заключенная в объеме  $V_0$ , есть  $\int_{V_0} \rho dV$ . Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \int_{V_0} \left( -\text{grad}p + \rho \vec{\mathcal{F}} \right) dV.$$
(1.47)



Рис. 1.15.

Вследствие произвольности объема  $V_0$ , как и при выводе уравнения (1.43), из формулы (1.47) следует выражение для закона Ньютона–Эйлера в векторной форме

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p + \vec{\mathcal{F}}$$
(1.48)

для сжимаемой идеальной сплошной среды. Напомним, что в эйлеровом описании полная производная по времени есть субстанциональная производная, или производная по времени вдоль траекторий частиц, которые подразумеваются заданными или искомыми в виде (1.1).

В прямоугольной системе координат векторное уравнение (1.48) может быть представлено в виде трех уравнений для каждой компоненты скорости:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{F}_x,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{F}_y,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{F}_z.$$
(1.49)

При рассмотрении задач физики взрыва влиянием массовых сил обычно пренебрегают, поэтому далее  $\vec{\mathcal{F}}=0.$ 

Заметим, что три уравнения Эйлера (1.49) для трёх компонент скорости  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и уравнение неразрывности (1.43) содержат пять неизвестных – компоненты скорости, плотность и давление. Следовательно система уравнений (1.43) и (1.48) является недоопределённой.

**Уравнение сохранения энергии**. Пятым уравнением в системе дифференциальных уравнений движения идеальной среды является уравнение, основанное на законе сохранения энергии. Таким уравнением является первый закон термодинамики, выражающий фундаментальный физический факт эквивалентности теплоты и механической работы.

Пусть в сплошной среде происходит выделение или поглощение энергии dQ на единицу массы и состав частиц переменный. Тогда первый закон термодинамики в дифференциальной форме будет иметь вид:

$$dQ = Tds = d\varepsilon + pdv - \sum_{i} \mu_i dN_i, \qquad (1.50)$$

где  $\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i}\right)_{sv}$  – химический потенциал *i*-го сорта частиц;  $N_i$  – число частиц данного сорта в единице массы;  $\varepsilon$  – внутренняя энергия единицы массы; s – энтропия единицы массы; T – температура; v – объём единицы массы. Q очень часто также называют тепловой энергией или количеством теплоты. Далее, говоря о величинах единицы массы среды, будем их называть удельными величинами. При этом для удельного объёма получается простая связь с плотностью  $v = \frac{1}{0}$ .

Уравнение (1.50) отражает баланс и преобразование энергии при взаимодействии термодинамической системы с окружающей средой – при выделении/поглощении системой энергии (тепла) меняется её внутренняя потенциальная энергия, система совершает работу над окружающей средой (либо среда совершает работу над ней), энергия может перейти в тепловую в ходе химических реакций внутри системы или из-за оттока/притока вещества в систему извне. Например, в случае взрыва BB выделение энергии является следствием быстро протекающей химической реакции.

Взяв производную по времени уравнения (1.50), получим дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения энергии в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p\frac{dv}{dt} = T\frac{ds}{dt} + \sum_{i} \mu_{i}\frac{dN_{i}}{dt}.$$
(1.51)

Пусть число частиц в системе постоянно  $(N_i = const)$ . Тогда для неадиабатического процесса с выделением или поглощением энергии закон сохранения есть

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + p\frac{dv}{dt} = T\frac{ds}{dt}.$$
(1.52)

Для адиабатического процесса  $\frac{dQ}{dt}=0$  и (1.52) преобразуется к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p\frac{dv}{dt} = 0 \tag{1.53}$$

или

$$\frac{ds}{dt} = 0. \tag{1.54}$$

В прямоугольной системе координат уравнение (1.54) записывается как

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_x \frac{\partial s}{\partial x} + u_y \frac{\partial s}{\partial y} + u_y \frac{\partial s}{\partial y} = 0.$$
(1.55)

Равенство нулю субстанциональной производной энтропии в адиабатическом течении означает, что энтропия в каждой частице сохраняется во времени, но меняется от частицы к частице. Если в начальный момент для всех частиц среды энтропия была одинаковой, то условие адиабатичности для всего течения примет вид

$$s = const.$$
 (1.56)

Такое движение сплошной среды называют *изоэнтропическим*. Оно является частным случаем адиабатического движения.

Выведем уравнение сохранения энергии, используя метод, который был применён при выводе уравнения непрерывности (1.43) и уравнения Эйлера (1.48). Энергия удельного объёма v равна сумме кинетической  $\rho \frac{u^2}{2}$  и внутренней энергии  $\rho \varepsilon$ . Для выделенного объема  $V_0$ , ограниченного поверхносью  $S_0$ , полная энергия равна  $\int_{V_0} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon\right) dV$ , а её изменение во времени  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon\right) dV$ . Это изменение энергии во времени равно потоку энергии через поверхность  $S_0$ .

Поток энергии через поверхность  $S_0$ , связанный с переносом вещества, равен

$$-\oint_{S_0} \left[\rho \vec{u} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + p \vec{u}\right] d\vec{S}.$$

В этом выражении член  $p\vec{u}$  представляет собой работу давления p в единицу времени.

Баланс изменения энергии в выделенном элементарном объеме записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon\right) dV + \oint_{S_0} \left[\rho \vec{u}\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + p\vec{u}\right] d\vec{S} = 0.$$
(1.57)

Преобразуя второй член в левой части уравнения (1.57) по формуле Гаусса–Остроградского и имея в виду произвольность выбранного объема, окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\text{div} \left[ \rho \vec{u} \left( \varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \vec{u} \right].$$
(1.58)

Если в системе происходит также выделение энергии Q (от внешних или внутренних источников), то к правой части уравнения (1.58) следует добавить слагаемое  $\rho \frac{dQ}{dt}$ , характеризующее скорость выделения энергии в единице объема. Заметим, что выражение (1.58)

может быть получено из (1.53) с помощью уравнений непрерывности и Эйлера, т. е. уравнения (1.53) и (1.58) являются различными аналитическими выражениями одного и того же закона. Уравнение (1.58) при добавлении в него слагаемого  $\rho \frac{dQ}{dt}$  можно назвать «механическим» аналогом уравнения (1.52).

Полная система уравнений движения идеальной жидкости. Уравнения непрерывности, сохранения количества движения и энергии образуют систему пяти нелинейных дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций координат и времени: p,  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Присоединяя к ним УрС среды, дающее связь между термодинамическими параметрами, например  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$ , получаем замкнутую систему шести дифференциальных уравнений относительно шести переменных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, 
\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\operatorname{grad} p,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dv}{dt} = \frac{dQ}{dt} = T \frac{ds}{dT}, 
\varepsilon = \varepsilon(\rho, p).$$
(1.59)

Система уравнений (1.59) является полной системой уравнений движения идеальной жидкости, её также часто называют системой уравнений газодинамики. При решении конкретных задач к системе уравнений (1.59) добавляются соответствующие начальные и граничные условия. Если имеются источники тепла Q, то они считаются заданными функциями координат и времени.

# 1.7 Движение несжимаемой идеальной сплошной среды

Во многих случаях движения сплошной среды (жидкости, газов) ее плотность можно считать постоянной во всем объеме в течение всего времени движения. О таком движении говорят как о движении несжимаемой сплошной среды. Хотя это идеализированная модель, тем не менее ее применение полезно, так как позволяет качественно изучить особенности целого ряда явлений.

Система уравнений движения идеальной несжимаемой среды при условии  $\rho = \rho_0 = const \forall x, y, z, t$  сводится к двум – уравнению непрерывности и уравнению Эйлера:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \ \frac{d\vec{u}}{dt} = -\operatorname{grad} \frac{p}{\rho_0}.$$
 (1.60)

В отсутствие теплообмена с окружающей средой и внешних источников уравнение сохранения энергии превращается в условие S = const. Для несжимаемой среды это означает, что уравнения, связанные с термодинамикой среды, теряют смысл.

Решение системы уравнений (1.60) должно удовлетворять соответствующим начальным и граничным условиям. В качестве начальных условий задаются распределения давления p(x, y, z) и скорости u(x, y, z) в начальный момент времени  $t = t_0$ . Граничные условия формулируются исходя из условий конкретных задач. Например, если идеальная несжимаемая жидкость ограничена неподвижной жесткой стенкой, то уравнения движения идеальной жидкости требуют обращения в нуль нормальной к поверхности стенки компоненты скорости. Если твердая стенка движется, то нормальная составляющая скорости жидкости равна соответствующей компоненте скорости твердой стенки. Для жидкости, граничащей с вакуумом, необходимо также выполнение динамического условия: давление, действующее по нормали к ее поверхности, обращается в нуль.

Система уравнений (1.60) совместно с начальными и граничными условиями является полной для определения течения идеальной несжимаемой жидкости: система четырех скалярных уравнений содержит четыре неизвестные функции координат и времени  $p(x, y, z, t), u_i(x, y, z, t)$ . Уместно отметить, что поскольку термодинамика среды не входит в систему уравнений движения, то давление связано только с гидродинамическим переносом количества движения.

48

Для стационарного движения среды ее можно считать несжимаемой, если выполняется условие

$$u \ll c \tag{1.61}$$

т. е. скорость движения среды много меньше скорости звука.

Для нестационарного движения помимо условия (1.61) необходимо выполнение еще одного условия:

$$\tau >> \frac{l}{c}.\tag{1.62}$$

Условие (1.62) означает, что время  $\tau$ , в течение которого заметно изменяется течение среды на отрезке l, должно быть много больше времени распространения возмущения на этом отрезке. Другими словами, процесс взаимодействия в несжимаемой среде можно считать мгновенным или скорость звука бесконечной.

#### 1.8 Интегралы уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера (1.49) в общем случае не имеют интегралов. Но в двух частных случаях движения идеальной жидкости они могут быть проинтегрированы: а) если движение стационарное (или установившееся); б) если движение потенциальное. Рассмотрим эти два случая.

Стационарное движение идеальной среды. Интеграл Бернулли. При стационарном движении в каждой точке пространства, занятого средой, скорость течения остается постоянной, т.е.  $\vec{u}$  является функцией только координат, так что  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ .

Сначала заметим, что уравнение Эйлера (1.48) можно записать в следующей форме (форме Громеки-Лэмба):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} = \vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{\mathcal{F}}$$
(1.63)

на основании формулы векторного анализа (вывод которой можно найти, например, в [16])

$$\nabla \frac{u^2}{2} = \vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \, \vec{u}. \tag{1.64}$$

Линия тока – линия, касательная к которой в любой её точке направлена вдоль вектора скорости  $\vec{u}(x, y, z, t_0)$  в какой-либо заданный момент времени  $t_0$ . При стационарном движении линии тока совпадают с траекториями частиц, которые остаются неизменными во времени. Вектор  $\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u}$  перпендикулярен  $\vec{u}$  в каждой точке линии тока, поэтому его проекция на касательную к линии тока в любой её точке равна нулю, т. е. он не влияет на движение вдоль линии тока.

Таким образом, из уравнения (1.63) для стационарного течения вдоль линий тока получим:

$$\nabla \frac{u^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} - \vec{\mathcal{F}} = 0. \tag{1.65}$$

Если массовые силы потенциальны, т. е.

$$\vec{\mathcal{F}} = -\nabla U = -\operatorname{grad} U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \left(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z\right),$$
(1.66)

(например, в случае силы тяжести U = gz) и движение адиабатично S = const, то (1.65) можно переписать, используя дифференциал удельной энтальпии  $dh = \frac{dp}{\rho}$ , и проинтегрировать вдоль линии тока:

$$\nabla\left(\frac{u^{2}}{2} + h + U\right) = 0,$$
  
$$\frac{u^{2}}{2} + h + U = \frac{u^{2}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = const.$$
 (1.67)

Значение константы в (1.67) различно для различных линий тока.

Уравнение (1.67) – это уравнение Бернулли в интегральной форме. Для несжимаемой жидкости, для которой  $\rho = \rho_0 =$ 

 $const \ \forall x, y, z, t$ , оно имеет ещё более простой вид:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + U = const.$$
(1.68)

Уравнение Бернулли для установившегося адиабатического движения идеальной жидкости является законом сохранения энергии: первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию единицы массы, второе — теплосодержание, третье — потенциальную энергию, связанную с массовыми силами.

Для адиабатического процесса в совершенном газе:

$$p = A\rho^{\gamma}, A = const \Rightarrow dp = A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho,$$
 (1.69)

$$h = \int \frac{dp}{\rho} = A\gamma \int \rho^{\gamma-2} d\rho = A\gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{\gamma A \rho^{\gamma}}{\rho(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p}{\rho}.$$
(1.70)

Поэтому уравнение Бернулли примет вид:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\frac{p}{\rho} + U = const.$$
(1.71)

*Изоэнтропическая скорость звука* в покоящейся сплошной среде определяется следующим образом:

$$c_S = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$
 (1.72)

Далее, если не оговаривается, то под скоростью звука всегда подразумевается изоэнтропическая скорость звука. Для совершенного газа

$$c_S^2 = A\gamma \rho^{\gamma - 1} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT = \gamma \frac{R_0}{\mu} T$$
(1.73)

откуда следует, что в идеальном газе скорость звука есть функция температуры T и молекулярного веса  $\mu$ . Используя (1.73), уравнение Бернулли для совершенного газа можно записать ещё двумя

способами (пренебрегая массовыми силами):

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c_S^2}{(\gamma - 1)} = const$$
или  $\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma RT}{(\gamma - 1)} = const.$  (1.74)

Отсюда видно, что при изменении скорости частиц *и* скорость звука вдоль линии тока меняется по определённому закону. Заметим, что из интеграла Бернулли (из различных его форм) видно, что давление, плотность и температура с ростом скорости вдоль линии тока уменьшаются.

Определение константы в уравнении Бернулли. Для того чтобы можно было определить значение постоянной в уравнении Бернулли, должны быть заданы параметры газа в какой-либо точке линии тока. Обычно пользуются параметрами торможения, т. е. задаются параметры в точке, где u = 0. Очевидно, что температура, давление, плотность и скорость звука в точке, где u = 0, имеют значения, максимально возможные на линии тока.

Если обозначить параметры торможения через  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $c_0$ ,  $T_0$ ,  $h_0$ , то константу в уравнении Бернулли можно выразить как

$$const = \frac{c_0^2}{(\gamma - 1)} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma R T_0}{(\gamma - 1)} = h_0.$$
(1.75)

Потенциальное движение идеальной среды. Интеграл Лагранжа. Движение частицы жидкости может быть разложено на три составляющие: вращательное (вихревое), поступательное и деформационное. Потенциальное движение сплошной среды – это движение, в котором отсутствует вращательная часть движения, т. е. rot  $\vec{u} = 0$ . Для потенциальных течений идеальной жидкости, как установившихся, так и неустановившихся, может быть получен первый интеграл уравнений Эйлера.

Если движение потенциальное, то можно ввести потенциал скоростей  $\boldsymbol{\phi}$  :

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$
 (1.76)

Прямой подстановкой можно показать, что rot grad  $\phi = 0$ . Поэтому ур-е Эйлера

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U\right) + \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{u} = 0 \tag{1.77}$$

в случае потенциального течения примет вид:

$$\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} + U\right) = 0,$$
$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} + U\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} + U = const.$$
(1.78)

Уравнение (1.78) называется интеграл Лагранжа-Коши. В частном случае стационарного движения  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  интеграл Лагранжа-Коши совпадает с интегралом Бернулли

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = const \ \forall x, y, z, t.$$
(1.79)

Но в таком случае константа в (1.79) одинакова для всех линий тока.

В идеальной жидкости потенциальность течения сохраняется во времени (теорема Лагранжа [17]). Многие движения можно рассматривать как движения, возникающие из состояния покоя, когда в начальный момент  $\vec{u} = 0$  и rot  $\vec{u} = 0$ . Такие движения должны быть потенциальными и во все последующие моменты времени.

В приложениях движения жидкостей и газов во многих задачах рассматриваются как потенциальные. Таковы, например, волновые движения воды, движения воздуха в случае распространения акустических (звуковых) волн, различные непрерывные движения жидкостей и газов, вызванные движением в них твёрдых тел, струйные движения жидкости и др.

В случае несжимаемой среды ( $\rho = \rho_0 = const$ ) в потенциальном течении ( $\vec{u} = \text{grad } \phi$ ) вместо трёх уравнений Эйлера можно использовать интеграл Лагранжа совместно с уравнением непрерывности,

которое в этом случае можно свести к уравнению Лапласа:

div 
$$\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$
  
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$
$$\Delta \varphi = 0.$$
(1.80)

Для заданных начальных и граничных условий, решая (1.80), можно найти потенциал скоростей  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  и, следовательно,  $\vec{u}$ . После этого, используя интеграл Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + U = F(t), \qquad (1.81)$$

можно определить давление и плотность во всём течении  $p = p(x, y, z, t), \rho = \rho(p)$ . Для того чтобы найти функцию F(t), достаточно знать изменение давления со временем p(t) в какой-либо одной точке.

# 1.9 Элементарная теория кумулятивных струй

Процесс формирования кумулятивных струй при косом соударении пластин, метаемых продуктами детонации, или при взрывном обжатии осесимметричных металлических облицовок впервые объяснила гидродинамическая теория кумуляции, основанная на модели идеальной несжимаемой жидкости. В основе теории лежит предположение, что твердое тело ведет себя как несжимаемая идеальная жидкость. Такое допущение позволяет получить простое и наглядное объяснение кумуляции и внедрению струй.

Рассмотрим образование струй при столкновении пластин. Пусть две симметричные пластины, каждая из которых имеет постоянную скорость движения  $u_0$ , направленную по нормали к ее поверхности, сталкиваются под углом  $\alpha$ . В результате такого соударения материал пластин растекается от места соударения в обе стороны.



Разложим скорость  $u_0$  на составляющие по осям x и y, выходящим из точки 0 (рис. 1.16), являющейся в плоскости точкой соударения.

Точка соударения перемещается вдоль оси x со скоростью  $u'_{1x} = \frac{u_0}{\sin \alpha}$ . Свяжем систему координат с неподвижной точкой 0 и столкновение двух пластин заменим эквивалентной схемой удара одной из пластин о жесткую стенку под углом  $\alpha$  (рис. 1.17). На рис. 1.17 КС – кумулятивная струя;  $S_0$  – толщина пластины;  $S_1$  – толщина кумулятивной струи.

В выбранной системе координат, связанной с неподвижной точкой 0, течение будет стационарным. Применим далее уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости к набегающей и уходящей относительно точки 0 струям:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho_0(u_0')^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho_0(u_{1x}')^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_0(u_{2x}')^2.$$
(1.82)

В отдаленных точках течения  $P_0 = P_1 = P_2$ . Из уравнения (1.82) в этом случае получаем

$$u_0' = u_{1x}' = u_{2x}'. (1.83)$$

Таким образом, скорости набегающей и уходящей струй равны, что является следствием предположения о несжимаемости среды и отсутствия вязкости. Возвращаясь к лабораторной системе координат, находим скорости песта и струи:

$$u_{1x} = u'_{1x} + \frac{u_0}{\sin \alpha} = u'_0 + \frac{u_0}{\sin \alpha} = u_0 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$
  

$$u_{2x} = -u'_{2x} + \frac{u_0}{\sin \alpha} = -u'_0 + \frac{u_0}{\sin \alpha} = u_0 \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$
(1.84)

Из формул (1.84) получаем предельные соотношения для малых  $\alpha(\alpha \rightarrow 0)$ 

$$u_{1x} = \frac{u_0}{\sin \alpha} (1 + \cos \alpha), \lim_{\alpha \to 0} u_{1x} \to \infty;$$
  

$$u_{2x} = \frac{u_0}{\sin \alpha} (1 - \cos \alpha), \lim_{\alpha \to 0} u_{2x} \to 0;$$
  

$$\left(\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right).$$
(1.85)

Скорость кумулятивной струи  $u_{1x}$  стремится к бесконечности, скорость песта  $u_{2x}$  – к нулю. Из уравнений сохранения массы и количества движения, имея в виду формулу (1.83), получаем:

$$\rho_0 u_0' S_0 = \rho_0 u_{1x}' S_1 + \rho_0 u_{2x}' S_2; \qquad (1.86)$$

$$\rho_0 u_0' S_0(u_0' \cos \alpha) = -\rho_0 u_{1x}' S_1 u_{1x}' + \rho_0 u_{2x}' S_2 u_{2x}'; \qquad (1.87)$$

$$S_0 = S_1 + S_2, \ S_0 \cos \alpha = S_2 - S_1. \tag{1.88}$$

Из формулы (1.88) устанавливаем связь между  $S_1, \, S_2, \, S_0$  и углом  $\alpha$ :

$$S_1 = \frac{1}{2} S_0 \left( 1 - \cos \alpha \right); \ S_2 = \frac{1}{2} S_0 \left( 1 + \cos \alpha \right). \tag{1.89}$$

В пределе при  $\alpha \to 0$  толщина  $S_1 \to 0$  и толщина  $S_2 \to S_0$ , т. е. сечение кумулятивной струи стремится к нулю.

Определим далее долю энергии, запасаемой кумулятивной струей:

$$\frac{E_{\text{кум}}}{E_0} = \frac{\rho_0 S_1 u_{1x}^2 / 2}{\rho_0 S_0 u_0^2 / 2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$
(1.90)

Предельное соотношение  $\lim_{\alpha\to 0} \frac{E_{\text{кум}}}{E_0} \to 1$ , т. е. вся кинетическая энергия соударяющихся пластин переходит в кинетическую энергию кумулятивной струи.

Из формул (1.89) и (1.90) следует, что при малых углах соударения концентрация энергии в объеме кумулятивной струи может быть сколь угодно большой, что является следствием идеализации задачи. В действительности при малых  $\alpha$  из-за сжимаемости вещества струя не образуется вообще, но образуется режим с двумя ударными волнами.

Рассмотрим вопрос внедрения кумулятивной струи в преграду, считая последнюю несжимаемой идеальной жидкостью. Пусть скорость набегающей кумулятивной струи равна *u<sub>c</sub>* и ее плотность *ρ<sub>c</sub>*. Плотность преграды примем равной *ρ<sub>пp</sub>*. Точка 0, являющаяся границей раздела между сплошной преградой и струей, движется со скоростью *W*<sub>вн</sub> – скоростью внедрения струи (рис. 1.18).

В системе координат, в которой точка 0 покоится, скорость набегающей струи равна  $u_c - W_{\rm BH}$ , а материал преграды набегает на точку 0 со скоростью  $W_{\rm BH}$ . Давления скоростного напора на поверхности контакта преграды и струи в выбранной системе координат (ввиду стационарности течения) равны, т. е.

$$\rho_c \left( u_c - W_{\rm BH} \right)^2 = \rho_{\rm \Pi p} W_{\rm BH}^2. \tag{1.91}$$

Из (1.91) находим

$$W_{\rm BH} = \frac{u_c}{1 + \sqrt{\rho_{\rm IIP}/\rho_c}}.\tag{1.92}$$

Скорость внедрения, как видно, возрастает с уменьшением плотности преграды или увеличением плотности струи. Если длина струи



Рис. 1.18.

равна l<sub>c</sub> и глубина пробивания L<sub>0</sub>, то время пробивания t<sub>пр</sub>

$$t_{\rm np} = \frac{l_c}{u_c - W_{\rm BH}} = \frac{L_0}{W_{\rm BH}},\tag{1.93}$$

что дает

$$L_0 = l_c \frac{u_c - W_{\rm BH}}{W_{\rm BH}} = l_c \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_{\rm np}}}.$$
 (1.94)

По этой формуле глубина пробития зависит только от длины струи, плотности струи и преграды и не зависит от скорости струи  $u_c$ , сжимаемости материалов струи и преграды и их прочности. Эта формула дает удовлетворительное совпадение с опытными данными, определяющими глубину пробития для относительно больших скоростей струи  $u_c > 4$  км/с, когда можно пренебречь прочностью преграды и струи, а сжимаемости материалов струи и преграды близки между собой.

#### 1.10 Дифференциальные уравнения одномерного движения идеальной среды

Теория одномерных движений среды имеет большое принципиальное значение для выяснения физических закономерностей неустановившихся движений и в ряде случаев позволяет решить ряд конкретных задач (простые волны, точечный взрыв и др.).

В случае одномерного адиабатического движения основные уравнения движения сплошной среды можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + N \frac{\rho u}{r} = 0,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dv}{dt} = 0 \text{ или } \frac{ds}{dt} = 0,$$

$$p = p(\rho, \varepsilon) \text{ или } p = p(\rho, s),$$
(1.95)

где r – пространственная координата, u – массовая скорость ( $u = u_x$ ), N – показатель симметрии задачи: N=0 – плоская; N=1 – цилиндрическая; N=2 – сферическая.

Система из четырёх уравнений (1.95) полностью описывает одномерное адиабатическое движение. В случае изоэнтропического одномерного движения основные уравнения газодинамики (уравнения Эйлера и неразрывности) имеют такой же вид, как в (1.95). Так как для изоэнтропического движения энтропия остается постоянной, то, вместо уравнения сохранения энергии и уравнения состояния среды, в систему уравнений входит уравнение изоэнтропы  $p = p(\rho, s_0) = p(\rho)$ . В случае одномерного движения несжимаемой жидкости система дифференциальных уравнений ещё больше упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + N \frac{u}{r} = 0,$$
(1.96)
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r},$$

Для этой системы известно общее решение.

Рассмотрим решение системы одномерных уравнений для несжимаемой жидкости. Интегрируем первое уравнение системы (1.96) для фиксированного момента времени. Для этого преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{du}{dr} = -N\frac{u}{r}, \ \frac{du}{u} = -N\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав для какого-то фиксированного момента времени, получим:

$$\ln u = -N \ln r + lnf(t),$$
$$u = \frac{f(t)}{r^N}.$$
(1.97)

Вместо второго уравнения системы (1.96) запишем интеграл Лагранжа (1.81) при U = 0:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = F(t). \tag{1.98}$$

Так как рассматриваем случай одномерного движения, то справедливо следующее выражение:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{f(t)}{r^N}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим потенциал скоростей:

$$\varphi = f(t) \int \frac{dr}{r^N}.$$

Подставив выражения для потенциала скорости  $\varphi$  и скорости частиц среды в интеграл (1.98), получим решение системы дифференциальных уравнений одномерного движения несжимаемой жидкости (1.96) в виде

$$\frac{df(t)}{dt} \int \frac{dr}{r^N} + \frac{1}{2} \frac{[f(t)]^2}{r^{2N}} + \frac{p}{\rho_0} = F(t).$$
(1.99)

Здесь f(t) и F(t) есть неизвестные функции, которые определяются из начальных и граничных условий.

#### Глава 2. Одномерные нестационарные изоэнтропические движения идеальной среды

Модель одномерного неустановившегося движения одна из наиболее изученных. Исторически начало теоретического изучения движений этого класса восходит к Риману более 150 лет тому назад, заметившему наиболее важные особенности явления распространения волн конечной амплитуды. Это явление сопровождается такими существенно нелинейными явлениями, как градиентная катастрофа, образование ударных волн, распад произвольного разрыва и рядом других.

Предположение об одномерном характере движения полезно по ряду причин. Прежде всего, оно оправдывается для многих случаев движения среды. Даже если движение в целом и неодномерно, но отдельные его части могут быть описаны в рамках одномерного движения. Таковы движения в трубах, при взрывах и ударах и т.д. Далее уравнения и задачи этой модели являются сравнительно доступными для качественного анализа и численного расчета из-за того, что основные величины, описывающие движение, зависят только от двух переменных. Кроме того, многие особенности одномерного течения оказываются качественно присущими и более сложным двух- и трехмерным течениям.

### 2.1 Акустическое приближение. Плоские звуковые волны

В упрощённой схеме сжатия сплошной среды было показано (1.3), что возмущение какого-либо параметра среды приводит к распространению этого возмущения в ней в виде волны. Для того чтобы описать распространение волн и движение идеальной среды, вызванные каким-либо возмущением в одномерном случае, необходимо решить систему (1.95) для заданных начально-краевых условий. Интегрирование этой системы является непростой задачей из-за наличия нелинейных слагаемых вида  $u\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$  и, как правило, делается численно. Однако можно существенно упростить эту систему, когда амплитуда возмущения имеет малую величину. В этом случае систему (1.95) удаётся линеаризовать.

Будем считать, что параметры среды u,  $\rho$ , p только в области возмущения отличаются на малую переменную величину  $\delta u$ ,  $\delta \rho$ ,  $\delta p$  от своих значений в состоянии покоя:

$$u = \delta u, \rho = \rho_0 + \delta \rho, p = p_0 + \delta p, \qquad (2.1)$$
  
$$\delta u \to 0, \delta \rho \to 0, \delta p \to 0,$$

поэтому произведениями  $\delta u \delta \rho$ ,  $(\delta u)^2$ ,  $(\delta p)^2$  и т. п. можно пренебречь. Такое приближение называется акустическим (или звуковым), а волны распространения малых возмущений также называют акустическими (или звуковыми).

Малость амплитуды также позволяет принять скорость звука постоянной:

$$c^{2} = \frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_{0}} + \left(\frac{d^{2}p}{d\rho^{2}}\right)_{\rho_{0}} (\rho - \rho_{0}) + \dots =$$
  
$$= c_{0}^{2} + \left(\frac{d^{2}p}{d\rho^{2}}\right)_{\rho_{0}} \delta\rho + \dots \approx c_{0}^{2},$$
  
(2.2)

Из этого, в свою очередь, следует вид изоэнтропы (или УрС) среды:

$$p = p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) \Leftrightarrow \delta p = c_0^2 \delta \rho.$$
(2.3)

Также условием малости возмущений является  $\delta u \ll c_0$ .

Для описания изоэнтропического движения среды достаточно уравнения непрерывности, уравнения Эйлера и уравнения изоэнтропы. Подставим выражения (2.1) в уравнение непрерывности в случае плоского одномерного движения и уберём пренебрежимо малые слагаемые:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$
  
$$\frac{\partial (\rho_0 + \delta \rho)}{\partial t} + (\rho_0 + \delta \rho) \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} + \delta u \frac{\partial (\rho_0 + \delta \rho)}{\partial x} = 0,$$
  
$$\frac{\partial (\delta \rho)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} = 0.$$
 (2.4)

Проделаем то же самое с уравнением Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
  
$$\frac{\partial (\delta u)}{\partial t} + \delta u \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 + \delta \rho} \frac{\partial (p_0 + \delta p)}{\partial x} = 0,$$
  
$$\rho_0 \frac{\partial (\delta u)}{\partial t} + \frac{\partial (\delta p)}{\partial x} = 0.$$
 (2.5)

Перейдём в (2.4) от плотности к давлению, используя (2.3), и вместе с (2.5) получим систему уравнения одномерных плоских акустических волн:

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} = 0, 
\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} = 0.$$
(2.6)

Систему (2.6) можно переписать двумя способами. Например, дифференцируя первое уравнение по x, второе по t и вычитая одно из другого, получим так называемое волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2(\delta u)}{dt^2} = c_0^2 \frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}.$$
(2.7)

Далее в этом параграфе будем опускать знак  $\delta$  и подразумевать под u,  $\rho$  и p их отклонения в области возмущения  $\delta u$ ,  $\delta \rho$ ,  $\delta p$ . Приведём систему (2.6) к так называемому каноническому виду следующим способом. Умножим первое уравнение на  $\frac{1}{\rho_0 c_0}$ , после это сложим и вычтем из второго, и получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{p}{\rho_0 c_0} \right) = 0.$$
(2.8)

Введём обозначения:

$$u(x,t) + \frac{p(x,t)}{\rho_0 c_0} = J^+(x,t), \ u(x,t) - \frac{p(x,t)}{\rho_0 c_0} = J^-(x,t).$$
(2.9)

Тогда (2.8) можно переписать:

$$\frac{\partial J^{+}}{\partial t} + c_{0} \frac{\partial J^{+}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial J^{-}}{\partial t} - c_{0} \frac{\partial J^{-}}{\partial x} = 0.$$
(2.10)

Общее решение (2.10) имеет вид:

$$J^{+} = f(x - c_0 t), \ J^{-} = g(x + c_0 t).$$
 (2.11)

Здесь f и g — произвольные дифференцируемые функции.

