

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. КРАМАРЕНКО

МЕТОДЫ ПОДОБИЯ В МЕХАНИКЕ

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2020

УДК 530.17:531.111(075.8)
К 777

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *И.П. Олегин*

д-р техн. наук, профессор *А.А. Кураев*

Работа подготовлена на кафедре прочности летательных аппаратов для студентов II курса очной и IV курса заочной формы обучения механико-технологического факультета

Крамаренко Н.В.

К 777 Методы подобия в механике. Анализ размерностей: учебное пособие / Н.В. Крамаренко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2020. – 212 с.

ISBN 978-5-7782-4087-2

Пособие написано на основе опыта чтения этого курса автором на механико-технологическом факультете НГТУ в течение восьми лет (с 2011 по 2018 год) и является продолжением ранее изданной части «Анализ уравнений».

Книга предназначена для двух аудиторий: для студентов младших курсов бакалавриата и студентов магистратуры. Основное содержание написано для первой аудитории, поэтому здесь отсутствуют тяжеловесные строгие математические доказательства теорем подобия. Для наглядности и простоты изложения сначала приводятся примеры и только затем дается общая схема применения метода. Если для того, чтобы разобраться в теории, излагаемой в первой части, было необходимо знать курсы теоретической механики и сопротивления материалов, то для понимания материала второй части достаточно только школьных знаний.

Для второй аудитории – студентов магистратуры, готовящихся к работе по проведению экспериментов, в книгу включены главы с историческими сведениями, обзор литературы по способам вывода критериев подобия, подробный список первоисточников и ссылки на их электронные копии.

Содержание пособия нацелено на практическое применение различных методов подобия в реально возникающих задачах для твердых тел, для жидкости и газа. Порядок рассуждений и алгоритмы действий при решении практических задач сопровождаются рисунками и таблицами с логическими схемами.

УДК 530.17:531.111(075.8)

ISBN 978-5-7782-4087-2

© Крамаренко Н.В., 2020

© Новосибирский государственный
технический университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

<u>ПРЕДИСЛОВИЕ</u>	7
<u>ВВЕДЕНИЕ</u>	9
<u>В1. Механика</u>	9
<u>В2. Теория подобия</u>	10
<u>В3. Прогнозы на основании чисел подобия</u>	11
<u>В4. Историческая справка</u>	12
<u>В5. О видах подобия</u>	15
<u>В6. Термины</u>	16
<u>1. РАЗМЕРНОСТИ</u>	19
<u>1.1. Единицы измерения физических величин</u>	19
<u>1.2. Размерные и безразмерные величины</u>	20
<u>1.3. Основные и производные единицы измерения</u>	22
<u>1.4. Формула размерности</u>	23
<u>1.5. Системы единиц измерения</u>	25
<u>1.6. Классы систем единиц измерения</u>	27
<u>1.7. Пересчет в другие размерности</u>	29
<u>2. ЧЕМ ПОЛЕЗЕН АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ (АР)</u>	31
<u>2.1. АР помогает уточнить забытую формулу</u>	31
<u>2.2. АР помогает вывести неизвестную формулу</u>	33
<u>2.3. АР помогает сократить количество экспериментов</u>	35
<u>2.4. АР помогает выявить скрываемую информацию</u>	40
<u>2.5. Выводы по примерам</u>	44
<u>3. КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ АНАЛИЗОМ РАЗМЕРНОСТЕЙ</u>	45
<u>3.1. Три теоремы подобия</u>	45
<u>3.2. Примеры для обычных размерностей</u>	47
<u>3.2.1. Математический маятник</u>	47
<u>3.2.2. Физический маятник</u>	51
<u>3.2.3. Движение жидкости в трубе</u>	56

3.3. Векторные размерности.....	61
3.3.1. Пример для векторных длин.....	62
3.3.2. Другие векторные размерности.....	68
3.4. Выводы по примерам.....	70
3.5. Общая методика определения чисел подобия.....	70
4. <u>ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ В СРАВНИТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ И МОДЕЛИРОВАНИИ</u>	72
4.1. Общая схема применения методов подобия.....	72
4.2. Общая методика сравнительного анализа.....	74
4.3. Общая методика моделирования.....	75
5. <u>СПОСОБЫ ВЫВОДА ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ ИЗ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ГРУЗА</u>	78
5.1. Способ P1 – комбинации переменных, или способ непосредственных рассуждений, или способ Бертрана.....	80
5.2. Ранние способы P2 – Аппеля, Федермана, Толмэна, Ипсена.....	81
5.3. Способ P3 – преобразования формул размерностей в степенные комплексы.....	81
5.4. Способ P4 – частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема.....	82
5.5. Способ P5 – полного двустороннего комплекса, или способ Рэля.....	86
5.6. Способ P6 – полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия.....	89
5.7. Способ P7 – качественного физико-математического анализа, или способ Морозова.....	94
5.8. Выводы по способам P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7.....	97
6. <u>ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ТЕЛ</u>	98
6.1. Закон Кеплера.....	98
6.1.1. Историческое введение.....	98
6.1.2. Пример 1 – гравитационная постоянная.....	100
6.1.3. Пример 2 – период обращения планеты.....	100
6.2. Задача Галилея – падение тела.....	103
6.2.1. Подход 1 – с учетом массы тела.....	103
6.2.2. Подход 2 – без учета массы тела.....	104
6.2.3. Подход 3 – с учетом массы и веса тела.....	105

6.2.4. <u>Подход 4 – с учетом скорости тела</u>	107
6.2.5. <u>Выводы по примеру</u>	109
<u>7. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ</u>	110
7.1. <u>Статическая жесткость и прочность</u>	110
7.1.1. <u>Задача 1 – общие условия подобия</u>	110
7.1.2. <u>Задача 2 – подобие напряжений</u>	117
7.1.3. <u>Задача 3 – подобие деформаций</u>	120
7.1.4. <u>Выводы по примеру (задачи 1, 2, 3)</u>	124
7.1.5. <u>Добавление из сопротивления материалов</u>	125
7.2. <u>Статический изгиб балки</u>	126
7.2.1. <u>Подход 1 – класс размерностей LMT</u>	128
7.2.2. <u>Подход 2 – класс размерностей LF</u>	133
7.2.3. <u>Подход 3 – класс векторных размерностей $L_x L_y F$</u>	135
7.2.4. <u>Подход 4 – класс векторных размерностей $L_x L_y L_z F\Theta$ для поворота</u>	138
7.2.5. <u>Подход 5 – класс векторных размерностей $L_x L_y L_z F\Theta$ для прогиба</u>	141
7.3. <u>Удар</u>	144
<u>8. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ</u>	150
8.1. <u>Движение жидкости в трубе</u>	150
8.2. <u>Движение жидкости через водослив</u>	157
8.3. <u>Обтекание тела газом или невесомой жидкостью</u>	159
8.3.1. <u>Вывод критериального уравнения</u>	159
8.3.2. <u>Алгоритм проведения экспериментов</u>	162
8.3.3. <u>Добавление из аэродинамики</u>	163
8.4. <u>Движение корабля с учетом волнообразования</u>	164
8.4.1. <u>Частичное моделирование без учета вязкости жидкости</u>	164
8.4.2. <u>Полное моделирование с учетом вязкости жидкости</u>	167
8.4.3. <u>Удешевление экспериментов</u>	170
<u>9. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ РАЗНЫЕ</u>	172
9.1. <u>Опоздание студента</u>	172
9.2. <u>Крупные перевозки дешевле</u>	175
9.2.1. <u>Перевозки судами</u>	175

<u>9.2.2. Перевозки самолетами</u>	180
<u>9.2.3. Размеры двигателей</u>	181
<u>9.3. Парадокс Рябушинского</u>	181
<u>10. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО СПОСОБАМ ВЫВОДА ЧИСЕЛ</u> <u>ПОДОБИЯ ИЗ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ</u>	185
<u>10.1. Способ P1</u> – комбинации переменных, или непосредственных рассуждений, или способ Бертрана	185
<u>10.2. Ранние способы P2</u>	186
<u>10.3. Способ P3</u> – преобразования формул размерностей в степенные комплексы	187
<u>10.4. Способ P4</u> – частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема	187
<u>10.5. Способ P5</u> – полного двустороннего комплекса, или способ Рэля	188
<u>10.6. Способ P6</u> – полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия	189
<u>10.7. Способ P7</u> – качественного физико-математического анализа, или способ Морозова	190
<u>Выводы</u>	190
<u>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</u>	192
<u>31. Общая схема применения методов подобия</u>	192
<u>32. Достоинства анализа размерностей</u>	192
<u>33. Недостатки анализа размерностей</u>	193
<u>34. Сопоставление анализа размерностей и анализа уравнений</u>	194
<u>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</u>	195
<u>Приложение 1. Термины и определения</u>	200
<u>Приложение 2. Десятичные приставки</u>	203
<u>Приложение 3. Система единиц измерения СИ</u>	204
<u>Приложение 4. Рисунки к законам Кеплера</u>	210

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Методы подобия в механике» предполагается издать в трех частях: анализ уравнений, анализ размерностей, практикум. Первая часть уже издана [42], настоящее издание является второй частью пособия. Оно написано на основании опыта чтения этого курса автором на механико-технологическом факультете НГТУ в течение восьми лет – с 2011 по 2018 год.

Книга предназначена для двух аудиторий – для студентов младших курсов бакалавриата и для студентов магистратуры. Основное содержание написано для первой группы, поэтому здесь отсутствуют тяжеловесные строгие математические доказательства теорем подобия. Для наглядности и простоты изложения сначала приводятся примеры, и только затем дается общая схема применения метода. Если для того, чтобы разобраться в теории, излагаемой в первой части [42], было необходимо иметь знания курсов теоретической механики и сопротивления материалов, то для понимания материала второй части достаточно только школьных знаний.

Для второй аудитории – студентов магистратуры, готовящихся к работе по проведению экспериментов, в книгу включены главы с историческими сведениями, обзор литературы по способам вывода критериев подобия, подробный список первоисточников и ссылки на их электронные копии.

О желательности преподавания теории подобия для студентов технических специальностей говорится уже давно. В 1979 году на Всесоюзном совещании-семинаре заведующих кафедрами механики вузов страны Л.Г. Лойцянский в своем докладе [47] отмечал «важность введения в преподаваемые курсы теоретической механики хотя бы элементарных сведений о подобии и размерности». При этом он говорил, что ранее «в курсах теоретической механики, не говоря уже о замечательных хрестоматийных “Беседах о механике” В.Л. Кирпичёва, вопросы подобия и размерности в том или другом объеме освещались.

Это имело место в конце первого тома классического курса Аппеля, в конце второго тома “Основного курса” Н.Н. Бухгольца, в одном из изданий курса Л.Г. Лойцянского и А.И. Лурье, в курсах Вебстера, Каббана и др. В новых учебниках вопросы подобия и размерностей, к сожалению, выпали». В 1998 году такую же мысль высказывал И.Ш. Коган [37]: «Основы теории подобия следует излагать перед началом изучения технических дисциплин, с тем чтобы применять полученные знания при изучении каждой из них».

В настоящем пособии упоминаются литературные источники разных годов издания, в том числе и такие, которые трудно найти. Для заинтересованных читателей отметим, что доступ ко многим классическим источникам по теории подобия можно получить на веб-странице [50] по адресу <http://gidropraktikum.narod.ru/pi-theorem-history.htm>.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

ВВЕДЕНИЕ

Перед обсуждением частных вопросов необходимо дать общие определения того, что такое механика, подобие, дать историческую справку об истории появления теории подобия, определить основные термины. Эти вопросы уже обсуждались во введении к первой части издания [42]. Здесь приведем краткое упоминание тех рассуждений и необходимые дополнения.

В1. МЕХАНИКА

Механика (рис. В1) – это раздел физики. В соответствии с агрегатными состояниями вещества механика подразделяется на механику твердых тел, механику жидкости, газа и плазмы. Поэтому здесь будем рассматривать применение понятия подобия к задачам как для твердых тел, так и для жидкостей и для газа.

Механика абсолютно твердых тел (МАТТ) называется теоретической механикой (сокращенно – термех). Механика деформируемых твердых тел (МДТТ) состоит из нескольких дисциплин, из которых базовая – сопротивление материалов (на языке инженеров – сопромат). При выводе основных математических соотношений в сопромате используются формулы из термеха. Точно так же базовые понятия и формулы термеха используются в механике жидкости, газа и плазмы.