Выражая u и p через  $J^+$ ,  $J^-$  используя (2.11) и (2.9), получим общий вид решения системы уравнений (2.6):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[ f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \right] = \frac{1}{2} \left( J^+ + J^- \right),$$
  

$$p(x,t) = \frac{\rho_0 c_0}{2} \left[ f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t) \right] = \frac{\rho_0 c_0}{2} \left( J^+ - J^- \right).$$
(2.12)

Смысл (2.12) в том, что в одномерном случае от какого-либо возмущения всегда распространяются две волны – одна  $f(x - c_0 t)$  в положительном направлении 0x и вторая  $g(x + c_0 t)$  в отрицательном

направлении 0x. При этом видно, что профили f(x) и g(x) смещаются со скоростью  $c_0$  без каких-либо искажений своей формы. Обычно ось 0x напрявляют вправо, поэтому часто волну, распространяющуюся в положительном направлении, также называют правой волной, а в отрицательном – левой. В двух исключительных определённых случаях возможно распространение только одной волны – либо одной левой, либо одной правой.

Величины  $J^+$ ,  $J^-$ , определенные формулами (2.9), носят название римановых инвариантов (в честь немецкого математика Римана). Формулы (2.9) определяют инварианты Римана в случае акустического приближения, далее мы их определим для более общего случая.

Вспоминая определение субстанциональной производной для одномерного случая

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \implies \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{dx}{dt} = u(x,t), \tag{2.13}$$

можно заметить, что формулы (2.10) являются выражением этой производной для  $J^{\pm}$  вдоль траекторий  $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$  соответственно. То есть

$$\frac{dJ^+}{dt} = 0 \implies J^+ = const вдоль \frac{dx}{dt} = c_0,$$

$$\frac{dJ^-}{dt} = 0 \implies J^- = const вдоль \frac{dx}{dt} = -c_0.$$
(2.14)

Линии  $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$  на плоскости событий, являющиеся траекториями малых возмущений, называются *характеристиками*. Из (2.14) видно, что в акустическом приближении всегда есть два семейства прямолинейных характеристик. Характеристики с положительным наклоном  $\frac{dx}{dt} = c_0$  обозначают  $C^+$ -характеристики, а характеристики с отрицательным наклоном  $\frac{dx}{dt} = -c_0$  обозначают  $C^-$ -характеристики. В литературе также можно встретить обозначания  $\alpha$  и  $\beta$ -характеристики для  $C^+$  и  $C^-$ -характеристик, а также  $\alpha$  и  $\beta$ -инварианты для соответствующих им инвариантов Римана.



Рис. 2.1.

Удобство использования инвариантов Римана состоит в том, что для определения значений u(x,t), p(x,t) или  $\rho(x,t)$  в какойлибо точке P плоскости событий достаточно знать значения  $J^+$ и  $J^-$  вдоль характеристик  $C^+$  и  $C^-$ , проходящих через точку P(рис. 2.1). В акустическом приближении для этого достаточно знать значение  $J^+(x_A, t_A)$  в какой-либо одной точке A соответствующей  $C^+$ -характеристики и значение  $J^-(x_B, t_B)$  в какой-либо одной точке B соответствующей  $C^-$ -характеристики. Обычно в задаче формулируются начальные и граничные условия, в которых задаются, например,  $u(x, t_0)$  и  $p(x, t_0)$  на начальный момент времени  $t_0$ . С их помощью, используя (2.9), можно рассчитать  $J^+(x, t_0)$  и  $J^+(x, t_0)$ .

Так, например, если потребовать, чтобы решение системы (2.6) удовлетворяло начальным данным:

$$u(x,0) = U_0(x), \ p(x,0) = P_0(x)$$
 (2.15)

на отрезке  $x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$  то вдоль характеристик, выходящих из этого отрезка,

$$J^{+}(x,t) = U_{0}(x-c_{0}t) + \frac{P_{0}(x-c_{0}t)}{\rho_{0}c_{0}} \text{ водль } C^{+},$$
  

$$J^{-}(x,t) = U_{0}(x+c_{0}t) - \frac{P_{0}(x+c_{0}t)}{\rho_{0}c_{0}} \text{ водль } C^{-}.$$
(2.16)

Из (2.16) в соответствии с (2.12) следует решение (2.6):

$$u(x,t) = \frac{U_0(x-c_0t) + U_0(x+c_0t)}{2} + \frac{P_0(x-c_0t) - P_0(x+c_0t)}{2\rho_0c_0},$$
  
$$p(x,t) = \frac{P_0(x-c_0t) + P_0(x+c_0t)}{2} - \rho_0c_0\frac{U_0(x-c_0t) - U_0(x+c_0t)}{2}.$$
  
(2.17)

Из (2.9) видно, что если один из инвариантов Римана является константой, то соответствующее уравнение в (2.9) становится тождеством и остаётся только одно уравнение, что соответствует распространению в среде только одной волны. Если по среде распространяется одна правая волна, значит  $J^- = const \ \forall x, t$ , следовательно

$$dJ^{-} = du - \frac{dp}{\rho_0 c_0} = 0.$$
 (2.18)

Если по среде распространяется одна левая волна, значит  $J^+ = const \ \forall x, t, u,$  следовательно,

$$dJ^{+} = du + \frac{dp}{\rho_0 c_0} = 0.$$
 (2.19)

Поэтому в области волны (или возмущения) приращения *u*, *p* и *р* пропорциональны друг другу:

$$dp = \pm \rho_0 c_0 du, \ du = \pm c_0 \frac{d\rho}{\rho_0}.$$
 (2.20)

.

Верхний знак относится к волне, бегущей в сторону положительных *x*, а нижний — в сторону отрицательных.



Рис. 2.2.

В обоих случаях массовая скорость направлена в сторону распространения волны там, где вещество сжато, и в противоположную сторону там, где оно разрежено (рис. 2.2).

### 2.2 Соотношения вдоль характеристик в общем одномерном случае

Далее будем рассматривать распространение по сплошной среде возмущения (или волны) произвольной амплитуды, но не приводящее к нарушению условия адиабатичности. В этом случае уже нельзя утвреждать, что скорость звука в любой точке возмущения константа. Чем сильнее сжимается среда в области возмущения или чем большее давление создаётся в области возмущения, тем быстрее такое возмущение распространяется по среде. Поскольку процесс сжатия/расширения в этом возмущении мы по-прежнему рассматриваем как адиабатический, то скорость распространения возмущения также определяется формулой (1.72), т. е. является изоэнтропической скоростью звука. Ввиду произвольности амплитуды возмущения величина этой скорости теперь будет отличаться от значения скорости звука в невозмущенном состоянии  $c_0^2 = \frac{p_0}{p_0}$ .

Для описания распространения, взаимодействия таких адиабатических волн и движений среды, вызванных ими, вновь необходимо воспользоваться системой уравнений (1.95). Уравнения этой системы содержат различные комбинации частных производных от величин  $\rho$ , u, p, s. Преобразуем эти уравнения так, чтобы каждое уравнение содержало производные каждой функции в виде комбинаций типа

$$\frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial r},$$

т. е. в виде производных по некоторому направлению dr = qdt, своему для каждого уравнения. То, что такое преобразование оказывается возможным, означает, что система (1.95) - гиперболическая. Указанные направления не зависят от способа приведения нашей системы к этому специальному виду и называются *характеристическими направлениями*. Кривая на плоскости событий r, t, направление которой в каждой точке совпадает с характеристическим, называется *характеристикой системы* (1.95). Получим, таким образом, три системы характеристик — по числу дифференциальных уравнений (1.95). Кроме того, каждое из этих уравнений, после приведения его к указанному выше виду, даст нам определенное дифференциальное соотношение, действующее вдоль соответствующей характеристики.

В силу адиабатичности движения

$$ds = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} = c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r}\right). \quad (2.21)$$

Сделаем соответствующую замену в уравнении непрерывности и умножим его на  $\frac{c}{\rho}$ . Получим:

$$\frac{1}{\rho c} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c \frac{\partial u}{\partial r} = -N \frac{uc}{r}.$$
(2.22)

Уравнение Эйлера перепишем в виде:

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$
(2.23)

Складывая и вычитая (2.22) и (2.23), получим:

$$\frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = -N \frac{uc}{r},$$

$$\frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial r} \right] - \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = -N \frac{uc}{r}.$$
(2.24)

В квадратных скобках в (2.24) стоят производные по направлениям  $dr = (u \pm c)dt$ . Т.е. можно далее написать:

$$\frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dt} + \frac{du}{dt} = -N\frac{uc}{r}, \text{ вдоль } dr = (u+c)dt,$$

$$\frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dt} - \frac{du}{dt} = -N\frac{uc}{r}, \text{ вдоль } dr = (u-c)dt.$$
(2.25)

Можно сказать, что (2.24) – это ещё один вид (канонический) системы уравнений (1.95) в эйлеровом описании, а (2.25) её вид в лагранжевом описании.

Поскольку  $\frac{1}{\rho c}$  не является константой (т.к.  $\rho$  и *с* являются функциями, например, от давления *p* и энтропии *s*), то левые части уравнений (2.25) нельзя проинтегрировать по времени. Но их можно далее преобразовать, введя следующую термодинамическую функцию:

$$d\Phi = \frac{1}{\rho c} dp + M(\rho, s) ds, \qquad (2.26)$$

где  $M(\rho, s)$  – некоторая термодинамическая величина (определяемая при известном уравнении состояния). Для отыскания  $\Phi$  достаточно решить уравнение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{1}{\rho c},\tag{2.27}$$

при этом  $\Phi$  определяется с точностью до произвольной функции энтропии.

Заменяя в (2.25) дифференциал давления в соответствии с (2.26), получим:

$$d(\Phi \pm u) = -N\frac{uc}{r} + Mds$$
, вдоль  $dr = (u \pm c)dt.$  (2.28)

Величины

$$J^{+} = \Phi + u,$$
  

$$J^{-} = \Phi - u,$$
(2.29)

называются инвариантами Римана (теперь уже в общем одномерном случае).

В итоге для системы (1.95) получаем соотношения вдоль характеристик:

$$dJ^{+} = -N\frac{uc}{r} + Mds, \text{ вдоль } dr = (u+c)dt,$$
  

$$dJ^{-} = -N\frac{uc}{r} + Mds, \text{ вдоль } dr = (u-c)dt,$$
  

$$ds = 0, \text{ вдоль } dr = udt.$$
  
(2.30)

По аналогии с акустическим приближением введём обозначения: линии dr = (u + c)dt будем называть  $C^+$ -характеристики, линии dr = (u - c)dt будем называть  $C^-$ -характеристики. В случае адиабатического движения сплошной среды существует ещё одно семейство характеристик  $C^0$ , уравнением которых dr = udt являются траектории частиц. Из-за отсутствия теплообмена между частицами энтропия в каждой из них сохраняется, т. е. сохраняется вдоль траектории частицы. Как и в акустическом приближении,  $C^{\pm}$ -характеристики являются траекториям малых возмущений, но в общем случае u = u(r,t) и c = c(x,t), поэтому линии характеристик криволинейные, исключая несколько определённых случаев. В акустическом же приближении область возмущения распространялась по неподвижной среде с постоянной скоростью  $c_0$ .

Таким образом, в одномерном адиабатическом течении через каждую точку плоскости событий r, t проходят три характеристики, и эта плоскость покрывается сеткой трех семейств характеристик:  $C^+, C^-, C^0$  (рис. 2.3), вдоль которых выполняются соотношения (2.30). В изоэнтропическом течении, когда энтропия всех частиц одинакова всегда, остаются только два семейства характеристик  $C^+, C^-$ .


Рис. 2.3.

# 2.3 Одномерное плоское изоэнтропическое течение идеальной сплошной среды

Из (2.30) видно, что для случая плоской симметрии (N = 0)и изоэнтропического течения (s(x,t) = const) соотношения вдоль характеристик переходят в гораздо более простые:

$$dJ^+ = 0$$
, вдоль  $dx = (u+c)dt$ ,  
 $dJ^- = 0$ , вдоль  $dx = (u-c)dt$ . (2.31)

T.e. инварианты Римана сохраняются вдоль характеристик (или, как ещё говорят, характеристики переносят постоянные значения инвариантов Римана).

Для изоэнтропического течения среды вместо уравнения состояния можно использовать её изоэнтропу  $p = p(\rho, S_0) = p(\rho)$ . Для  $d\Phi$ в этом случае получим следующее выражение:

$$d\Phi = \frac{dp}{\rho c} = \frac{c^2 d\rho}{\rho c} = c \frac{d\rho}{\rho} = c d \ln \rho.$$
 (2.32)

Тогда (2.31) можно переписать в виде:

$$\frac{dJ^{\pm}}{dt} = \frac{d(\Phi \pm u)}{dt} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( u \pm \int c d \ln \rho \right) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u \pm \int c d \ln \rho \right) = 0. \quad (2.33)$$

Для совершенного газа уравнение изоэнтропы имеет вид  $p = A\rho^{\gamma}, A = const$ , используя его можно получить  $\Phi$  в явном виде и подставить в (2.33). Для этого продифференцируем выражение для квадрата скорости звука и преобразуем полученное выражение:

$$c^{2} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma A \rho^{\gamma - 1}, \qquad (2.34)$$

$$2cdc = \gamma(\gamma - 1)A \rho^{\gamma - 1} \frac{d\rho}{\rho},$$

$$2cdc = (\gamma - 1)c^{2} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2dc}{(\gamma - 1)c},$$

$$\Phi = \int c \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma - 1}c. \qquad (2.35)$$

Таким образом, уравнения (2.33) в случае совершенного газа принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u\pm\frac{2}{\gamma-1}c\right) + (u\pm c)\frac{\partial}{\partial x}\left(u\pm\frac{2}{\gamma-1}c\right) = 0.$$
(2.36)

Уравнения (2.31), (2.33), (2.36) показывают, что состояния среды, определяемые величинами  $J^+ = u + \int c d \ln \rho$  или  $J^+ = u + \frac{2}{\gamma - 1}c$ , распространяются со скоростью u + c в положительном направлении оси x по течению среды, а состояния, определяемые  $J^- = u - \int c d \ln \rho$  или  $J^- = u - \frac{2}{\gamma - 1}c$ , распространяются со скоростью u - c в противоположном направлении оси x против течения среды. Т. е. эти уравнения описывают распространение в противоположных направлениях в среде двух волн, а также их взаимодействие.

Инварианты Римана можно записать в другом виде. Сначала преобразуем выражение:

$$c\frac{d\rho}{\rho} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\frac{d\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\rho\frac{d\rho}{\rho^2}} = \sqrt{dp\frac{d\rho}{\rho^2}} = \sqrt{-dpdv},\qquad(2.37)$$

где, напомним, v – это удельный объём единицы массы  $v = \frac{1}{\rho} \Rightarrow dv = -\frac{d\rho}{\rho^2}$ . Поэтому в плоском изоэнтропическом случае:

$$dJ^{\pm} = du \pm \sqrt{-dpdv} = 0. \tag{2.38}$$

Запись инвариантов Римана в виде (2.38) позволяет получить связь массовой скорости элемента среды с его давлением u = u(p) или плотностью  $u = u(\rho)$  в изоэнтропическом процессе сжатия/расширения или, говоря другими словами, вдоль изоэнтропы.

Ещё раз напомним, что в случае изоэнтропического течения через каждую точку (x, t) плоскости событий проходят две характеристики, и эта плоскость покрывается сеткой двух семейств характеристик  $C^+$ ,  $C^-$  (рис .2.3). В области постоянного течения, где  $u, p, c, \rho$  постоянны в пространстве и во времени, характеристики обоих семейств — прямые линии.

В частном случае политропного газа  $(p = A\rho^k)$ , когда k=3, что является справедливым для сильно сжатых продуктов детонации конденсированных BB, инварианты Римана принимают очень простой вид (рис. 2.4):

$$J^{\pm} = u \pm c = const. \tag{2.39}$$

Соответственно и характеристики принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c = const. \tag{2.40}$$

В этом случае на плоскости событий характеристики представляют собой непараллельные прямые линии (рис. 2.5).



Рис. 2.4.

Рис. 2.5.



Рис. 2.6.

Рис. 2.7.

Уравнения, записанные в характеристической форме, делают весьма наглядной причинную связь явлений в газовой динамике. Рассмотрим какое-нибудь плоское изоэнтропическое течение газа в бесконечном пространстве. Пусть в начальный момент t = 0 заданы распределения газодинамических величин по координате x: u(x,0), c(x,0) или же, что эквивалентно, заданы распределения инвариантов  $J^+(x,0), J^-(x,0)$ . На плоскости событий (x,t) (рис. 2.6) существует сетка  $C^+$  и  $C^-$  характеристик, выходящих из различных точек оси x (построить эту сетку можно после того, как найдено решение задачи). Значения газодинамических величин (или параметров среды) в какой-нибудь точке D(x,t) определяются значениями этих величин в начальных точках  $A(x_1,0)$  и  $B(x_2,0)$ :

$$J^+(x_D,t_D) = J^+(x_1,0); \ J^-(x_D,t_D) = J^-(x_2,0).$$

Нельзя, конечно, утверждать, что состояние газа в точке D зависит от задания начальных условий только в двух начальных точках, A и B, так как само положение точки D как места, где пересекаются  $C^+$  и  $C^-$  характеристики, выходящие из точек A и B, зависит от пути этих характеристик. Эти пути определяются заданием начальных условий на всем отрезке AB оси x. Например, наклон  $C^-$  характеристики AD в промежуточной точке N определяется не только инвариантом  $J^+(A)$ , но и значением инварианта  $J^-(M)$ , перенесенного в N из промежуточной точки M отрезка AB.

Но состояние газа в D полностью определяется заданием начальных условий на отрезке AB оси x и совершенно не зависит от начальных значений величин вне этого отрезка. Если, скажем, немного изменить начальные значения в точке Q, то это никак не скажется на состоянии газа в D просто потому, что возмущение от этого изменения не успеет добежать в координатную точку x к моменту t. Оно придет в эту координатную точку позднее (в точку Pвдоль  $C^-$  характеристики QP).

Аналогично начальное состояние газа на отрезке AB оси x влияет на состояние газа в последующие моменты времени только в тех

точках, которые расположены внутри области, ограниченной  $C^-$  характеристикой AP и  $C^+$  характеристикой BQ (рис. 2.7), т. н. область влияния или область зависимости решения. Оно не влияет на состояние в M, так как «сигналы» от начальных условий на отрезке AB не успеют добежать до координатной точки  $x_M$  к моменту  $t_M$ .

Подчеркнем, что изложенные соображения о причинной связи явлений имеют силу лишь при условии, что характеристики одного семейства не пересекаются друг с другом. Например, если бы  $C^+$  характеристика из Q (рис. 2.6) пошла по пунктирному пути QE, то состояние газа в Q повлияло бы на состояние в D. Но в области непрерывного течения характеристики, принадлежащие одному семейству, действительно никогда не пересекаются. Пересечение привело бы к неоднозначности газодинамических величин. В самом деле, в точке пересечения двух  $C^+$  характеристик инварианты  $J^+$ , имели бы два различных значения, соответствующих той и другой характеристике. Между тем каждой точке плоскости x, t принадлежит только по одному значению  $J^+$  и  $J^-$ , которые связаны с единственными значениями скорости газа и скорости звука в этой точке. Как мы увидим ниже, пересечение характеристик одного семейства приводит к нарушению непрерывности течения и возникновению разрывов газодинамических величин, т. е. ударных волн.

### 2.4 Простые волны (особые решения)

Если предположить, что один из инвариантов Римана одинаков во всех точках пространства и во все моменты времени, то из (2.33) следует, что это соответсвтует случаю, когда по среде распространяется только одна волна. Например, для волны, распространяющейся вправо по совершенному газу,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) = 0,$$

$$u - \frac{2}{\gamma - 1} c = J_0^- = const \ \forall x, t.$$
(2.41)

Из (2.41) следует одно уравнение:

$$\frac{\partial \left(2u - J_0^{-}\right)}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial \left(2u - J_0^{-}\right)}{\partial x} = 0, \qquad (2.42)$$

которое, очевидно, можно записать как:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$
(2.43)

Общее решение уравнения (2.43) имеет вид

$$x - (u+c)t = F(u),$$
 (2.44)

в итоге общее решение системы (2.41) будет иметь вид:

$$x = (u+c)t + F(u),$$
  
$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = const \ \forall x, t.$$
 (2.45)

Первое уравнение системы (2.45) есть уравнение  $C^+$ -характеристик. Значение функции F для какой-либо характеристики по смыслу есть координата соответствующего возмущения на момент времени t = 0. Если, например, задано  $U_0(x) = u(x, 0)$ , тем самым задано F(u). В общем случае не обязательно рассматривать момент t = 0, и начально-граничное условие может быть задано в виде какойлибо траектории на плоскости событий  $x_{\rm rp} = x_{\rm rp}(t), u_{\rm rp} = \frac{dx_{\rm rp}}{dt} = u(x_{\rm rp}(t), t)$ , из которой выходят  $C^+$ -характеристики правой волны. Тогда, также подставив  $x_{\rm rp}$  и  $u_{\rm rp}$  в (2.45), можно определить F(u).

Аналогично, предполагая всюду константой инвариант  $J^+$ , получим систему уравнений для волны, распространяющейся в совершенном газе в направлении, противоположном оси x:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) = 0,$$

$$u + \frac{2}{\gamma - 1} c = J_0^+ = const \ \forall x, t,$$
(2.46)

а её решение будет иметь вид:

$$x = (u - c)t + G(u),$$
  

$$u + \frac{2}{\gamma - 1}c = const \ \forall x, t.$$
(2.47)

Решения (2.45) и (2.47) называются *особыми решениями* системы (2.36), а волны, описываемые ими, называются *простыми* (также простыми римановскими, бегущими).

Весьма существенное значение в теории изоэнтропического одномерного движения имеет следующее свойство простых волн: течение в области, граничащей с областью постоянного течения (u = const, p = const), есть непременно простая волна.

### 2.5 Характеристики особых решений

Переходя от одной точки к другой в области простой волны, значения массовой скорости и скорости звука изменяются. При этом, как мы выяснили, в случае совершенного газа они связаны между собой линейными соотношениями – инвариантами Римана:

$$u \pm \frac{2}{\gamma - 1}c = J_0^{\pm} = const.$$
 (2.48)

Рассмотрим простую волну, распространяющуюся в направлении координатной оси (далее такую волну будем также называть правой волной). В области такой волны всегда остаётся постоянным инвариант  $J^-$ :

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = J_0^- = const, \qquad (2.49)$$

т.е. массовая скорость u и скорость звука c в области волны связаны соотношением (2.49).

Выберем на плоскости событий какую-либо точку  $(x_i, 0)$  в области, которую волна занимала в начальный момент времени t = 0. Вдоль $C^+\mbox{-xарактеристики},$ выходящей из этой точки, сохраняется  $J^+$ инвариант

$$u + \frac{2}{\gamma - 1}c = J_0^+ = const.$$
 (2.50)

С учётом (2.49) это означает, что вдоль рассматриваемой  $C^+$ -характеристики массовая скорость и скорость звука являются константами, значения которых соответствуют  $u_i = u(x_i, 0)$  и  $c_i = c(x_i, 0)$ . Поэтому сама  $C^+$ -характеристика является прямой линией, уравнение которой имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = u_i + c_i \ x = (u_i + c_i) t + F(u_i).$$
(2.51)

С<sup>-</sup>-характеристики правой волны в общем случае криволинейные.

То же самое можно сказать о любой другой  $C^+$ -характеристике в области правой волны. Поэтому точке на линии (2.49) в плоскости (c, u) (рис. 2.8) соответствует прямая (характеристика) на плоскости событий (x, t) в области волны (рис. 2.9), которая является траекторией соответствующего возмущения внутри волны (возмущения показаны точками на рис. 2.10).

#### 2.6 Простые волны сжатия

Для лучшего уяснения сказанного в параграфе 2.6 имеет смысл сначала рассмотреть ещё одну упрощённую схему сжатия среды в простой волне. Пусть среда сжимается из состояния ( $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $u_0 = 0$ ) до состояния ( $\rho_*$ ,  $p_*$ ,  $u_*$ ) в двух последовательных волнах, которые можно считать акустическими. Профиль каждой из волн имеет прямоугольную форму. На рис. 2.11 в координатах (x, p) показаны профили этих волн в моменты времени t = 0 и t > 0. Первая волна распространяется по невозмущённой среде со скоростью звука  $c_0$ . Вторая волна распространяется по состоянию ( $\rho_1$ ,  $p_1$ ,  $u_1$ ), в которое среду переводит первая волна. Поскольку она распространяется по более сжатой среде по сравнению с исходным состоянием ( $p_1 > p_0$ ),



Рис. 2.9.

Рис. 2.10.



Рис. 2.11.

Рис. 2.12.

то вторая волна распространяется с большей скоростью звука. Например, в случае совершенного газа

$$c^2 = \gamma A \rho^{\gamma - 1}, \ \rho_1 > \rho_0 \ \Rightarrow \ c_1 > c_0.$$
 (2.52)

Поэтому расстояние между этими волнами сокращается, вторая волна догоняет первую.

Каждая из этих волн является возмущением по отношению к состоянию среды перед волной. Уравнениями характеристик этих возмущений являются прямые линии  $\frac{dx}{dt} = c_i + u_i$ , но наклон этих линий разный в силу разных значений скорости звука в среде перед каждой из волн (рис. 2.12). То есть, вообще говоря, эти характеристики пересекаются в некоторой точке (в момент, когда вторая волна догонит первую), но это будет рассмотрено чуть позже. Пока что скажем, что две эти волны можно рассматривать как одну волну со сложным профилем, которая переводит среду из одного состояния в другое.

Очевидно, что можно представить себе чуть более сложную ситуацию, когда волна сжимается из того же самого начального состояния ( $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $u_0 = 0$ ) в состояние ( $\rho_*$ ,  $p_*$ ,  $u_*$ ) в последовательности трёх акустических волн с прямоугольным профилем, но уже с меньшей относительной амплитудой (рис. 2.13). На плоскости событий в этом случае уже будут три характеристики для соответствующих возмущений. Каждая последующая волна распространяется по более сжатой среде, поэтому движется с большей скоростью звука, и по этой причине характеристики этих волн имеют разный наклон, а расстояние между волнами сокращается (рис. 2.14).

Далее очевидно, что такое усложнение профиля волны сжатия на все большее количество акустических волн со всё меньшей относительной амплитудой можно продолжать бесконечно. Эти представления можно применить к любому профилю волны, форма которого описывается какой-либо непрерывной функцией (рис. 2.15). Каждую точку такого профиля можно считать бесконечно малым возмущением, а характеристики всех этих возмущений непрерывным образом покрывают область плоскости событий, в которой волна находилась в разные моменты времени.

Рассмотрим задачу о сжатии совершенного газа в трубе поршнем в одномерной плоской постановке. Пусть имеется жесткая труба, по которой может свободно перемещаться поршень. В начальный момент поршень покоится. Справа от поршня находится также покоящийся совершенный газ с параметрами  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $u_0 = 0$  (рис. 2.17). Затем поршень начинает вдвигаться в газ. От поршня вправо по газу побежит волна сжатия. Движение граничит с областью покоя, поэтому оно представляет собой простую волну и описывается особым решением (2.45):

$$x = (u+c)t + F(u),$$
  
$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = const \ \forall x, t.$$
 (2.53)

Величину константы во втором уравнении (2.53) определяем из граничных условий на фронте волны  $u_0 = 0$ ,  $= c_0$  (рис. 2.17):

$$const = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0. \tag{2.54}$$





Рис. 2.13.



Рис. 2.15.

Рис. 2.14.



Рис. 2.16.



Рис. 2.17.

Рассмотрим качественную картину движения газа перед поршнем при любом законе движения поршня. Подставив найденное значение константы в (2.53), имеем

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0. \tag{2.55}$$

С другой стороны, в диф<br/>ференциальной форме уравнения  $C^+\mbox{-xapaкtepuctuk}$ имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = u + c. \tag{2.56}$$

Исключая скорость звука с в (2.56), используя (2.55)

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}, \tag{2.57}$$

получим

$$\frac{dx}{dt} = u + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u.$$
(2.58)

Скорость поршня  $u_{\rm m}(t)$  предполагается заданной (или задан закон движения поршня  $x_{\rm m} = x(x_{\rm m0}, t)$ ). Все возмущения в волне сжатия возникли у поверхности поршня и распространяются вдоль соответствующих  $C^+$ -характеристик. Например, возмущение сжатия, возникшее у поршня в момент времени  $t_i$ , будет распространяться по газу вдоль траектории:

$$\frac{dx_i}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u_{\rm II}(t_i) \tag{2.59}$$

со скоростью  $c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u_{\pi}(t_i)$ . Определим наклон характеристик в плоскости событий для некоторых фиксированных положений поршня:

- 1.  $\frac{dx_0}{dt} = c_0$  в момент  $t = 0, u_{\pi 0} \approx 0;$ 2.  $\frac{dx_1}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_{\pi 1};$
- 3.  $\frac{dx_2}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_{\pi 2} \dots$

Видно, что наклон характеристик  $\frac{dx}{dt}$  с увеличением скорости поршня постепенно увеличивается, а величина  $\frac{dt}{dx}$  уменьшается (рис. 2.18).

Как уже было сказано, это объясняется тем, что каждая последующая элементарная волна сжатия движется по газу, более уплотненному предыдущей волной, и амплитуда волны непрерывно увеличивается. Характеристики в конце концов пересекаются. Поскольку вдоль каждой характеристики в плоскости x, t для простой волны параметры среды u и c постоянны, то в точке пересечения характеристик одного семейства (точка A, рис. 2.18) нарушается однозначность параметров среды. В точке пересечения характеристик возникает ударная волна, и течение становится неизоэнтропическим. Уравнения (2.53) описывают движение газа в трубе только до момента образования ударной волны.

Проведенный выше анализ, следовательно, показывает, что в случае ускоренного движения поршня из волны сжатия формируется ударная волна.



Рис. 2.18.

Определим теперь функцию F(u). Для этого необходимо задать закон движения поршня. Пусть в нашем случае поршень движется равноускоренно. Закон движения поршня  $u_{\rm n}$  описывается уравнениями

$$u_{\Pi} = at,$$

$$x_{\Pi} = \frac{u_{\Pi}^2}{2a},$$
(2.60)

где а – ускорение.