На теоремах и формулах, выведенных в термехе и сопромате, базируются прикладные дисциплины, такие как теория механизмов и машин (ТММ), детали машин (ДМ) и другие. Блок из четырех дисциплин – термех, сопромат, ТММ, ДМ – объединяют общим названием «механика», которую изучают в вузе студенты младших курсов машиностроительных специальностей. Иногда последние три дисциплины, в отличие от теоретической механики, объединяют названием «прикладная механика».

Студенты старших курсов изучают профессиональные дисциплины механики:

- для деформируемых твердых тел такие предметы, как теории упругости, пластичности;
- для механики жидкости – гидродинамика, гидравлика;
- для механики газа – аэродинамика, аэромеханика.

Все эти дисциплины относятся к одному разделу физики – к механике, и во всех этих дисциплинах применяются методы подобия.

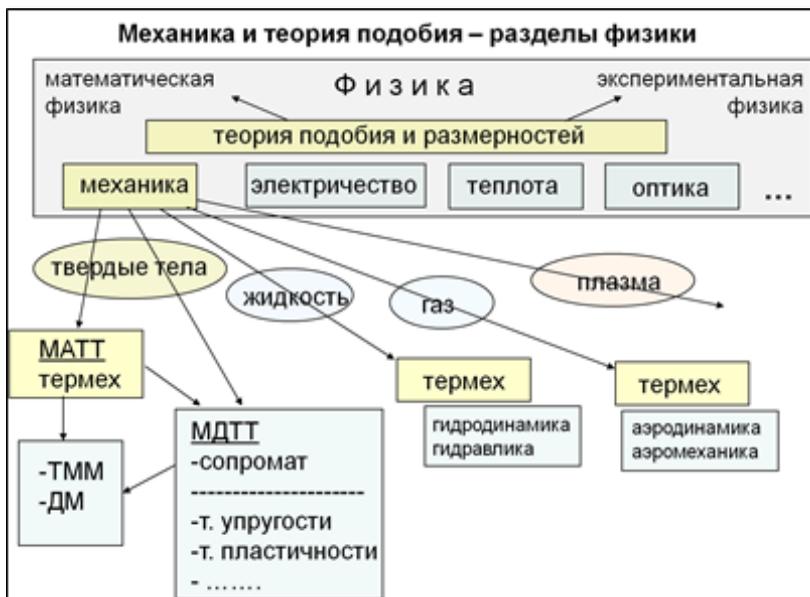


Рис. В1. Механика и теория подобия как разделы физики

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

В2. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Теория подобия относится к общефизическим дисциплинам и связывает математический и экспериментальный разделы физики (рис. В1). Она находит применение не только в механике, но и в других физических науках: в электродинамике, теплофизике и т. п. В настоящем издании приводятся примеры только для механических задач.

В литературе используются термины **методы подобия** и **теория подобия**. Какой более правильный?

С общезначимой точки зрения теорией можно называть такой раздел физики, в котором изучаются те или иные реальные физические процессы, происходящие с веществом или полем. Поэтому с таких позиций правильнее говорить **методы** подобия в той или иной физической теории по аналогии с названиями других методов, например, численные методы, вариационные методы, методы оптимизации.

С математической точки зрения все методы решения физических задач имеют свою теорию, и с этих позиций естественно говорить **теория** подобия. В настоящем издании будем употреблять оба термина.

Кроме того, в литературе используются термины «методы (теория) подобия и размерностей» или «методы (теория) подобия и анализ размерностей». В обоих случаях теория **подобия** противопоставляется анализу **размерностей**. Такое противопоставление может сформировать неправильное понимание предмета. Для целостного восприятия методов подобия в этом издании вместо термина «теория подобия» используется термин «анализ уравнений». Таким образом, теория подобия разделяется на два направления:

- анализ уравнений;
- анализ размерностей.

Такая терминология не нова, она встречается, например, в работах [33, с. 90; 44, введение]. Добавим, что в [44] термины «теория» и «методы» подобия заменены единым термином «анализ» подобия.

Аналізу уравнений посвящено пособие [42], анализ размерностей рассмотрен в настоящем издании.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

В3. ПРОГНОЗЫ НА ОСНОВАНИИ ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ

Оба метода – и анализ размерностей, и анализ уравнений – применяются лишь для получения чисел подобия π . Дальнейшая работа с числами подобия не зависит от того, каким методом они получены. В пособии [42] было показано, что, зная одно или несколько чисел подобия π , можно проделать (рис. В2) следующее:

- либо качественный прогноз параметров задачи через сравнительный анализ,

- либо количественный прогноз через моделирование (эксперимент).

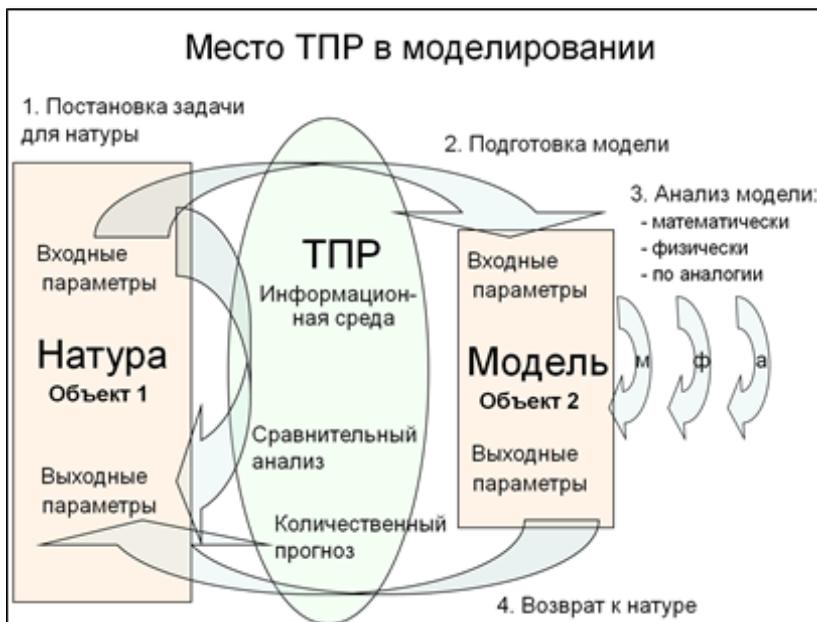


Рис. В2. Место теории подобия и размерностей (ТПР) в сравнительном анализе и моделировании

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

В4. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Краткая историческая справка о появлении теории подобия приведена в пособии [42]. Здесь сделаем некоторые добавления по истории появления анализа размерностей, опираясь на сведения, приведенные в [31, 44, 64, 69, 72].

Основы – Ньютон и Фурье

Как отмечает Г. Хантли [69], метод размерностей, или анализ размерностей, основан на принципе, предложенном Ньютоном в его «Началах» [87] в 1687 году. Это «принцип подобия». Он был исполь-

зован Ньютоном в период разработки основ механики как фундаментальной науки. В системе Ньютона четко выделены три физические категории: длина, инерция (масса) и время, которые рассматривались как основные и независимые. Они до сих пор считаются первичными понятиями, и никакими философскими рассуждениями не удалось доказать, что одна из величин зависит от любой из двух других. На основе немногих простых принципов, четко сформулированных Ньютоном (например, тех, которые воплощены в его законах движения), были получены уравнения, описывающие поведение материальных частиц или тел при действии на них системы внутренних или внешних сил. Именно для таких уравнений Ньютон применил «принцип подобия». Этот принцип можно пояснить с помощью простого примера. Уравнение

$$v^2 = 2\left(\frac{F}{m}\right)s$$

определяет конечную скорость тела v с массой m , перемещающегося прямолинейно из состояния покоя на расстояние s под действием постоянной силы F . Если имеется ряд тел с различными массами и одинаковым отношением F/m , то в этом случае принцип подобия утверждает, что отношение v^2/s также одинаково для всех тел. Или, другими словами, если конечные скорости, приобретаемые телами с различной массой на одинаковых расстояниях, равны, то действующие на них силы прямо пропорциональны их массам. Ньютон часто использовал принцип подобия. По-видимому, это было первое применение метода размерностей.

Более ста лет спустя после Ньютона теория размерностей исследовалась Фурье в его классической работе «Аналитическая теория теплоты» [81], опубликованной в 1822 году. Фурье ввел два понятия, которые имеют важнейшее значение в современной теории размерностей. Первое является понятием того, что в настоящее время называется «формулой размерности», а второе соответствует «однородности по размерностям» уравнений физики. Хотя исторически метод размерностей был развит вначале применительно к изучению проблем теплопередачи, позднее он гораздо более широко использовался при решении задач механики, в частности динамики и гидродинамики.

Эксперименты

Основным применением анализа размерностей является определение необходимости в постановке того или иного эксперимента при планировании всех экспериментов, так как в ряде случаев эксперименты оказываются ненужными, и информация, которую они могли бы дать, выявляется уже на основании априорных выкладок. В 1910-х годах, когда складывалась теория подобия, такой подход не привлек достаточного внимания со стороны физиков. Известно высказывание Рэлея (1915) по этому поводу [88]: «Я часто удивляюсь тому незначительному вниманию, которое уделяется великому принципу подобия даже со стороны весьма крупных ученых. Нередко случается, что результаты кропотливых исследований преподносятся как вновь открытые “законы”, которые тем не менее можно было получить априорно в течение нескольких минут».

Благодаря работам Рэлея, Букингема [78], Бриджмена [12] анализ размерностей в 1910–1920-х годах получил дальнейшее развитие. Постепенно он стал основным методом при планировании экспериментов, в частности как способ объединения нескольких переменных эксперимента в одну. Шенк [72] отмечает, что с 1920-х годов «анализ размерностей применялся главным образом при проведении экспериментов в таких областях, как гидромеханика и теплотехника. Почти все крупные эксперименты в этих областях проводились с применением данного метода». В настоящее время считается, что теория подобия является основой эксперимента [31].

Обучение

Как отмечает Шенк [72], «анализ размерностей стали включать в программы технических учебных заведений, и постепенно он утратил свое первоначальное назначение. Часто анализ размерностей рассматривался не как принцип, с помощью которого можно существенно усовершенствовать методику работы, а как педагогический прием».

Существенное значение для дальнейшего развития представлений о физическом подобии имело установление связи в форме Пи-теоремы между максимально возможным числом безразмерных комплексов и числом размерных величин, из которых они составлены. Исторический обзор становления Пи-теоремы содержится в статье Гёртлера [82].

Обозначения и термины

Как упоминает С.С. Кутателадзе [44], в 1921 году Гребер [83] предложил ввести названия фундаментальных безразмерных комплексов в теории физического подобия по именам их авторов или выдающихся ученых, занимавшихся конкретной областью физики. Такие числа (критерии) подобия обычно обозначаются одной или двумя первыми буквами выбранного имени. Тем самым анализ подобия приобрел собственную оригинальную и компактную символику, имеющую к тому же некоторый оттенок историчности. В настоящее время такая символика анализа подобия хорошо согласуется с международной символикой размерностей физических величин [16].

В механическом подобии кроме геометрического и кинематического вида подобия существенное место отводится динамическому подобию. В работе [64] отмечается, что понятие динамического подобия принадлежит Стоксу. В его работе 1850 года о движении маятника в тормозящей жидкой среде [89] не только впервые было сформулировано понятие динамического подобия, но и в первый раз фигурировала комбинация параметров течения, носящая сейчас название числа Рейнольдса.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

В5. О ВИДАХ ПОДОБИЯ

В пособии [42] указывалось, что в механике выделяются три вида подобия: геометрическое, кинематическое и динамическое. Для того чтобы модель была подобна оригиналу, необходимо соблюдать все три вида подобия. Если пренебречь динамическим подобием, то можно получить геометрически подобное, но неработоспособное изделие. Поучительный пример приводит С.С. Кутателадзе [44], воспроизводя отрывок из книги известных спортсменов-мореплавателей супругов Папазовых: «Строили яхту любители – сотрудники болгарского телевидения... В результате из рук энтузиастов вышло нечто непостижимое. Обычный крен из-за ветра у яхты достигал 75° , т. е. был почти как у бескилевой спасательной шлюпки... Вообще на яхте все было не по мерке... И я не удивляюсь, ибо мастера-любители приняли за основу чертежи яхты длиной 5,5 м, но ради удобства и роскоши произвольно удлинили корпус до 8,5 м. Сделали просто: увеличили пропорционально размеры буквально всех частей яхты, даже киля. И получилась

яхта, конструкция которой пришла в противоречие со всеми нормами и принципами судостроения».