Выразим функцию F из первого уравнения (2.53):

$$F(u) = x - (u + c)t.$$
 (2.61)

Подставим в это уравнение выражения для  $x_{n}$  и t из (2.60) с учётом того, что  $u+c = c_{0} + \frac{\gamma+1}{2}u_{n}$ , и получим выражение для функции F(u):

$$F(u) = \frac{u_{\pi}^2}{2a} - (c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u_{\pi})\frac{u_{\pi}}{a} = -\frac{c_0u_{\pi}}{a} - \frac{\gamma u_{\pi}^2}{2a}.$$
 (2.62)



Рис. 2.19.

Теперь можно записать решение (2.53) нашей задачи в окончательном виде:

$$x = (u+c)t - \frac{c_0 u}{a} - \frac{\gamma u^2}{2a},$$
  
$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$
 (2.63)

Из системы уравнений (2.63) можно исключить местную скорость звука *с*. Тогда скорость частиц *и* находится из решения квадратного уравнения

$$u^{2} + \frac{2}{\gamma} \left( c_{0} - \frac{\gamma + 1}{2} at \right) u - \frac{2a}{\gamma} \left( c_{0}t - x \right) = 0.$$
 (2.64)

Получаем зависимость u = u(x,t) в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\varphi^2 + 2a\gamma(c_0t - x)} - \frac{\varphi}{\gamma}, \ \varphi = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2}at.$$
(2.65)

На рис. 2.19 приведена зависимость u = u(x) массовой скорости газа в области волны для разных моментов времени.

Определим давление и плотность в волне сжатия. Так как газ совершенный, т.е. уравнение изоэнтропы  $p = A\rho^{\gamma}$ , A = const, то соотношение, связывающее параметры газа перед волной сжатия и в самой волне, записывается для скорости звука и плотности в виде

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \tag{2.66}$$

или для давления, плотности и скорости звука в виде

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$
(2.67)

Поскольку закон изменения c = c(x,t) известен из уравнения (2.63) при найденной зависимости u = u(x,t) согласно соотношению (2.65), то соотношения (2.67) позволяют определить p = p(x,t) и  $\rho = \rho(x,t)$ .

Теперь определим момент и координату образования ударной волны из волны сжатия. В момент образования ударной волны производная u по координате x стремится к бесконечности (рис. 2.19), т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \to \infty$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0. \tag{2.68}$$

ИЛИ

Кроме того, так как простая волна граничит с областью покоя, то на фронте простой волны (перед фронтом ударной волны тоже) массовая скорость равна нулю:

$$u(c_0 t, t) = 0. (2.69)$$

Уравнение (2.63) с учетом того, что  $u + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u$ , можно записать в виде

$$x = \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u\right)t - \frac{c_0}{a}u - \frac{\gamma}{2a}u^2.$$

Продифференцируем это выражение по и:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\gamma + 1}{2}t - \frac{c_0}{a} - \frac{\gamma}{a}u. \tag{2.70}$$

Пользуясь условиями образования ударной волны (2.68) и (2.69), имеем из (2.70)

$$t_{\rm YB} = \frac{2c_0}{(\gamma + 1)a}.$$
 (2.71)

Координата образования ударной волны вычисляется по следующей формуле:

$$x_{\rm YB} = c_0 t_{\rm YB} = \frac{2c_0^2}{(\gamma + 1)a}.$$
 (2.72)

В случае, когда поршень мгновенно приобретает скорость, что оначает, что ускорение  $a \to \infty$ , то ударная волна возникает сразу в начале системы координат:  $t_{\rm YB} = 0$ ,  $x_{\rm YB} = 0$ . Это следует из формул (2.71), (2.72) при  $a \to \infty$ .

Необходимо отметить, что с момента образования ударной волны перестают быть справедливими уравнения, описывающие изэнтропическое движение среды, так как после возникновения ударной волны энтропия частиц среды, сжатых ударной волной, изменяется.

### 2.7 Простые волны разрежения

Рассмотрим теперь движение газа под действием поршня, выдвигающегося из трубы. Пусть покоящийся газ с постоянными плотностью, давлением и скоростью звука  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $c_0$  занимает пространство справа от поршня (x>0). В момент времени t=0 поршень начинает двигаться влево, постепенно ускоряясь от нулевой скорости до некоторой постоянной скорости. Вправо по газу пойдет волна разрежения (рис. 2.20).

Эта волна является простой римановской волной, так как область, охваченная волной, граничит с областью покоя. Волна



Рис. 2.20.

разрежения описывается особым решением

$$x = (u+c)t + F(u),$$
  

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = const,$$
(2.73)

поскольку она движется в положительном направлении оси x, хотя направление массовой скорости газа при этом противоположно. Значение константы определяется из граничных условий на фронте волны разрежения: u = 0,  $c = c_0$ , что дает

$$const = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0. \tag{2.74}$$

Подставляя это значение константы во второе уравнение (2.73), имеем

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}u. (2.75)$$

Дифференциальное выражение для  $C^+\mbox{-xарактеристик}$ в плоскости событий

$$\frac{dx}{dt} = u + c. \tag{2.76}$$

Подставим в это выражение значение скорости звука из соотношения (2.75), получим

$$\frac{dx}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u. \tag{2.77}$$

На границе с поршнем скорость газа совпадает со скоростью поршня  $u_{\rm n}$ , направление которой не совпадает с положительным направлением оси x. Скорость звука, давление и плотность газа у поршня меньше начальных, притом тем меньше, чем быстрее движется поршень. Характеристики  $C^+$  являются прямыми линиями, выходят с линии поршня, так как возмущения возникают на поршне и имеют наклоны

$$\frac{dx}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2}|u_{\pi}|. \qquad (2.78)$$

На рис. 2.20 показаны  $C^+$ -характеристики в плоскости событий x, t. В области 1 между осью 0x и лучом 0A ( $C^+$ -характеристикой) газ не возмущен и характеристики представляют собой параллельные прямые линии. Первое возмущение от поршня распространяется по газу со скоростью  $c_0$ , и поэтому закон движения фронта волны (начальное возмущение) имеет вид  $x = c_0 t$ . Далее скорость поршня постепенно увеличивается (область 2 – область волны разрежения на рис. 2.20) и характеристики  $C^+$  расходятся. Это объясняется тем, что каждое следующее возмущение идет по газу, уже разреженному предыдущими возмущениями. Характеристики  $C^+$ , выходящие с того участка линии поршня BD, на котором скорость поршня стала постоянной (область 3), имеют одинаковые наклоны и идут параллельно друг другу. В области 3 газ движется с постоянной скоростью  $u_{\Pi}$ , равной скорости поршня.

Если поршень равноускоренно выдвигается из газа, то получается решение, аналогичное решению о вдвигании поршня в трубу с постоянным ускорением (2.63), только теперь ускорение a имеет отрицательное значение, так как поршень движется в направлении отрицательных значений оси x. Поэтому зависимость, например,



Рис. 2.21.

Рис. 2.22.

массовой скорости u = u(x,t) будет для волны разрежения иметь вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\phi^2 - 2a\gamma (c_0 t - x)} - \frac{\phi}{\gamma}, \ \phi = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} at.$$
(2.79)

На рис. 2.22 приведена эпюра скорости частиц газа в волне разрежения, создаваемого поршнем, движущимся равноускоренно  $x_{\Pi} = -\frac{at^2}{2}$  в разные моменты времени.

В том случае, когда поршень м<br/>гновенно приобретает какую-то конечную скорость  $u_{\rm m}$ , образуется центрированная волна разрежения.

Центрированная волна разрежения представляет собой предельный случаи, когда время переменного движения поршня стремится к нулю, т.е. разгонный участок OB на рис. 2.21, когда скорость поршня возрастает от нуля до некоторой конечной величины  $u_{\rm n}$ , обращается в точку. Таким образом, центрированная волна разрежения возникает тогда, когда поршень скачком за нулевое время набирает некоторую конечную скорость  $u_{\rm n}$ , и затем эта скорость остается постоянной. Характеристики  $C^+$ , соответствующие возмущениям, распространяющимся от поршня, выходят из одной точки 0



Рис. 2.23.

Рис. 2.24.

(характеристики 0A и 0D ограничивают область волны на рис. 2.23). Такой центрированной волне разрежения отвечает решение, соответствующее  $F(u) \equiv 0$ :

$$x = (u+c)t,$$
  

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$
(2.80)

Отсюда определяется скорость частиц в волне разрежения

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - c_0\right) \tag{2.81}$$

и местная скорость звука

$$c = \frac{2}{\gamma + 1}c_0 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{x}{t}.$$
 (2.82)

Остальные параметры течения (давление и плотность в центрированной волне разрежения) определяются по формулам (2.67) с

использованием соотношения (2.82):

$$p = p_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{x}{c_0t}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$
  

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{x}{c_0t}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$
(2.83)

Семейство  $C^+$ -характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = u + c = \frac{x}{t},\tag{2.84}$$

что следует из соотношений (2.81) и (2.82). Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$x = At, \tag{2.85}$$

где A – константа интегрирования. Значит, семейство  $C^+$ -характеристик для центрированной волны разрежения представляет собой пучок прямых, выходящих из начала координат – точки 0.

Каждому значению скорости  $u_i = const$  соответствует своя  $C^+$ -характеристика в плоскости x, t (рис. 2.23); так вдоль линии  $0A u_A = 0$  и линии  $0D u_D = -u_{\Pi}$  (скорости поршня).

Дифференциальные уравнения  $C^-$ ,  $C^0$ -характеристик согласно (2.30) имеют вид:

$$C^{-}: \frac{dx}{dt} = u - c,$$

$$C^{0}: \frac{dx}{dt} = u.$$
(2.86)

Подставляя сюда значение скорости частицuи скорости звука c в центрированной волне разрежения из соотношений (2.81) и (2.82), получим для  $C^-$ -характеристики

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{4c_0}{\gamma+1} + \frac{3-\gamma}{\gamma+1}\frac{x}{t},\tag{2.87}$$

а для  $C^0$ -характеристики

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2c_0}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1}\frac{x}{t}.$$
(2.88)

Интегрирование этих соотношений даёт явный вид соответствующих траекторий:

$$C^{-}: x = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0 t \left[ \left( \frac{t_{\rm H}}{t} \right)^{\frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} - \frac{2}{\gamma + 1} \right],$$

$$C^{0}: x = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0 t \left[ \left( \frac{t_{\rm H}}{t} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} - \frac{2}{\gamma + 1} \right],$$
(2.89)

где  $t_{\rm H}$  определяется точкой пересечения  $(c_0 t_{\rm H}, t_{\rm H})$  траектории фронта волны с соответствующей  $C^-$  или  $C^0$ -характеристикой на плоскости событий. На рис. 2.23 также показаны некоторые  $C^-$  и  $C^0$ -характеристики. На рис. 2.24 показаны профили массовой скорости u = u(x) для нескольких моментов времени в рассмотреной задаче о центрированной волне разрежения.

Представляется интересным выяснить, с какой скоростью должен двигаться поршень, чтобы оторваться от газа. Это равносильно также случаю, когда поршень мгновенно убирается и газ начинает истекать в пустоту.

Поскольку в пустоте скорость звука c=0 (что вытекает из того факта, что  $\rho=0$  и, следовательно,  $c \ \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}=0$ ),

$$u_{max} = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$
 (2.90)

Это следует из инварианта Римана для центрированной волны разрежения, идущей вправо:

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$
 (2.91)

Следовательно, если поршень будет иметь скорость  $u_{\rm m}$ 

$$|u_{\Pi}| \geqslant |u_{max}|,$$

то он оторвётся от газа, и газ будет свободно истекать в пустоту.



Рис. 2.25.

# 2.8 Одностороннее истечение покоящегося газа в пустоту

Представим себе достаточно длинную трубу, перегороженную посредине перегородкой. Пусть область слева от перегородки (x < 0) заполнена покоящимся газом с параметрами  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $u_0=0$ , а справя от перегородки (x > 0) – вакуум. Ось 0y направлена параллельно оси трубы. Перегородка находится в начале координат (x=0). Площадь сочения трубы постоянна (рис. 2.25).

В момент времени t=0 перегородка мгновенно убирается. Газ начнет истекать в пустоту, а одновременно с этим возникает волна разрежения, бегущая влево. Волна разрежения – простая римановская волна, распространяющаяся по невозмущенному покоящемуся газу.

Ввиду того, что данная волна разрежения является простой волной, бегущей влево, для решения этой задачи воспользуемся особым

решением (2.47)

$$x = (u - c)t + F(u),$$
  

$$u + \frac{2}{\gamma - 1}c = const.$$
(2.92)

Значения неизвестных F(u) и const будем искать с помощь граничных условий. Очевидно, что для покоящегося на фронте волны газа  $u=0, c = c_0$ . Подставим во второе уравнение (2.92) эти условия, получим

$$const = \frac{2}{\gamma - 1}c_0. \tag{2.93}$$

Тогда оно окончательно примет вид

$$u = \frac{2}{\gamma - 1}c_0 - \frac{2}{\gamma - 1}c.$$
 (2.94)

Из этого уравнения следует, что правая граница газ–вакуум будет двигаться с максимальной скоростью (при c=0)

$$u_{max} = \frac{2}{\gamma - 1}c_0. \tag{2.95}$$

Значение неизвестной F(u) определим из условия, которое состоит в том, что в начальный момент значения u и c в месте нахождения перегородки (x = 0) являются неопределенными. Действительно, в начальный момент при снятии перегородки они не имеют определенных значений, так как скорость u скачком возрастает от нуля до своего максимального значения  $u_{max}$ , определяемого соотношением (2.95), а плотность, давление и скорость звука скачком падают до нуля от своих первоначальных значений  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$ . Тогда при этих условиях F(u) должна тождественно равняться нуло. Это вытекает из первого соотношения для простой волны:

$$x = (u - c)t + F(u).$$

Если положить x=0, t=0, то неопределенность в определеннии u-c возможна только в случае равенства нулю функции  $F(u): u-c = \frac{0}{0}$  при F(u)=0, u и c являются произвольными (неопределенными).

Итак, решение окончательно запишется в виде

$$x = (u - c)t,$$
  

$$u + \frac{2}{\gamma - 1}c = \frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$
(2.96)

Определим закон движения фронта волны разрежения. Фронт в каждый момент времени граничит с областью невозмущенного газа в трубе, поэтому на фронте  $u=0, c = c_0$ . Тогда для фронта волны разрежения первое уравнение (2.96) дает

$$x_{\Phi} = -c_0 t, \qquad (2.97)$$

т.е. фронт волны движется влево со скоростью  $c_0$ , равной скорости звука в невозмущенной среде.

Разрешая систему (2.96) двух уравнений относительно u и c, получаем

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left( c_0 + \frac{x}{t} \right),$$
  

$$c = \frac{2}{\gamma + 1} c_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t}.$$
(2.98)

Из полученного решения (2.98) видно, что рассматриваемое нестационарное движение газа можно характеризовать одной переменной  $z = \frac{x}{t}$ . Такое движение называется автомодельным (самоподобным).

Из уравнений (2.98) видно, что в каждый данный момент u и c являются линейными функциями от x (рис. 2.26).

Далее из уравнений (2.98) следует, что в сечении x=0 всегда  $u = c = \frac{2}{\gamma+1}c_0$ , т.е. устанавливается критический режим истечения. Очевидно, что состоянние (или возмущение), при котором u = c, не перемещается по газу, так как скорость распространения этого состояния  $\frac{dx}{dt} = u - c$  в этом случае равна нулю.



Рис. 2.26.

Рис. 2.27.

Поскольку уравнения  $C^-$ -характеристик имеют вид x = (u-c)t, а для левой простой волны они являются прямыми линиями, то все они выходят из одной точки (x=0, t=0). Вдоль каждой такой характеристики  $u_i$  и  $c_i$  принимают постоянные значения, связанные между собой вторым уравнением системы (2.96). Как уже известно, такая простая волна называется центрированной волной разрежения. Область разлета газа в плоскости x, t ограничена фронтом разлета газа в вакуум  $x = u_m t = \frac{2}{\gamma-1}c_0t$ , а слева – фронтом волны разрежения  $x = -c_0t$ . Критическому режиму истечения u = cсоответствует характеристика x = 0 (рис. 2.27).

#### 2.9 Метание поршня сжатым газом

Круглая бесконечная труба перегорожена посредине поршнем (x=0, t=0), по одну сторону от которого (x<0) в момент времени t=0 находится политропный газ  $(p = const \cdot \rho^k)$  под давлением  $p_0$ , а по другую (x>0) – вакуум. Начальные параметры газа  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$ ,

 $u_0=0$ , а масса поршня, отнесенная к единице площади сечения трубы – m. В момент t=0 поршень отпускается, и он начинает свое движение. Определим закон движения поршня, если он перемещается в трубе без трения.

При движении поршня в сторону положительного направления оси в газе возникает волна разрежения, идущая влево, для которой можно записать особое решение в виде

$$x = (u - c)t + F(u),$$
  

$$u + \frac{2}{k - 1}c = const.$$
(2.99)

Константу, как всегда, определяем из условия на фронте волны разрежения, где u = 0,  $c = c_0$ ; откуда  $const = \frac{2}{k-1}c_0$ . Из второго соотношения

$$u + \frac{2}{k-1}c = \frac{2}{k-1}c_0 \tag{2.100}$$

получаем выражение для местной скорости звука cчерез массовую скорость газа

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{k-1}{2} \frac{u}{c_0}.$$
(2.101)

Запишем уравнение движения поршня

$$m\frac{du_{\pi}}{dt} = p, \qquad (2.102)$$

где скорость движения поршня  $u_{\rm n}$  равна скорости частиц газа, прилегающих к поршню.

Поскольку мы считаем, что труба не проводит тепло, т. е. движение газа адиабатическое, и по условию задачи в начальном состоянии все частицы газа имели одну и ту же энтропию, то движение также изоэнтропическое. Поэтому давление и плотность в газе связаны изоэнтропой (её также называют адиабатой Пуассона) политропного газа:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \qquad (2.103)$$

на основании чего связь со скоростью звука имеет вид:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}},$$
(2.104)

Из соотношений (2.101) и (2.104) получаем

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{k-1}{2} \frac{u}{c_0} \right)^{\frac{2k}{k-1}}.$$
 (2.105)

Подставляя эту зависимость в закон движения поршня, при условии, что  $u = u_{\text{п}}$ , имеем:

$$m\frac{du_{\pi}}{dt} = p_0 \left(1 - \frac{k-1}{2}\frac{u_{\pi}}{c_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}}.$$
 (2.106)

Интегрируя уравнение (2.106) при начальном услови<br/>и $t=0,\,u_{\rm m}=0,$ получим

$$u_{\rm II}(t) = \frac{2c_0}{k-1} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{k+1}{2c_0} \frac{p_0}{m} \cdot t \right)^{-\frac{k-1}{k+1}} \right].$$
 (2.107)

#### 2.10 Общие решения

Мы рассмотрели движение газа, когда во всей области, охваченной возмущением, постоянен один из инвариантов Римана ( $J^+$  или  $J^-$ ), что является характерным свойством простых волн. В этом параграфе рассмотрим общий случай движения, когда в области возмущения не постоянно ни  $J^+$ , ни  $J^-$ ; каждой паре значений  $J^+$ ,  $J^-$  соответствует лишь одно сечение в области возмущения в плоскости x, t.

Для нахождения общих решений уравнений плоского изоэнтропического движения среды удобно уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в (1.95) преобразовать с помощью формул  $\frac{dp}{\rho} = c^2 d \ln \rho = dh$  в систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$
(2.108)

Независимыми переменными здесь являются x и t. Если эти уравнения преобразовать к новым переменным u, h, тогда для политропного газа  $\left(h = \frac{c^2}{k-1}\right)$  вместо (2.108) получим:

$$(k-1)h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 h} + \frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 u}, \qquad (2.109)$$

где  $x = ut - \frac{\partial \varphi}{\partial u}, t = \frac{\partial \varphi}{\partial h}.$ 

Это уравнение может быть проинтегрировано при условии, что  $k={3+2N\over 1+2N},$  где  $N=0,\ 1,\ 2,\ 3$  ...

В этом случае решение может быть найдено, если  $k = 3, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots, 1.$ 

Общее решение в этом случае имеет вид [18]:

$$\varphi = \frac{\partial^N}{\partial c^N} \left\{ f_1 \left( \frac{2c}{k-1} + u \right) + f_2 \left( \frac{2c}{k-1} - u \right) \right\}, \qquad (2.110)$$

т.е. оно зависит от двух произвольных функций  $f_1$  и  $f_2$ , которые для каждой конкретной задачи определяют на основе начальных и граничных условий.

Для частного случая при N=0 и k=3 общее решение можно также получить, решая уравнения (2.36) при  $\gamma=3$ :

$$\frac{\partial(u\pm c)}{\partial t} + (u\pm c)\frac{\partial(u\pm c)}{\partial x} = 0, \qquad (2.111)$$

или если обозначить  $u + c = \alpha$ ,  $u - c = \beta$  то получим:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0.$$
(2.112)

Общее решение этих уравнений k=3 имеет вид при:

$$x = (u+c)t + F_1(u+c),$$
  

$$x = (u-c)t + F_2(u-c).$$
(2.113)

То есть общее решение при k=3 зависит от двух произвольных функций  $F_1(u+c)$  и  $F_2(u-c)$ .

Как ранее уже было сказано, простая волна граничит либо с областью покоя, либо с областью стационарного течения. Поэтому движение, описываемое общим решением (2.113), не может непосредственно примыкать к этим областям, а отделено от них промежуточной областью простой волны. Граница между простой волной и волной, описываемой общим решением, поскольку она одновременно является границей между областями двух различных аналитических решений, всегда является характеристикой.

Область, характеризуемая общим решением, может слева и справа сопрягаться также с областями, характеризуемыми общими решениями, или, с одной стороны, с областью, описываемой особым решением, а с другой – областью, описываемой общим решением. Может быть также случай, когда с обеих сторон области общего решения находятся области особых решений. Простая волна должна сопрягаться или с областью покоя, или с областью стационарного движения.

Область возмущения, описываемая общими решениями, может быть также ограничена с одной стороны стенкой, что приводит к отражению, а часто и к сложному взаимодействию различных волн.

Область общего решения в ряде случаев может быть ограничена с одной или обеих сторон областями возмущения, имеющими другую энтропию, т.е. отделяться от них так называемым особым, или контактным разрывом. Полученные общие решения, если известны начальные и граничные условия, дают возможность решать ряд задач, связанных с определением движения при отражении волн разрежения от стенки, при двустороннем истечении газа из трубы, взаимодействии волны разрежения с ударными волнами, при отражении детонационных волн от стенки.

### Глава 3. Теория ударных волн

При взрыве и при сильном ударе в среде возникают области движения среды, ограниченные поверхностями, на которых все параметры среды (*p*, *ρ*, *u*, *T* и др.) очень резко меняют свои значения. Говоря математическим языком, градиенты соответствующих функций стремятся к бесконечности или функции на таких поверхностях терпят разрыв. Физически это означало бы, что вещество сжимается в области бесконечно малой ширины, а вне этой области находится в двух разных состояниях. Эти поверхности разрыва параметров среды называют фронтами ударных волн или просто *ударными волнами* (УВ). В реальности область ударной волны имеет некоторую конечную, пусть и очень малую ширину, которой во многих практических задачах пренебрегают и считают её нулевой.

УВ возникают перед телом, которое движется в среде со сверхзвуковой скорость либо, наоборот, при торможении сверхзвукового потока, при соударениях тел с большими скоростями. Как ранее было рассмотрено, при сжатии идеального газа равноускоряющимся поршнем в газе на определённом расстоянии возникнет УВ либо УВ распространяется от поверхности поршня, если он мгновенно приобретает скорость.

Существуют два типа УВ – прямые и косые. На рис. 3.1, 3.2 представлены соответствующие схемы таких УВ. Индексом 1 обозначены параметры состояния перед УВ, индексом 2 параметры состояния за УВ. На рис. 3.3 показан профиль давления вблизи УВ. Остальные параметры среды имеют аналогичный профиль вблизи УВ.

Если направление скорости потока среды  $u_2$  перпендикулярно к поверхности фронта УВ, то такая УВ называется прямой (рис. 3.1), если не перпендикулярно, то УВ называется косой (рис. 3.2). Если вблизи поверхности УВ не происходит разгрузка ударно сжатого вещества, то УВ распространяется по веществу с постоянной скоростью, свойственной для данного вещества и связанной с амплитудой УВ, т. е., например, с величиной давления  $p_2$  или сжатия  $\rho_2/\rho_1$  за



Рис. 3.3.

УВ. Скорость фронта УВ  $D > u_2$ , и он перемещается в газе и жидкости со сверхзвуковой скоростью, а в твердых телах УВ могут перемещаться как со сверхзвуковой, так и с дозвуковой скоростью.

# 3.1 Соотношения на ударной волне в идеальной среде

Пусть мы имеем длинную жёсткую трубу с площадью сечения, равной S. В трубе находится покоящаяся идеальная среда с постоянными параметрами  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $c_1$ ,  $\varepsilon_1$ ; слева расположен плоский поршень. Пусть сначала поршень покоится, а затем в начальный момент времени t=0 поршень мгновенно приобретает некоторую скорость  $u_2$  и перемещается с этой скоростью вправо, сжимая находящийся перед ним газ. Вправо от поршня пойдёт УВ со скоростью D (рис. 3.4).

Найдём неизвестные величины: плотность  $\rho_2$  и давление газа  $p_2$ за фронтом УВ, а также скорость распространения УВ по невозмущенной среде D и скорость среды (массовую скорость)  $u_2$  за


Рис. 3.4.

фронтом УВ. Параметры невозмущенной среды  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $c_1$ ,  $\varepsilon_1$  будем считать известными.

К моменту времени t движение охватывает массу среды, которая в начальный момент времени занимала объём SDt, т. е. массу, равную  $\rho_1 SDt$ . Но к моменту времени t эта масса среды сжата и занимает уже объём  $(D - u_2)St$ , в котором плотность среды равна  $\rho_2$ , т. о. закон сохранения массы имеет вид:

$$\rho_1 SDt = \rho_2 S(D - u_2)t, \rho_1 D = \rho_2 (D - u_2).$$
(3.1)

Масса газа  $\rho_1 SDt$  приобретает импульс  $\rho_1 SDtu_2$ , который по закону Ньютона равен импульсу сил давления. Результирующая сила, действующая на сжатую среду, равна  $p_2 S - p_1 S$ , тогда импульс силы, действующей на сжатую среду, равен  $(p_2 S - p_1 S)t$ .

Приравняем импульс массы среды, находящейся за фронтом УВ, и импульс силы, действующей на эту массу:

$$\rho_1 SDtu_2 = (p_2 S - p_1 S)t,$$
  

$$\rho_1 u_2 D = p_2 - p_1.$$
(3.2)

При адиабатическом сжатии среды изменение полной энергии газа равно работе внешних сил. Энергия единицы массы газа:  $\varepsilon + u^2/2$ , поэтому до ударного сжатия единица массы среды имела внутреннюю энергию  $\varepsilon_1$ , после ударного сжатия энергия единицы массы стала равной  $\varepsilon + u_2^2/2$ . Изменение полной энергии всей массы ударно сжатой среды равно ( $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + u_2^2/2$ ) $\rho_1 SDt$ . Внешняя сила, сжимающая среду, равна  $p_2S$  и действует на пути  $u_2t$ . Учитывая все это, получим соотношение

$$\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \frac{u_2^2}{2}\right)\rho_1 SDt = p_2 Su_2 t.$$
(3.3)

Преобразовав это выражение, получим уравнение для изменения энергии единицы массы в УВ:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{p_2 u_2}{D\rho_1} - \frac{u_2^2}{2}.$$
 (3.4)

Пользоваться уравнением (3.4) неудобно, поэтому преобразуем его к виду, удобному для практического использования. Для этого исключим скорости из уравнения (3.4). Из уравнений (3.1) и (3.2) определим D и  $u_2$ :

$$D = v_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}},\tag{3.5}$$

$$u_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(v_1 - v_2)},\tag{3.6}$$

где  $v_i = 1/\rho_i$  – удельный объём. Подставим полученные выражения для D и  $u_2$  в (3.4):

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{p_2 u_2^2}{u_2 D \rho_1} - \frac{u_2^2}{2} = u_2^2 \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} - \frac{1}{2}\right) = (p_2 - p_1)(v_1 - v_2)\frac{p_2 + p_1}{2(p_2 - p_1)}.$$

Окончательно уравнение изменения энергии вещества при сжатии УВ примет вид:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(v_1 - v_2).$$
 (3.7)

Уравнение (3.7) также называют *адиабатой Гюгонио*. Его можно записать в другом виде, используя определение энтальпии  $h = \varepsilon + pv$ :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(v_1 + v_2).$$
 (3.8)

Поскольку число неизвестных на два больше, чем имеющихся уравнений, необходимо знать УрС в рассматриваемом диапазоне амплитуд УВ. Удобно его использовать в виде:

$$p = p(\rho, \varepsilon). \tag{3.9}$$

Система четырех уравнений (3.1), (3.2), (3.7), (3.9) связывает пять параметров  $p_2$ ,  $u_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\varepsilon_2$ , D на фронте УВ. Для того чтобы решить эту систему, достаточно задать один параметр (любой из пяти, например,  $p_2$  или D) тогда остальные определяются при помощи этой системы. Необходимо подчеркнуть, что по измеренным в эксперименте кинематическим параметрам D и  $u_2$  с помощью этой системы уравнений можно рассчитать термодинамические параметры среды  $\rho_2$ ,  $p_2$ ,  $\varepsilon_2$ , а если известен термический УрС, также  $T_2$ ,  $S_2$ .

В случае политропного газа система уравнений, связывающих параметры газа (без учёта процессов диссоциации и ионизации) на фронте УВ, значительно упрощается. Первые два уравнения, (3.1) и (3.2), выражающие закон сохранения массы и закон сохранения импульса, остаются без изменения. Уравнение (3.9) для политропного газа имеет вид

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho(k-1)}.\tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в соотношение для энергии (3.7) получим систему законов сохранения на ударно-волновом разрыве в политропном газе:

$$\rho_1 D = \rho_2 (D - u_2),$$
  

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_2 D,$$
  

$$\frac{p_2}{\rho_2 (k - 1)} - \frac{p_1}{\rho_1 (k - 1)} = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right).$$
 (3.11)

Температура за фронтом УВ рассчитывается по УрС вида  $p = p(\rho,T)$ , которым для идеального газа является  $p = \rho RT \Rightarrow T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R}$ .

Ударной адиабатой (УА) называется зависимость между двумя параметрами среды за ударной волной:  $p_2 = p(\rho_2), D = D(u_2),$  $p_2 = p(u_2)$  и т. д. Если из уравнения (3.7) с помощью УрС (3.9) исключить внутреннюю энергию  $\varepsilon_2$ , то получим функцию вида  $p_2 = p(\rho_2, p_1, \rho_1)$ , которая будет одним из выражений ударной адиабаты. График этой функции представляет собой геометрическое место точек возможных состояний за фронтом УВ в координатах  $\rho$ , p. Каждой паре  $\rho_1$  и  $p_1$ , определяющих начальное состояние или состояние перед УВ, соответствует своя ударная адиабата.

Рассмотрим на примере политропного газа ряд свойств УВ, справедливых и для конденсированных сред.

После необходимых преобразований выражение (3.11) можно привести к виду

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)v_1 - (k-1)v_2}{(k+1)v_2 - (k-1)v_1}$$
(3.12)

или для отношения плотностей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}.$$
(3.13)

Из уравнения (3.13) видно, что при бесконечном увеличении давления  $p_2$  за фронтом ударной волны (случай очень большой амплитуды УВ) плотность газа не увеличивается беспредельно, а стремится к определённому предельному значению. Это предельное значение легко вычислить, если в уравнении ударной адиабаты(3.13) сделать следующие преобразования:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1) + (k-1)\frac{p_1}{p_2}}{(k-1) + (k+1)\frac{p_1}{p_2}}.$$
(3.14)

При  $p_2 \to \infty$  правая часть (3.14) стремится к пределу:

$$\lim_{p_2 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}.$$
 (3.15)

Такми образом при однократном ударном сжатии совершенного газа предельная плотность равна:

$$\rho_{\rm np} = \frac{k+1}{k-1} \rho_1. \tag{3.16}$$

На рис. 3.5 показаны ударная адиабата и изоэнтропа совершенного двухатомного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Штриховой линией показана асимптота предельного сжатия в УВ. Точками показана ударная адиабата воздуха, полученная экспериментально. Видно, что до сжатий  $\frac{\rho}{\rho_0} \approx 4.6$  воздух можно описывать с помощью УрС совершенного двухатомного газа. Как видно из уравнения изоэнтропы политропного газа:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k,\tag{3.17}$$

при изоэнтропическом процессе сжатии его можно сжимать без ограничений на величину сжатия.

Представим, что политропный газ из состояния ( $\rho_1=1, p_1=1$ ) сжат УВ до плотности  $\rho_2$ , близкой к предельной  $\rho_{np1}$ ; давление газа при этом будет иметь некоторое значение  $p_2$  (точка A на рис. 3.6). По этому газу пускается вторая сильная УВ. Ударную адиабату для состояний за второй УВ можно записать следующим образом:

$$\frac{\rho_3}{\rho_{\rm np1}} = \frac{(k+1)p_3 + (k-1)p_3}{(k-1)p_3 + (k+1)p_2}.$$
(3.18)

Предельное сжатие во второй УВ  $(p_3 \rightarrow \infty)$  будет равно:

$$\rho_{\pi p2} = \frac{k+1}{k-1} \rho_{\pi p1} = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 \rho_1.$$
(3.19)



Рис. 3.5.

Рис. 3.6.

На самом деле предельное сжатие за второй УВ будет ещё меньше, т. к. оно происходит из состояния с плотностью  $\rho_2 < \rho_{\rm np1}$ . Обе границы предельного сжатия во второй УВ показаны на рис. 3.6 штриховыми линиями.

Если распространить наши рассуждения на случай n-кратного ударного сжатия, то мы получим выражение для предельного сжатия в случае прохождения по газу n последовательных УВ:

$$\rho_{\mathrm{np}n} = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^n \rho_1. \tag{3.20}$$

На рис. 3.6 также для примера показана ударная адиабата состояний за третьей УВ, которая выходит из некоторой произвольной точки *B*, лежащей на ударной адиабате двойного ударно-волнового сжатия.

Как пример, двойное ударное сжатие всегда осуществляется при отражении УВ от жёсткой стенки. При сжатии вещества в двух УВ вторая из них распространяется по движущемуся веществу. Возможны и другие случаи распространения УВ по движущемуся веществу. В таких случаях в законах сохранения массы (3.1) и импульса (3.2) необходимо учитывать скорость вещества перед УВ:

$$\rho_1(D - u_1) = \rho_2(D - u_2), \qquad (3.21)$$

$$p_1 + \rho_1 (D - u_1)^2 = p_2 + \rho_2 (D - u_2)^2.$$
 (3.22)

Исключая из уравнений (3.21) скорость УВ *D*, получим следующее соотношение для массовой скорости за УВ:

$$u_2 - u_1 = \sqrt{(p_2 - p_1)(v_1 - v_2)}.$$
(3.23)

В сильной ударной волне значительно повышается температура и внутренняя энергия среды. Это приводит к тому, что твёрдое вещество за фронтом ударной волны может находиться в другом фазовом состоянии. В газах мощная УВ может приводить к диссоциации молекул или ионизации атомов. Например, в воздухе процессы диссоциации до T=1300 К малы, и ими можно пренебречь. Заметный процесс диссоциации, т. е. распад молекул кислорода  $O_2$  и азота  $N_2$  на атомы, начинается с 2000 К (при нормальном давлении) и практически заканчивается при 6000 К. Заметная ионизации воздуха начинается при 6000 К, при этом происходит отрыв внешних электронов у атомов.

Такое поведение реальных сред приводит к тому, что параметры уравнения состояния вещества перед фронтом УВ и за ним отличаются, т. е. можно сказать, что это уравнения состояния двух разных веществ. Например, показатель адиабаты в уравнении состояния совершенного газа перед фронтом мощной УВ и за ней в случае воздуха будет отличаться. Предельное сжатие политропного газа в УВ зависит от показателя адиабаты. Для одноатомного газа k = 5/3 предельное сжатие  $\rho_{np}/\rho_0 = 4$ , для двухатомного газа k = 7/5,  $\rho_{np}/\rho_0 = 6$ , для ионизированного и диссоциированного воздуха k = 1.2,  $\rho_{np}/\rho_0 = 11$ .

Для определения температуры ударно-сжатого идеального газа необходимо воспользоваться его УрС

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1},$$
 (3.24)

где параметры с индексом 1 соответствуют состоянию перед УВ, а с индексом 2 – за УВ в ударно-сжатом состоянии.

Для изоэнтропического сжатия политропного газа

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \pi^{\frac{1}{k}},$$
$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_S = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2}{p_1} = \pi^{-\frac{1}{k}} \pi = \pi^{\frac{k-1}{k}}.$$
(3.25)

Для ударно-волнового сжатия политропного газа

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\rm VB} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2}{p_1} = \pi \frac{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}{(k+1)p_2 + (k-1)p_1} \xrightarrow{p_2 \to \infty} \pi \frac{k+1}{k-1} > \pi^{\frac{k-1}{k}}.$$
(3.26)

Из (3.26) видно, что с ростом амплитуды волны  $p_2$  температура при ударно-волновом сжатии растёт быстрее чем при изоэнтропическом.

### 3.2 Энтропия ударного сжатия

Рассмотрим, что происходит с энтропией политропного газа при сжатии его ударной волной. Для политропного газа энтропия с точностью до константы равна

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^k}.\tag{3.27}$$

Разность энтропий по обе стороны УВ с помощью формулы (3.13) можно представить в виде:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2 \rho_1^k}{p_1 \rho_2^k} = c_v \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{(k-1)\frac{p_2}{p_1} + (k+1)}{(k+1)\frac{p_2}{p_1} + (k-1)} \right)^k \right].$$
 (3.28)

В предельном случае слабой волны  $(p_2 \approx p_1)$  выражение в фигурных скобках близко к единице и  $s_2 \approx s_1$ . При возрастании амплитуды

волны, т. е. при увеличении отношения  $p_2/p_1$  начиная от единицы, выражение в фигурных скобках, как легко проверить, монотонно растет, стремясь к бесконечности при  $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ . Таким образом, энтропия газа, испытывающего ударное сжатие, возрастает, причем тем сильнее, чем выше амплитуда УВ.

Возрастание энтропии свидетельствует о том, что в УВ происходят необратимые диссипативные процессы, связанные с существованием вязкости и теплопроводности вещества. Теория, в которой эти процессы не учитываются, естественно, не может описать сам механизм ударного сжатия, структуру того тонкого, но в действительности конечного слоя, в котором происходит переход вещества из начального состояния в конечное. Именно поэтому в теории, где вязкость и теплопроводность не приняты во внимание, ударный разрыв представляется математической поверхностью с нулевой толщиной. В такой теории нет характерной длины, которая могла бы послужить масштабом для толщины разрыва. При учете молекулярной структуры газа, т. е. процессов вязкости и теплопроводности, такой масштаб появляется. В случае газа это – длина свободного пробега молекул, которой пропорциональны коэффициенты вязкости и теплопроводности и которая в действительности служит мерой реальной ширины разрыва.

Существенно, однако, что сама величина возрастания энтропии при ударном сжатии совершенно не зависит от механизма диссипации и определяется исключительно законами сохранения массы, импульса и энергии. От механизма диссипации зависит только ширина разрыва, т. е. скорость, с которой происходит необратимое нагревание газа, испытывающего ударное сжатие. Так, стакан горячей воды непременно остывает до вполне определенной, комнатной температуры, совершенно независимо от механизма теплообмена с окружающей средой, которым определяется лишь скорость остывания.

От механизма диссипации зависят величины градиентов газодинамических величин в переходном слое, но не скачки этих величин между конечным и начальным состояниями, которые определяются только законами сохранения. Например, если  $\Delta p = p_2 - p_1$  есть скачок давления в УВ, а  $\Delta x$  – ширина переходного слоя, то при изменении коэффициентов вязкости и теплопроводности меняются  $\Delta x$  и  $dp/dx \sim \Delta p/\Delta x$ , но произведение  $\Delta x \cdot \Delta p/\Delta x \approx \Delta p$  остается неизменным. В пределе, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности и теплопроводности устремляются к нулю,  $\Delta x \rightarrow 0$ , а  $\Delta p/\Delta x \sim 1/\Delta x \rightarrow \infty$ , градиенты становятся бесконечными, что и соответствует разрыву.

Дифференциальные уравнения газовой динамики без учета вязкости и теплопроводности лишь допускают возможность существования разрывов, но не могут описать непрерывным образом переход из начального в конечное состояние, ибо в уравнениях автоматически заложено условие адиабатичности процесса dS/dt = 0, эквивалентное уравнению энергии. Дифференциальные уравнения содержат четыре закона сохранения: массы, импульса, энергии и энтропии, тогда как на разрыве выполняются только три из них, все, кроме закона сохранения энтропии.

На основе (3.28) можно показать, что давление ударно волнового сжатия  $p_H$  больше, чем давление изоэнтропического сжатия  $p_S$ , соответствующее одной и той же величине сжатия  $\delta = \rho_2/\rho_1$ :

$$p_H = p_1 \delta^k \exp\left(\frac{s_2 - s_1}{c_v}\right) > p_S = p_1 \delta^k.$$
(3.29)

## 3.3 Геометрическая интерпретация закономерностей ударного сжатия

Проведем на плоскости p-v через точку A начального состояния вещества  $p_0$ ,  $v_0$  ударную адиабату HH (рис. 3.7). Будем считать, что характер этой кривой аналогичен ударной адиабате совершенного газа, т.е. что кривая везде обращена выпуклостью вниз; вторая производная  $d^2p/dv^2$  в каждой точке положительна. В целях наглядности мы будем иллюстрировать некоторые положения конкретными вычислениями на примере идеального газа с



Рис. 3.7.

постоянной теплоемкостью, однако можно показать, что закономерности являются общими и справедливы для веществ с другими термодинамическими свойствами. Единственное условие, которое накладывается на эти свойства, — это чтобы ударная адиабата во всех точках была обращена выпуклостью вниз. Пусть вещество после ударного сжатия из состояния  $A(p_0, v_0)$  переходит в состояние  $B(p_1, v_1)$ , изображаемое точкой B, лежащей на ударной адиабате.

Скорость распространения УВ по невозмущенному веществу дается выражением (3.5). Графически эта скорость определяется наклоном прямой AB, проведенной из начального состояния в конечное (отношение  $(p_1 - p_0)/(v_0 - v_1)$  равно тангенсу угла наклона прямой). На рис. 3.7 видно, что чем выше конечное давление (чем мощнее ударная волна), тем больше наклон прямой и тем больше скорость волны (для иллюстрации на рис. 3.7 проведены две прямые, AB и AC).

Посмотрим, чем определяется начальный наклон ударной адиабаты в точке A. Вычислим производную dp/dv с помощью формулы (3.12) для политропного газа:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{(k-1)p_0}{(k+1)v - (k-1)v_0} - \frac{p_0(k+1)[(k+1)v_0 - (k-1)v]}{[(k+1)v - (k-1)v_0]^2}.$$
 (3.30)

Взяв производную в точке A, т. е. положив  $v = v_0$ , получим  $(dp/dv)_0 = -kp_0/v_0$ . Но эта величина есть не что иное, как наклон изоэнтропы (или адиабаты Пуассона), проходящей через точку A. Таким образом, в точке A ударная адиабата касается изоэнтропы, проходящей через эту точку. Изоэнтропа PP, соответствующая начальной энтропии газа  $s_0 = (p_0, v_0)$ , также проведена на рис. 3.7.

Касание адиабат в начальной точке иллюстрируется и общей формулой (3.5) для скорости ударной волны. В пределе слабой волны, когда  $(p_1 - p_0)/p_0 \rightarrow 0$ , ударная волна не отличается от звуковой, изменение энтропии стремится к нулю и скорость волны D совпадает со скоростью звука:

$$D^2 = v_0^2 \frac{p_1 - p_0}{v_0 - v_1} \xrightarrow{p_1 \to p_0} -v_0^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta v}\right)_S \to -v_0^2 \left(\frac{dp}{dv}\right)_S = c_0^2.$$
(3.31)

Для любого  $p_1 > p_0$  наклон прямой AB всегда больше наклона касательной к VA в точке A, так что всегда  $D > c_0$ . Для состояния за VB, например, в точке B, наоборот, наклон касательной к VA больше, чем наклон AB, поэтому для состояния за VB всегда  $D < c_1$ . То есть скорость VB D сверхзвуковая по отношению к веществу перед VB и дозвуковая по отношению к веществу за ней.

Начальный наклон ударной адиабаты определяется скоростью звука в исходном состоянии. Непосредственным вычислением по формулам для политропного газа можно убедиться в том, что в точке A совпадают не только первые, но и вторые производные от адиабат Гюгонио и Пуассона, т. е. в точке A имеет место касание второго порядка. Это положение также является общим. На этом основании при умеренных нагрузках в случае слабо сжимаемых веществ (металлы) изоэнтропу можно с достаточной точностью заменять ударной адиабатой. В случае сильных сжатий (в газах даже при небольших нагрузках) это приближение даст существенную ошибку.



Приращение удельной внутренней энергии при ударном сжатии  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$  от состояния A до состояния B, как видно из выражения закона сохранения энергии (3.7), численно равно площади трапеции MABN, покрытой на рис. 3.8 горизонтальной штриховкой.

Если газ сжать адиабатически из состояния A до того же самого объема  $v_1$  (до состояния Q), то для этого нужно совершить работу, численно равную площади фигуры MAQN, ограниченной сверху изоэнтропой P и заштрихованной вертикально. Эта площадь дает и приращение внутренней энергии газа:

$$\varepsilon' - \varepsilon_0 = -\int_{v_0}^{v_1} p dv \tag{3.32}$$

(интегрирование ведется при  $s = s_0$ ). Для того чтобы привести газ в конечное состояние B, необходимо его еще нагреть при постоянном объеме  $v_1$ , сообщив ему количество тепла, численно равное разности площадей, заштрихованных горизонтально и вертикально, т. е. равное площади фигуры AQB. Эта площадь и определяет вырастание энтропии газа при ударном сжатии. Она равна

$$\varepsilon_1 - \varepsilon' = \int_{s_0}^{s_1} T ds. \tag{3.33}$$

В системе координат, в которой исходный газ покоится, он после сжатия приобретает кинетическую энергию (на 1 г), равную согласно общей формуле (3.6)

$$\frac{u_1^2}{2} = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(v_0 - v_1).$$
(3.34)

Эта энергия численно равна площади треугольника ABC на рис. 3.8, дополняющего трапецию MABN, площадь которой соответствует  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ , до прямоугольника MCBN. Площадь этого прямоугольника  $p_1(v_0 - v_1)$  представляет собой полную энергию, сообщенную «поршнем» одному грамму первоначально покоящегося газа. В сильной ударной волне, когда  $p_1 \gg p_0$ , она поровну делится между приращениями внутренней и кинетической энергий: площадь  $MABN \approx ABC$ :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \approx \frac{u_1^2}{2} \approx \frac{1}{2} p_1 (v_0 - v_1).$$
(3.35)

Ранее отмечалось, что, в отличие от изоэнтропы, ударная адиабата зависит от двух параметров. Благодаря этому нельзя путем сжатия газа несколькими ударными волнами, исходя из данного начального состояния, прийти к тому же самому конечном состоянию, что и путем сжатия одной волной.

Так, например, если пропустить по одноатомному газу сильную ударную волну, газ сожмётся в четыре раза, а если пропустить одну за другой две сильные УВ, оставляя неизменным конечное давление, получим сжатие в 16 раз.

В то же время, разбивая адиабатический процесс на сколько угодно этапов, придем к одной и той же плотности, если задано конечное давление. Это положение иллюстрируется диаграммой *p-v* 



Рис. 3.9.

рис. 3.9, где изображены адиабата Пуассона  $P_S$  и несколько адиабат Гюгонио  $H_0, H_B, H_C$ , отвечающих сжатию газа последовательными ударными волнами.

### 3.4 Невозможность существования ударной волны разрежения в веществе с нормальными свойствами

Рассмотрим УВ малой амплитуды, в которой скачки всех параметров можно рассматривать как малые величины. Выбирая за независимые переменные удельную энтропию и удельный объём, можно записать приращение удельной внутренней энергии в ударной волне в виде разложения по малым приращениям независимых переменных около точки начального состояния:

$$\varepsilon_{1} - \varepsilon_{0} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_{v} (s_{1} - s_{0}) + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)_{s} (v_{1} - v_{0}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial v^{2}}\right)_{s} (v_{1} - v_{0})^{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^{3}\varepsilon}{\partial v^{3}}\right)_{s} (v_{1} - v_{0})^{3} + \dots \quad (3.36)$$

Все производные в этом разложении берутся в точке начального состояния  $v_0, s_0$ . Как мы сейчас увидим, приращение энтропии в волне  $s_1 - s_0$  есть величина третьего порядка малости, если рассматривать приращение  $v_1 - v_0$  как малую первого порядка. Поэтому, ограничиваясь разложением внутренней энергии до величин третьего порядка, можно опустить члены, пропорциональные  $(s_1 - s_0)(v_1 - v_0)$ ,  $(s - s_0)^3$  и т. д.

Согласно термодинамическому тождеству  $d\varepsilon = Tds - pdv$ ,

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_v = T, \ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)_s = -p.$$
 (3.37)

Учитывая (3.37), запишем разложение (3.36) в виде

$$\varepsilon_{1} - \varepsilon_{0} = T_{0}(s_{1} - s_{0}) - p_{0}(v_{1} - v_{0}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s} (v_{1} - v_{0})^{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^{2} p}{\partial v^{2}}\right)_{s} (v_{1} - v_{0})^{3}.$$
 (3.38)

Подстаим (3.38) в закон сохранения энергии на УВ (3.7), предварительно также сделав разложение давления в ряд Тэйлора (слагаемые с  $s_1 - s_0$  при этом можно опустить, т. к. при подстановке в (3.7) они дадут  $(s_1 - s_0)(v_1 - v_0)$ ):

$$p_1 = p_0 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s (v_1 - v_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s (v_1 - v_0)^2.$$
(3.39)

Производя сокращения после подстановки в (3.7), получим связь приращения энтропии с приращением объема в слабой УВ:

$$\Delta s = s_1 - s_0 = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s (v_0 - v_1)^3.$$
(3.40)

Аналогичные действия можно было бы проделать используя вместо внутренней энергии энтальпию и закон сохранения энергии в виде (3.8). В этом случае мы бы получили следующее выражение для энтропии:

$$\Delta s = s_1 - s_0 = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s (p_1 - p_0)^3.$$
(3.41)



Из формул (3.40) и (3.41) видно, что знак приращения энтропии в УВ определяется знаками вторых производных  $(\partial^2 p/\partial^2 v)_s$  или  $(\partial^2 v/\partial^2 p)_s$ . Если адиабатическая сжимаемость вещества  $(\partial v/\partial p)_s$ уменьшается с увеличением давления, т. е.  $(\partial^2 p/\partial^2 v)_s > 0$  и  $(\partial^2 v/\partial^2 p)_s > 0$ , изоэнтропа на плоскости p, v изображается кривой, обращенной выпуклостью вниз (как в политропном газе). В этом случае энтропия растет  $(s_1 > s_0)$  в ударной волне сжатия, когда  $p_1 > p_0$ ,  $v_1 < v_0$ , и уменьшается в ударной волне разрежения (рис. 3.10). Если же  $(\partial^2 p/\partial^2 v)_s < 0$  и  $(\partial^2 v/\partial^2 p)_s < 0$ , положение обратное: энтропия растет в ударной волне разрежения, когда  $p_1 < p_0$ ,  $v_1 > v_0$ , и уменьшается в ударной волне сжатия (рис. 3.11). Поскольку для подавляющего большинства реальных веществ  $(\partial^2 v/\partial^2 p)_s > 0$ , то из условия невозможности уменьшения энтропии в адиабатической системе и следует невозможность существования ударных волн разрежения.

#### 3.5 Распад произвольного разрыва

Возникновение градиентной катастрофы в неравномерных движениях газа является скорее правилом, чем исключением. В момент наступления градиентной катастрофы основные величины становятся разрывными и при дальнейшем продолжении движение будет содержать сильные разрывы. Тем самым возникает необходимость изучить и описать обобщенные движения газа, определяемые разрывными начальными данными.

Простейшая из такого сорта задач — когда в начальных данных имеется всего одна точка разрыва основных величин, которые по обе стороны от точки разрыва постоянны, различны и не связаны априори никакими соотношениями. В связи с тем, что сложное движение, возникающее из таких начальных данных, содержит несколько распространяющихся в разные стороны сильных и слабых разрывов, эта задача получила название задачи о распаде произвольного разрыва.

Постановка задачи. Для уравнений одномерного движения газа с плоскими волнами задаются начальные данные вида

$$u(x,0) = u_1, \ \rho(x,0) = \rho_1, \ p(x,0) = p_1, \ (x<0); u(x,0) = u_2, \ \rho(x,0) = \rho_2, \ p(x,0) = p_2, \ (x \ge 0),$$
(3.42)

где  $u_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p_1$ ,  $u_2$ ,  $\rho_2$ ,  $p_2$  – заданные постоянные. При этом допускается, что газ в состоянии 1 (x < 0) и газ в состоянии 2 ( $x \ge 0$ ) имеют различную физическую природу, т. е. разные уравнения состояния. Требуется найти решение при t>0.

На поверхности разрывов, которые могут существовать в качестве устойчивых образований, должны соблюдаться определенные соотношения (3.21), (3.7). Поэтому очевидно, что в случае, если в начальном разрыве эти необходимые условия не выполнены, он не может существовать как таковой и должен распадаться на несколько разрывов, которые с течением времени будут отходить друг от друга. Общее исследование вопроса о поведении распада разрыва



Рис. 3.12.

было дано Н.Е. Кочиным и излагается в курсах механики сплошной среды (см., например, §93 книги [19]).

Известно, что решение задачи (3.42) автомодельно и имеет вид:

$$u = u(\lambda), \ \rho = \rho(\lambda), \ p = p(\lambda), \ \lambda = \frac{x}{t}.$$
 (3.43)

Согласно (3.43) распределения основных величин по пространству (по координате x) в любой момент времени t>0 получаются из одного такого распределения при t=1 простым изменением масштаба по оси x (растяжением координаты x). Так как в решении вида (3.43) основные величины постоянны вдоль каждого луча  $\lambda = const$ , то его изображение на плоскости событий (x, t) должно состоять из секторов с вершиной в начале координат, определяемых неравенствами вида  $\lambda_i < \lambda < \lambda_j$ , внутри которых движение гладкое, а границы представляют собой линии сильного или слабого разрывов. При этом, если гладкое движение в некотором секторе не постоянно, то оно должно быть простой волной – центрированной (в точке (0, 0)) простой волной разрежения. Один из возможных типов решения показан на рис. 3.12.

Метод (u, p)-диаграмм. При решении задачи о распаде разрыва используется специальный метод построения и анализа так называемых (u, p)-диаграмм как для простых, так и для ударных



волн. Эти диаграммы описывают состояния движения (u, p), в которые может перейти данное состояние движения  $(u_0, p_0)$  в результате прохождения какой-либо волны, в предположении, что фиксировано также некоторое значение энтропии  $S_0$ . При этом плоскость (u, p) называется плоскостью состояний движения.

(u, p)-диаграммой простых волн, с центром  $(u_0, p_0)$  называется геометрическое место точек плоскости состояний движения, изображающих всевозможные состояния (u, p) за простыми волнами, имеющими состояние  $(u_0, p_0)$  перед волной. Поскольку в области простой волны один из инвариантов Римана остаётся постоянным во всей области, то в общем случае уравнение (u, p)-диаграммы простых волн с центром  $(u_0, p_0)$  имеет вид:

$$u - \Phi(p) = u_0 - \Phi(p_0)$$
 для правой волны, (3.44)

$$u + \Phi(p) = u_0 + \Phi(p_0)$$
 для левой волны, (3.45)

где  $\Phi$  определяется выражением (2.32), а в случае политропного газа выражениями (2.34) и (2.35).

Полная (u, p)-диаграмма простых волн показана на рис. 3.13. Ветви, на которых  $p > p_0$ , соответствуют волнам сжатия, а ветви, на которых  $p < p_0$ , – волнам разрежения. Эта диаграмма симметрична относительно прямой  $u = u_0$ . (u, p)-диаграммой ударных волн с центром  $(u_0, p_0)$  называется геометрическое место точек плоскости состояний движения, изображающих всевозможные состояния (u, p), в которые состояние  $(u_0, p_0)$  (при заданном значении энтропии  $S_0$ ) может перейти в ударных волнах. При этом не предполагается, что состояние  $(u_0, p_0)$  находится перед волной.

Уравнения (u, p)-диаграммы ударных волн вытекают из уравнения: (3.23)

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(v_0 - v).$$
(3.46)

и уравнения ударной адиабаты с центром ( $v_0, p_0$ ):

$$v = v(p; v_0, p_0).$$
 (3.47)

Подстановка (3.47) в (3.46) и даёт (u, p)-диаграммы ударных волн

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(v_0 - v(p; v_0, p_0)).$$
(3.48)

Входящая сюда величина  $v_0$  однозначно определяется значением  $p_0$  из уравнения состояния  $p_0 = p(v_0, S_0)$ , так как значение  $S_0$  предполагается известным. Необходимо иметь в виду, что (u, p)-диаграммы простых волн и ударных волн с данным центром  $(u_0, p_0)$  меняются при изменении энтропии  $S_0$  (или удельного объема  $v_0$ ).

Из (3.48) видно, что (u, p)-диаграмма ударных волн симметрична относительно прямой  $u = u_0$ . Дифференцированием выражений (3.44), (3.45) и (3.46) можно показать, что (u, p)-диаграммы простых волн и ударных волн с общим центром  $(u_0, p_0)$  имеют в точке  $(u_0, p_0)$  одинаковый наклон (1-ю производную) и одинаковую кривизну (2-ю производную), т. е. имеют касание второго порядка. Первая производная du/dp в центре  $(u_0, p_0)$  имеет два значения, отличающихся знаком:

$$\left. \frac{du}{dp} \right|_0 = \pm \frac{1}{\rho_0 c_0}.\tag{3.49}$$



Рис. 3.14.

Поэтому (u, p)-диаграмма (3.48) состоит из двух ветвей, пересекающихся в её центре под конечным углом. Полная (u, p)-диаграмма ударных волн показана на рис. 3.14.

В политропном газе функция (3.47) имеет вид:

$$v = v_0 \frac{(k-1)p + (k+1)p_0}{(k+1)p + (k-1)p_0}.$$
(3.50)

Поэтому в нём (u, p)-диаграмма ударных волн описывается уравнениями для каждой из ветвей

$$u = u_0 \pm (p - p_0) \sqrt{\frac{2v_0}{(k+1)p + (k-1)p_0}}.$$
 (3.51)

где знак «+» берется для волн, обращенных вправо, и знак «-» для волн, обращенных влево.

В некоторой окрестности полуоси x<0 решение постоянно:  $u = u_1, \rho = \rho_1, p = p_1$ . Это решение может измениться либо непрерывным образом в некоторой центрированной левой простой волне разрежения, либо через ударную волну, обращенную влево. Этим изменениям соответствуют (u, p)-диаграммы, состоящие из правой нижней ветви на рис. 3.13 и левой верхней ветви на рис. 3.14. Их



Рис. 3.16.

совмещение на одном чертеже дает (u, p)-диаграмму возможных состояний, в которые может перейти состояние «1» (рис. 3.15). Аналогично строится (u, p)-диаграмма возможных состояний, в которые может перейти состояние «2» посредством волн, обращенных вправо (рис. 3.16). Если обе эти диаграммы совместить на одном чертеже, то они обязательно пересекутся, и притом только в одной точке.

Утверждается, что точка пересечения  $(u_3, p_3)$  дает решение. Действительно, оба газа после переходов 1-3 или 2-3 имеют в состоянии «3» одинаковые скорость  $u_3$  и давление  $p_3$ . Поэтому их можно связать контактным разрывом, идущим по лучу  $x = u_3 t$ , вдоль которого могут претерпевать разрыв плотность *р* и энтропия *s*. Полный перечень всех 10 возможных типов конфигураций распада произвольного разрыва дан на рис. 3.17-3.26, где пунктиром на поскости (x,t) показана траектория контактного разрыва.

Фактически расчет распада разрыва выполняется с помощью уравнений (u,p)-диаграмм (3.44), (3.45) и (3.48). С этой целью рассматриваются функции, описывающие соответствующие ветви (u,p)-диаграмм: для переходов из состояния «1» (рис. 3.15):

$$u_{13}(p) = \begin{cases} u_1 + \Phi(p, v_1) - \Phi(p_1, v_1), & (p < p_1), \\ u_1 - \sqrt{(p - p_1)(v_1 - v(p; v_1, p_1))}, & (p \ge p_1), \end{cases}$$
(3.52)





и для переходов из состояния «2» (рис. 3.16):

$$u_{23}(p) = \begin{cases} u_2 - \Phi(p, v_2) + \Phi(p_2, v_2), & (p < p_2), \\ u_2 + \sqrt{(p - p_2)(v_2 - v(p; v_2, p_2))}, & (p \ge p_2). \end{cases}$$
(3.53)

Тогда значение *p* = *p*<sub>3</sub> определяется как единственный корень уравнения:

$$u_{13}(p) = u_{23}(p), (3.54)$$

после чего находится величина  $u_3 = u_{13}(p_3)$ .

Акустическое приближение. Метод (u,p)-диаграмм применим для анализа и решения многих конкретных задач с сильными разрывами. При относительно небольших значениях скачков u,  $\rho$ , pна практике успешно используется акустическое приближение. Оно состоит в том, что кривая (u,p)-диаграммы заменяется прямой — касательной к ней в ее центре. При этом важно, что (u,p)-диаграммы простых и ударных волн касаются друг друга, в силу чего угловой коэффициент аппроксимирующих прямых одинаков для обоих типов волн. В акустическом приближении с величиной *динамического импеданса*  $h = \rho c$  уравнения (u,p)-диаграмм с центром  $(u_0, p_0)$  записываются в следующем виде: для волн, обращенных вправо:

$$p - h_0 u = p_0 - h_0 u_0, (3.55)$$

и для волн, обращенных влево:

$$p + h_0 u = p_0 + h_0 u_0, \tag{3.56}$$

где  $h_0 = \rho_0 c_0$  есть значение импеданса в центре (u, p)-диаграммы.