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

В6. ТЕРМИНЫ

В различных источниках могут использоваться разные термины для обозначения одних и тех же понятий. Здесь будем придерживаться терминологии, приведенной в Сборнике рекомендуемых терминов по теории подобия [52]. Эта терминология разрабатывалась в течение трех лет комиссией, организованной Комитетом научно-технической терминологии Академии наук СССР. Затем в течение двух лет шло широкое обсуждение подготовленного проекта, который был разослан многим организациям и специалистам. В результате на разработку окончательной терминологии ушло пять лет – с 1968 по 1973 год.

Подобие (англ. *similarity*) – взаимно однозначное соответствие между двумя объектами.

Теория подобия (англ. *theory of similarity*) – теория, дающая возможность установить наличие подобия или позволяющая разработать способы получения его.

Метод подобия (англ. *method of similarity*) – метод исследования, основанный на теории подобия.

Модель (англ. *model*) – объект (явление, процесс, установка), находящийся в отношении подобия к моделируемому объекту.

Моделирование (англ. *simulation*) – исследование моделируемого объекта, базирующееся на его подобии модели и включающее построение модели, изучение ее и перенос полученных сведений на моделируемый объект.

Симплекс (англ. *simplex*) – безразмерная величина, отношение одноименных величин, например, отношение местного размера к габариту x/L .

Комплекс (англ. *complex*) – безразмерная величина, отношение разнородных величин с разной размерностью.

Критерий подобия, или **число подобия** (англ. *similarity criterion*) – безразмерный степенной комплекс, составленный из величин, характеризующих моделируемый объект. Другими словами, критерий подобия есть безразмерный симплекс или комплекс, численное значение кото-

рого одинаково для модельного и натурального объектов. Любая комбинация критериев – тоже критерий подобия.

Определяющий критерий подобия (англ. *independent similarity criterion*) – критерий подобия, содержащий независимую переменную.

Определяемый критерий подобия (англ. *dependent similarity criterion*) – критерий подобия, содержащий зависимую переменную (искомую величину).

По поводу определяющего и определяемого критерия подобия сделаем замечание. Например, Л.А. Шаповалов [70] для их разграничения в уравнении подобия вводит подчеркивание:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots).$$

Здесь подчеркнуты определяющие критерии, слева – определяемый критерий подобия. Л.Г. Лойцянский [45–47] для разграничения понятий называет **критерием** только определяющие критерии подобия, а определяемые критерии называет **числами** подобия. Исходя из [рис. В2](#) на стр. 12 определяющие критерии подобия содержат только входные параметры задачи, определяемый критерий подобия включает в себя выходной параметр.

Уравнение подобия (вместо термина **критериальное уравнение**) (англ. *critical equation*) – функциональная зависимость между критериями подобия.

Автомодельность (англ. *self-simulation*) – сохранение физического подобия в некоторой области изменения численных значений одного или нескольких критериев подобия. Другими словами, если процесс не зависит от какого-либо критерия, то этот процесс называют автомодельным (независимым) по отношению к этому критерию.

Множители преобразования (англ. *transformation scale factors*) – величины, применяемые при сопоставлении или преобразовании сходственных параметров моделируемых объектов. Если множитель преобразования является константой, т. е. не зависит от времени и координат, то он называется **масштабом**. Для подобных процессов одинаковой природы множители преобразования – величины безразмерные, для разных физических процессов – размерные.

Характерная величина (англ. *characteristic quantity*) – величина, значение которой выбирается в качестве множителя преобразования (характерный размер, характерная скорость).

Метод размерности (англ. *method of dimensionality analysis*) – метод определения числа и структуры безразмерных степенных комплексов, построенных из величин, существенных для данного моделируемого объекта, на основе сопоставления размерности этих величин.

В анализе размерностей помимо терминов теории подобия используются термины, которые определены Рекомендациями [56] Государственной системы обеспечения единства измерений. Для того чтобы не загромождать основной текст, они будут определены по мере их использования, а более полный перечень терминов вынесен в приложение 1.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

1. РАЗМЕРНОСТИ

1.1. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Математики и физики говорят, что наука начинается тогда, когда в рассуждениях появляется число. Число появляется в результате измерений. Измерить какую-нибудь величину – значит сравнить ее с одноименной ей величиной, принятой за меру, или эталон, т. е. за единицу измерения. Например, расстояния можно сравнивать с длиной стопы (мерой – эталоном – будет фут), с размахом рук (мерой – эталоном – будет сажень), с шагами (мерой – эталоном – будет римская миля, равная тысяче двойных шагов). В мультфильме «38 попугаев» для измерения длины удава в качестве единиц длины (эталон) использовались попугай, слоненок и мартышка. Оказалось, что длина удава составила 2 слоненка, или 5 мартышек, или 38 попугаев:

$$1 \text{ удав} = 2 \text{ слоненка} = 5 \text{ мартышек} = 38 \text{ попугаев.}$$

Из этой записи видно, что численное значение измеренной величины (ее номинал) зависит от размерности.

Для записи размерной величины Q используется двухпозиционная формула

$$Q = \{Q\} [Q]. \quad (1.1)$$

Здесь фигурные скобки $\{Q\}$ означают число, или номинал; квадратные скобки $[Q]$ означают размерность. Например, в записи $Q = 5 \text{ м}$ понимается, что номинал $\{Q\} = 5$, размерность $[Q] = \text{м} = \text{метр}$. Наряду с применением квадратных скобок для обозначения размерности в соответствии с Рекомендациями [56] применяют обозначение $\dim Q$ (от англ. *dimension* – размер, размерность), в нашем случае

$$[Q] = \dim Q = \text{м} = \text{метр.}$$

Впервые термин «размерность» ввел французский физик и математик Ж. Фурье (1768–1830) в своей монографии «Аналитическая теория тепла» [81], вышедшей в 1822 году. Символ размерности в виде квадратных скобок впервые предложил Максвелл в 1873 году [50].

Теперь длину удава можем записать в трех размерностях:

$$1 \text{ удав} = \{Q_1\} [Q_1] = \{Q_2\} [Q_2] = \{Q_3\} [Q_3],$$

где $\{Q_1\} = 2$, $[Q_1] = \text{слонёнок}$, $\{Q_2\} = 5$, $[Q_2] = \text{мартышка}$, $\{Q_3\} = 38$, $[Q_3] = \text{попугай}$. Для выяснения правила преобразования размерностей запишем длину $Q = 5 \text{ м}$ в двух вариантах:

$$Q = 5 \text{ м} = 500 \text{ см.}$$

Эту запись можно трактовать как алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} Q &= \{5\} [\text{м}] = \{5\} \text{ раз по } [1 \text{ м}] = \{5\} \text{ раз по } [100 \text{ см}] = \\ &= \{5\} \text{ раз по } (100 \text{ раз по } [1 \text{ см}]) = \{500\} \text{ раз по } [1 \text{ см}] = \{500\} [\text{см}]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если размерность уменьшается в 100 раз (был метр, стал сантиметр), то номинал увеличивается во столько же раз (номинал был 5, стал 500). Значит, запись

$$Q = \{Q\} [Q]$$

можно трактовать как обычное алгебраическое умножение безразмерного номинала $\{Q\}$ на размерный эталон $[Q]$.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

1.2. РАЗМЕРНЫЕ И БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Кроме размерных величин в физике существуют **безразмерные** величины, т. е. такие, численные значения которых не зависят от выбора основных единиц измерения. Для них считается, что размерность равна единице:

$$[Q] = \dim Q = 1.$$

Безразмерными всегда оказываются величины, определяемые отношением величин с одинаковой размерностью. К таким относятся: перегрузка как отношение действующего ускорения к величине ускорения силы тяжести; коэффициент полезного действия (КПД) – отношение работ; коэффициент трения – отношение сил; отношение длины окружности к радиусу и т. п. Разделение величин на размерные и безразмерные условно. Например, если угол измерять в градусах, он будет размерным, а если в радианах, он будет безразмерным.

Размерная величина A может быть мала или велика только по сравнению с другой величиной B той же размерности. Это сводится к оценке безразмерного отношения A/B : мало оно или велико.

Для безразмерных величин можно говорить, что они малы или велики, не указывая по сравнению с чем, так как они обычно сравниваются с единицей. Безразмерная величина X мала, если она много меньше единицы: $X \ll 1$. Безразмерная величина Y велика, если она много больше единицы: $Y \gg 1$. Во многих задачах по умолчанию предполагается, что много – это больше, чем на порядок, т. е. больше, чем в 10 раз, т. е. $X \ll 1$ – это $X < 0,1$, а $Y \gg 1$ – это $Y > 10$.

Безразмерные величины могут образовывать симплексы и комплексы. Симплекс – это отношение двух величин Z одинаковой размерности A :

$$S = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad [S] = \dim S = \frac{A}{A} = 1.$$

Комплекс – это такое произведение нескольких размерных величин в различных степенях, которое дает безразмерную величину. Например, для математического маятника массой m на подвесе длиной l в условиях земной гравитации g с периодом колебаний T безразмерным комплексом будет следующая комбинация параметров:

$$\pi = \frac{gT^2}{l} = m^0 g^1 T^2 l^{-1}, \quad [\pi] = \dim \pi = \frac{(M/C^2)C^2}{M} = 1.$$

Симплексы – это частный случай комплексов, и их выделение имеет смысл только в связи с наглядностью тех или иных приложений анализа размерностей.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

1.3. ОСНОВНЫЕ И ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Так же просто, как и длину, в механике можно измерить массу и время. Для этого физику-механику понадобится всего лишь измерительная линейка, весы и часы. А как измерить скорость движения? Можно ввести новую меру – меру скорости (например, «узел», как это сделано в морском деле), а можно использовать уже существующие меры длины и времени в соответствии с определением скорости как отношения расстояния, проходимого за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени. Например, $V = 6$ м/с. Отсюда понятно, что в механике существуют первичные и вторичные величины:

- **первичная** – такая физическая величина, которая вводится безотносительно к другим величинам, и ее численное значение определяется посредством прямого измерения (при этом единица измерения выбирается произвольно);

- **вторичная** – такая физическая величина, которая выражается через первичные на основе определительного уравнения.

Для первичных величин вводятся **основные** единицы измерения. В 1832 году Гаусс назвал их **абсолютными** единицами [15]. Все остальные величины относятся к вторичным, и для них вводятся **производные** единицы измерения. Основное свойство гауссовой системы состоит в том, что предложенная система единиц должна удовлетворять тому условию, что при перемене единиц измерения уравнение остается неизменным [33].

Физические величины могут быть переменными или постоянными, те и другие, в свою очередь, могут быть размерными или безразмерными:

- **размерные переменные** величины – это основная категория физических величин;

- **размерные постоянные** величины – это такие, как скорость света в вакууме, гравитационная постоянная в законе всемирного тяготения, ускорение свободного падения. Заметим, что последняя постоянная, ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с², строго говоря, не является константой. На поверхности Земли она принимает значения от 9.77 на высокой горе до 9.83 в океанской впадине. Одним из способов измерения этой константы является применение маятника;

- **безразмерные переменные** величины обычно определяются через отношения величин с одинаковой размерностью;
- **безразмерные постоянные** величины – это коэффициенты, стоящие в физических формулах.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

1.4. ФОРМУЛА РАЗМЕРНОСТИ

В механике за основные величины могут приниматься либо длина, масса, время, либо длина, сила, время, либо еще что-то. Обозначим основные размерности через (q_1, q_2, q_3) . Размерность вторичной величины Q будет функцией от этих размерностей

$$[Q] = f(q_1, q_2, q_3).$$

Эта формула размерностей должна удовлетворять следующим требованиям:

- во-первых, принципу инвариантности, а именно формулировка физических законов не должна зависеть от выбора единиц измерения;
- во-вторых, отношение двух численных значений производной величины не должно зависеть от выбора основных единиц измерения, например, отношение скоростей должно быть константой $V_1 / V_2 = C$ в любой системе единиц.

Исходя из этих требований можно строго доказать (доказательства можно найти в [8, 12, 23, 33, 61, 73]), что формула размерности производной величины является степенным одночленом от основных размерностей (формула Фурье):

$$[Q] = f(q_1, q_2, q_3) = q_1^i q_2^j q_3^k.$$

Если за основные размерности принимать длину ($q_1 = L$), массу ($q_2 = M$) и время ($q_3 = T$), то формула размерности принимает вид

$$[Q] = L^i M^j T^k. \quad (1.2)$$

Например, ускорение имеет размерность $[a] = \text{м/с}^2 = L^1 M^0 T^{-2}$.