# 3.6 Примеры расчета распадов произвольного разрыва

Работа ударной трубы. Два покоящихся газа разделены заслонкой в сечении x = 0. Газ 1 с параметрами  $\rho_1$ ,  $p_1$  находится под



Рис. 3.27.



высоким давлением, а газ 2 с параметрами  $\rho_2$ ,  $p_2$  – под низким, так что  $p_1 > p_2$  (рис. 3.27). В момент времени t = 0 заслонка мгновенно убирается. Требуется описать последующее движение газов и дать расчет его параметров для t > 0.

В этой постановке задача об ударной трубе является частным случаем задачи о распаде произвольного разрыва. Соответствующие (u,p)-диаграмма и возникающая на плоскости событий конфигурация волн показаны на рис. 3.28 и рис. 3.29. Расчет должен дать скорость ударной волны D, идущей по газу низкого давления, скорость  $u_3$  и давление  $p_3$  в постоянном потоке за этой ударной волной, а также плотности газов  $\rho'_3$ ,  $\rho''_3$  в этой области по разные стороны контактного разрыва.



Согласно (u,p)-диаграмме на рис. 3.28 точка  $(u_3,p_3)$  находится в результате решения системы уравнений

$$u_3 + \Phi(p_3) = \Phi(p_1), \qquad (3.57)$$

$$u_3 = \sqrt{(p_3 - p_2)(v_2 - v(p_3; v_2, p_2))}.$$
(3.58)

Затем по изоэнтропе для состояния 1 определяется удельный объем  $v'_3$  и по ударной адиабате с центром  $(v_2, p_2)$  – удельный объем  $v''_3$ . Скорость ударной волны находится с помощью закона сохранения массы.

Задача о поршне. В сечении x = 0 труба перекрыта поршнем, справа от которого находится покоящийся газ с параметрами  $\rho_1$ ,  $p_1$ (рис. 3.30). В момент времени t = 0 поршень начинает двигаться с постоянной скоростью U. Требуется описать последующее движение и дать расчет его параметров для t > 0.

Эта задача, в отличие от предыдущей, является задачей с граничным условием, так как скорость частиц газа, прилегающих к поршню, должна быть равна скорости поршня. Как уже ранее было сказано, задача является автомодельной.

Так как переход из состояния 1 в 2 должен осуществляться волнами, обращенными вправо, то (u,p)-диаграмма этого перехода будет такой же, как на рис. 3.31.



Характер возникающего движения определяется знаком величины U. Если U > 0 (поршень движется в сторону газа), то в газ идет опережающая поршень ударная волна, за которой образуется область постоянного движения газа со скоростью, равной скорости поршня U. Если же U < 0 (поршень выдвигается, отходя от газа), то газ переводится из состояния покоя в состояние постоянного движения со скоростью поршня посредством центрированной волны разрежения. Плоскость событий для обоих вариантов показана на рис. 3.32 и рис. 3.33.

Для расчета первого варианта используется уравнение (u,p)-диаграммы ударных волн, в котором надо положить  $u_0 = 0$ , u = U,  $(v_0,p_0) = (v_1,p_1)$  и рассматривать его как уравнение для  $p = p_2 > p_1$ :

$$U^{2} = (p_{2} - p_{1})(v_{1} - v(p_{2}; v_{1}, p_{1})), (p_{2} > p_{1}).$$
(3.59)

Удельный объём  $v_2$  определяется с помощью ударной адиабаты  $v = v(p; v_1, p_1)$ , скорость УВ – из закона сохранения массы.

Для расчета второго варианта используется уравнение (u,p)-диаграммы простой волны, здесь принимающее вид

$$\Phi(p_2) = \Phi(p_1) + U, \ (U < 0). \tag{3.60}$$

Если скорость поршня |U| достаточно велика, то, как это видно на (u,p)-диаграмме рис. 3.31, поршень оторвется от газа. Движение газа будет таким же, как при истечении в вакуум. Максимально возможная скорость поршня, не теряющего контакта с газом, равна

$$U_m = -\Phi(p_1).$$
 (3.61)

Отражение ударной волны от жесткой стенки. По трубе, заполненной покоящимся газом с параметрами  $\rho_1$ ,  $p_1$  и закрытой справа (в сечении x = 0) жесткой стенкой, идет ударная волна, перемещающаяся слева направо с постоянной скоростью D (рис. 3.34). В момент времени t = 0 ударная волна достигает закрытого конца. Требуется описать и рассчитать движение газа для t > 0.



Рис. 3.34.

Это также задача с граничным условием. Предположение о наличии жесткой стенки означает, что на ней должно быть выполнено условие

$$u(0,t) = 0. (3.62)$$

Здесь в состоянии 2 за ударной волной можно считать известными все основные величины, т. е.  $u_2$ ,  $\rho_2$ ,  $p_2$ . Поэтому для t > 0 снова получается автомодельная краевая задача. (u, p)-диаграмма и конфигурация на плоскости событий будут такими, как показано на рис. 3.35 и рис. 3.36. Характерными элементами решения являются падающая на стенку и отраженная от стенки ударные волны.

В падающей волне

$$u_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(v_1 - v_2)},$$



Рис. 3.36.

в отраженной волне

$$u_3 - u_2 = -\sqrt{(p_3 - p_2)(v_2 - v_3)}.$$

В силу условия (3.62), означающего, что в граничной с жесткой стенкой области 3 газ покоится, т. е.  $u_3 = 0$ , скачок скорости в падающей волне равен скачку массовой скорости в отраженной волне, взятому с обратным знаком. Следовательно,

$$(p_2 - p_1)(v_1 - v_2) = (p_3 - p_2)(v_2 - v_3).$$
(3.63)

Значения удельных объёмов  $v_2$  и  $v_3$  определяются ударной адиабатой, например, в случае совершенного газа:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}, \ \frac{v_3}{v_2} = \frac{(k-1)p_3 + (k+1)p_2}{(k+1)p_3 + (k-1)p_2}.$$
 (3.64)

Исключая из трех полученных уравнений (3.63), (3.64) удельные объемы, получаем

$$(p_3 - p_2)^2 [(k-1)p_2 + (k+1)p_1] = (p_2 - p_1)^2 [(k+1)p_3 + (k-1)p_2].$$
(3.65)

Уравнение (3.65) имеет тривиальный корень  $p_3 = p_1$ . Второе значение для  $p_3$  находим, используя свойства квадратных уравнений

$$x^2 + px + g = 0, \ x_1 x_2 = g_1$$

где  $x_1, x_2$  – корни уравнения. Решение приводится к виду

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3k-1)p_2 - (k-1)p_1}{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}.$$
(3.66)

Проанализируем это решение и определим коэффициент усиления

$$d = \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{\Delta p_3}{\Delta p_2}$$

Пусть  $p_2 - p_1$  малая величина, т. е. падающая волна слабая. Из решения (3.66) после упрощений следует, что  $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$ , т. е. амплитуда отраженной волны вдвое превышает амплитуду падающей:  $p_3 - p_1 = 2(p_2 - p_1), d = 2.$ 

В случае сильной ударной волны  $p_2 \gg p_1$ 

$$d = \frac{p_3}{p_2} = \frac{3k - 1}{k - 1}$$

и при k = 1.67: d = 6; при k = 1.4: d = 8.

Выход УВ на свободную поверхность. По покоящейся сплошной среде, находящейся при нулевом давлении, распространяется правая УВ заданной амплитуды. Правая граница среды (x = 0) граничит с вакуумом, т. н. *свободная граница* (рис. 3.37). Требуется описать движение среды после отражения УВ от правой границы среды.

Рассматриваемую задачу можно считать приближением случая, когда мощная УВ распространяется в конденсированном веществе, например, в металлической пластине, и выходит на его поверхность, граничащую с воздухом при 1 атм, давлением которого можно пренебречь по сравнению с давлением за фронтом УВ.

Эта задача с граничным условием, так как

$$p(0,t) = 0. (3.67)$$



Рис. 3.37.

В момент времени, когда УВ находится в точке x = 0, вещество среды, которая занимает полупространство  $x \leq 0$ , находится в ударно-сжатом состоянии при высоком давлении  $p_2$ . Поскольку справа от среды находится вакуум, то очевидно, что вещество среды начнёт разгружаться до нулевого давления, и эта разгрузка начнёт распространяться по среде в виде левой простой волны разрежения. Как уже ранее обсуждалось, эта волна будет являться центрированной, т. к. все её характеристики выходят из одной точки. В УВ вещество сжимается и приобретает массовую скорость, направленную в сторону распространения УВ. При разгрузке вещество дополнительно начинает двигаться, в результате чего массовая скорость становится ещё больше (подобной является задача об истечении газа в вакуум). Плоскости событий и состояний движения рассматриваемой задачи показаны на рис. 3.38, 3.39.

При заданной амплитуде  $p_2$  падающей УВ массовая скорость  $u_2$  ударно-сжатой среды определяется из уравнения (p,u)-диаграммы ударных волн:

$$u_2 = \sqrt{p_2(v_1 - v(p_2; v_1, 0))}.$$
(3.68)

Разгрузка происходит вдоль изоэнтропы среды до нулевого давления ( $\Phi(0) = 0$ ), поэтому скорость движения свободной границы, а также вещества за ВР определяется из уравнения:

$$u_2 + \Phi(p_2) = u_m. \tag{3.69}$$

На практике, рассматривая отражение УВ от свободной границы в конденсированных средах, часто пренебрегают отличием ударной



Рис. 3.38.

Рис. 3.39.

адиабаты от изоэнтропы разгрузки. В этом случае, поскольку рассматривается ударная адиабата одного и того же материала, то (u, p)-диаграмма волны разгрузки является ударной адиабатой отражённой относительно прямой  $u = u_2$ , где  $u_2$  – массовая скорость среды за фронтом падающей УВ. Ввиду симметрии графиков, скорость, до которой разгрузится вещество в волне разгрузки, равна  $2u_2$ . То есть, при отражении от свободной поверхности УВ не очень высокой амплитуды, можно считать, что вещество, разгружаясь до нулевого давления, летит с удвоенной скоростью, которую оно имело в ударно-сжатом состоянии. В случае металлов такой метод применим с приемлемой точностью до давлений в несколько десятков ГПа.

Преломление ударной волны. В трубе, заполненной двумя покоящимися газами 1 (при x < 0) и 2 (при x > 0) с данными значениями плотности  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и с одинаковыми давлениями  $p_2 = p_1$ , по газу 1 слева направо идет ударная волна с заданной постоянной скоростью D (рис. 3.40). В момент времени t = 0 эта ударная волна достигает границы раздела сред в сечении x = 0. Требуется дать описание и расчет движения газа для t > 0.



Рис. 3.40.

Ясно, что в момент времени t = 0 в сечении x = 0 образуется произвольный разрыв, в силу чего задача сводится к задаче о распаде разрыва со следующими начальными данными:

$$u = u_3 > 0, \quad \rho = \rho_3, \quad p = p_3 \ (x < 0); \\ u = 0, \qquad \rho = \rho_2, \quad p = p_2 \ (x \ge 0),$$
(3.70)

в которых состояние 3 может считаться известным.

Как показывает (u, p)-диаграмма рис. 3.41, в результате распада этого разрыва в газ 2 всегда пойдет ударная волна, соответствующая переходу 2-4. Ее можно назвать преломленной, получаемой в результате преломления пришедшей на границу раздела падающей ударной волны. Остающийся позади преломленной ударной волны контактный разрыв между данными средами всегда приходит в движение со скоростью  $u_4$ . Преломленная ударная волна будет сильнее или слабее падающей в зависимости от того, какую ветвь (u, p)-диаграммы с центром  $(u_3, p_3)$  пересечет (u, p)-диаграмма ударных переходов с центром  $(0, p_2)$ .

Эти две возможности различаются величиной динамического импеданса  $(h = \rho c)$  исходных состояний сред. Если среда 2 является более жесткой, чем среда 1, т. е. импеданс  $h_2 > h_1$ , то на (u,)-диаграмме линия перехода 2-4 пойдет выше линии 1-3. В этом случае после преломления ударная волна усиливается, массовая скорость потока за ней уменьшается, а по левому состоянию среды 3 идет отраженная от границы раздела ударная волна двойного сжатия. Если же среда 2 более мягкая, чем среда 1, т. е. импеданс  $h_2 < h_1$ , то после преломления ударная волна ослабевает, массовая скорость потока за ней увеличивается, а по левому состоянию среды



Рис. 3.41.

3 распространяется простая левая волна разрежения. Конфигурации на плоскости событий для этих двух случаев аналогичны тем, которые изображены, соответственно, на рис. 3.17 и рис. 3.19.

На рис. 3.42 и рис. 3.43 показаны профили давления и массовой скорости в некоторый момент времени t > 0 после преломления УВ для случая  $h_2 > h_1$ , когда в обе среды распространяются ударные волны. Для определения состояния 4 в этом случае необходимо решить систему:

$$(u_3 - u_4)^2 = (p_4 - p_3)(v_3 - v_{c1}(p_4; v_3, p_3)), \qquad (3.71)$$

$$u_4^2 = (p_4 - p_2)(v_2 - v_{c2}(p_4; v_2, p_2)), \qquad (3.72)$$

где  $v_{c1}$  – ударная адиабата двойного сжатия первой среды,  $v_{c2}$  – ударная адиабата второй среды. Начальным давлением второй среды  $p_2$ обычно можно пренебречь, т. е.  $p_4 \gg p_2$ .


На рис. 3.44 и рис. 3.45 показаны профили дваления и массовой скорости на некоторый момент времени t > 0 после преломления УВ для случая  $h_2 < h_1$ , когда в первую среду пойдёт ВР, а во вторую УВ. Для определения состояния 4 в этом случае необходимо решить систему:

$$u_4 + \Phi_{c1}(p_4) = u_3 + \Phi_{c1}(p_3), \qquad (3.73)$$

$$u_4^2 = (p_4 - p_2)(v_2 - v_{c2}(p_4; v_2, p_2)), \qquad (3.74)$$

где  $\Phi_{c1}$  определяется по (2.32) с использованием УрС первой среды. На практике для расчёта отражённой волны в конденсированной среде ударную адиабату двойного сжатия или изоэнтропу разгрузки первой среды часто заменяют обычной ударной адиабатой однократного сжатия. Соударение двух твёрдых тел. Пусть твёрдое тело 1 (ударник) падает со скоростью  $U_0$  на неподвижную преграду или мишень 2 (рис. 3.46). В момент времени t = 0 ударник касается мишени, плоскость касания (или контактная поверхность) находится в точке x = 0. Необходимо определить параметры среды  $p_*$ ,  $u_*$ ,  $\rho_{*_{\rm M}}$ ,  $\rho_{*_{\rm M}}$  в



Рис. 3.46.

ударнике и мишени в области между УВ, которые распространятся по ним после удара, или, другими словами, распадные значения после распада разрыва.

Профили давления и массовой скорости в ударнике и мишени в момент времени t = 0 и после соударения (t > 0) показаны на рис. 3.47 и рис. 3.48.

Конфигурации на плоскости событий и состояний движения для этой задачи аналогичны изображенным на рис. 3.17. Общий вид системы уравнений (u,p)-диаграмм, необходимых для определения  $p_*$  и  $u_*$ :

$$(U_0 - u_*)^2 = (p_* - p_{0yd})(v_{0yd} - v_{yd}(p_*; v_{0yd}, p_{0yd})), \qquad (3.75)$$

$$u_*^2 = (p_* - p_{0M})(v_{0M} - v_M(p_*; v_{0M}, p_{0M})), \qquad (3.76)$$

поэтому для определения  $p_*$  необходимо решить уравнение (как правило, численно):

$$U_{0} - \sqrt{(p_{*} - p_{0yd})(v_{0yd} - v_{yd}(p_{*}; v_{0yd}, p_{0yd}))} = = \sqrt{(p_{*} - p_{0M})(v_{0M} - v_{M}(p_{*}; v_{0M}, p_{0M}))}.$$
 (3.77)

При больших скоростях удара начальными давлениями  $p_{0yd}$  и  $p_{0m}$  можно пренебречь по сравнению с  $p_*$ .



Рис. 3.47.

Если ударник и мишень состоят из одного и того же материала (т. е. имеют одну и ту же ударную адиабату  $v_{\rm yg}(p) \equiv v_{\rm M}(p)$ ) и  $v_{\rm 0yg} = v_{\rm 0M}$ , то из (3.75) сразу видно, что  $u_* = U_0/2$ .

Для большого числа конденсированных сред экспериментально установлено, что их ударные адиабаты в координатах (u,D) являются прямыми линиями, т. е. зависимость скорости УВ от массовой скорости за фронтом УВ является линейной:

$$D = a + \lambda u, \tag{3.78}$$

где постоянные a и  $\lambda$  определяются с помощью аппроксимации экспериментальных данных. Коэффициент a в (3.78) по смыслу является скоростью звука  $c_0$ , т. к. при бесконечно малой амплитуде УВ  $(u \to 0)$  скорость распространения УВ стремится к скорости звука  $(D \to c_0)$ .

Если для ударника и мишени известны ударные адиабаты в виде:

$$D_{yg}(u) = c_{0yg} + \lambda_{yg}u, \ D_{M}(u) = c_{0M} + \lambda_{M}u,$$
 (3.79)

то систему (3.75) можно заменить на эквивалентную:

$$p_* = \rho_{0yd}(U_0 - u_*)(c_{0yd} + \lambda_{yd}(U_0 - u_*)), \qquad (3.80)$$

$$p_* = \rho_{0_{\rm M}} u_* (c_{0_{\rm M}} + \lambda_{\rm M} u_*), \qquad (3.81)$$

где первое уравнение – это закон сохранения импульса на УВ, записанный для ударника ( $p_* \gg p_{0yg}$ ), а второе уравнение – это закон сохранения импульса на УВ, записанный для мишени ( $p_* \gg p_{0M}$ ). Поэтому для определения  $u_*$  необходимо решить квадратное уравнение

$$\rho_{0yd}(U_0 - u_*)(c_{0yd} + \lambda_{yd}(U_0 - u_*)) = \rho_{0M}u_*(c_{0M} + \lambda_M u_*).$$
(3.82)

Из (3.82) также следует, что если первая и вторая среды одинаковы (т. е.  $\rho_{0yd} = \rho_{0M}, c_{0yd} = c_{0M}, \lambda_{yd} = \lambda_{M}$ ), то  $u_* = U_0/2$ .

### 3.7 Косые скачки уплотнения и косые ударные волны

Установленные ранее свойства ударного перехода связаны с нормальной к фронту ударной волны составляющей вектора скорости. Однако в общем случае вектор скорости образует с фронтом ударной волны острый угол, и тогда для полного описания движения за волной необходимо учитывать касательную составляющую вектора скорости. Это особенно важно в модели установившегося течения газа, когда за ударной волной могут получаться как сверхзвуковые, так и дозвуковые скорости. В установившемся (стационарном) движении поверхность ударной волны должна быть неподвижной.



Рис. 3.49.

Такие неподвижные ударные волны называются скачками уплотнения.

Косой скачок уплотнения, к примеру, появляется при обтекании тупого угла сверхзвуковым потоком  $u_1 > c_1$ , движущимся с постоянной скоростью (рис. 3.49). Если такой поток движется параллельно одной стенке угла  $A_10$ , то в точке 0 поворота (у вершины угла  $\theta$ ) возникает косой скачок уплотнения, направленный под углом  $\varphi$  к оси x. Поток газа, движущийся первоначально вдоль оси x, за скачком уплотнения мгновенно разворачивается на угол  $\theta$  и движется параллельно другой стороне  $0A_2$  тупого угла. Перед косым скачком уплотнения движение всегда сверхзвуковое. За скачком течение может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым.

Линии тока могут пересекать поверхность косого скачка под любым углом, но только при условии, чтобы нормальная составляющая  $u_{1n}$  скорости  $u_1$  была сверхзвуковой –  $u_{1n} > c_1$  тогда и  $u_1 > c_1$  так как  $u_1^2 = u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2$ .

Рассмотрим идеальный (политропный) газ. Выведем соотношения, связывающие компоненты скорости до и после скачка. Для косого скачка, как и в случае прямого, должны выполняться законы  $\begin{aligned} \rho_{1}u_{1n} &= \rho_{2}u_{2n} - \text{непрерывность потока массы,} \\ p_{1} + \rho_{1}u_{1n}^{2} &= p_{2} + \rho_{2}u_{2n}^{2} - \text{непрерывность нормальной} \\ \kappa \text{ поверхности разрыва компоненты импульса,} \\ \rho_{1}u_{1n}u_{1\tau} &= \rho_{2}u_{2n}u_{2\tau} - \text{непрерывность тангенциальной} \\ \kappa \text{ поверхности разрыва компоненты импульса,} \end{aligned}$ (3.83)

$$\rho_1 u_{1n} \left( \frac{u_1^2}{2} + h_1 \right) = \rho_2 u_{2n} \left( \frac{u_2^2}{2} + h_2 \right) - henpepushocmb$$

потока энергии.

В системе (3.83)  $u_{1n}$ ,  $u_{2n}$  – нормальные составляющие скоростей  $u_1$ ,  $u_2$ ;  $u_{1\tau}$ ,  $u_{2\tau}$  – касательные к поверхности разрыва составляющие скоростей  $u_1$ ,  $u_2$ ; h – энтальпия;  $u_1^2 = u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2$ ,  $u_2^2 = u_{2n}^2 + u_{2\tau}^2$ .

Учитывая условия непрерывности потока массы, непрерывность потока энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{u_1^2}{2} + h_1 = \frac{u_2^2}{2} + h_2, \tag{3.84}$$

а непрерывность компоненты потока импульса вдоль скачка будет иметь вид

$$u_{1\tau} = u_{2\tau},$$
 (3.85)

т.е. получаем условие равенства тангенциальных составляющих скорости.

Рассмотрим рис. 3.49. Здесь  $\omega$  – угол между фронтом скачка и направлением движения потока за ним,  $\varphi$  – угол между фронтом скачка и направлением движения потока перед ним,  $\theta$  – угол отклонения потока за скачком. Тогда будем иметь следующие очевидные соотношения

$$u_{1n} = u_1 \sin \varphi, \ u_{1\tau} = u_1 \cos \varphi, u_{2n} = u_2 \sin \omega, \ u_{2\tau} = u_2 \cos \omega.$$
(3.86)

Из них следует, что  $\frac{u_{1n}}{u_{1\tau}} = \operatorname{tg} \varphi$  и  $\frac{u_{2n}}{u_{2\tau}} = \operatorname{tg} \omega$ . Так как  $u_{1\tau} = u_{2\tau}$ , то  $u_{2n}/u_{1n} = \rho_2/\rho_1 = \operatorname{tg} \omega/\operatorname{tg} \varphi < 1$  следовательно, поток действительно поворачивает к линии фронта скачка. Обозначим угол поворота  $\theta = \varphi - \omega$ , тогда предыдущее соотношение можно записать следующим образом:

$$\frac{u_{2n}}{u_{1n}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}\varphi}.$$
(3.87)

При этих обозначениях поток импульса (нормальная к скачку компонента) принимает вид

$$p_{2} - p_{1} = \rho_{1}u_{1n}^{2} - \rho_{2}u_{2n}^{2} = \rho_{1}u_{1n}^{2} \left(1 - \frac{\rho_{2}u_{2n}u_{2n}}{\rho_{1}u_{1n}u_{1n}}\right) =$$
  
$$= \rho_{1}u_{1}^{2}\sin^{2}\varphi \left(1 - \frac{u_{2n}}{u_{1n}}\right) = \rho_{1}u_{1}^{2}\sin^{2}\varphi \left(1 - \frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\right).$$
 (3.88)

Если рассматривать политропный газ, где ударная адиабата имеет вид

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(k+1)p_1 + (k-1)p_2}{(k+1)p_2 + (k-1)p_1},\tag{3.89}$$

и подставить это соотношение в предыдущее выражение, то получим, что

$$p_2 - p_1 = \frac{2\rho_1 u_1^2}{k+1} \left( \sin^2 \varphi - \frac{c_1^2}{u_1^2} \right), \qquad (3.90)$$

где  $c_1^2 = \frac{kp_1}{\rho_1}$ .

Найдем теперь связь между углами φ и θ. Для этой цели воспользуемся соотношениями (3.87) ... (3.90), из которых после преобразований получим

$$\frac{2}{k-1} = \left(\frac{u_1}{c_1}\right)^2 \sin^2 \varphi \left[\frac{k+1}{k-1} \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg} \varphi} - 1\right].$$
 (3.91)

Зная, что  $\theta = F(\varphi)$ , можно легко определить величины  $\rho_2$  и  $u_2$ .

Таким образом, полученные соотношения дают возможность полностью решить задачу определения всех параметров потока за фронтом косого скачка, если величины перед скачком  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $\varphi$  (или  $\theta$ ) известны.

Теперь преобразуем соотношение (3.91) следующим образом:

$$\frac{2}{k+1} \left(\frac{c_1}{u_1}\right)^2 = \sin^2 \varphi \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{k-1}{k+1}\right]$$
(3.92)

и далее с использованием соотношений (3.86) и (3.87) имеем

$$\frac{2}{k+1} \left(\frac{c_1}{u_1}\right)^2 = \left(\frac{u_{1n}}{u_1}\right)^2 \frac{u_{2n}}{u_{1n}} - \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{u_{1n}}{u_1}\right)^2$$

ИЛИ

$$u_{1n}u_{2n} = \frac{2c_1^2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}u_{1n}^2 = \frac{2c_1^2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}u_1^2 - \frac{k-1}{k+1}u_{\tau}^2.$$
 (3.93)

Полученное соотношение (3.93) носит название соотношение Прандтля.

#### 3.8 Ударная поляра

Основные зависимости и результаты для косых скачков уплотнения можно получить наглядно, составив уравнение так называемой *ударной поляры*. Она определяет связь между параметрами за фронтом скачка и величинами  $u_1$  и  $c_1$ . Из рис. 3.49 очевидно, что компоненты по x и y скоростей  $u_1$  и  $u_2$  есть

$$u_{1x} = u_1, \ u_{1y} = 0,$$
  

$$u_{2x} = u_{2n} \sin \varphi + u_{2\tau} \cos \varphi,$$
  

$$u_{2y} = u_{2\tau} \sin \varphi - u_{2n} \cos \varphi.$$
  
(3.94)

Исключая из этих уравнений величину  $\varphi$  согласно самым первым соотношениям  $\sin \varphi = \frac{u_{1n}}{u_1}$ ,  $\cos \varphi = \frac{u_{1\tau}}{u_1}$ , получаем

$$u_{2x} = \frac{u_{2\tau}^2}{u_1} + \frac{u_{1n}u_{2n}}{u_1},$$
  

$$u_{2y} = \frac{u_{2\tau}}{u_1} \frac{u_{1n}^2 - u_{1n}u_{2n}}{u_{1n}}.$$
(3.95)

Следствием уравнений сохранения потоков массы, импульса и энергии для косого скачка уплотнения является соотношение Прандтля (3.93). Используя соотношение Прандтля, можно исключить из соотношений (3.95) сначала  $u_{2n}$ , а затем  $u_{2\tau} = u_{1\tau} = u_{\tau}$ .

Получаем окончательно

$$u_{2y}^{2} = (u_{1} - u_{2x})^{2} \frac{\frac{2}{k+1} \left(u_{1} - \frac{c_{1}^{2}}{u_{1}}\right) - (u_{1} - u_{2x})}{(u_{1} - u_{2x}) + \frac{2}{k+1} \frac{c_{1}^{2}}{u_{1}}}.$$
 (3.96)

Это есть уравнение ударной поляры в плоскости  $u_{2x}$ ,  $u_{2y}$  (рис. 3.50).

Для политропного газа ударная поляра есть выпуклая кривая третьего порядка, которая называется *строфоидой*. С помощью ударной поляры можно построить ударный фронт. На рис. 3.50  $u_1 > c_1$ , и направление вектора  $u_2$  есть угол  $\theta$ : tg $\theta = u_{2y}/u_{2x}$ . Проведя из точки 0 прямую под углом  $\theta$  к оси 0x, находим, что она пересекает ударную поляру в точках A и B. Это значит, что при заданных  $\theta$ ,  $u_1$ ,  $c_1$  возможны 2 режима обтекания. Обычно осуществляется режим B. Вектор 0B определяет скорость потока  $u_2$  за фронтом косого скачка уплотнения. Линия скачка, образующего с  $u_1$  угол  $\phi$ , перпендикулярна линии, проходящей через отрезок  $B_0B$ . Это следует из того факта, что вектор  $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = i(u_{1n} - u_{2n}) + j(u_{1\tau} - u_{2\tau}) = i(u_{1n} - u_{2n})$ , т.к.  $u_{1\tau} = u_{2\tau}$ .



Рис. 3.50.

Величина  $\theta$ , как видно из рис. 3.50, при заданных  $c_1$ ,  $u_1$  не может превышать определенного (предельного) значения  $\theta_{\text{пред}}$ , соответствующего касательной, проведенной из точки 0 к кривой.

## 3.9 Применение ударной поляры для решения задач

Обтекание вогнутого угла. Постоянное плоскопараллельное сверхзвуковое течение над стенкой  $A_10$  отклоняется, обтекая угол  $A_10A_2$ , меньший 180° (см. рис. 3.49). Задача состоит в построении течения во всей области внутри этого угла. При этом одной из искомых величин будет постоянная скорость  $U_2$ . Непрерывного решения этой задачи не существует. Можно найти решение, в котором постоянное течение вдоль  $A_10$  переводится в постоянное течение вдоль  $0A_2$  посредством косого скачка уплотнения. Для этой цели надо по данным  $u_1, c_1, \rho_1$  построить ударную поляру и провести луч из начала координат под заданным углом (см. рис. 3.50). Точка пересечения *В* этого луча с ударной полярой дает искомое решение, в котором 0*D* есть линия косого скачка. Это решение показано на рис. 3.49.

Найденное решение используется в задачах обтекания клиновидных тел равномерным сверхзвуковым потоком. Здесь возникают следующие важные обстоятельства. Во-первых, пересекающий луч может встречать ударную поляру как минимум дважды, например, в точках B и A, что дает два возможных решения (см. рис. 3.50). Решение соответствующее точке B, называется слабым, а соответствующее точке A – сильным. Во-вторых, указанные решения существуют, только если угол  $\theta$  достаточно мал, точнее, если  $\theta \leq \theta_{\rm пред}$ . Для углов  $\theta > \theta_{\rm пред}$  решение должно резко отличаться от найденного, и в точной постановке его аналитический вид неизвестен.

Эксперименты с обтеканием конечных клиновидных тел показывают, что при  $\theta \leq \theta_{\rm пред}$  обычно реализуется слабое решение. Если же  $\theta > \theta_{\rm пред}$ , то возникает так называемый отошедший скачок, линия которого располагается впереди тела, не соприкасаясь с ним (рис. 3.51). За отошедшим скачком реализуется сложное до- и сверхзвуковое течение с переменной энтропией, описание которого в настоящее время может быть дано только численными методами.

Отошедший скачок на оси симметрии становится прямым скачком (в точке 0). На участке 00' происходит чисто адиабатическое сжатие газа вдоль линии тока 00'. Поэтому, как было показано ранее, при стационарном движении на участке 00' имеет место интеграл Бернулли

$$\frac{u^2}{2} + h = const.$$

В точке 0' на носике клина u = 0, поэтому

$$h'_2 = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = \frac{c_2^2}{k-1} + \frac{u_2^2}{2},$$

где значения  $u_2$ ,  $p_2$ ,  $\rho_2$ , определяются формулами для прямой ударной стационарной волны, а  $c_2^2 = \frac{kp_2}{\rho_2}$ . Таким образом, параметры



Рис. 3.51.

торможения в точке О' могут быть вычислены из следующих соотношений:

$$\frac{h_2'}{h_2} = \left(\frac{c_2'}{c_2}\right)^2 = \left(\frac{p_2'}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Отражение косого скачка от стенки. Явление отражения косой ударной волны от жесткой стенки представляет большой интерес. При этом и отраженная волна также будет наклонной. Предполагается, что падающий фронт и стенка являются плоскими и что газ перед фронтом покоится. Тогда движение может рассматриваться как плоскопараллельное.

Пусть D – скорость перемещения падающей ударной волны, O – точка пересечения линии фронта со стенкой и  $\varphi_1$  – угол между ними. Тогда скорость перемещения точки O вдоль стенки равна

$$U_1 = D/\sin\varphi_1.$$

В системе координат, перемещающейся в том же направлении вдоль стенки со скоростью  $U_1$ , точка пересечения 0, а с ней и падающий фронт покоятся, а вдоль стенки навстречу наклонному фронту движется со скоростью  $U_1$  постоянный поток. Требуется описать это



Рис. 3.53.

течение при условии, что от точки 0 отходит второй скачок, приводящий поток за первым скачком к направлению, параллельному стенке (рис. 3.52).

Задача решается с помощью ударных поляр. В заданном состоянии газа перед падающим фронтом ON известна скорость U<sub>1</sub>. Поэтому известна и ударная поляра с вершиной B<sub>1</sub> (рис. 3.53). Задание угла падения φ<sub>1</sub> однозначно определяет угол поворота потока θ<sub>1</sub> в падающем скачке. За ним и все параметры, в частности вектор скорости U<sub>2</sub>, становятся вполне определенными. Значит известна и ударная поляра с вершиной  $B_2$  для состояния за падающим скачком. Ее точка пересечения с осью  $u_{2u} = 0$  определяет ударный переход в отраженном скачке, за которым вектор U<sub>3</sub> направлен параллельно стенке. При этом точка В<sub>3</sub> дает слабый отраженный скачок, а точка  $B'_3$  – сильный. Эксперимент показывает, что обычно реализуется слабый отраженный скачок. Такое отражение (рис. 3.52) называется правильным отражением.

Правильное отражение возможно не при любых значениях амплитуды падающей волны и угла падения  $\phi_1$ . Его реализация лимитируется тем, что ударная поляра с вершиной  $B_2$  может не пересечь ось  $u_{2y} = 0$ . Для политропного газа это означает, что если



Рис. 3.54.

Рис. 3.55.

угол  $\varphi_1$  достаточно мал, то всегда существует правильное отражение. Для каждого заданного значения амплитуды  $z_1$  скачка имеется такое предельное значение  $\varphi_* = \varphi_*(z_1)$ , что при  $\varphi_1 > \varphi_*$  правильное отражение невозможно.

Качественная зависимость  $\varphi_*$  от  $z_1 = \frac{p_2 - p_1}{c_1^2}$  показана на рис. 3.54. Предельное значение  $\varphi_*(z_1)$  при  $z_1 \to \infty$  для воздуха ( $\gamma = 1.4$ ) приблизительно равно 40°.

Если  $\varphi_1 > \varphi_*$ , то картина отражения ударной волны существенно усложняется. При этом наблюдается так называемое маховское отражение с тройной точкой A пересечения более чем двух линий сильного разрыва. Качественная картина маховского отражения показана на рис. 3.55, где 0A – прямой скачок, AN и  $AN_1$  – косые скачки, AK – линия контактного разрыва. Однако при этом линии скачков в окрестности точки A, вообще говоря, искривляются, и течения в областях 2, 3 и 4 не являются постоянными. Это создает значительные трудности при исследовании маховского отражения.

Критерий струеобразования в кумулятивном течении. Большое значение для понимания физики процесса кумуляции имеет задача о сверхзвуковом симметричном соударении двух плоских



Рис. 3.56.

струй. Пусть скорость струй до соударения равна величине  $u_1$ , которая больше, чем скорость звука  $c_1$ . Если угол соударения есть 2 $\theta$ , то от точки соударения 0 в обе стороны отойдут скачки уплотнения (рис. 3.56). Эта задача аналогична задаче об обтекании вогнутого угла, которая рассмотрена выше. Если ограничимся в силу симметрии задачи только половиной течения, то придем в окрестности точки соударения 0 на рис. 3.49.

Модель косого соударения двух металлических пластин под углом 20 положена в основу гидродинамической модели кумуляции. При этом материал пластин считается идеальной несжимаемой жид-костью, так как напряжения в металле при столкновении намного превышает его прочность, и он ведет себя как жидкость. Сжатие же металла при скорости метания порядка  $v_0=1$  км/с и соударении с этой скоростью невелико ( $\Delta \rho / \rho \approx v_0 / c$ , где c – скорость звука,

т.е. для стали  $c \approx 5$  км/с,  $\Delta \rho / \rho \approx 0.2$ ), что и позволяет считать их несжимаемыми. Однако при малых углах соударения 20 начинает играть роль сжимаемость материала пластин, что приводит к соударению без образования струи (так называемый регулярный режим соударения, рис. 3.56) и практически ограничивает кумуляцию. Таким образом, при малых углах соударения 20 имеем картину течения (рис. 3.56) в системе координат, движущейся со скоростью точки контакта 0, где течение стационарно. Для соударения стальных пластин под углом  $2\theta = 15^{\circ}$  скорость натекания  $u_1$  струй в этой системе координат  $U_1 = \frac{v_0}{\mathrm{tg}\,\theta} = 7.6$  км/с при  $v_0 = 1$  км/с. Тогда  $u_1$ для стальных пластин будет больше их скорости звука  $c_1 = 5 \text{ км/с}$  и в точку соударения 0 садится скачок уплотнения, за которым течение поворачивается на угол  $\theta$ . Если при одной и той же скорости  $u_1$  увеличивается угол соударения  $\theta$ , то можно достигнуть критического значения угла θ, при превышении которого такое течение невозможно. Тогда скачок уходит вверх по потоку и, взаимодействуя со свободной поверхностью набегающей струи, поворачивается в волне разрежения, и при этом появляется обратная, так называемая кумулятивная струя. Здесь давление за ударной волной на свободной границе будет ослаблено вследствие втекания жидкости в образующуюся полость, когда возникает обратная струя.

Излагаемый ниже анализ позволяет определить конфигурацию течения для  $\theta < \theta_{\text{пред}}$  и угол  $\theta_{\text{пред}}$  как функцию  $u_1$ , и свойств материала соударяющихся струй. Примем УрС соударяющихся пластин в форме Тэта:

$$p = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] \approx \frac{nB}{\rho_1}\rho_1\mu = \rho_1 c_1^2\mu, \qquad (3.97)$$

где  $c_1^2 = \frac{nB}{\rho_1}$ ,  $\mu = \frac{\rho}{\rho_1} - 1$ ,  $n, B, \rho_1$  – соответствующие параметры, характеризующие металлы,  $c_1$  – скорость звука в металле.

Тогда из соотношений (3.83) и (3.97) следует, что

$$u_{n1} = c_1 \sqrt{1 + \mu} = c_1 \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right), \qquad (3.98)$$
$$u_{n2} = c_1 \sqrt{\frac{1}{\mu + 1}} = c_1 \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right),$$

если  $\mu \ll 1$ . Далее из (3.95) следует, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \frac{(u_{n1} - u_{n2})u_{\tau}}{u_{\tau}^2 + u_{n1}u_{n2}}.$$
(3.99)

Подставляя в последнее соотношение  $u_{n1} - u_{n2}, u_{\tau}$  и  $u_{n1}u_{n2}$  получаем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mu c_1^2 \sqrt{(M^2 - 1) - \mu}}{c_1^2 \left[ (M^2 - 1) - \mu \right] + c_1^2} = \frac{\mu \sqrt{(M^2 - 1) - \mu}}{M^2 - \mu}, \qquad (3.100)$$

где  $M = u_1/c_1$ .

При  $\theta = \theta_{\text{пред}}$  имеем, что

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{d \operatorname{tg} \theta}{d\mu} = 0. \tag{3.101}$$

Плучаем, что

$$\mu_{1,2} = \frac{3}{2}M^2 \pm \sqrt{\frac{M^4}{4} + 2M^2}.$$
(3.102)

Обычно осуществляется режим B (см. рис. 3.50), который называется слабым решением, поэтому выбираем решение уравнения (3.102) со знаком «минус»

$$\mu_{1,2} = \frac{3}{2}M^2 - \sqrt{\frac{M^4}{4} + 2M^2}.$$
(3.103)

Критический угол  $\theta_{\text{пред}}$  получается подстановкой значения  $\mu$  для известных  $u_1$ ,  $c_1$  из (3.103) в соотношение (3.100). Удобнее использовать график зависимости  $\theta_{\text{пред}} = \theta(u_1)$  в системе координат, где

M	1.05		1.1	1.15	1.2	1.25	1.3		
$tg \theta_{пред}$	0.01		0.035	0.063	0.099	0.138	0.183		
$\theta^{\circ}_{\mathrm{пред}}$	0.69		1.99	3.62	5.65	7.86	10.4		
$\theta^{\circ}_{*}$	0.61		2.2	4.1	6.73	9.76	13.39		
$v_0$ , км/с	0.0	05	0.19	0.36	0.59	0.86	1.19		
		M		1.4	1.5				
		tg	$g \theta_{\rm пред}$	0.285	0.4				
	6		$\theta^{\circ}_{\mathrm{пред}}$	15.9	21.8				
		$ begin{aligned} & eta^\circ_* \ & v_0,   ext{km/c} \end{aligned}$		21.8	30.96				
				2.0	3.0				

Таблица 1 — Расчет косого соударения пластин

струи (сталкивающиеся пластинки) движутся со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной к поверхности пластин (рис. 3.56). Отсюда следует, что  $v_0 = u_1 \operatorname{tg} \theta_{\operatorname{пред}}$ . Результаты вычислений представлены в табл. 1, где в последней строке приведены расчеты для скорости метания стальной пластины ( $c = 5 \operatorname{ кm/c}$ ).

Критическая кривая  $\theta_{\text{пред}}(v_0)$ , представленная на рис. 3.57, делит плоскость возможных параметров соударения  $(v_0, \theta)$  на две области: ниже этой кривой находится область соударения без струеобразования, т.к. вектор  $\vec{u_2}$  пересекает ударную поляру (см. рис. 3.50), а выше – со струеобразованием, т.к. угол наклона вектора  $\vec{u_2}$  к оси абсцисс превышает значение  $\theta_{\text{пред}}$  и скачок смещается вверх по потоку, что приводит к появлению струи. Таким образом, когда скорость  $u_1$  сверхзвуковая  $u_1 > c_1$  и  $\theta < \theta_{\text{пред}}$ , то кумулятивной струи нет (область 1); когда  $u_1$  сверхзвуковая и  $\theta > \theta_{\text{пред}}$ , то струя появляется и представляет собой радиально расширяющийся поток мелких частиц: когда  $u_1$  приблизительно равна скорости звука, то наблюдается небольшое рассеяние струи; наконец, когда  $u_1 < c_1$ , то образуются сплошные связные струи. Критерием образования сплошных струй в плоском случае при скорости метания  $v_0$ , направленной по нормали к пластинам, служит кривая  $\theta_* = \theta(v_0/c_1)$ 



Рис. 3.57.

#### с уравнением

$$\theta_* = \arctan(v_0/c_1). \tag{3.104}$$

Итак, на плоскости  $(v_0, \theta)$  имеется еще одна критическая кривая  $\theta_* = \theta(v_0)$  (рис. 3.57), которая делит уже определенную область соударения со струей на две части: выше этой кривой реализуются сплошные струи (область 3), а ниже – распыленные (область 2).

#### Глава 4. Теория детонационных волн

### 4.1 Основные понятия и свойства взрывчатых веществ

Взрыв часто оказывается незаменимым как простой источник большой импульсной мощности. Наиболее широко используется избыточная химическая энергия взрывчатых веществ.

Взрывчатыми веществами (BB) называются метастабильные химические соединения и смеси, относительно устойчивые при нормальных условиях, но способные после определенного начального воздействия (инициирующего импульса – накола, нагрева, ударной волны и т. д.) к взрыву путем самооддерживающегося внутреннего химического превращения с выделением тепла и газообразных продуктов. ВВ бывают твердыми, жидкими, газообразными, а также смесями веществ в разном агрегатном состоянии. Наибольшее практическое использование получили твердые BB (сыпучие, прессованные, литые). По составу ВВ делят на индивидуальные, представляющие собой отдельные химические соединения (тротил, гексоген, тэн, нитроглицерин и др.), и смесевые, представляющие собой смеси двух или нескольких химических компонентов. В промышленности используются в основном смесевые ВВ, отличающиеся дешевизной и более широкими возможностями оптимизации свойств. По физической структуре различают ВВ гомогенные (т.е. однородные, без внутренних фазовых границ) и гетерогенные. Гетерогенными являются все многофазные составы, а также пористые или дисперсные индивидуальные ВВ.

Наиболее быстрой формой протекания взрывного превращения в зарядах ВВ является *детонация*. Детонация есть гидродинамический волновой процесс распространения по веществу зоны экзотермической (т.е. с выделением тепла) реакции со сверхзвуковой скоростью. Зона основного энерговыделения и перестройки состояния вещества имеет при этом малую толщину  $\Delta x$  по сравнению с размером заряда L в направлении распространения детонации, поэтому её часто называют фронтом волны. Фронт волны вместе с примыкающей областью течения продуктов взрыва образует *детонационную волну* (ДВ). Детонационная волна характеризуется высокими давлениями, лежащими в интервале  $20\div400$  кбар для конденсированных (т. е. жидких и твердых) ВВ и  $15\div40$  бар для газовых взрывчатых смесей (при  $p_0 = 1$  бар  $= 10^5$  Па). При повышении начального давления взрывчатых газов, а также при использовании гетерогенных взрывчатых составов можно получать и любые промежуточные давления детонации.

Взрывчатые вещества (с точки зрения их действия) характеризуются рядом параметров: плотностью  $\rho_0$ , теплотой взрыва Q, скоростью детонации D, критическим  $d_{\rm kp}$  и предельным  $d_{\rm np}$  диаметрами, показателем адиабаты k.

*Теплотой взрыва Q* называют количество тепла, которое выделяется при взрыве единицы массы ВВ при постоянном объеме. Эта характеристика удобна для практического сравнения различных ВВ.

Для более ясного представления смысла понятия теплоты взрыва можно следующим образом качественно описать процесс выделения энергии в ходе химической реакции во фронте ДВ. В результате инициирующего импульса происходит разрыв некоторых химических связей в молекулах, из которых состояло ВВ. Образовавшиеся ионы и радикалы рекомбинируют в более простые молекулы, как правило, H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, CO и др, которые уже составляют продукты взрыва. Особенностью ВВ является то, что на образование молекул продуктов взрыва требуется меньше энергии, чем было запасено в потенциальной энергии связи исходных молекул ВВ. Оставшаяся доля этой энергии переходит в кинетическую энергию образовавшихся молекул продуктов взрыва, которая и является теплотой взрыва Q и за счет которой продукты взрыва оказывают разрушающее действие на окружающую их среду. Теплота взрыва Q позволяет определить энергию взрыва данного заряда E: E = mQ, где *т* – масса заряда BB.

Теплота взрыва Q может быть определена экспериментально, а также путём расчёта. Наиболее распространенный метод вычисления Q основан на приближённых уравнениях химического разложения данного BB. Зная теплоту образования продуктов взрыва и теплоту образования данного BB, можно определить теплоту взрыва. Значения теплоты взрыва разных BB находятся примерно в диапазоне от 2 до 7 кДж/г.

Экспериментально теплоту взрыва определяют в калориметрической бомбе, схема которой показана на рис. 4.1. По разности температур корпуса установки до и после подрыва, а также по его теплоёмкости рассчитывают теплоту взрыва исследуемого ВВ. Теплоёмкость корпуса определяется с помощью сжигания в установке вещества с известной теплотой реакции. После взрыва вода в корпусе установки находится в конденсированном состоянии, в то время, как в момент детонации заряда вода в ПД находится в газообразном состоянии. Поэтому для определения теплоты взрыва при воде в парообразном состоянии измеряется количество воды, находящееся в бомбе, и вносится поправка на испарение воды.

Следующей основной характеристикой ВВ является скорость детонации D, скорость, с которой ДВ распространяется по ВВ. Выделяющаяся в зоне реакции энергия обеспечивает самоподдерживащееся распространение ДВ. Обычно величину D определяют экспериментально с помощью скоростных фоторегистраторов или с помощью осциллографов. Экспериментальные методы позволяют с большой точностью определить зависимость скорости детонации D от плотности заряда  $\rho_0$ .

Для многих BB зависимость  $D = D(\rho_0)$  может быть представлена линейной зависимостью. Добавление частиц алюминия приводит к тому, что зависимость  $D(\rho_0)$  от плотности заряда становится нелинейной: с увеличением  $\rho_0$  скорость растёт быстрее, чем по линейному закону.

Опыт показывает, что ДВ распространяется, не затухая, в зарядах большой длины, если поперечный размер заряда больше



Рис. 4.1. Схема калориметрической установки: 1 – корпус; 2 – крышка; 3 – заряд BB; 4 – термометры; 5 – вентиль; 6 – подставка.

некоторого критического. Свойства ДВ чаще всего изучают в цилиндрических зарядах. Минимальный диаметр цилиндрического заряда, способного детонировать при любой длине, называется *критическим диаметром* ( $d_{\rm kp}$ ) детонации данного ВВ. Имеется также критическая толщина плоского слоя ВВ, которая обычно в 1.5–2 раза меньше значения  $d_{\rm kp}$ . При  $d > d_{\rm kp}$  обычно вскоре после возникновения детонации устанавливается практически постоянная скорость D самоподдерживающейся ДВ. Скорость D и другие параметры ДВ в общем случае зависят от состава ВВ, плотности, физической структуры, диаметра заряда и свойств оболочки, в которую помещён заряд. При  $d > d_{\rm np}$ , где  $d_{\rm np}$  – так называемый *предельный диаметр*, зависимость от диаметра практически исчезает. В этом случае детонацию называют идеальной. Ее скорость  $D_0$ , а также давление и плотность продуктов полностью определяются



составом и термодинамическими данными ВВ. Значения  $D_0$  для конденсированных ВВ лежат в интервале от 2 до 9 км/с, для газов – от 1.5 до 3.5 км/с; значения  $d_{\rm kp}$  для тех и других – от сотых долей миллиметра до десятков сантиметров.

Для медленно реагирующих составов значение  $d_{\rm kp}$ , в принципе, может быть сколь угодно большим, однако при  $d_{\rm kp} > 0.5$  м негорючее вещество часто не считают взрывчатым, так как возбудить в нем детонацию весьма трудно (пример: аммиачная селитра). При околокритических диаметрах в гетерогенных зарядах может существовать несколько режимов детонации с разными скоростями, зависящими от условий инициирования. Типичный характер изменения скорости детонации D от диаметра заряда d показан на рис. 4.2.

При детонации ВВ высокой плотности (гексогена, тротила, сплава ТГ, пикриновой кислоты, пироксилина и др.), заключенных в массивную оболочку, наблюдается повышение теплоты взрыва. При увеличении толщины латунной оболочки до значений, больших 3-4 мм, теплота взрыва не увеличивается. Очевидно, что роль латунной оболочки может играть плотная среда (вода, грунт и т. п.), окружающая заряд. Экспериментально было установлено, что теплота взрыва в массивной оболочке линейно зависит от плотности заряда. Критический и предельный диаметры заряда также зависят от химических свойств BB, его плотности, размера частиц, агрегатного состояния BB, оболочки заряда и т. д. Если размер заряда меньше критического, то из-за разлёта ПД в сторону, перпендикулярную оси заряда, возрастают потери энергии из зоны реакции настолько, что детонация затухает.

Для порошкообразных BB на величину  $d_{\rm kp}$  существенно влияет размер частиц BB. Чем меньше частицы BB, тем меньше критический диаметр. Наличие оболочки у заряда уменьшает разлёт ПД, что способствует существенному уменьшению критического диаметра заряда у BB. В первом приближении наличие инертной оболочки эквивалентно увеличению диаметра заряда. Например, для аммиачной селитры  $d_{\rm kp}$ =100 мм, а в стальной оболочке, толщиной 20 мм, аммиачная селитра детонирует при диаметре 7 мм. Свинцовая оболочка сильнее влияет на детонационную способность BB, чем стальная оболочка, поскольку в данном случае основным является инерционное сопротивление оболочки.

Предельный диаметр заряда  $d_{\rm np}$ , при котором достигается максимальная постоянная скорость детонации, зависит от тех же факторов, что и критический диаметр заряда.

Скорость детонации быстро нарастает с увеличением диаметра заряда у ВВ, имеющих малый критический диаметр. Взрывчатые вещества, имеющие большую чувствительность к начальному инициирующему импульсу, имеют меньший предельный и критический диаметры. Для малочувствительной к взрыву аммиачной селитры (в виде гранул) предельный диаметр более 300 мм, а для аммотола 50/50 предельный диаметр равен около 120 мм, для гексогена же он равен примерно 3-4 мм.

#### 4.2 Гидродинамическая теория детонации

Основополагающие идеи гидродинамической теории детонации были сформулированы Михельсоном, Чепменом, Жуге. Позже, с появлением дополнительных экспериментальных данных, эта теория



Рис. 4.3.

была уточнена Зельдовичем, фон Нейманом, Дёрингом и др. Согласно этой теории детонационная волна (ДВ) представляет собой ударную волну (УВ) с последующей за ней областью химической реакции. За детонационной волной происходит разлёт продуктов детонации (ПД), по которым распространяются волны разрежения (ВР).

В ударной волне ВВ сжимается ударно как инертное вещество. Если амплитуда этой УВ больше некоторой величины, то такая волна при своём распространении способна возбуждать за своим фронтом интенсивную химическую реакцию. Энергия, которая выделяется за фронтом УВ в области химической реакции, поддерживает параметры ударной волны на постоянном уровне и стационарность детонационного процесса в целом. Эпюра давлений в детонационной волне не меняется по мере её движения по заряду (рис. 4.3). В области ПД имеет место нестационарный разлёт газа, т. е. все параметры меняются со временем.

Таким образом, стационарная зона ДВ граничит с областью нестационарного течения газа ПД (областью волны разрежения). Стационарная зона должна двигаться относительно ПД со звуковой (или сверхзвуковой) скоростью, в противном случае волна разрежения догонит стационарную зону (зону химической реакции), что приведёт к расширению вещества в зоне химической реакции, падению давления и температуры, и процесс стационарного распространения детонационной волны будет невозможен. Чепменом и Жуге было постулировано, что детонационная волна распространяется относительно продуктов детонации со звуковой скоростью. Это положение носит название условия Чепмена-Жуге.

Таким образом, область ДВ ограничена двумя поверхностями – ударной волной, которая сжимает исходное ВВ, и поверхностью, ограничивающей область химической реакции, которую также называют поверхностью Чепмена-Жуге (поверхность ЧЖ; далее все величины с индексом *J* относятся к этой поверхности). Поверхность ЧЖ одновременно является границей или фронтом волны разрежения, которая охватывает область ПД. Как уже сказано, для того чтобы ДВ не затухала из-за взаимодействия с идущей следом за ней ВР, а распространялась стационарно, должно выполняться условие Чепмена-Жуге:

$$D = u_J + c_J, \tag{4.1}$$

где  $u_J$  и  $c_J$  – массовая скорость и скорость звука на поверхности ЧЖ. То есть, скорость ДВ D совпадает со скоростью фронта ВР  $u_J + c_J$ , которая примыкает к ДВ. Уравнение (4.1) записано в лабораторной СО в случае, когда ДВ распространяется вдоль направления оси 0x. Необходимо понимать, что такое представление является модельным, и может не в полной мере отражать реальный процесс.

Несмотря на то что ДВ имеет более сложную структуру, чем УВ, во всей её области выполняются основные законы сохранения. Рассмотрим случай одномерной плоской симметрии, т. е. когда заряд ВВ помещён в абсолютно жёсткую оболочку. Законы сохранения массы и импульса для любого сечения в области ДВ (т. е.  $\forall x$  в области ДВ) будут иметь вид аналогичный виду этих законов для УВ (в СО связанной с фронтом волны):

$$\rho_0 D = \rho(D-u),$$
  

$$p - p_0 = \rho_0 D u,$$
(4.2)

где  $\rho$ , *p* и *u* соответствуют параметрам среды в каком-либо сечении в области ДВ, параметры с индексом 0 соответствуют исходному непрореагировавшему ВВ (иногда также называют холодное ВВ).

Поскольку в области ДВ происходит тепловыделение, то в адиабату Гюгонио, которая выражает закон сохранения энергии, необходимо добавить соответствующее слагаемое Q:

$$\varepsilon - (\varepsilon_0 + Q) = \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v),$$
(4.3)

где  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия среды в рассматриваемом сечении внутри области ДВ, Q – удельное количество тепла, выделившееся в этом сечении. В разных сечениях внутри ДВ количество выделившегося тепла разное, т. е. на фронте ДВ тепло ещё не выделилось  $Q(x_{\rm YB}) = 0$ , а в плоскости ЧЖ выделилось полное количество тепла  $Q(x_J) = Q_{\rm B3p}$ .

Рассмотрим процессы происходящие в области ДВ на плоскости p - v (рис. 4.4). Ударная волна переводит исходное ВВ из начального состояния  $A = (v_0, p_0)$  в состояние  $H_1$ . Точка  $H_1$  лежит на ударной адиабате исходного ВВ. Состояния, которые вещество проходит между УВ и плоскостью ЧЖ связаны между собой линейной зависимостью:

$$p = p_0 + \frac{D^2}{v_0^2}(v_0 - v).$$
(4.4)

Зависимость (4.4) является следствием законов сохранения массы и импульса (4.2). Соответствующая прямая  $AJH_1$  показана на рис. 4.4 и называется *прямой Михельсона*.

График функции (4.3), соответствующий полному энерговыделению, показан на рис. 4.4 кривой LMJN. В этом случае  $\varepsilon$  в уравнении (4.3) является удельной внутренней энергией ПД, поскольку при полном энерговыделении химическая реакция прошла полностью и



Рис. 4.4.

исходного ВВ не осталось. Таким образом, кривая LMJN является ударной адиабатой ПД, смещённой относительно ударной адиабаты исходного ВВ по энергии на постоянное значение  $Q_{\rm взр}$ . Кривую LMJN также называют детонационной адиабатой.

Точка  $J = (v_J, p_J)$ , соответствующая поверхности ЧЖ (будем её также называть точкой ЧЖ) лежит как на прямой Михельсона (поскольку эта прямая связывает все состояния в среде), так и на детонационной адиабате, поскольку поверхность ЧЖ это граница ДВ, на которой химическая реакция закончилась и тепло выделилось полностью.

Угловой коэффициент прямой Михельсона в любой её точке равен

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{D^2}{v_0^2}.$$
(4.5)

Угловой коэффициент касательной к детонационной адиабате в точке ЧЖ равен угловому коэффициенту касательной к изоэнтропе в этой точке:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{c_J^2}{v_J^2},\tag{4.6}$$

так как

$$c^{2} = \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dv}\frac{dv}{d\rho} = -v^{2}\frac{dp}{dv}, \ v = \frac{1}{\rho}.$$
(4.7)

Принимая условие (4.1) как экспериментальный факт, закон сохранения массы (4.2) можно записать следующим образом:

$$\rho_0 D = \rho c_J \iff \frac{D}{v_0} = \frac{c_J}{v_J},\tag{4.8}$$

откуда следует, что в точке ЧЖ угловые коэффициенты (4.5) и (4.6) совпадают. Таким образом, прямая Михельсона  $AH_1$  является касательной к детонационной адиабате в точке ЧЖ. Подчеркнём, что это верно в случае стационарной ДВ.

Переходя от точки  $H_1$  к точке J вдоль прямой Михельсона (рис. 4.4), мы проходим разные сечения в области ДВ. В сечениях, которые находятся вблизи фрона УВ (точка  $H_1$ ), доля ПД меньше чем исходного непрореагировавшего ВВ, а также выделилось малое количество тепла. В сечениях, которые находятся вблизи поверхности ЧЖ (точка J), наоборот, исходное ВВ почти полностью перешло в ПД, и выделилась практически вся теплота реакции. Область реакции  $H_1J$  с повышенным относительно  $p_J$  давлением, также называют *химпиком*.

Если УВ переводит исходное ВВ в точку  $H_2$  (рис. 4.4), т.е. состояние с большим давлением, чем давление в состоянии  $H_1$ , то возникнет т. н. *пересжатая детонационная волна*. Поскольку угловой коэффициент для прямой Михельсона  $AH_2$  больше, чем для  $AH_1$ , то скорость  $D_2$  пересжатой ДВ больше, чем скорость D стационарной ДВ. Область реакции пересжатой ДВ соответствует отрезку  $H_2N$  прямой Михельсона  $AH_2$ , т. е. в точке ЧЖ N реакция завершилась и выделилось полное количество тепла реакции. Очевидно, что угловой коэффициент прямой  $AH_2$  меньше, чем угловой коэффициент касательной к детонационной адиабате в точке N, т.е. скорость звука в плоскости ЧЖ пересжатой ДВ больше, чем скорость самой ДВ и условие ЧЖ примет вид  $D_2 < u_J + c_J$ . Следовательно, волна разрежения начнёт распространяться по области ДВ, уменьшая её скорость  $D_2$ , давление и, как следствие, скорость звука. Это будет происходить до тех пор, пока скорость звука в точке N и скорость  $D_2$  не выровняются (точка N перейдёт в точку J) и ДВ начнёт распространяться с постоянной скоростью  $D = u_J + c_J$ . То есть, пересжатая ДВ является нестационарной – затухающей, но на достаточной длине заряда всегда переходит в стационарную ДВ (предполагается, что диаметр заряда больше предельного).

Если бы за УВ  $H_2$  химическая реакция закончилась в точке M, то условие ЧЖ в этом сечении было бы  $D > u_J + c_J$ , т.е. фронт ДВ будет уходить от волн разрежения и её область будет расширяться, что не противоречит устойчивому режиму детонации. Такой режим детонации также будет нестационарным. Но при переходе из состояния ПД, соответствующего точке N, в состояние ПД, соответствующее точке M, необходимо добавочное выделение тепла, сверх того количества тепла  $Q_{\rm взр}$ , которое выделилось во время химической реакции (участок  $H_2N$ , рис. 4.4). Поскольку эту добавочную энергию взять негде, то режим детонации, соответствующий точке M, нельзя осуществить при ударно-волновом режиме инициирования. Детонация на участке LM называется *недосжатой*.