В классе размерностей LMT размерность силы определяется из закона Ньютона. Закон Ньютона устанавливает не равенство, а пропорциональность силы умножению массы на ускорение. В такой форме размерность силы можно считать четвертой основной размерностью, но в этом случае в законе Ньютона появляется размерный коэффициент пропорциональности, который должен уравнивать размерности:

$$F = c \cdot ma \Rightarrow c = \frac{F}{ma} \Rightarrow [c] = \frac{[F]}{[m][a]} = \frac{[F]}{M(L/T^2)}.$$

По предложению Гаусса [15] было принято считать этот коэффициент безразмерным и равным единице. Тогда размерность силы (Ньютон) становится производной от основных размерностей массы, длины и времени:

$$c = 1 \Rightarrow F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = M(L/T^2) = MLT^{-2} = H.$$

Размерность позволяет определить, как изменяется размер производной величины при изменении размеров основных величин [5]. Пусть размерность величины X равна

$$[X] = \dim X = L^p M^q T^r.$$

Тогда величина X есть произведение от умножения номинала $\{X\}$ на размерность $[X]$:

$$X = \{X\}[X] = \{X\}L^p M^q T^r.$$

Если длина изменяется от L до L_1 , масса от M до M_1 и время от T до T_1 , то новый размер величины будет больше прежнего в

$$\frac{X_1}{X} = \frac{\{X_1\}}{\{X\}} \frac{[X_1]}{[X]} = 1 \left(\frac{L_1}{L} \right)^p \left(\frac{M_1}{M} \right)^q \left(\frac{T_1}{T} \right)^r$$

раз. Например, определить изменение момента инерции J тела при увеличении линейных размеров в 3 раза и массы в 2 раза. Размерность

момента инерции $\dim J = \text{кг} \cdot \text{м}^2 = ML^2$. Пользуясь приведенной ранее формулой, получим

$$(J_1 / J) = (L_1 / L)^2 (M_1 / M)^1 = 3^2 \cdot 2^1 = 18.$$

Следовательно, момент инерции увеличится в 18 раз.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

1.5. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

Выбор как основных единиц измерения, так и систем единиц измерения достаточно произволен (табл. 1.1). Например, в механике и ее приложениях использовались система СГС (сантиметр, грамм массы, секунда), техническая система МКСС (метр, килограмм-сила, секунда), международная система СИ (метр, килограмм массы, секунда). Немским физиком Г. Герцем была предложена система единиц измерения, в основу которой были положены единицы длины, массы и энергии.

Таблица 1.1

Величина	Система СГС	Система МКСС	Система СИ	Система Герца
Длина L	см	м	м	м
Масса M	г	–	кг	кг
Сила F	–	кгс	–	–
Время T	с	с	с	–
Энергия E	–	–	–	эрг

Можно построить для механики системы единиц, содержащие как больше, так и меньше трех основных единиц измерения. Поэтому критерием выбора основных единиц измерения и их количества в системе единиц измерения служит удобство их применения на практике [8]. До введения системы СИ у нас в физических исследованиях использовалась система СГС, а в технике – система МКСС. Например, давление измерялось в атмосферах, равных килограмму силы, деленному на квадратный сантиметр: $1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс} / 1 \text{ см}^2$. После введения системы СИ единицы длины, времени и массы принимаются за основные, в том числе и в технике. Теперь давление следует измерять в паскалях, равных ньютому, деленному на квадратный метр: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} / 1 \text{ м}^2$.

В настоящее время во всем мире и у нас используется международная система единиц измерения СИ (The International System Units) [16], которая имеет семь основных единиц (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Величина	Размерность	Единица	Обозначение
Длина	L	Метр	м / m
Масса	M	Килограмм	кг / kg
Время	T	Секунда	с / s
Сила тока	I	Ампер	А / A
Температура	Θ	Кельвин	К / K
Количество вещества	N	Моль	моль / mol
Сила света	J	Кандела	кд / kd

Единицы измерения остальных величин являются производными и выражаются через основные единицы измерения. Так, например, единицы измерения силы в ньютонах (Н) и работы в джоулях (Дж) определяются через их определительные формулы:

$$F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 = M(L/T^2) = MLT^{-2} = \text{Н}.$$

$$A = Fs \Rightarrow [A] = [F][s] = \text{Н} \cdot \text{м} = (MLT^{-2})L = ML^2T^{-2} = \text{Дж}.$$

Если численное значение размерной величины с размерностью, указанной в табл. 1.2, оказывается слишком велико или мало, то используются десятичные приставки, например, санти (0.01), милли (0.001), кило (1000). Наиболее употребительные десятичные приставки указаны в приложении 2. Десятичные приставки служат для сокращения количества нулей в численных значениях физических величин.

История развития и внедрения международной системы единиц СИ начинается с 1795 года, когда в революционной Франции законом Национального Конвента была введена десятичная метрическая система единиц измерения. Экспериментальное определение основных единиц длины и массы было поручено комиссарам. В их число входили Кулон, Лагранж, Лаплас и другие выдающиеся ученые. Более подробно история системы СИ и описание эталонов длины, массы и времени приведены в приложении 3.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

1.6. КЛАССЫ СИСТЕМ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

Классом систем единиц измерения называется совокупность систем единиц измерения, различающихся между собой только величиной, но не природой основных единиц измерения [7]. Так, система СГС и система СИ (см. табл. 1.1) принадлежат к одному классу, в котором за основные единицы измерения приняты эталоны длины L , массы M и времени T . Этот класс обозначается LMT . Система МКСС принадлежит к классу LFT . Система Герца принадлежит

к классу LME .

Рассмотрим несколько примеров определения размерностей в различных классах систем единиц измерения [36].

Пример 1: класс размерностей LFT. В этом классе системы мер размерности массы и энергии будут выражаться через их определяющие уравнения:

$$m = \frac{F}{a} \quad \Rightarrow \quad [m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{F}{LT^{-2}} = L^{-1}FT^2,$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad [E] = [m][v]^2 = (L^{-1}FT^2)(LT^{-1})^2 = LF.$$

Естественно, что размерности этих величин отличаются от соответствующих размерностей в классе LMT .

Пример 2: класс размерностей LMFT. Выберем в качестве основных величин *длину, массу, силу и время*. Тогда мера силы не будет зависеть от меры массы, и поэтому равенство $F = ma$ станет неверным. Второй закон динамики будет теперь выражаться равенством

$$F = c \cdot ma,$$

где c – некоторый коэффициент пропорциональности, или инерционная постоянная. Из этого уравнения получаем

$$c = \frac{F}{ma} \quad \Rightarrow \quad [c] = \frac{[F]}{[m][a]} = \frac{F}{M(LT^{-2})} = L^{-1}M^{-1}FT^2. \quad (1.3)$$

Следовательно, константа c является размерной. Эта константа будет присутствовать и в других физических формулах. Например, уравнение для энергии

$$Fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

будет теперь иметь вид

$$Fs = c \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \right).$$

Пример 3: гравитационная мера силы. Выберем в качестве основных величин длину, массу и время (класс LMT), а силу будем измерять не через закон Ньютона, как в системе СИ, а с помощью закона всемирного тяготения. С этой целью выберем такую единицу силы, при которой гравитационная постоянная обращается в единицу. Тогда закон тяготения примет следующий вид:

$$F = 1 \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

и комплекс $(m_1 m_2 / r^2)$ можно будет рассматривать как меру силы. В этом случае сила будет иметь размерность

$$[F] = \frac{[m]^2}{[r]^2} = \frac{M^2}{L^2} = L^{-2} M^2.$$

Сравнивая полученное соотношение с известным равенством системы СИ

$$[F] = LMT^{-2},$$

видим, что размерность производной величины может быть различной даже в одном классе единиц измерения. Теперь равенство $F = ma$ становится неверным, и второй закон динамики принимает вид

$$F = c \cdot ma.$$

Из этого уравнения находим размерность инерционной константы

$$c = \frac{F}{ma} \Rightarrow [c] = \frac{[F]}{[m][a]} = \frac{L^{-2}M^2}{M(LT^{-2})} = L^{-3}MT^2.$$

Видно, что новая размерность инерционной постоянной отличается от старой размерности (1.3).

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

1.7. ПЕРЕСЧЕТ В ДРУГИЕ РАЗМЕРНОСТИ

При переходе от одних единиц измерения к другим следует считать, что размерная величина Q остается одной и той же в любых единицах измерения. При этом удобно пользоваться двухпозиционной записью (1.1) размерной величины Q :

$$Q = \{Q\} [Q],$$

т. е. физическая величина Q есть обычное алгебраическое произведение от умножения безразмерного номинала $\{Q\}$ на размерный эталон $[Q]$, и при замене эталона должен поменяться номинал:

$$Q = \{Q_1\} [Q_1] = \{Q_2\} [Q_2]. \quad (1.4)$$

Покажем это на примере угловой скорости. В технике угловая скорость задается в оборотах в минуту:

$$\Omega = n = \{n\} [n] = \{n\} [\text{оборот/мин}].$$

В расчетных формулах теоретической механики угловая скорость измеряется в радианах в секунду:

$$\Omega = \omega = \{\omega\} [\omega] = \{\omega\} [\text{рад/с}].$$

Для перевода единиц из технических в математические воспользуемся двухпозиционной записью

$$\Omega = \{\omega\} [\omega] = \{n\} [n]. \quad (1.5)$$

Распишем правую часть:

$$\{n\} [n] = \{n\} \left[\frac{1 \text{ оборот}}{1 \text{ мин}} \right] = \{n\} \left[\frac{2\pi \text{ рад}}{60 \text{ с}} \right] = \{n\} \frac{2\pi}{60} \left[\frac{1 \text{ рад}}{1 \text{ с}} \right].$$

Подставляем это выражение в (1.5):

$$\{\omega\} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right] = \{n\} \frac{2\pi}{60} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right].$$

Сравнивая левую и правую часть, в результате получаем

$$\{\omega\} = \{n\} \frac{2\pi}{60} = \{n\} \frac{\pi}{30} \approx 0.1\{n\}.$$

Итак, для перевода физической величины из одной размерности в другую следует пользоваться двухпозиционной формулой (1.4).

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

2. ЧЕМ ПОЛЕЗЕН АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ (АР)

Перед тем как изучать особенности анализа размерностей, рассмотрим четыре примера, которые покажут нам, что этот метод помогает вспомнить забытую формулу и даже вывести неизвестную формулу, сократить количество экспериментов, установить скрываемую информацию.

2.1. АР ПОМОГАЕТ УТОЧНИТЬ ЗАБЫТУЮ ФОРМУЛУ

Предположим, что студенту требуется записать формулу для ускорения точки, движущейся по окружности с постоянной скоростью [69]. Студент помнит, что ускорение зависит от скорости движения и от радиуса окружности, но забыл, по какой формуле его считать:

$$a = v^2 r, \quad a = v r^2, \quad a = v / r, \quad a = r / v, \quad a = r / v^2, \quad a = v^2 / r.$$

Попробуем ему помочь. Найдем нужную формулу способом полного двустороннего комплекса, или способом Рэля. Будем искать эту зависимость в виде степенного комплекса:

$$a = a(v, r) = C \cdot v^x r^y. \quad (2.1)$$

Здесь C – какой-то коэффициент. В задачу входят три параметра, $n = 3$. Запишем их размерности:

$$[a] = \text{м}/\text{с}^2 = LT^{-2}, \quad [v] = \text{м}/\text{с} = LT^{-1}, \quad [r] = \text{м} = L.$$

Независимых размерностей только две (L, T), т. е. $k = 2$, следовательно, $n - k = 3 - 2 = 1$. Перепишем уравнение связи (2.1) в размерностях:

$$[a] = [C][v]^x[r]^y,$$

$$LT^{-2} = 1(LT^{-1})^x L^y = L^x T^{-x} L^y = L^{x+y} T^{-x}.$$

Уравняем размерности слева и справа:

$$L: 1 = x + y, \quad T: -2 = -x.$$

Отсюда находим искомые степени переменных:

$$x = 2, \quad y = 1 - x = 1 - 2 = -1.$$

Окончательно получаем

$$a = C \cdot v^x r^y = C \cdot v^2 r^{-1} = C \frac{v^2}{r}. \quad (2.2)$$

Преобразуем (2.2) к следующему виду:

$$C = \frac{ar}{v^2} = \pi_1 \Rightarrow a = \pi_1 \frac{v^2}{r} = C \frac{v^2}{r}.$$

Получили один ($n - k = 3 - 2 = 1$) безразмерный критерий подобия π_1 , из которого нашли ускорение. Константа C через анализ размерностей не определяется. Из теоретической механики известно, что $C = 1$. В результате получили правильную формулу для нормального ускорения

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Этот простейший пример показывает, что анализ размерностей может выступать как средство подкрепления памяти.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

2.2. АР ПОМОГАЕТ ВЫВЕСТИ НЕИЗВЕСТНУЮ ФОРМУЛУ

Задача Галилея [69]: если тело свободно падает из состояния покоя, то как будет зависеть расстояние s , проходимое телом, от времени полета t ?

До Галилея все считали, что проходимое расстояние и скорость зависят от массы тела: чем тяжелее тело, тем быстрее оно упадет. Галилей экспериментально показал, что и тяжелый, и легкий камень, одновременно сброшенные с «падающей» Пизанской башни, достигают ее подножия одновременно, т. е. расстояние s не зависит от массы тела m . (В скобках заметим, что этот опыт так и не убедил противников Галилея.)

Теоретическое решение. Из теоретической механики мы знаем, что при равноускоренном движении без сопротивления среды скорость v и пройденный путь s материальной точки в произвольный момент времени выражаются следующими зависимостями:

$$v = v_0 + gt, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

При нулевом начальном положении и нулевой начальной скорости получаем

$$(s_0 = 0, \quad v_0 = 0) \Rightarrow v = gt, \quad s = \frac{gt^2}{2}.$$

Последнее равенство можем переписать в виде

$$s = \frac{gt^2}{2} = gt \frac{t}{2} = \frac{vt}{2}. \quad (2.3)$$

Решение методом анализа размерностей. Перенесемся во времена Галилея и предположим, что формула (2.3) нам неизвестна. Вначале необходимо выявить физические величины, от которых зависит проходимое телом расстояние s . Очевидно, оно зависит от времени падения t и от ускорения силы тяжести g . Зависит ли расстояние s от каких-либо иных переменных? Допустим, что противники Галилея правы, и включим в список переменных массу тела m . Получилось, что в задачу вхо-

дят четыре ($n = 4$) размерных параметра. Будем искать зависимость s от остальных параметров в общем виде – в виде степенного комплекса:

$$s = s(g, t, m) = C \cdot g^x t^y m^z. \quad (2.4)$$

Такой путь решения задачи соответствует способу Рэлея.

Запишем размерности всех параметров:

$$[s] = \text{м} = L, \quad [g] = \text{м}/\text{с}^2 = LT^{-2}, \quad [t] = \text{с} = T, \quad [m] = \text{кг} = M.$$

Количество независимых размерностей равняется трем ($k = 3$) – это L , M , T . Перепишем уравнение связи (2.4) в размерностях:

$$\begin{aligned} [s] &= [C][g]^x [t]^y [m]^z, \\ L &= 1 (\text{м}/\text{с}^2)^x (\text{с})^y (\text{кг})^z = 1 (LT^{-2})^x T^y M^z = \\ &= L^x T^{-2x+y} M^z = L^x T^{-2x+y} M^z. \end{aligned}$$

Уравняем размерности слева и справа:

$$L: 1 = x, \quad T: 0 = -2x + y, \quad M: 0 = z.$$

Отсюда находим искомые степени переменных:

$$x = 1, \quad y = 2x = 2, \quad z = 0. \quad (2.5)$$

Подставляем решение (2.5) в исходное уравнение (2.4):

$$s = C \cdot g^x t^y m^z = C \cdot g^1 t^2 m^0 = C \cdot g t^2. \quad (2.6)$$

Таким образом, мы установили, что, как и утверждал Галилей, s не зависит от массы тела, и, основываясь только на анализе размерностей, установили неизвестную для Галилея формулу (2.3) с точностью до константы C . Если принять произвольную константу $C = 1/2$, то получим точное решение (2.3).

Для того чтобы связать этот пример с последующими рассуждениями, преобразуем (2.6) к следующему виду:

$$\frac{s}{gt^2} = C \Rightarrow \frac{gt^2}{s} = C_1 = \pi.$$

Получили один ($n - k = 4 - 3 = 1$) безразмерный критерий подобия. Этот вывод нам пригодится в дальнейшем.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

2.3. АР ПОМОГАЕТ СОКРАТИТЬ КОЛИЧЕСТВО ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Предположим, что нам требуется измерить какую-нибудь величину F как функцию одного аргумента x . Результаты измерений можно занести в одну строку:

Номер измерения i	1	2	3	4	5	...	m
Задаем значение аргумента x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_m
Измеряем значение функции F_i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	...	F_m

Здесь m – количество измерений. После измерений можем построить график функции $F = f(x)$ как линию.

Теперь рассмотрим случай, когда функция зависит от двух аргументов $F = f(x, y)$. Если по обоим аргументам x и y нам нужно провести по m измерений, то результаты потребуется занести в табл. 2.1. Здесь уже потребуется провести $N = m \cdot m = m^2$ измерений.

Таблица 2.1

Значения аргументов							
x_i, y_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_m
y_1	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	...	F_{1m}
y_2	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}	F_{25}	...	F_{2m}
y_3	F_{31}	F_{32}	F_{33}	F_{34}	F_{35}	...	F_{3m}
y_4	F_{41}	F_{42}	F_{43}	F_{44}	F_{45}	...	F_{4m}
y_5	F_{51}	F_{52}	F_{53}	F_{54}	F_{55}	...	F_{5m}
...
y_m	F_{m1}	F_{m2}	F_{m3}	F_{m4}	F_{m5}	...	F_{mm}

Для случая трех аргументов $F = f(x, y, z)$ каждому значению z_i будет соответствовать такая таблица на одном листе бумаги. Эти листы мы сможем сложить в стопку и сшить в одну книжку. Количество измерений составит $N = m^2 \cdot m = m^3$. Для случая четырех аргументов $F = f(x, y, z, u)$ количество измерений составит $N = m^3 \cdot m = m^4$, и для их записи нам потребуется m книжек. В общем случае, если функция зависит от p аргументов

$$F = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p),$$

количество измерений составит огромную величину $N = m^p$. Например, при $m = 10$ измерений по каждому из трех аргументов ($p = 3$) нам потребуется провести в сумме $N = 10^3 = 1000$ измерений, для четырех аргументов ($p = 4$) уже потребуется провести $N = 10^4 = 10$ тысяч измерений.

Если нам удастся свести задачу к безразмерному виду, то количество экспериментов можно значительно сократить. Сделать это помогает анализ размерностей. Поучительный пример по этому поводу описывает Г.И. Баренблатт в [6, 7].

В 1909–1911 годах физикохимики Э. Бозе, Д. Рауэрт и М. Бозе [76, 77] опубликовали серию экспериментальных исследований турбулентного внутреннего трения различных жидкостей. Опыты проводились по следующей схеме (рис. 2.1). Через трубку в стационарном турбулентном режиме протекали различные жидкости: вода, хлороформ, бромформ, ртуть, этиловый спирт и др. В ходе опытов измерялось время τ заполнения сосуда фиксированного объема Q , а также перепад давления P на концах трубки. Результаты измерений были представлены в виде серии зависимостей перепада давления P от времени заполнения τ , подобных приведенным на рис. 2.2.

Работы Бозе и Рауэрта были замечены тогда же Т. Карманом [84, 85], в то время молодым исследователем, а в будущем одним из величайших механиков века. Он подверг их результаты обработке, если пользоваться сегодняшней терминологией, методом анализа размерностей. Рассуждения Т. Кармана можно представить следующим образом.

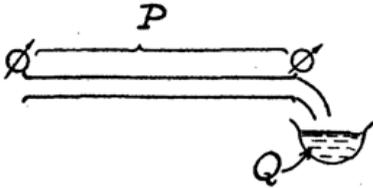


Рис. 2.1. Схема опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе

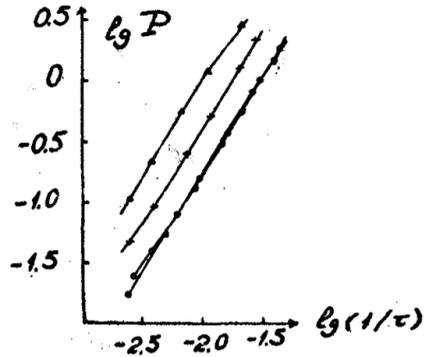


Рис. 2.2. Результаты опытов в исходном виде для различных жидкостей

Перепад давления на концах трубки P зависит от следующих величин: времени заполнения сосуда τ , его объема Q , а также свойств жидкости – ее коэффициента вязкости μ и плотности ρ :

$$P = f(\tau, Q, \mu, \rho). \quad (2.7)$$

Как видно, в данном случае количество размерных параметров задачи $n = 5$. Размерности рассматриваемых величин в классе LMT выражаются следующими соотношениями:

$$[\tau] = c = T, \quad [Q] = m^3 = L^3, \quad [\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \frac{M}{LT},$$

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{M}{L^3}, \quad [P] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \frac{1}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{M}{LT^2}.$$

Первые три определяющих параметра τ , Q , μ имеют независимые размерности: размерность τ содержит только время T , размерность Q – длину L , а размерность μ содержит массу M . Поэтому никакими комбинациями степеней нельзя получить размерность одной из этих величин через размерности двух других. Напротив, размерность плотности жидкости ρ выражается через произведение степеней размерностей τ , Q , μ :

$$[\rho] = [\tau][Q]^{-2/3}[\mu], \quad (2.8)$$

$$\frac{M}{L^3} = T(L^3)^{-2/3} \frac{M}{LT} = T \frac{1}{L^2} \frac{M}{LT}.$$

Размерность перепада давления P также выражается через размерности определяющих параметров τ , Q , μ :

$$[P] = [\tau]^{-1} [Q]^0 [\mu], \quad (2.9)$$

$$\frac{M}{LT^2} = \frac{1}{T} 1 \frac{M}{LT}.$$

Таким образом, количество независимых размерностей в задаче $k = 3$ (L, M, T). Анализ размерностей дает два ($n - k = 5 - 3 = 2$) критерия подобия: из выражения (2.8) найдем π_1 :

$$\frac{[\rho]}{[\tau][Q]^{-2/3}[\mu]} = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\rho}{\mu\tau Q^{-2/3}},$$

а из выражения (2.9) найдем π_2 :

$$\frac{[P]}{[\tau]^{-1}[Q]^0[\mu]} = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{P}{\mu\tau^{-1}}.$$

Параметры π_1 и π_2 не имеют размерностей:

$$[\pi_1] = \frac{\frac{M}{L^3}}{\frac{M}{LT} T(L^3)^{-2/3}} = \frac{\frac{M}{L^3}}{\frac{M}{LT} T \frac{1}{L^2}} = \frac{\frac{M}{L^3}}{\frac{M}{L^3}} = 1,$$

$$[\pi_2] = \frac{\frac{M}{LT^2}}{\frac{M}{LT} \frac{1}{T}} = \frac{\frac{M}{LT^2}}{\frac{M}{LT^2}} = 1.$$

Следовательно, отыскание искомой зависимости (2.7) перепада давления от определяющих его четырех переменных

$$P = f(\tau, Q, \mu, \rho)$$

сводится к определению функции одной составной переменной

$$\pi_2 = \Phi(\pi_1), \quad (2.10)$$

которое можно записать в виде

$$\frac{P}{\mu\tau^{-1}} = \Phi\left(\frac{\rho}{\mu\tau Q^{-2/3}}\right) \Rightarrow P = \frac{\mu}{\tau} \Phi\left(\frac{\rho Q^{2/3}}{\mu\tau}\right).$$

Уравнение (2.10) означает, что в координатах

$$x = \pi_1 = \frac{\rho Q^{2/3}}{\mu\tau}, \quad y = \pi_2 = \frac{P\tau}{\mu}$$

все опытные точки должны лечь на единую кривую. Выполненная Т. Карманом обработка данных измерений Бозе–Рауэрта–Бозе подтвердила это (рис. 2.3).