Мы показали, что при устойчивом режиме детонации всегда осуществляется условие Чепмена-Жуге (в [5] можно найти более строгое доказательство этого утверждения).

Для расчета параметров ДВ, которыми являются параметры в точке ЧЖ, необходимо решить систему уравнений:

$$\rho_0 D = \rho_J (D - u_J);$$
  

$$p_J - p_0 = \rho_0 D u_J;$$
  

$$E_J - (E_0 + Q_{\text{B3p}}) = \frac{1}{2} (p_J + p_0) (v_0 - v_J);$$
  

$$- \left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = \frac{p_J - p_0}{v_J - v_0},$$
(4.9)

где скорость детнационной волны D можно считать известной, поскольку её достаточно легко определяют в эксперименте, например, с помощью контактных датчиков; уравнения состояния  $E = E(\rho, p)$ исходного BB и ПД считаются заданными. Точность построения этих УрС существенно влияет на расчет параметров ДВ.

Наиболее простым случаем является рассмотрение взрывного газа как совершенного газа, подчиняющегося уравнению pv = RT с постоянной теплоёмкостью ПД. В этом случае внутренняя удельная энергия

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho(k-1)},$$

где k – показатель изоэнтропы (адиабаты Пуассона).

Полная система уравнений (4.9) для совершенного взрывчатого газа запишется в следующем виде:

$$\rho_0 D = \rho_J (D - u_J);$$
  

$$p_J - p_0 = \rho_0 D u_J;$$
  

$$\frac{p_J}{\rho_J (k-1)} - \frac{p_0}{\rho_0 (k-1)} = \frac{1}{2} (p_J + p_0) (v_0 - v_J) + Q_{\text{B3D}}; \quad (4.10)$$
  

$$- \left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = \frac{p_J - p_0}{v_J - v_0};$$
  

$$p_J = \rho_J R T_J.$$

Считая в системе (4.10) известными  $\rho_0$ ,  $p_0$ , Q, k из пяти уравнений можно определить пять неизвестных –  $\rho_J$ ,  $p_J$ ,  $u_J$ , D,  $T_J$ . Из уравнений (4.10) для сильной волны ( $p_0 \ll p_J \Rightarrow p_0 \approx 0$ ) можно получить

$$D = \sqrt{2(k^2 - 1)Q}, \qquad (4.11)$$

а также уравнения для давления, плотности и скорости:

$$p_J = \frac{\rho_0 D^2}{k+1}, \ u_J = \frac{D}{k+1}, \ \rho_J = \rho_0 \frac{k+1}{k}.$$
 (4.12)

При детонации взрывчатых газов свойства исходного газа и свойства продуктов детонации различны (различные уравнения состояния), что требует для точного расчёта рассматривать вопросы, связанные с химической реакцией взрывчатого газа в детонационной волне.

В конденсированных ВВ всегда можно считать, что  $p_0 \ll p_J$ , поэтому для отыскания их параметров детонации можно в системе (4.9) принять  $p_0 = 0$ .

Любое уравнение изоэнтропы можно представить в дифференциальной форме:

$$k = -\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln v}\right) = -\frac{v}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right),\tag{4.13}$$

где показатель изоэнтропы k в общем случае есть  $k = k(\rho)$ .

Из (4.13) производная  $(\partial p/\partial v)_S$  в точке J равна

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_J = -\left(\frac{D}{v_0}\right)^2 = -\frac{p_J k_J}{v_J}.$$
(4.14)

Подставим эту производную в 4-е уравнение (4.9), в результате получим

$$\frac{\rho_J}{\rho_0} = \frac{k_J + 1}{k_J}.$$
(4.15)

Используя (4.15) в 1-м и 2-м уравненях (4.9), получим

$$p_J = \frac{\rho_0 D^2}{k_J + 1}, \ u_J = \frac{D}{k_J + 1}.$$
 (4.16)

Уравнения (4.15), (4.16) не зависят от вида уравнения состояния и имеют поэтому одинаковый вид как для конденсированных BB, так и для совершенного взрывчатого газа (4.12).

На основе современных опытных данных известно, что показатель изоэнтропы в точке Жуге для конденсированных ВВ  $k_J \approx$  2.5–3.5, среднее значение  $k_{Jcp} \approx$  3. В этом случае уравнения (4.15), (4.16) примут вид

$$\frac{\rho_J}{\rho_0} = \frac{4}{3}, \ p_J = \frac{\rho_0 D^2}{4}, \ u_J = \frac{D}{4}.$$
 (4.17)

# 4.3 Уравнения состояния и изоэнтропы продуктов взрыва конденсированных BB

УрС продуктов взрыва входит в систему дифференциальных уравнений движения (4.9). Решение прикладных задач течения продуктов взрыва и взаимодействия детонационных волн с окружающей средой требует, следовательно, достаточно точного знания УрС продуктов взрыва. Для решения задач такого рода достаточно задать УрС в виде  $E = E(\rho, p)$ .

Для расчетов параметров детонационной волны –  $p_J$ ,  $\rho_J$ , D,  $u_J$  – достаточно задания УрС в виде  $E = E(\rho, p)$ , для расчета температуры в точке Чепмена-Жуге  $T_J$  необходимо задание термического УрС  $p = p(\rho, T)$  или УрС в виде  $E = E(\rho, s)$ , где s – удельная энтропия.

Уравнение состояния «холодных» ВВ. Реакция твердых непрореагировавших («холодных») ВВ на динамические нагрузки подобна реакции обычных твердых тел, т.е. к ним применимы уравнения состояния, разработанные для описания инертных сплошных сжимаемых сред.

BB	Химическая формула	$ ho_{c\pi\pi},$	$Q_{\text{взр}},$
		$ m \Gamma/cm^3$	кДж/г
Тротил (ТНТ)	$C_6H_2CH_3(NO_2)_3$	1.68	4.23
Гексоген	$C_3H_6O_6N_6$	1.83	5.53
Октоген	$C_4H_8O_8N_8$	1.95	5.41
ТЭН	$C(CH_2ONO_2)_4$	1.77	5.87
Тетрил	$C_6H_2(NO_2)_3N < \frac{NO_2}{CH_3}$	1.78	4.86

Таблица 2 — Характеристики некоторых индивидуальных BB [5]

Из огромного числа систем, потенциально способных к быстрым экзотермическим реакциям, выделим ряд нитросоединений, получивших наибольшее распространение как в качестве индивидуальных BB, так и взрывчатых смесей. Химическая формула, плотность сплошного вещества  $\rho_{\rm спл}$  и теплота взрыва  $Q_{\rm взр}$  для них приведены в табл. 2.

Реальные взрывчатые составы имеют плотность, меньшую плотности сплошного вещества, т. е. всегда обладают пористостью. Наличие пористости сказывается на упругих и прочностных характеристиках ВВ и определяет их структуру, что играет определяющую роль в механизме возбуждения детонации импульсными силовыми нагрузками. Скорости звука (объемная  $c_B$ , продольная  $c_L$  и поперечная  $c_t$ ) при нормальных условиях для ряда ВВ даны в табл. 3.

По известным значениям скоростей звука и соотношениям теории упругости вычисляются упругие характеристики «холодных» ВВ: модуль объемного сжатия K, модуль Юнга E, модуль сдвига

BB	ρ <sub>0</sub> ,	$c_B,$	$c_L,$	$c_t$ ,	ν	K,
	$\Gamma/cm^3$	км/с	км/с	км/с		ГПа
THT	1.635	2.08	2.586	1.33	0.32	7.07
Гексоген	1.8	2.61	3.36	1.83	0.288	12.26
ТЭН	1.72	2.24	2.22	1.48	0.309	8.63
Тетрил	1.68	1.76	2.27	1.24	0.286	5.2
$T\Gamma 40/60$	1.73	2.42	3.12	1.71	0.287	10.11

Таблица 3 — Скорость звука при нормальных условиях в ВВ [5]

*G* и коэффициент Пуассона v:

$$K = \rho_0 c_B^2; \ E = 3K \left(1 - 2\nu\right); \ G = \frac{3\left(1 - 2\nu\right)}{2\left(1 + \nu\right)} K;$$
$$\nu = \frac{3 - f_c}{3 + f_c}, \ f_c = \left(\frac{c_L}{c_B}\right)^2. \tag{4.18}$$

Значения двух из этих характеристик –  $\nu$  и K – также приведены в табл. 3. В многокомпонентных взрывчатых составах упругие константы представляют собой сложную функцию свойств отдельных компонентов и их концентраций.

Ударные адиабаты «холодных» ВВ в D - u плоскости в большинстве случаев в достаточно широком интервале значений массовой скорости u, как и для многих инертных материалов, могут быть представлены в виде линейной D - u зависимости:  $D = c_0 + \lambda u$ . Значения  $c_0$  и  $\lambda$  для некоторых ВВ, в том числе сильнопористых (большой коэффициент пористости  $k = \rho_{\text{спл}}/r_0$ ), представлены в табл. 4. Как и для металлов, в ВВ скорость ударной волны D при заданном u растет с повышением начальной плотности.

Переход от кинематических величин к термодинамическим осуществляется с помощью законов сохранения, записанных для плоской УВ (3.1), (3.2) и (3.7), в которых пренебрегают давлением перед волной, а за волной вместо давления  $p_2$  используется  $\sigma_x$  – напряжение в направлении распространения УВ.
BB	$ ho_0,  m r/cm^3$	$c_0$ , км/с	λ
THT	1.674	2.33	2.05
	1.63	2.57	1.88
	1.00	0.3	1.85
	0.78	0.3	1.55
$T\Gamma 40/60$	1.73	2.71	1.86
Гексоген	1.8	2.87	1.61
	1.54	1.1	2.4
	1.0	0.4	2.0
Тетрил	1.73	2.17	1.91
	0.86	0.35	1.73
	0.82	0.37	1.9
ТЭН	1.77	2.42	1.91
	1.75	2.26	2.32
	1.6	1.32	2.58
	0.82	0.47	1.91

Таблица 4 — D-uзависимости «холодных» ВВ

Для практических целей УрС холодного ВВ удобно задавать в форме Ми-Грюнайзена (1.29), в котором  $\Gamma \approx 0.7 - 1.0$ . В расчетах, как правило, имея в виду сравнительно узкий диапазон реализующихся плотностей, для  $p_x(\rho)$  используют простые аналитические формы зависимости (1.30).

Сравнительно немногочисленные экспериментальные исследования показывают, что высокоплотные конденсированные BB при ударно-волновом нагружении могут приближенно рассматриваться как упругопластические среды с динамическим пределом текучести  $Y_{\rm d} \approx 0.1$  ГПа.

Уравнение состояния продуктов взрыва. После окончания химической реакции (точка Жуге) молекулы H<sub>2</sub>O, N<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, CO, H<sub>2</sub> и другие, из которых состоят продукты взрыва, упакованы более плотно, чем до взрыва. Действительно, в точке Жуге продукты взрыва имеют плотность в 1.3 раза выше плотности исходного холодного BB, т. е.  $\rho$  достигает  $\approx 2.3-2.5$  г/см<sup>3</sup>. Таким образом, продукты взрыва в точке Жуге представляют собой газ очень большой начальной плотности (в 2000 раз! выше плотности воздуха при нормальных условиях), находящийся под давлением в несколько десятков гигапаскалей и разогретый до температуры  $T \approx (3-5) \cdot 10^3$  К. В таком состоянии, как и для твердого тела, термодинамические свойства продуктов взрыва, находящих-ся в термодинамическом равновесии, определяются потенциальным взаимодействием плотно сжатых молекул и их тепловыми колебаниями. Следовательно, можно представить, что

$$p = p_x(\rho) + p_T(\rho, T),$$
 и  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_T.$ 

Описать поведение реальных газов при указанных выше условиях невозможно без учета межмолекулярного взаимодействия и собственного объема молекул. При этом упругие составляющие в давлении и энергии могут быть того же порядка, что и тепловые составляющие, как в состоянии Жуге, так и при давлениях ниже  $p_J$ . Следовательно, при не слишком большом расширении нельзя пренебречь ни упругим взаимодействием, ни тепловым движением молекул.

В настоящее время для реальных газов известно более 150 версий УрС, которые могут быть в принципе применимы для построения УрС продуктов взрыва. Причиной существования такого большого количества УрС является ограниченность области их применения, что связано с физическим содержанием того или иного УрС. Рассмотрим основные типы УрС продуктов взрыва.

Большую группу представляют коволюмные, т. е. УрС, учитывающие собственный объем молекул. Остановимся кратко на типичных.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{4.19}$$

где b – коволюм (собственный объем молекул), слагаемое  $\frac{a}{v^2}$  учитывает притяжение между молекулами при низких давлениях.

Уравнение Бертло

$$\left(p + \frac{a}{v^2 T}\right)(v - b) = RT, \qquad (4.20)$$

учитывает снижение давления при повышении температуры.

Уравнение Абеля

$$p(v-b) = RT, (4.21)$$

где b – переменный коволюм: b = b(P) или b = b(V). Уравнение Эйринга

$$\frac{pv}{RT} = \frac{1}{1 - k(b/v)^{1/3}},\tag{4.22}$$

где k – параметр, зависящий от способа упаковки продуктов взрыва.

УрС коволюмного типа отражают реальное состояние газов при низких давлениях в продуктах взрыва:  $p \approx 1 - 10$  МПа.

Вторую группу УрС продуктов взрыва составляют вириальные УрС, общий вид которых может быть записан в форме степенного ряда

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \frac{D(T)}{v^3} + \dots,$$
(4.23)

где второй вириальный коэффициент B отвечает взаимодействию двух молекул, третий вириальный коэффициент C – взаимодействию трех молекул и т. д. При низких давлениях и температурах свойства газов определяются первыми двумя членами в правой части приведенного выше уравнения. При этом коэффициент B(T) может быть вычислен методами статистической механики. Для коволюмных и вириальных УрС реального газа характерно, что при снижении температуры  $T \to 0$  давление  $p \to 0$ , т. е. давление полностью имеет тепловое происхождение.

Точный теоретический расчет УрС продуктов взрыва в широком диапазоне плотностей и температур даже при известных потенциалах взаимодействия в общем случае затруднен из-за сложности вычисления статистических сумм и неаддитивности потенциалов взаимодействия.

По этим причинам при построении УрС продуктов взрыва конденсированных ВВ теоретические представления о свойствах продуктов взрыва сочетаются с соответствующими экспериментальными данными. То есть УрС тестируется по параметрам детонации ВВ, полученным экспериментально. Такие УрС называются *полуэмпирическими*.

Широкое распространение в термодинамических расчетах детонации конденсированных ВВ получил полуэмпирический УрС Беккера–Кистяковского–Вильсона (БКВ), который имеет вид

$$\frac{pv}{RT} = 1 + Xe^{\beta X}, \ X = \frac{\chi \sum_{i} x_i k_i}{v(T+\theta)^{\alpha}} = \frac{k}{v(T+\theta)^{\alpha}},$$
(4.24)

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $\theta$  – подгоночные параметры;  $x_i$  – мольная доля компоненты;  $k_i$  – геометрические коволюмы газообразных компонентов продуктов взрыва, определяемые из их адиабат Гюгонио или вычисляемые как объем, занимаемый молекулой, вращающейся вокруг центра масс. Из представленной выше формулы следует, что коволюм k приближенно представляет собой сумму (со статвесами) коволюмов различных видов молекул, входящих в продукты взрыва. Уравнение БКВ получено путем введения потенциала отталкивания типа  $U = \frac{A}{r^n}$  в уравнение с вириальными коэффициентами (учитываются только первых два члена) и заменой ряда экспоненциальной зависимостью.

Значительное развитие получил метод построения УрС продуктов взрыва конденсированных ВВ, заключающийся в том, что термический и калорический УрС –  $p = p(\rho, T)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$  – задаются в таком же виде, как и для твердых и жидких тел. Это означает, что тепловое движение молекул продуктов взрыва носит колебательный характер, а не представляет собой свободное перемещение частиц, как в ранее рассмотренных моделях. Если считать теплоемкость продуктов взрыва постоянной величиной, то функции  $p = p(\rho, T)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$  приобретают простой вид

$$p = p_x(\rho) + \Gamma \rho c_V T;$$
  

$$\varepsilon = \varepsilon_x(\rho) + c_V T.$$
(4.25)

Исключив из этих уравнений член  $c_V T$ , получим УрС в виде

$$p - p_x = \Gamma \rho(\varepsilon - \varepsilon_x). \tag{4.26}$$

Дифференцируя (4.26) по  $\varepsilon$  при v = const имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_v = \rho \Gamma.$$

Интегрируя это соотношение, имея в виду, что  $\rho=1/v$  и  $\Gamma=const,$  получаем

$$\int_{p_{\rm H}}^{p} dp = \Gamma \rho \int_{\varepsilon_{\rm H}}^{\varepsilon} d\varepsilon$$
 или  $p - p_{\rm H} = \Gamma \rho (\varepsilon - \varepsilon_{\rm H}),$  (4.27)

где индексом «н» обозначено начальное состояние. В качестве начальных данных  $p_{\rm H}(v)$  и  $\varepsilon_{\rm H}(v)$  можно взять любую зависимость, называемую опорной, например нулевую изотерму, изэнтропу, ударную адиабату.

В общем случае коэффициент Грюнайзена Г не является постоянной величиной. При постоянной теплоемкости Г является функцией плотности  $\rho$ . Для продуктов взрыва конденсированных ВВ значение Г меняется от  $\Gamma_0$  при малой плотности продуктов взрыва, которые можно рассматривать как идеальный газ, до  $\Gamma \approx 0.7 - 1.0$  при высокой плотности продуктов взрыва. Если принять  $\Gamma = \Gamma(\rho)$ , то УрС продуктов взрыва записывается в форме

$$p = p_x(\rho) + \rho \Gamma(\rho) c_V T;$$
  

$$\varepsilon = \varepsilon_x(\rho) + c_V T$$
(4.28)

или в виде

$$p - p_{\rm H} = \rho \Gamma(\rho) (\varepsilon - \varepsilon_{\rm H}). \tag{4.29}$$

На основе (4.29) построено полуэмпирическое УрС Джонса–Вилкинса–Ли (JWL), которое широко применяется для расчетов параметров и движения ПД:

$$p = A\left(1 - \frac{\omega}{R_1 V}\right) \exp\left\{-R_1 V\right\} + B\left(1 - \frac{\omega}{R_2 V}\right) \exp\left\{-R_2 V\right\} + \frac{\omega E}{V},$$
(4.30)

где  $V = \rho_0 / \rho$ ;  $A, B, R_1, R_2, \omega$  – эмпирические константы (значения которых для ряда BB можно найти в [5]), E – внутренняя энергия в единице объёма.

УрС (4.29) можно записать в более общем виде:

$$p = p_x - \rho \Gamma(\rho) \varepsilon_x + \rho \Gamma(\rho) \varepsilon, \qquad (4.31)$$

$$p = a + b\varepsilon, \ a = p_x - b\varepsilon_x, \ b = \rho\Gamma(\rho).$$
 (4.32)

Существуют различные подходы к определению  $a(\rho)$  и  $b(\rho)$  на основе экспериментальных данных.

## 4.4 Параметры состояния продуктов взрыва за детонационной волной

Построим аналитическое решение задачи течения продуктов взрыва за фронтом плоской нормальной детонационной волны для случая, когда изэнтропа продуктов взрыва имеет вид  $p = A\rho^k$  (n = const). Пусть инициирование полубесконечного слоя конденсированного ВВ происходит в плоскости x = 0 в момент t = 0 (рис. 4.5). Слева от плоскости x = 0 находится вакуум. Исследуем возникающее течение.

Область ДВ движется с постоянной скоростью D. На её границе с ПД, которая одновременно является фронтом ВР в ПД, поддерживаются постоянные значения параметров состояния  $p = p_J$ ,  $\rho = \rho_J$ ,  $u = u_J$ , которые соответствуют точке ЧЖ. То есть можно сказать,



Рис. 4.5.

что течение в ПД граничит с областью постоянного потока. Это означает, что течение в ПД является простой римановской волной. Поскольку по условию задачи все  $C^+$ -характеристики этой волны выходят из точки x = 0, то это центрированная волна разрежения.

Параметры в области такой волны описываются аналогично (2.80):

$$x = (u+c)t,$$
  

$$u - \frac{2}{k-1}c = const.$$
(4.33)

Второе уравнение (4.33) есть условие того, что во всей области волны постоянен  $J^-$  инвариант. Константу определяем по параметрам в плоскости Чепмена-Жуге:

$$u - \frac{2}{k-1}c = const = u_J - \frac{2}{k-1}c_J.$$
(4.34)

Таким образом получим выражение для скорости звука:

$$c = \frac{k-1}{2}(u-u_J) + c_J.$$
(4.35)

Подставляя в (4.35) выражения для  $u_J = \frac{D}{k+1}, c_J = \frac{kD}{k+1}$ , получим

$$c = \frac{k-1}{2}u + \frac{D}{2}.$$
 (4.36)

Подставляя (4.36) в уравнение  $C^+$ -характеристик в (4.33), находим зависимость массовой скорости от x и t:

$$\frac{x}{t} = \frac{k+1}{2}u + \frac{D}{2}$$
или  $u = \frac{2}{k+1}\left(\frac{x}{t} - \frac{D}{2}\right).$  (4.37)

Соответственно для скорости звука cиз уравнений (4.36) и (4.37) следует

$$c = \frac{k-1}{k+1}\frac{x}{t} + \frac{D}{k+1}.$$
(4.38)

Используя уравнение изэнтропы ПД  $p = A \rho^k$ , можно получить соотношения

$$\frac{p}{p_J} = \left(\frac{\rho}{\rho_J}\right)^k; \ \frac{\rho}{\rho_J} = \left(\frac{c}{c_J}\right)^{\frac{2}{k-1}}; \ \frac{p}{p_J} = \left(\frac{c}{c_J}\right)^{\frac{2k}{k-1}}.$$
(4.39)

Подставляя в (4.39) выражение скорости звука из (4.38), определяем давление и плотность в волне расширения.

Из уравнений (4.37), (4.38) видно, что все величины, определяющие течение продуктов взрыва, зависят от автомодельной переменной  $\frac{x}{t}$ . Течение продуктов взрыва в волне расширения носит автомодельный характер: волна растягивается с течением времени, не изменяясь по форме, и при одинаковых значениях переменной  $\frac{x}{t}$  все величины будут иметь неизменные значения, определяемые формулами (4.37)–(4.39).



Рис. 4.6.

В практически важном случае k = 3 соотношения (4.37)–(4.39) переходят в следующие выражения:

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{t} - \frac{D}{2} \right); \quad c = \frac{1}{2} \frac{x}{t} + \frac{D}{4};$$
  

$$\frac{\rho}{\rho_J} = \frac{c}{c_J} = \frac{1}{c_J} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{t} + \frac{D}{4} \right)$$
  

$$\frac{p}{p_J} = \left( \frac{c}{c_J} \right)^3 = \frac{1}{c_J^3} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{t} + \frac{D}{4} \right)^3.$$
  
(4.40)

На хвосте волны расширения в вакуум c = 0 и  $\rho = 0$ . Из второго уравнения системы (4.40) получаем уравнение линии разлета

$$\frac{x}{t} = -\frac{Dt}{2}.$$

Следовательно, максимальная скорость разлета продуктов взрыва назад в вакуум равна  $u_{\text{вак}} = -\frac{D}{2}$ . С линией  $x = -\frac{Dt}{2}$  совпадают, очевидно, крайняя  $C^+$ -характеристика и  $C^-$ -характеристика, выходящая из точки инициирования x = 0.

На фронте волны x=Dt. Таким образом, ширина волны расширения Xравна  $\frac{3}{2}Dt.$ Существует такая линия, на которой u=0. По



Рис. 4.8.

первому уравнению системы (4.40) скорость u обращается в нуль при  $x = \frac{Dt}{2}$ , т. е. на середине расстояния, пройденного детонационной волной. Профили  $u, c, \rho$  и p за фронтом детонационной волны показаны на рис. 4.6 для k = 3. Из системы уравнений (4.40) следует, что массовая скорость, скорость звука и плотность меняются по линейному закону, а давление – по степенному закону. При  $k \neq 3$ , как видно из уравнений (4.37)–(4.39), по линейному закону изменяются u и c, а плотность и давление изменяются по степенному закону.

Исследуем далее течение продуктов взрыва при детонации у жесткой стенки (рис. 4.7). На жесткой стенке (x = 0) выполняется граничное условие u = 0. Возникающее течение, как и в случае детонации у открытого конца, представляет собой простую волну. Картина течения в x - t плоскости показана на рис. 4.8 для степенной изэнтропы с k = 3. Область 1 является областью нестационарного течения, область 2 – областью постоянного течения. Решение для области 1 получено выше – формулы (4.37)–(4.39). Используя выражение для u и граничное условие u = 0, находим

границу областей 1 и 2:

$$\frac{x}{t} - \frac{D}{2} = 0; \ x = \frac{Dt}{2}$$

Следовательно, в области, ограниченной плоскостями x = 0 и  $x = \frac{Dt}{2}$ , массовая скорость равна нулю, т. е. продукты взрыва покоятся. Подставляя значение u = 0 в  $J^-$ -инвариант, постоянный во всем течении ПД, находим скорость звука в области 2:

$$u - C = -\frac{D}{2}, \ c = \frac{D}{2}.$$

Таким образом, везде в области 2 выполняются равенства

$$u = 0, \ c = \frac{D}{2}.$$
 (4.41)

Поскольку  $\rho \sim C$  и  $p \sim c^3$ , то в области 2 будут постоянными также плотность и давление. Найдем значения  $\rho$  и p в области 2 (k = 3):

$$\frac{\rho}{\rho_J} = \frac{c}{c_J} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{p}{p_J} = \left(\frac{\rho}{\rho_J}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$
(4.42)

Распределения  $\rho$ , p, c, u в рассматриваемом случае, характеризующиеся наличием перехода от стационарного режима к нестационарному в точке  $x = \frac{Dt}{2}$ , показаны на рис. 4.9.

Определим зависимость параметров течения во второй области от показателя изэнтропы k, воспользовавшись полученными решениями. Из формулы (4.37) следует, что положение плоскости, в которой u обращается в ноль, равно  $x = \frac{Dt}{2}$  и не зависит от величины n. Скорость звука в этой плоскости и, следовательно, во всей



Рис. 4.9.

области постоянного течения также не зависит от n и равна  $\frac{D}{2}$  по выражению (4.36). Однако плотность продуктов взрыва  $\rho_{\Pi}$  и давление  $p_{\Pi}$  в области постоянного течения зависят от n, а именно:

$$\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_{J}} = \left(\frac{p_{\Pi}}{p_{J}}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad \frac{p_{\Pi}}{p_{J}} = \left(\frac{D(n+1)}{2Dn}\right)^{\frac{2n}{n-1}} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}$$

Результаты расчетов  $\rho_{\Pi}$  и  $p_{\Pi}$  в области постоянного течения как функции *n* приведены в табл. 5. Из таблицы видно, что отношение  $\frac{p_{\Pi}}{p_{J}}$  весьма слабо зависит от *n*. В то же время отношение  $\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_{J}}$  изменяется с *n* достаточно сильно.

n	$ ho_{\pi}/ ho_{J}$	$p_{\pi}/p_J$
3.0	0.67	0.3
1.66	0.51	0.33
1.4	0.46	0.34
1.2	0.42	0.35

Таблица 5 — Характеристики области постоянног<u>о течения</u>

## 4.5 Теплота взрыва и некоторые методы её расчета

Говоря более общими словами, теплота взрыва – это теплота химической реакции. Пусть в результате химической реакции исходная смесь, содержащая  $v_i$  моль веществ  $A_i$ , переходит в продукты реакции, содержащие  $v'_j$  моль веществ  $A'_j$ . Выделившееся (или поглотившееся) в таком процессе тепло (после медленного охлаждения смеси до начальной температуры) называется *теплотой реакции*. Применим к этому процессу первый закон термодинамики, согласно которому тепло, выделившееся в системе, равно

$$-dQ = dE + pdV = dH - pdV.$$

$$(4.43)$$

Если реакция происходит при постоянном давлении, т. е. dP = 0, находим, что теплота реакции равна  $Q = -\int dH = -\Delta H$  – разности полных энтальпий системы в начальном и конечном состояниях. Если же реакция произошла в закрытом объеме (именно таким образом проводятся калориметрические эксперименты для определения стандартных теплот реакций), то dV = 0 и теплота реакции при постоянном объеме выражается как

$$Q = -\int dE = -\Delta E.$$

В зависимости от того, выделяется (Q > 0) или поглощается (Q < 0) тепло в ходе химического превращения, различают экзотермические и эндотермические реакции.

Так как полная энтальпия смеси газов равна сумме теплосодержаний всех ее компонентов, то

$$Q = -\left(\sum_{j} \nu'_{j} H'_{j} - \sum_{i} \nu_{i} H_{i}\right),\,$$

где  $H_i$  и  $H'_j$  – энтальпия, приходящаяся на моль *i*-го исходного вещества и *j*-го продукта реакции.

Поскольку в рассматриваемом процессе приток тепла является полным термодинамическим дифференциалом, то теплота реакции не зависит от пути, по которому идет процесс. В частности, если осуществить процесс в несколько стадий, то теплота реакции будет равна сумме теплот, выделившихся на каждой стадии процесса (т. н. закон Гесса). Это обстоятельство используют для расчета теплоты реакции следующим образом. Пусть в исходной смеси сначала идут реакции разложения каждого компонента на составляющие его элементы, находящиеся в некотором определенном (стандартном) состоянии, а затем эти элементы, соединяясь, образуют продукты реакции. Введем стандартную теплоту образования *i*-го вещества  $\Delta H_{*i}$  как взятую с обратным знаком теплоту реакции, в которой образуется один моль *i*-го вещества из составляющих его элементов, находившихся в стандартном состоянии. Тогда теплота реакции, происходящей в стандартных условиях (обычно P=1 атм,  $T=25^{\circ}$ С)

$$Q = -\Delta H_* = -\left(\sum_j \nu'_j \Delta H'_{*j} - \sum_i \nu_i \Delta H_{*i}\right)$$

Стандартные энтальпии образования некоторых веществ приведены в табл. 6. Стандартным состоянием элемента считается его термодинамически равновесное состояние в стандартых условиях (например, для водорода молекула  $H_2$ , для кислорода  $O_2$  или графит в случае углерода C). При этом его  $\Delta H_*$  принимается равной нулю.