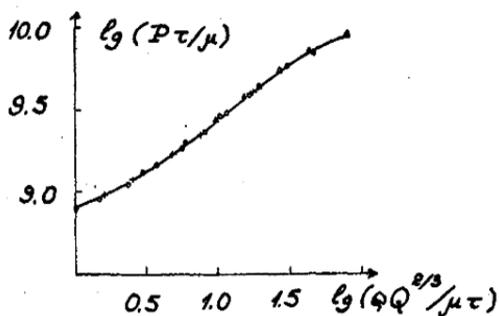


Рис. 2.3. Результаты опытов в безразмерных координатах

Ясно, что если бы анализ размерностей был проведен заранее, то объем экспериментальной работы физикохимиков сократился бы во много раз.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

2.4. АР ПОМОГАЕТ ВЫЯВИТЬ СКРЫВАЕМУЮ ИНФОРМАЦИЮ

Такой работой могут заниматься различные экспертные и аналитические службы, которые собирают информацию в открытых источниках и по ней прогнозируют значения скрываемых величин. Подобные работы можно отнести к военному и промышленному шпионажу. Пожалуй, первое применение анализа размерностей в этом направлении описывает Г.И. Баренблатт в [6, 7] со ссылкой на Дж.И. Тейлора [90]. Теоретическое исследование соответствующей задачи газодинамики дано в работах Л.И. Седова [60] и Дж.И. Тейлора [90].

При атомном взрыве происходит быстрое, почти мгновенное, выделение значительной энергии E в малой области, можно считать – в точке. В месте взрыва возникает сильная сферическая ударная волна, давление за фронтом которой на начальной стадии взрыва во много тысяч раз больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на первой стадии взрыва можно пренебречь. Таким образом, радиус фронта ударной волны r_f через промежуток времени t после взрыва зависит от величин E , t и начальной плотности воздуха ρ :

$$r_f = r_f(E, t, \rho). \quad (2.11)$$

Таким образом, количество размерных параметров задачи $n = 4$. Размерности всех величин в классе LMT суть соответственно:

$$[r_f] = \text{м} = L,$$

$$[E] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{ML^2}{T^2} = L^2MT^{-2},$$

$$[t] = \text{с} = T, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}.$$

Количество независимых размерностей в задаче равно трем, $k = 3$ (L, M, T). Анализ размерностей дает один ($n - k = 4 - 3 = 1$) критерий подобия. Для его нахождения запишем размерность определяемой величины r_f через степени размерностей определяющих параметров по следующей формуле:

$$[r_f]^5 = \frac{[E]}{[\rho]} [t]^2,$$

$$L^5 = \frac{L^2 M T^{-2}}{M L^{-3}} T^2 = L^{2+3} M^{1-1} T^{-2+2} = L^5 M^0 T^0.$$

Значит,

$$r_f^5 = C \frac{Et^2}{\rho}.$$

Отсюда получаем единственный безразмерный комплекс

$$\pi_1 = \frac{r_f^5}{(Et^2 / \rho)}.$$

Переходя к корню пятой степени, получаем единственный критерий подобия

$$\pi_2 = \pi_1^{1/5} = \frac{r_f}{(Et^2 / \rho)^{1/5}},$$

а так как критерий подобия есть число, то искомую функцию находим с точностью до константы:

$$\pi_2 = \text{const} = C, \quad r_f = C(Et^2 / \rho)^{1/5} = (C_1 Et^2 / \rho)^{1/5}.$$

Прологарифмируем эту формулу:

$$\lg r_f = \lg (C_1 E t^2 / \rho)^{1/5} = \frac{1}{5} (\lg (C_1 E / \rho) + \lg t^2) = \frac{1}{5} (\lg (C_1 E / \rho) + 2 \lg t),$$

$$5 \lg r_f = \lg (C_1 E / \rho) + 2 \lg t,$$

$$\frac{5}{2} \lg r_f = \frac{1}{2} \lg (C_1 E / \rho) + \lg t.$$

Если в первом приближении принять $C_1 = 1$, то получается формула

$$\frac{5}{2} \lg r_f = \frac{1}{2} \lg \frac{E}{\rho} + \lg t. \quad (2.12)$$

Решение соответствующей задачи газовой динамики (Л.И. Седов, 1946; Дж.И. Тейлор, 1941, 1950; Дж. Нейман, 1941, 1963) подтвердило, что значение постоянной C_1 в формуле (2.12) близко к единице.

Примем за аргумент x , функцию y и константу C_2 величины

$$y = \frac{5}{2} \lg r_f = 2.5 \lg r_f, \quad C_2 = \frac{1}{2} \lg \frac{E}{\rho}, \quad x = \lg t. \quad (2.13)$$

Тогда формула (2.12) запишется в более привычном виде

$$y = C_2 + x. \quad (2.14)$$

Эта формула показывает, что если измерять тем или иным способом радиус ударной волны r_f в разные моменты времени t , то в логарифмических координатах $x = \lg t$, $y = 2.5 \lg r_f$ экспериментальные точки должны лечь на прямую, имеющую наклон, равный 45° (так как коэффициент перед x равен единице) и смещенную вверх по оси ординат на величину C_2 .

Это подтвердил Дж.И. Тейлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских ядерных испытаний. Просматривая кадры кинофильма, он построил экспериментальные точки, через них провел прямую (рис. 2.4) и по отрезку, отсекаемому на оси ординат, по формулам (2.13) и (2.14) определил энергию взрыва:

$$t \approx 0 = 0.0001 = 10^{-4} \text{ с} \Rightarrow x = \lg 10^{-4} = -4,$$

$$y \approx 8 \Rightarrow C_2 = y - x \approx 8 - (-4) \approx 12,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \lg \frac{E}{\rho}, \quad \lg \frac{E}{\rho} = 2C_2, \quad \frac{E}{\rho} = 10^{2C_2}, \quad E = \rho \cdot 10^{2C_2} \approx \rho \cdot 10^{24}.$$

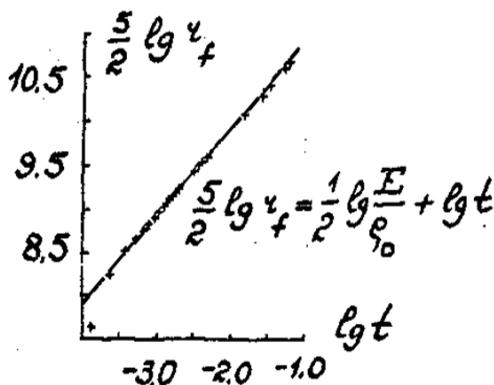


Рис. 2.4. Распространение ударной волны при ядерном взрыве

Публикация Дж.И. Тейлором этой величины, оказавшейся равной примерно 10^{21} эрг (10^{14} Дж), вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственных кругах, поскольку эта цифра считалась строго секретной, хотя фильм секретным не был.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

2.5. ВЫВОДЫ ПО ПРИМЕРАМ

Рассмотренные примеры показывают, что простейшие рассуждения анализа размерностей могут дать вполне содержательные результаты. Важнейший элемент при этом – правильный выбор совокупности определяющих параметров.

Если задача сформулирована математически, то совокупность определяющих параметров находится просто: это множество независимых переменных и параметров задачи, входящих в уравнения, граничные, начальные и другие условия, определяющие решение задачи. Такие задачи были рассмотрены в пособии [42], посвященном анализу уравнений.

Если задача не имеет явной математической формулировки, то правильный выбор определяющих параметров связан прежде всего с интуицией исследователя. Успех здесь зависит от правильного понимания того, какие параметры на самом деле важны, а какими можно пренебречь.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

3. КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ АНАЛИЗОМ РАЗМЕРНОСТЕЙ

3.1. ТРИ ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ

Подобие различных физических явлений основано на трех теоремах. Все эти теоремы доказываются исходя из математического представления задачи с помощью уравнений. Однако рассмотрение подобия с позиций анализа размерностей не требует знания уравнений задачи и опирается на вторую теорему подобия (Пи-теорему). Несмотря на то что теоремы доказаны математически, т. е. строгая формулировка их должна быть однотипна, тем не менее в текстовом виде теоремы приводятся в различных изданиях по-разному. Приведем формулировки теорем подобия в наиболее краткой форме и без доказательства.

Первая теорема (Ньютона–Бертрана). Теорема устанавливает необходимые условия подобия: *если явления подобны, то их критерии подобия численно равны* [33, 63].

Вторая теорема (Федермана–Букинггема), или Пи-теорема. *Если существует однозначное соотношение между n физическими величинами, для описания которых используется k основных единиц с независимыми размерностями, то существует также соотношение между $(n - k)$ безразмерными комбинациями, составленными из этих физических величин* [72].

Третья теорема (Кирпичёва–Гухмана). Теорема устанавливает достаточные условия подобия. *Подобны те процессы, условия однозначности которых подобны, и критерии подобия, составленные из условий однозначности, численно равны* [25]. К условиям однозначности относятся геометрические соотношения, физические параметры, краевые и начальные условия [18].

История теорем [31, 32, 33, 47].

Первая теорема была сформулирована Ньютоном в 1687 году в его «Principia» [87] для случая движения твердых тел. Через 160 лет,

в 1848 году, Ж. Бертран [75] дал строгое доказательство первой теоремы исходя из общих дифференциальных уравнений движения физических тел.

Вторая теорема подобия была сформулирована и доказана впервые, как считалось в зарубежной литературе, англичанином Е. Букингемом в 1914 году [78]. Однако, как показало исследование Гёртлера [82], за три года до появления публикации Букингема, в 1911 году, преподаватель Санкт-Петербургского политехнического института А. Федерман [67] доказал предположение, из которого вторая теорема подобия выводится как следствие. Увы, работа А. Федермана не получила широкой известности.

Теорему Федермана использовала в своих работах Т.А. Афанасьева-Эренфест [79, 80] в 1915 и 1925 годах и обобщила ее на случай, когда кроме произвольных физических величин даны их частные значения.

М.В. Кирпичёв и П.К. Конаков [32, 38] приводят более общее доказательство второй теоремы исходя из уравнений, которым удовлетворяют инварианты непрерывной группы преобразований.

Третья теорема подобия впервые была сформулирована и доказана в 1874 году для упругих явлений В.Л. Кирпичёвым [27]. В общем виде третья теорема была высказана как предположение М.В. Кирпичёвым и А.А. Гухманом [29] в 1931 году. Доказательство третьей теоремы, основанное на логическом анализе условий подобия двух явлений, было дано М.В. Кирпичёвым в 1933 году [30].

В дополнение к перечисленным авторам добавим нашего соотечественника. В 1953 году М. Рожков в письме в журнал [57] указывает, что еще за три года до Федермана анализ размерностей впервые был методически описан Н.А. Морозовым в 1908 году в его монографии [49]. М. Рожков пишет: «Не многим известно, что впервые анализ размерности был обоснован и широко использован в 90-х годах XIX столетия русским ученым, почетным академиком Николаем Александровичем Морозовым... В 1944 году мы специально обратились к Николаю Александровичу за установлением его приоритета в разработке метода анализа размерности и получили утвердительный ответ». Правда, эту работу Н.А. Морозова [49] С.С. Кутателадзе [44] считает «несколько наивной».

Как пользоваться анализом размерностей? Покажем методику его применения сначала на примерах для обычных и векторных размерностей, а затем опишем общую последовательность действий при определении критериев подобия.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

3.2. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ОБЫЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Рассмотрим здесь три примера, на которых покажем различное количество критериев подобия (КП), а также разные способы вывода этих критериев:

- в примере 1 для математического маятника один КП будет получен способом рассуждений, или подбора;
- в примере 2 для физического маятника два КП будут получены способом Рэлея;
- в примере 3 для движения жидкости в трубе три КП будут получены способом глобального критерия.

Полный перечень способов получения критериев подобия представлен в разделе 5.

3.2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

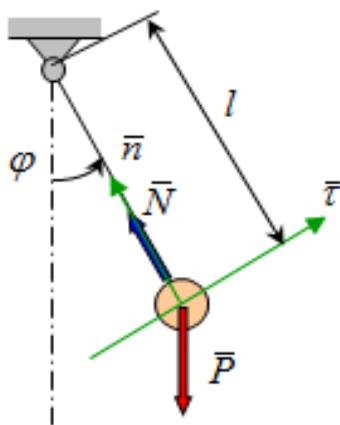


Рис. 3.1. Математический маятник

Для математического маятника (рис. 3.1) требуется найти период колебаний [3, 61]. Решение разобьем на этапы, которые в дальнейшем обобщим в [табл. 4.1](#).

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Для описания колебаний маятника помимо времени периода колебаний t надо указать его длину l , массу груза m , гравитацию g . Необходимо также указать начальный угол отклонения φ_0 , так как при больших углах период может зависеть от них. Таким образом, состояние движения определяется пятью размерными параметрами ($n = 5$):

$$(t, l, m, g, \varphi_0). \quad (3.1)$$

Эти величины имеют следующие размерности в классе LMT :

$$[t] = T, \quad [l] = L, \quad [m] = M, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [\varphi_0] = 1.$$

Требуется найти зависимость

$$t = f_1(l, m, g, \varphi_0).$$

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Будем действовать способом рассуждений. Независимых размерностей в этой задаче всего три ($k = 3$) – это килограмм, метр, секунда, или M, L, T . Эти размерности принадлежат параметрам (m, l, t) . По Пи-теореме вместо оставшихся двух ($n - k = 5 - 3 = 2$) величин (g, φ_0) можно рассматривать безразмерные комплексы. Начальный угол отклонения φ_0 – уже величина безразмерная, поэтому остается составить безразмерную комбинацию на основе гравитации g . Для этого можно величину g поделить на длину l и умножить на квадрат времени t :

$$\pi = \frac{gt^2}{l} \Rightarrow [\pi] = [g] \frac{[T]^2}{[L]} = \frac{L}{T^2} \frac{T^2}{L} = 1. \quad (3.2)$$

Более удобным будет комплекс в виде корня квадратного из этой комбинации:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{gt^2}{l}} = t \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.3)$$

Таким образом, из Пи-теоремы подобия вытекает, что вместо пяти величин (3.1) можно рассматривать только три размерные (m, l, t) и две безразмерные величины

$$\pi_1 = t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \pi_2 = \varphi_0,$$

причем

$$\pi_1 = f_2(\pi_2).$$

Из формулы (3.3) найдем искомую величину t :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \pi_1.$$

Поскольку величина π_1 безразмерная, она может зависеть только от безразмерных оставшихся величин, т. е. она есть функция только начального угла:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} f_2(\pi_2) = \sqrt{\frac{l}{g}} f_2(\varphi_0). \quad (3.4)$$

Формула (3.4) устанавливает зависимость времени периода колебаний t от длины маятника и гравитации. Получить вид функции $f_2(\varphi_0)$ с помощью теории размерности нельзя. Определение $f_2(\varphi_0)$ необходимо произвести

- либо теоретически, на основании решения уравнения движения;
- либо экспериментально.

Этап 3 – *качественный прогноз через сравнительный анализ*. Рассмотрим частный случай – малые колебания.

1) Предполагая, что при малых углах функция $f_2(\varphi_0)$ регулярна, можно разложить ее в ряд:

$$f_2(\varphi_0) = c_0 + c_1(\varphi_0) + c_2(\varphi_0)^2 + c_3(\varphi_0)^3 + c_4(\varphi_0)^4 + \dots$$

2) Если t есть период колебания, то из соображений симметрии очевидно, что период t не зависит от знака φ_0 :

$$f_2(\varphi_0) = f_2(-\varphi_0).$$

Следовательно, функция f_2 является четной функцией аргумента φ_0 :

$$c_1 = c_3 = \dots = 0, \quad f_2(\varphi_0) = c_0 + c_2(\varphi_0)^2 + c_4(\varphi_0)^4 + \dots$$

3) Для малых колебаний члены со степенями φ_0^2 и выше можно отбросить, и для периода t мы получаем формулу без начального угла φ_0 :

$$t = c_0 \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.5)$$

Формулы (3.4) и (3.5), полученные с помощью метода размерностей, показывают, что период колебаний t , вопреки нашим предполо-

жениям, не зависит от массы груза, а при малых углах отклонения не зависит и от начального угла. В этом случае в теории подобия считается, что процесс колебаний становится *автомодельным* по отношению к углу, т. е. колебания двух маятников будут подобны при любых малых отклонениях φ_{01} и φ_{02} .

Таким образом, мы видим, что для малых колебаний маятника с помощью анализа размерностей можно получить формулу периода колебания маятника с точностью до постоянного множителя c_0 . Постоянная c_0 находится

- либо из решения уравнения движения, которое показывает, что $c_0 = 2\pi$;

- либо из экспериментов.

Этап 4 – *количественный прогноз через моделирование (эксперимент)*. Для точного определения периода колебаний какого-то большого маятника, который пока не существует, но нам его нужно создать, можно провести моделирование его колебаний на малой модели. При этом удобно воспользоваться **таблицей проектирования эксперимента** [42], которая похожа на [рис. В2](#) и имеет следующий вид для входных параметров l, g, φ_0 и выходного параметра t .

Натура	Коэффициенты подобия	Модель
1) Входные параметры натуре l, g, φ_0	$l_C = \frac{l_1}{l} \quad g_C = \frac{g_1}{g} \quad \varphi_C = \frac{\varphi_{01}}{\varphi_0} = 1$	2) Входные параметры модели l_1, g_1, φ_{01}
4) Выходной параметр натуре вычисляем (прогнозируем) $t = \frac{t_1}{t_C}$	Из условия подобия $\pi_1 = \text{idem}$ находим $t_C = \sqrt{\frac{l_C}{g_C}}$	3) Выходной параметр модели измеряем в эксперименте t_1

Здесь коэффициенты подобия определяются из условия одинаковости чисел подобия для природы и модели:

$$\pi_2 = \text{idem} \rightarrow \varphi_0 = \varphi_{01} \rightarrow \varphi_C = \frac{\varphi_{01}}{\varphi_0} = 1,$$

$$\begin{aligned} \pi_1 = \text{idem} \rightarrow t\sqrt{\frac{g}{l}} &= t_1\sqrt{\frac{g_1}{l_1}} \rightarrow t_C = \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{g}{l}} / \sqrt{\frac{g_1}{l_1}} = \\ &= \sqrt{\frac{g/g_1}{l/l_1}} = \sqrt{\frac{l_1/l}{g_1/g}} = \sqrt{\frac{l_C}{g_C}}. \end{aligned}$$

Отклонив модель на тот же начальный угол φ_0 , что и для природы, измерим период колебаний модели и затем пересчитаем его на период колебаний будущего натурального маятника.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

3.2.2. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

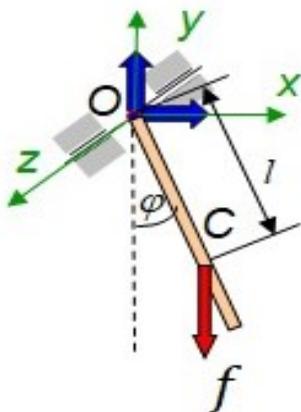


Рис. 3.2. Физический маятник

Найти период колебаний физического маятника. Напомним различие между физическим и математическим маятниками. В математическом маятнике считается, что вся масса сосредоточена в одной точке, и поэтому его мерой инерции является масса. В физическом маятнике (рис. 3.2) масса считается распределенной по объему тела, и поэтому его мерой инерции является момент инерции относительно оси вращения.

Решение разобьем на этапы, которые в дальнейшем обобщим в [табл. 4.1](#).

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Вначале вывьем все физические величины, определяющие собой период колебаний t , и сведем их в таблицу [69].

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные параметры</i>			
Момент инерции	I	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$L^2 M$
Вес маятника	f	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$	$L M T^{-2}$
«Длина» маятника – расстояние от оси вращения до центра тяжести	l	м	L
Начальная длина дуги колебаний, проходящая центром тяжести	s	м	L
<i>Выходной параметр</i>			
Период колебаний	t	с	T
Итого	$n = 5$	$k = 3$	

Требуется найти период колебаний как функцию от остальных параметров задачи:

$$t = F(I, f, l, s).$$

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. В задачу входят $n = 5$ размерных величин, которые описываются тремя ($k = 3$) независимыми размерностями LMT . Из Пи-теоремы следует, что здесь должно получиться два ($p = n - k = 5 - 3 = 2$) безразмерных критерия подобия (π_1, π_2).

Будем искать период колебаний по способу Рэлея как функцию от остальных параметров задачи в виде степенного комплекса

$$t = C \cdot I^x f^y l^z s^u. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) перепишем в размерностях:

$$\begin{aligned}
 [t] &= [C] \cdot [I]^x [f]^y [l]^z [s]^u, \\
 T &= 1 (L^2 M)^x (L M T^{-2})^y L^z L^u, \\
 L^0 M^0 T^1 &= L^{2x+y+z+u} M^{x+y} T^{-2y}.
 \end{aligned}$$

Уравнивая показатели степеней у соответствующих размерностей слева и справа

$$L: 0 = 2x + y + z + u, \quad M: 0 = x + y, \quad T: 1 = -2y,$$

находим

$$x = 1/2, \quad y = -1/2, \quad z = -2x - y - u = -1 + 1/2 - u = -1/2 - u.$$

Полученные решения подставляем в выражение (3.6)

$$t = C \cdot I^{1/2} f^{-1/2} l^{-1/2 - u} s^u,$$

или в более привычном виде

$$t = C \sqrt{\frac{I}{fl}} \left(\frac{s}{l}\right)^u.$$

Представим вес как произведение от умножения массы на ускорение $f = mg$ и получим

$$t = C \sqrt{\frac{I}{mgl}} \left(\frac{s}{l}\right)^u. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) перепишем в следующем безразмерном виде:

$$\frac{t}{\sqrt{\frac{I}{mgl}}} = C \left(\frac{s}{l}\right)^u. \quad (3.8)$$

Здесь

$$\frac{t}{\sqrt{\frac{I}{mgl}}} = \pi_1, \quad \frac{s}{l} = \varphi_0 = \pi_2 \quad (3.9)$$

безразмерные числа подобия, являются численными константами, причем π_1 определяет безразмерное время, а π_2 – начальный угол отклонения маятника в радианах. Как следует из Пи-теоремы, здесь получили два ($p = n - k = 5 - 3 = 2$) безразмерных критерия подобия.

Этап 3 – *качественный прогноз через сравнительный анализ.* Уравнение (3.8) можем представить в виде зависимости между числами подобия:

$$\pi_1 = C\pi_2^u, \quad (3.10)$$

а так как начальный угол отклонения маятника $\pi_2 = \varphi_0$ является константой, то из критериального уравнения (3.10) получаем

$$\pi_1 = C\pi_2^u = C_1$$

и окончательно из (3.9) находим искомое время периода колебаний

$$t = C_1 \sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Теперь мы можем проделать сравнительный анализ – определить, во сколько раз изменится выходной параметр, если изменится один из входных.

Вначале изменим массу: как изменится t , если масса m увеличится в 4 раза? Казалось бы, что период колебаний физического маятника, в отличие от математического, зависит от массы тела. Если же момент инерции I заменить на произведение от умножения массы m тела на квадрат радиуса инерции i :

$$I = mi^2,$$

то период колебаний физического маятника, так же как и у математического, не будет зависеть от массы:

$$t = C_1 \sqrt{\frac{mi^2}{mgl}} = C_1 \sqrt{\frac{i^2}{gl}}.$$

Значит, при изменении массы тела той же формы (например, при изменении материала) период колебаний не изменится.

Теперь изменим «длину» маятника – расстояние от оси вращения до центра тяжести: как изменится t , если расстояние l увеличится в 4 раза? В этом случае изменится и радиус инерции i . Поэтому сразу ответить на поставленный вопрос невозможно, сначала надо найти новое значение i . Это легко сделать по известным формулам теоретической механики и таблицам моментов инерции.