Для оценки стандартной теплоты образования можно пользоваться значениями энергий разрыва химических связей. Энергия

		L /	1
		$\Delta H_*,$	
Вещество	μ	ккал/моль	
(г) - газ; (ж) - жидкость		p = const	v = const
Атом кислорода О (г)	16	59.5	
Молекула кислорода О <sub>2</sub> (г)	32	0	0
Атом водорода Н (г)	1	52.1	
Молекула водорода Н <sub>2</sub> (г)	2	0	0
Вода Н <sub>2</sub> О (г)	18	-57.8	-57.5
Н <sub>2</sub> О (ж)	18	-68.3	-67.5
Атом азота N (г)	14	113.0	
Молекула азота $N_2$ (г)	28	0	0
Углерод С (г)	12	171.0	
$C_2(\Gamma)$	24	198.0	
графит	12	0	0
Окись углерода СО (г)	28	-26.4	-26.7
Углекислый газ СО <sub>2</sub> (г)	44	-94.0	-94.0
Окись азота NO (г)	30	21.6	21.6
Двуокись азота NO <sub>2</sub> (г)	46	8.0	8.3
Аммиак NH <sub>3</sub> (г)	17	-11.0	-10.4
Метан $CH_4$ (г)	16	-17.9	-17.2
Тротил $C_6H_2(NO_2)_3CH_3$	227	-14.2	-10.1
Гексоген $(CH_2NNO_2)_3$	222	17.1	22.3
Тетрил	287	8.0	13.3
$C_6H_2(NO_2)_3NNO_2CH$			
TƏH $C(CH_2ONO_2)_4$	316	-127.0	-120.0
Селитра NH <sub>4</sub> NO <sub>3</sub>	80	-87.4	-84.7
Al <sub>3</sub> O <sub>3</sub>	92		-398

Таблица 6 — Энтальпии образования некоторых веществ из элементов в стандартных состояниях [10; 11]

Реакция	ккал  МОЛЬ	Реакция	ккал  моль
$H_2 \rightarrow 2H$	103.3	$C_2 \rightarrow 2C$	144.6
${\rm HO}  ightarrow {\rm H+O}$	110.0	$C\equiv CH \rightarrow C+CH$	191.0
${\rm H_2O}  ightarrow {\rm OH+H}$	119.2	$HC\equiv CH \rightarrow 2CH$	230.0
$H_2O_2 \rightarrow 2OH$	56.0	$H_2C\equiv CH \rightarrow CH_2 + CH$	170.3
$N_2 \rightarrow 2N$	225.9	$H_2C\equiv CH_2 \rightarrow 2CH_2$	170.2
$\mathrm{NH}  ightarrow \mathrm{N+H}$	74.9	$\mathrm{CH}  ightarrow \mathrm{C+H}$	81.0
$\mathrm{NH}_3  ightarrow \mathrm{NH}_2 + \mathrm{H}$	104.7	$\mathrm{HCO} \rightarrow \mathrm{CO+H}$	18.5
$NO \rightarrow N+O$	150.9	${ m HCN}  ightarrow { m H+CN}$	122.0
$\rm NO_2 \rightarrow N+O_2$	105.0	$\rm CH_4 \rightarrow \rm CH_3 + \rm H$	104.0
$NO_2 \rightarrow NO+O$	73.1	$HC\equiv CH \rightarrow C_2H + H$	120.0
$N_2O \rightarrow NO+N$	40.0	$\mathrm{C_2H_6} \rightarrow \mathrm{C_2H_5} + \mathrm{H}$	98.0
$O_2 \rightarrow 2O$	118.0	$\rm CO \rightarrow C+O$	257.2
$O_3 \rightarrow O_2 + O$	25.6	$\rm CO_2 \rightarrow \rm CO{+}O$	127.2
$\rm HCO \rightarrow CH+O$	194.3	$\mathrm{CN}  ightarrow \mathrm{C+N}$	181.9
$\rm HCN \rightarrow CH+N$	194.3	$Cl_2 \rightarrow 2Cl$	58.0

Таблица 7 — Энергия разрыва связей [10]

разрыва химической связи (или энергия связи) есть та энергия, которую нужно затратить, чтобы отделить друг от друга (развести на большое расстояние) два атома (или две группы атомов), соединенные этой связью. С помощью значений энергий связей, пользуясь законом Гесса, можно вычислить теплоты образования различных соединений из свободных атомов и, следовательно, найти теплоты химических реакций. Значения энергий связей (в стандартных условиях) приводятся в табл. 7.

Для примера рассчитаем теплоту реакции  $2H_2+O_2=2H_2O$ . Теплоты образования исходных веществ ( $H_2$  и  $O_2$ ) равны нулю, а теплота образования молекулы воды равна 57.8 ккал/моль; таким образом, находим, что теплота реакции, проходящей в стандартных условиях, равна  $Q = -(-2 \cdot 57.8 - 0) = 115.6$  ккал/моль. Для реакции  $2CO+O_2=2CO_2$ : теплоты образования CO,  $O_2$  и CO<sub>2</sub> равны

-26.4, 0 и -94 ккал/моль соответственно, поэтому теплота реакции  $Q = -(-2 \cdot 94 + 2 \cdot 26.4) = 135.2$  ккал/моль.

Чтобы использовать для расчета теплоты реакции значения энергий связей, будем считать, что реакция проводится следующим образом. Сначала разрываются химические связи в исходных веществах, т. е. две связи Н–Н и одна связь О–О; согласно данным табл. 7 при этом затрачивается энергия 2·103.3+118.0=324.6 ккал/моль. Затем из образовавшихся четырех атомов водорода и двух атомов кислорода образуются две молекулы воды; при этом происходит образование четырех связей О–Н, сопровождающееся выделением энергии 4·110=440 ккал/моль. Таким образом, теплота реакции равна 440—324.6=115.4 ккал/моль. Это значение хорошо согласуется со значением, полученным выше с помощью данных табл. 6.

В общем случае энергия связи двух атомов зависит от того, в какой молекуле находятся эти атомы, т. е. от того, с какими атомами или группами атомов они связаны. Примером является значение энергии связи С–Н в различных предельных углеводородах.

В таблице энтальпий встречаются как положительные (нужно затратить энергию для получения данного вещества из элементов в стандартном состоянии), так и отрицательные величины. Можно говорить, соответственно, о богатых энергией соединениях и о соединениях, бедных энергией. Как правило, богатые соединения неустойчивы, бедные энергией соединения устойчивы.

Обратимся к примеру. Ацетилен неустойчив: распад C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>=2C (т) + H<sub>2</sub> дает 54 ккал/моль в стандартных условиях ((т) — твердый). Однако легко подсчитать, что ацетилен устойчив относительно любого элементарного процесса:

 $C_2H_2 = 2CH - 230$  ккал/моль,

 $C_2H_2 = C_2H + H - 120$  ккал/моль,

 $C_2H_2 = C_2 (\Gamma) + H_2 - 144$  ккал/моль.

Значит, одиночная молекула ацетилена распадаться не может.

Распад ацетилена сопровождается выделением энергии именно потому, что в действительности происходит не простой распад на составные части, а перегруппировка. Так, образующиеся в последней реакции молекулы C<sub>2</sub>, находящиеся в газовой фазе, могут конденсироваться в твердый углерод (графит), выделяя 198 ккал/моль. Это выделение энергии перевешивает затрату энергии на разложение ацетилена (144 ккал/моль). Энергия ацетилена, приведенная в таблице 6, есть разность этих двух величин -54=144-198.

Проведенное сопоставление подводит к представлению об энергии активации реакции. Мы увидели один возможный путь разложения ацетилена. Для его осуществления и, следовательно, для того, чтобы получить энергию разложения +54 ккал/моль, сначала нужно затратить 144 ккал/моль на то, чтобы разложить одиночную молекулу ацетилена с образованием одиночной молекулы С<sub>2</sub>. Записывая уравнение какой-либо реакции, не стоит думать, что в ней реализуется только один записанный путь реакции. В действительности в статистическом хаосе молекулярных столкновений и реакций осуществляются одновременно все варианты и главную роль играют, естественно, те пути, на которых меньше энергия активации, т. е. пути более легкие.

Молекула динитрогликоля  $C_2H_4(ONO_2)_2$  распадается на части – молекулы  $N_2$ ,  $2H_2O$ ,  $2CO_2$  – с выделением энергии. Именно поэтому динитрогликоль является взрывчатым веществом. Вместе с тем динитрогликоль достаточно стабилен при комнатной температуре. Распад на части этой молекулы в действительности является перегруппировкой атомов. В молекуле нет ни одной индивидуальной химической связи, разрыв которой был бы энергетически возможен. Лишь последующее установление новых связей ( $N \equiv N$ , H–O–H, O=C=O) компенсирует, а точнее, перекомпенсирует разрыв связей, скрепляющих исходную молекулу.

Между энергетическими характеристиками элементарного химического акта – тепловым эффектом и энергиями активации прямой и обратной реакций – существует простое соотношение. Его нагляднее всего пояснить на рис. 4.10, на котором представлена потенциальная энергия взаимодействия атомов, участвующих в реакции, как функция так называемой «координаты реакции», характеризующей



взаимное пространственное положение атомов. Начальный и конечный уровни энергии отличаются между собой на величину теплоты реакции Q. Экзотермическая реакция соответствует превышению начального уровня энергии над конечным, при эндотермической реакции энергия конечного состояния больше. Переход из начального в конечное состояние связан с преодолением потенциального барьера – энергии E для прямой реакции и E' – для обратной. Таким образом,

$$E' - E = Q.$$

Для экзотермической реакции E' > E, т. е. скорость прямой реакции слабее зависит от температуры, чем скорость обратной. Для эндотермической реакции имеет место обратная ситуация.

В случае определения тепловых эффектов взрыва (горения, детонации) можно принять, что само ВВ является лишь некоторым промежуточным продуктом реакции между химическими элементами, входящими в его состав; конечным же состоянием системы являются продукты полного взрывчатого разложения ВВ как более термодинамически устойчивые. Таким образом, теплоту взрыва  $Q_{\rm B3p}$  можно определить как разность между суммой теплот образования компонентов ПВ  $\sum Q_{\Pi B}$  и теплотой образования исходного ВВ  $Q_{\rm BB}$ , т.е.

$$Q_{\rm взр} = \sum Q_{\rm \Pi B} - Q_{\rm BB}$$
 или  $Q_{\rm взр} = -\sum \Delta H^0_{\rm \Pi B} + \Delta H^0_{\rm BB},$  (4.44)

где  $\sum \Delta H_{\Pi B}^0$  и  $\Delta H_{BB}^0$  – энтальпии образования, соответственно, смеси конечных ПВ и исходного ВВ, адекватные их теплотам образования, но имеющие обратный знак. Верхний индекс «0» означает, что вещества взяты в стандартном состоянии, т.е. при давлении 1 физ. атм. = 101325 кПа.

Тепловой эффект реакции, протекающей с образованием газов (или паров), может быть различным в зависимости от того, при каких условиях идет процесс – при постоянном давлении или при постоянном объеме. Для процессов горения, идущих, как правило, при давлении, равном давлению окружающей среды, тепловой эффект характеризуется величиной  $Q_p$  (т.е. Q при постоянном давлении). Взрыв же, напротив, сопровождается резким повышением давления и сравнительно небольшим изменением объема вещества. Следовательно, теплоту взрыва необходимо рассчитывать при постоянном объёме ( $Q_v$ ), для чего нужно знать и теплоты образования при постоянном объёме. Если справочные данные по теплотам (энтальпиям) образования относятся к постоянному давлению, то вычисленную по (4.44) величину  $Q_p$  надо пересчитать на теплоту взрыва  $Q_v$ :

$$Q_v = Q_p + Ap(v_2 - v_1),$$

где второй член в правой части уравнения представляет собой работу, совершаемую ПВ при их расширении; A – механический эквивалент тепла; p – конечное давление ПВ;  $v_1$  и  $v_2$  – начальный и конечный удельные объемы газов соответственно.

Главная сложность расчетов теплоты взрыва по выражению (4.44) связана с определением истинного состава ПВ к моменту завершения процесса их расширения или к окончанию любой другой стадии, при которой определяется тепловой эффект взрыва. Из сказанного следует, что реальная теплота взрыва, которая может быть экспериментально определена, рассчитана или реализована, есть величина непостоянная. Она зависит от того, при какой степени расширения газов будут выполнены измерения или расчёт. Поэтому при расчетах теплоты взрыва необходимо задаваться некоторым конечным состоянием ПВ, соответствующим моменту завершения отбора тепловой энергии от ПВ. Такому условию может, например, отвечать давление в ПВ, равное давлению среды, в которой произведен взрыв, т.е. моменту полного торможения расширяющихся ПВ.

В многообразии возможных значений  $Q_{\rm взр}$  обычно выбирают два значения, отвечающие двум характерным точкам состояний ПВ: в начальный момент взрыва, т.е. в самой детонационной волне после завершения разложения ВВ (в точке Чепмена-Жуге), и при расширении газов до давления окружающей среды (воздушной, горной, водной). Соответствующие теплоты А.Я. Апин и Ю.А. Лебедев условно назвали «детонационной» и «фугасной» теплотами взрыва. Однако и эти величины нельзя рассматривать как некоторые константы ВВ, зависящие только от их химического состава. Детонационная теплота может меняться в зависимости от давления в детонационной волне, которое в сильной степени определяется плотностью заряда ВВ, а фугасная теплота – давлением внешней среды и газодинамическими условиями процесса расширения ПВ.

Наиболее определенной термодинамической величиной является  $Q_{max}$ , отвечающая максимальному тепловому эффекту, возможному при взрыве данного BB, и наибольшему значению энтропии S системы.  $Q_{max}$  достигается в том случае, когда образуются высшие окислы горючих элементов, содержащихся в BB.  $Q_{max}$  является константой BB, так как она определяется только химическим составом BB и не зависит от начальных и конечных параметров состояния ПB.

Отличия по крайним значениям детонационной и фугасной теплот взрыва могут быть большими или меньшими в зависимости от химического состава BB. Они меньше для BB, в которых кислорода достаточно для полного окисления горючих элементов до их высших окислов, и больше для BB с недостатком кислорода. Обеспеченность состава кислородом характеризуют кислородным балансом BB (KБ) или кислородным коэффициентом  $\alpha_k$ .

Кислородный баланс вычисляется как разность между массовым количеством кислорода, содержащимся во взрывчатом веществе, и количеством кислорода, потребным для полного окисления горючих элементов, входящих в его состав. При этом полагается, что азот, содержащийся в молекуле ВВ, выделяется в свободном виде N<sub>2</sub>. Расчет обычно ведется на 100 г ВВ, в соответствии с чем КБ выражается в процентах. Если во взрывчатом веществе содержится кислорода как раз столько, сколько необходимо для полного окисления входящих в его состав горючих элементов (углерода и водорода), то вещество имеет нулевой КБ. Если кислород содержится в избытке против указанного количества, то кислородный баланс ВВ положителен, если же кислорода недостаточно для полного окисления горючих элементов, то отрицателен.

Для BB, имеющего химическую формул<br/>у $\mathbf{C}_{a}\mathbf{H}_{b}\mathbf{N}_{c}\mathbf{O}_{d}$ и молекулярную массу

$$M = 12a + b + 14c + 16d$$
 (г/моль),

КБ вычисляется как

$$X = X_1 - X_2,$$
$$X_1 = \frac{16d \cdot 100}{M},$$

X<sub>1</sub> – кол-во граммов кислорода в 100г BB;

$$X_2 = \frac{16 \cdot \left(2a + \frac{b}{2}\right) \cdot 100}{M},$$

 $X_2$  – кол-во граммов кислорода, необходимо<br/>е для полного окисления горючих элементов:

 $\mathrm{C+O_2}\,\rightarrow\,\mathrm{CO_2},\ \mathrm{H_2+0.5O_2}\,\rightarrow\,\mathrm{H_2O}.$ 

Кислородным коэффициентом  $\alpha_k$  называют отношение количества атомов кислорода в молекуле BB к тому количеству, которое необходимо для полного окисления содержащегося в BB углерода до углекислого газа (CO<sub>2</sub>) и водорода до воды (H<sub>2</sub>O):

$$\alpha_k = \frac{d}{2a+b/2}.$$

Если кислородный баланс может быть положительным, нулевым или отрицательным, то кислородный коэффициент всегда положителен. КБ не является характеристикой степени насыщенности молекулы кислородом, а только указывает на то, сколько граммов кислорода необходимо добавить для полного окисления горючих элементов, находящихся в 100 г ВВ. Кислородный коэффициент определяет истинное соотношение горючего и окислителя и является характеристикой степени насыщенности молекулы кислородом. Сбалансированности химического состава ВВ по кислороду отвечает КБ, равный нулю и  $\alpha_k=1$ .

Уравнение реакции взрывчатого разложения конденсированных ВВ. Уравнение, связывающее химическую формулу ВВ с составом конечных ПВ, называют уравнением реакции взрывчатого превращения. Такое уравнение не может дать ни представления о комплексе элементарных процессов, протекающих в зоне химических реакций (зоне «Химпика») ДВ, ни точного описания текущего химического состава ПД в расширяющихся ПД (от состояния в плоскости Чепмена-Жуге ДВ, через подвижное равновесие на изоэнтропе до конечного состояния, отвечающего полностью расширившимся и остывшим до нормальных условий или условий калориметра ПВ). Оно показывает лишь конечный результат реакции химического превращения ВВ в продукты детонации. Вместе с тем, знание этого уравнения имеет большое значение для практики, так как по этому уравнению ведется расчет теплового эффекта взрыва и определяется объем образующихся газообразных продуктов взрыва. Очевидно, что при этом, в сравнении со строгим термодинамическим расчетом равновесного состава ПД, вносятся большие

оппибки, однако они не настолько велики, чтобы серьезно исказить общее направление реакции взрывчатого превращения конденсированного BB.

Для написания уравнения реакции прежде всего необходимо знать химическую формулу исходного BB, которая известна или определяется расчетом (для случая смесей). Все органические BB состоят, как правило, из углерода, водорода, кислорода и азота. Соответственно этому в продуктах взрыва могут содержаться CO<sub>2</sub>, HO, N<sub>2</sub>, CO, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, C, CH<sub>4</sub>, NH<sub>3</sub>, NO и некоторые другие. Если в состав BB входят фтор, хлор или сера, то в ПВ находятся HF, CF<sub>4</sub>, F<sub>2</sub>, HCl, CCl, Cl<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>S.

При написания уравнения реакции принято делить все BB на две основные группы:

1. ВВ с положительным кислородным балансом,

2. ВВ с отрицательным кислородным балансом.

В свою очередь вещества, принадлежащие к группе 2, подразделяют на две подгруппы:

- 1. подгруппа, куда включаются BB, полностью превращающиеся в газы;
- 2. подгруппа, куда включаются BB, в которых кислорода недостаточно для полного окисления всех горючих элементов в газы, и часть углерода выделяется в свободном виде.

Такое подразделение веществ группы 2 в значительной степени условно, так как одно и то же вещество при различных условиях может детонировать с образованием различных продуктов взрыва и, в частности, в одном случае может образоваться свободный углерод, а в другом его не будет.

BB группы 1 (C<sub>a</sub>H<sub>b</sub>N<sub>c</sub>O<sub>d</sub>;  $d \ge 2a + b/2$ ).

Так как продукты взрыва ВВ этой группы состоят в основном из CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, O<sub>2</sub> и N<sub>2</sub>, а содержание CO, NO и других веществ незначительно и обычно не превышает 1–3% от общего объема образующихся газов, то на практике для этой группы ВВ чаще всего применяют принцип наибольшего тепловыделения — принцип Бертло, при котором рассматриваются только продукты полного окисления  $H_2O$  и  $CO_2$ , и реакция разложения имеет вид:

$$C_a H_b N_c O_d \rightarrow a CO_2 + \frac{b}{2} H_2 O + \frac{c}{2} N_2 + \frac{1}{2} \left( d - 2a - \frac{b}{2} \right) O_2.$$

ВВ группы 2 (1-я подгруппа).  $(a + b/2 \le d < 2a + b/2)$ .

К первой подгруппе относятся вещества с отрицательным кислородным балансом, содержащие кислород в количестве, достаточном для окисления всех горючих элементов в газы. Продукты взрыва BB этой подгруппы состоят в основном из CO<sub>2</sub>, CO, H<sub>2</sub>O, N<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>. Считая возможным полностью пренебречь диссоциацией водяных паров, т.е. предполагая, что весь водород окисляется до воды, и в продуктах взрыва свободного водорода не имеется, Бринкли и Вильсон предложили следующее уравнение реакции взрывчатого превращения BB этой подгруппы:

$$C_a H_b N_c O_d \rightarrow \frac{b}{2} H_2 O + \left(d - a - \frac{b}{2}\right) CO_2 + \left(2a - d + \frac{b}{2}\right) CO + \frac{c}{2} N_2.$$

Для ВВ 1-й подгруппы второй группы может быть применен также и метод Малляра–Ле-Шателье, по которому кислород, содержащийся в молекуле ВВ, сначала окисляет С до СО, а остаток кислорода делится поровну между H<sub>2</sub> и СО, окисляя их соответственно до H<sub>2</sub>O и CO<sub>2</sub>:

$$C_{a}H_{b}N_{c}O_{d} \rightarrow aCO + \frac{b}{2}H_{2} + \frac{c}{2}N_{2} + \frac{1}{2}(d-a)O_{2} \rightarrow \frac{1}{2}(d-a)H_{2}O + \frac{1}{2}(d-a)CO_{2} + \frac{1}{2}(3a-d)CO + \frac{1}{2}(a+b-d)H_{2} + \frac{c}{2}N_{2}.$$

Этот метод, основанный на принципе Ле-Шателье, отвечает условию максимального газовыделения (условие наибольшего объема ПВ). Вместе с тем, для обоих подходов написания реакций разложения ВВ группы 2 (1-я подгруппа), условно отражающих механизм

химических процессов, расчетные значения теплоты взрыва получаются близкими и удовлетворительно согласуются с опытными данными. Это объясняется близостью тепловых эффектов реакций:

$$\mathrm{CO} + \frac{1}{2}\mathrm{O}_2 \leftrightarrow \mathrm{CO}_2 + 67.35$$
 ккал и  $\mathrm{H}_2 + \frac{1}{2}\mathrm{O}_2 \leftrightarrow \mathrm{H}_2\mathrm{O} + 57.5$  ккал.

ВВ группы 2 (2-я подгруппа).  $(d \le a + b/2)$ 

Как уже отмечалось, точную границу между веществами, относящимися к 1-й или 2-й подгруппе, указать невозможно.

В общем случае при любых условиях ко 2-й подгруппе будут относиться вещества с существенно отрицательным кислородным балансом, в которых кислорода не хватает даже для окисления всего углерода до СО, т.е. > *d*.

При составлении уравнений взрывчатого превращения и оценках теплоты взрыва BB данной подгруппы применяется схема расчета Бринкли-Вильсона, по которой сначала весь водород окисляется до воды, а затем оставшаяся часть кислорода идет на окисление C в CO. Неокисленная часть углерода выделяется в свободном состоянии. Согласно вышеизложенному, уравнение реакции взрывчатого превращения веществ 2-й подгруппы будет иметь вид:

$$C_a H_b N_c O_d \rightarrow \frac{b}{2} H_2 O + \left(d - \frac{b}{2}\right) CO + \left(a - d + \frac{b}{2}\right) C + \frac{c}{2} N_2.$$

Расчеты по такой схеме приводят к завышенным значениям теплоты взрыва ВВ, принадлежащих ко 2-й подгруппе, однако для случаев малого расширения ПВ схема Бринкли-Вильсона вполне приемлема.

Наряду с описанными выше представляется весьма полезным и полуэмпирический метод расчета состава конечных продуктов взрыва конденсированных ВВ, предложенный Авакяном [20]. Реакция взрывчатого превращения записывается в виде

$$C_aH_bN_cO_d \rightarrow xCO_2 + yCO + zC + uH_2O + hH_2 + mO_2 + \frac{c}{2}N_2$$

и в основу расчета закладывается допущение, что степень окисления водорода до воды определяется коэффициентом K, т.е. u = Kb/2, h = (1 - K)b/2. Для расчета x, y, z, m необходимо решить совместно уравнения материального и энергетического баланса. В зависимости от величины кислородного коэффициента  $\alpha_k$  можно выделить три случая.

<u>1-й случай:  $\alpha_k \ge 100\%$ </u>. При этом предполагается, что свободный углерод в составе конечных продуктов отсутствует, т.е. z=0, а для расчета x, y, m используются соотношения:

$$x = (1.4K - 0.4)a; \ y = a - x = 1.4a(1 - K);$$
$$m = 0.5(d - 2x - y - u).$$

<u>2-й случай:  $\alpha_k < 100\%$ </u>. Предполагается, что в составе продуктов взрыва отсутствует О<sub>2</sub>, т. е. *m*=0, а остальные неизвестные рассчитываются по формулам:

$$x = 1.16d(K - 0.586) - 0.5u; \ y = d(1 - 2.32(K - 0.568));$$
$$z = a - (x + y).$$

<u>3-й случай: <br/>  $\alpha_k < 100\%,$  но d > a + b/2. Расчетные формулы имеют вид:</u>

$$x = 0.7 \left( d - \frac{b}{2} \right) K - 0.4a; y = 1.4a - 0.7 \left( d - \frac{b}{2} \right) K.$$

 $Q_{max}$  вычисляется по формуле (схема Бертло):

$$Q_{max} = 1000 \frac{28.9b + 47.0 \left(d - \frac{b}{2}\right) + \Delta H_{\rm BB}^0}{M}$$

Экспериментальные данные свидетельствует о том, что для BB характерна зависимость теплоты взрыва от плотности. Величина  $dQ/d\rho$  растет с уменьшением кислородного коэффициента  $\alpha_k$  и наоборот уменьшается по мере увеличения  $\alpha_k$ , и в пределе, при  $\alpha_k > 1.4$ , теплота взрыва не зависит от плотности.

Обобщённая формула расчёта теплоты взрыва:

$$Q_{\rho} = Q_{max} (1 - (0.528 - 0.165\rho)(1.4 - \alpha)^{1.4}(1 - \delta)),$$
  
$$\delta = \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\mu}, \ \mu = \frac{5.73 - 2.28\rho}{(1.4 - \alpha)^3}.$$
(4.45)

С увеличением отношения b/a увеличивается и коэффициент реализации ( $Q_{\rho}/Q_{max}$ ). В пределе для ВВ, не содержащих углерод, коэффициент реализации близок к единице. Дополнительный член, учитывающий соотношение водорода и углерода в молекуле ВВ, обращается в нуль при b = 0, т.е. для безводных ВВ (типа бензотрифуроксана). Для ВВ, не содержащих в молекуле углерод, a = 0(типа NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub>), теплота взрыва близка к максимально возможной.

Величину детонационной теплоты взрыва  $Q_{\rm взр}$ , не прибегая к написанию реакций взрывчатого превращения, можно также рассчитать по методу Г. А. Авакяна [20], который основан на предположении, что предельное значение суммарной теплоты образования продуктов взрыва  $\sum Q_{\Pi Bmax}$  может быть определено из того условия, что диссоциация CO<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>O подавлена, а равновесие реакций 2CO $\leftrightarrow$ CO<sub>2</sub> + C и CO + H<sub>2</sub>  $\leftrightarrow$ H<sub>2</sub>O + C полностью сдвинуто вправо. При расчете  $\sum Q_{\Pi Bmax}$  принимается, что весь водород переходит в H<sub>2</sub>O, а оставшееся количество кислорода идет на окисление углерода (или его части) до CO<sub>2</sub>. Таким образом, для 1 моль BB, имеющего формулу C<sub>a</sub>H<sub>b</sub>N<sub>c</sub>O<sub>d</sub>, величина  $\sum Q_{\Pi Bmax}$  определяется следующим образом (в ккал/моль):

$$\sum Q_{\Pi Bmax} = 57.5 \frac{b}{2} + 94a \text{ при } \alpha_k \ge 100\%$$
$$\sum Q_{\Pi Bmax} = 57.5 \frac{b}{2} + 47 \left( d - \frac{b}{2} \right) =$$
$$= 47d + 5.25b \text{ при } \alpha_k < 100\%.$$

В реальных условиях наряду с процессами полного окисления всегда образуются продукты их диссоциации (CO, H<sub>2</sub> и т.п.). Влияние этого эффекта на теплоту образования продуктов взрыва  $Q_{\Pi B}$  предлагается учитывать с помощью коэффициента реализации :

$$Q_{\Pi B} = K \sum Q_{\Pi B max}.$$

При использовании экспериментальных данных по теплотам взрыва широкого круга органических ВВ автором [20] установлено, что коэффициент реализации теплоты взрыва K однозначно связан с кислородным коэффициентом  $\alpha_k$  зависимостью  $K = 0.32 \alpha_k^{0.24}$ , где  $\alpha_k$  дан в процентах.

Таким образом, после подстановки  $Q_{\Pi B}$  в (4.44) получим следующие выражения для определения теплоты взрыва (в ккал/моль):

$$Q_{\rm взр} = K \left( 57.5 \frac{b}{2} + 94a \right) + \Delta H_{\rm BB}^0, \text{ при } \alpha_k \ge 100\%$$
$$Q_{\rm взр} = K \left( 47d + 5.25b \right) + \Delta H_{\rm BB}^0, \text{ при } \alpha_k < 100\%.$$

Теплоту взрыва смесевого BB, состоящего из двух индивидуальных BB с одинаковым по знаку кислородным балансом (например смеси THT и гексогена), в первом приближении можно рассчитать по аддитивному вкладу теплот взрыва  $Q_i$  компонентов этой смеси:

$$Q_{\rm взр} = \sum \beta_i Q_i,$$

где  $\beta_i$  – массовая доля компонента.

## Список литературы

- Физика ударноволновых и кумулятивных явлений. Новосибирск : НГТУ, 1996. — Методические указания к курсу лекций по прикладной газовой динамике для студентов 3-го курса ФЛА.
- 2. *Орленко Л. П.* Физика взрыва и удара / Л. П. Орленко. Москва : Физматлит, 2006. Учебное пособие для вузов.
- 3. *Глушак Б. Л.* Начала физики взрыва / Б. Л. Глушак. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2019.
- Зельдович Я. Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. — Москва : Наука, 1966.
- 5. Физика взрыва. Т. 1, 2. Москва : Физматлит, 2004.
- Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов [и др.]. — Москва : Наука, 1976.
- Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики / Л. В. Овсянников. — Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.
- Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики / А. И. Жуков // Тр. МИАН СССР. — 1960. — Т. 58. — С. 3—150.
- Митрофанов В. В. Детонация гомогенных и гетерогенных систем / В. В. Митрофанов. — Новосибирск : Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2003.
- Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович [и др.]. — Москва : Наука, 1980.
- 11. *Андреев В. В.* Эксплозивные вещества / В. В. Андреев, А. В. Гуськов, К. Е. Милевский. — Новосибирск : НГТУ, 2018.
- Forbes J. W. Shock wave compression of condensed matter / J. W. Forbes. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2012.

- Shock Waves Science and Technology Library. Detonation Dynamics. T. 6. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2012.
- 14. Физический энциклопедический словарь. Москва : Советская энциклопедия, 1960.
- 15. *Пригожин И.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, Д. Кондепуди. — Москва : Мир, 2002.
- 16. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — Москва : Дрофа, 2003. — Учебник для вузов.
- 17. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред. Т. 1 / Л. И. Седов. Москва : Наука, 1973.
- Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды / К. П. Станюкович. Москва : Наука, 1971.
- 19. *Ландау Л. Д.* Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Гостехиздат, 1954.
- 20. Авакян Г. А. Расчет энергетичеких и взрывчатых характеристик ВВ / Г. А. Авакян. Москва : ВИА им. Дзержинского, 1964.

## Воронин Михаил Сергеевич ФИЗИКА ВЗРЫВА И УДАРА

Учебное пособие

В авторской редакции Выпускающий редактор И.П. Брованова Дизайн обложки А.В. Ладыжская

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 09.12.2019. Формат бумаги 60х841/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 12,32. Печ. л. 13,25. Изд. № 258. Заказ № 113. Цена договорная

Отпечатано в типографии Новосибирского государственного технического университета 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20