Этап 4 – *количественный прогноз через моделирование (эксперимент)*. Для точного определения периода колебаний какого-то большого маятника, который пока не существует, но нам его нужно создать, можно провести моделирование его колебаний на малой модели. При этом удобно воспользоваться **таблицей проектирования эксперимента** [42], которая похожа на рис. B2 и имеет следующий вид для входных параметров i, l, g, φ_0 и выходного параметра t :

Натура	Коэффициенты подобия	Модель
1) Входные параметры природы $i, l, g, \varphi_0 \Rightarrow$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> $i_C = \frac{i_1}{i} \quad l_C = \frac{l_1}{l}$ $g_C = \frac{g_1}{g} \quad \varphi_C = \frac{\varphi_{01}}{\varphi_0} = 1$ </div>	2) Входные параметры модели $\Leftarrow i_1, l_1, g_1, \varphi_{01}$
4) Выходной параметр природы вычисляем (прогнозируем) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> $t = \frac{t_1}{t_C}$ </div>	Из условия подобия <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin: auto;"> $\pi_1 = \text{idem}$ </div> находим <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> $t_C = \sqrt{\frac{i_C^2}{g_C l_C}}$ </div>	3) Выходной параметр модели измеряем в эксперименте <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> t_1 </div>

Здесь коэффициенты подобия определяются из условия одинаковости чисел подобия для природы и модели:

$$\pi_2 = \text{idem} \rightarrow \varphi_0 = \varphi_{01} \rightarrow \varphi_C = \frac{\varphi_{01}}{\varphi_0} = 1,$$

$$\pi_1 = \frac{t}{\sqrt{\frac{I}{mgl}}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{mi^2}{mgl}}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{i^2}{gl}}},$$

$$\pi_1 = \text{idem} \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\frac{i^2}{gl}}} = \frac{t_1}{\sqrt{\frac{i_1^2}{g_1 l_1}}},$$

$$t_C = \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{i_1^2}{g_1 l_1}} / \sqrt{\frac{i^2}{gl}} = \sqrt{\frac{i_1^2 / i^2}{(g_1 / g)(l_1 / l)}} = \sqrt{\frac{i_C^2}{g_C l_C}}.$$

Отклонив модель на тот же начальный угол φ_{01} , что и для натуры, измерим период колебаний модели и затем пересчитаем его на период колебаний будущего натурального маятника.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

3.2.3. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Рассмотрим установившееся ламинарное течение вязкой жидкости в гладкой круглой трубе. Требуется определить падение давления по длине трубы.

Решение разобьем на этапы, которые в дальнейшем обобщим в [табл. 4.1](#).

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Будем считать, что перепад давления

$$p = p_1 - p_2$$

является функцией длины трубы l и ее диаметра d , средней скорости V , динамической вязкости μ и плотности ρ жидкости [34, 71]:

$$p = f(l, d, V, \mu, \rho).$$

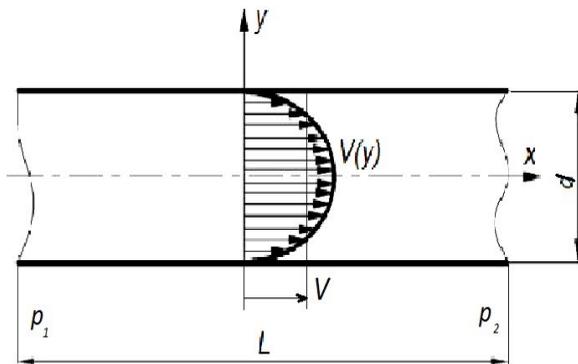


Рис. 3.3. Течение жидкости в трубе

Группируем параметры задачи на входные и один выходной и записываем их в виде следующей таблицы.

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные параметры</i>			
Длина трубы	l	м	L
Диаметр трубы	d	м	L
Скорость	V	м/с	LT^{-1}
Динамическая вязкость жидкости	μ	кг/(м · с)	$ML^{-1}T^{-1}$
Плотность жидкости	ρ	кг/м ³	ML^{-3}
<i>Выходной параметр</i>			
Перепад давления	p	Н/м ² = кг/(м · с ²)	$ML^{-1}T^{-2}$
Итого	$n = 6$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. В этой задаче шесть ($n = 6$) размерных параметров и три ($k = 3$) независимые размерности. Поэтому число безразмерных параметров, характеризующих явление, по Пи-теореме равно трем ($p = n - k = 6 - 3 = 3$).

По способу глобального критерия будем искать единый критерий подобия

$$\pi = F(p, l, d, V, \mu, \rho)$$

в виде степенного комплекса:

$$\pi = C \cdot p^{z_1} l^{z_2} d^{z_3} V^{z_4} \mu^{z_5} \rho^{z_6}. \quad (3.11)$$

Перепишем выражение (3.11) в размерностях:

$$[\pi] = [C][p]^{z_1}[l]^{z_2}[d]^{z_3}[V]^{z_4}[\mu]^{z_5}[\rho]^{z_6},$$

или

$$M^0 L^0 T^0 = 1 \cdot (ML^{-1}T^{-2})^{z_1} L^{z_2} L^{z_3} (LT^{-1})^{z_4} (ML^{-1}T^{-1})^{z_5} (ML^{-3})^{z_6},$$

$$M^{z_1+z_5+z_6} L^{-z_1+z_2+z_3+z_4-z_5-3z_6} T^{-2z_1-z_4-z_5} = M^0 L^0 T^0.$$

Уравнивая показатели степеней слева и справа, получаем

$$\begin{aligned} z_1 + z_5 + z_6 &= 0, \\ -z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - z_5 - 3z_6 &= 0, \\ -2z_1 - z_4 - z_5 &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Разрешаем эту систему относительно показателей z_3 , z_4 и z_6 :

$$\begin{aligned} z_6 &= -z_1 - z_5, \\ z_3 + z_4 - 3z_6 &= z_1 - z_2 + z_5, \\ -z_4 &= 2z_1 + z_5. \end{aligned}$$

Находим решение:

$$\begin{aligned} z_6 &= -z_1 - z_5, \\ z_4 &= -2z_1 - z_5, \\ z_3 &= (z_1 - z_2 + z_5) - (z_4 - 3z_6) = \\ &= z_1 - z_2 + z_5 - (-2z_1 - z_5) + 3(-z_1 - z_5) = \\ &= z_1(1+2-3) - z_2 + z_5(+1+1-3) = \\ &= -z_2 - z_5. \end{aligned}$$

В окончательном виде

$$z_3 = -z_2 - z_5, \quad z_4 = -2z_1 - z_5, \quad z_6 = -z_1 - z_5. \quad (3.13)$$

Подставляем найденные значения в выражение (3.11):

$$\begin{aligned} \pi &= C \cdot p^{z_1} l^{z_2} d^{z_3} V^{z_4} \mu^{z_5} \rho^{z_6} = \\ &= C \cdot p^{z_1} l^{z_2} d^{-z_2-z_5} V^{-2z_1-z_5} \mu^{z_5} \rho^{-z_1-z_5} = \\ &= C (p^{z_1} V^{-2z_1} \rho^{-z_1}) (l^{z_2} d^{-z_2}) (\mu^{z_5} d^{-z_5} V^{-z_5} \rho^{-z_5}). \end{aligned}$$

В результате выражение (3.11) сводится к виду

$$\pi = C \left(\frac{p}{\rho V^2} \right)^{z_1} \left(\frac{l}{d} \right)^{z_2} \left(\frac{\mu}{\rho V d} \right)^{z_5} = C (\pi_1)^{z_1} (\pi_2)^{z_2} \left(\frac{1}{\pi_3} \right)^{z_5}. \quad (3.14)$$

Удостоверимся, что выражения, стоящие в скобках, являются безразмерными:

$$[\pi_1] = \left[\frac{p}{\rho V^2} \right] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-1}T^{-2}} = 1,$$

$$[\pi_2] = \left[\frac{l}{d} \right] = \frac{L}{L} = 1,$$

$$[\pi_3] = \left[\frac{\rho V d}{\mu} \right] = \frac{(ML^{-3})(LT^{-1})(L)}{ML^{-1}T^{-1}} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-1}T^{-1}} = 1.$$

Безразмерные комплексы

$$\pi_1 = \frac{p}{\rho V^2} = Eu, \quad \pi_3 = \frac{\rho V d}{\mu} = Re \quad (3.15)$$

носят названия динамических чисел подобия Эйлера и Рейнольдса, а число

$$\pi_2 = \frac{l}{d}$$

является геометрическим безразмерным симплексом, называется удлинением трубы и характеризует ее геометрию.

После отыскания критериев подобия можно любой параметр выразить через них. Например, из (3.14) видно, что безразмерное давление π_1 есть функция остальных чисел подобия:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3). \quad (3.16)$$

Тогда из (3.15) можно выразить перепад давления в размерном виде:

$$p = \pi_1 \cdot \rho V^2 = \rho V^2 \cdot f(\pi_2, \pi_3).$$

Последнюю формулу обычно пишут через скоростной напор

$$p = \frac{\rho V^2}{2} f(\pi_2, \pi_3).$$

Этап 3 – *качественный прогноз через сравнительный анализ.* Например, как нужно изменить давление на входе трубы, чтобы на выходе трубы скорость V увеличилась в 2 раза? Казалось бы, из последней формулы следует, что давление p на входе той же трубы должно увеличиться в 4 раза. На самом деле это не так. Скорость входит не только в число подобия Эйлера $\pi_1 = Eu$, но и в число Рейнольдса $\pi_3 = Re$. Поэтому при новом значении скорости надо сначала вычислить новое значение числа Рейнольдса $\pi_3 = Re$, затем по графику $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$ определить новое значение π_1 и только после этого найти искомое давление из (3.15).

Этап 4 – *количественный прогноз через моделирование (эксперимент).* Для точного определения зависимости перепада давления от входных параметров

$$p = f(l, d, V, \mu, \rho)$$

необходимо провести серию экспериментов на моделях и построить графики в безразмерных параметрах

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3).$$

На самом деле такие графики давно построены, поэтому можно воспользоваться уже готовыми результатами. Зная конкретные значения входных параметров l, d, V, μ, ρ , рассчитывают критерии подобия π_2, π_3 , по готовым графикам находят число подобия π_1 и затем из (3.15) находят искомое давление p .

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

3.3. ВЕКТОРНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

Как отмечает Г. Хантли [69], при использовании анализа размерностей возникают две особенности.

Особенность 1. В некоторых задачах возникает ситуация, когда уравнений для определения размерностей не хватает. Это может возникнуть из-за того, что разные физические величины имеют одинаковую размерность. Например, работа и момент имеют размерность (ньютон-метр), масса может быть мерой проявления силы $F = mg$ и мерой количества вещества $m = \rho V$.

Особенность 2. Примеры показывают, что на основании Пи-теоремы с помощью анализа размерностей общее решение задач с точностью до одной константы возможно в том случае, когда число независимых физических величин превышает число основных величин (L, M, T) на единицу ($p = n - k = 1$). Если имеет место превышение на две или более единицы ($p = n - k = 2, 3, \dots$), то уравнений, которые связывают неизвестные показатели степеней друг с другом, не хватает, и в этом случае приходится некоторые показатели выражать через другие, что в итоге приводит к неполному решению задачи.

В обеих этих ситуациях хотелось бы увеличить количество уравнений, а для этого нужно увеличить число независимых основных единиц измерения, т. е. вместо $k = 3$ иметь $k = 4$ или 5 . Как это можно сделать? Разберем эту методику на примере о дальности полета пули.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

3.3.1. ПРИМЕР ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ДЛИН

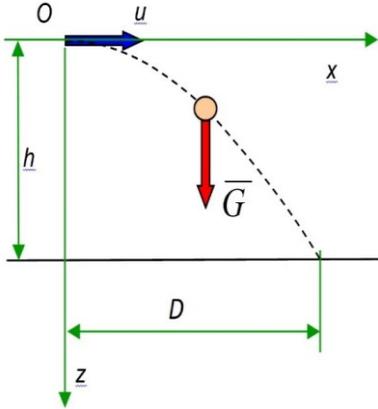


Рис. 3.4. Полет пули

Пуля выпущена с начальной скоростью u в горизонтальном направлении на высоте h от земной поверхности (рис. 3.4). Определить дальность D горизонтального полета пули, принимая ее за материальную точку и считая, что сопротивление воздуха отсутствует.

Теоретическое решение. Требуется определить зависимость

$$D = f(u, h, g).$$

Из теоремы о движении центра масс следуют уравнения движения по осям x и z , из которых находим первые интегралы:

$$\left\langle \begin{array}{l} ma_x = \sum F_x = 0 \\ ma_y = \sum F_y = G = mg \end{array} \right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_y = gt + C_2 \end{array} \right\rangle.$$

Из начальных условий находим константы C_1, C_2 :

$$\left\langle \begin{array}{l} v_x(0) = u \\ v_y(0) = 0 \end{array} \right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{l} C_1 = u \\ 0 + C_2 = 0 \end{array} \right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{l} v_x = u \\ v_y = gt \end{array} \right\rangle.$$

После интегрирования последних уравнений находим функции координат точки:

$$x = ut + C_3, \quad z = \frac{gt^2}{2} + C_4.$$

Из начальных условий находим константы C_3, C_4 :

$$\left\langle \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{array} \right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{l} 0 + C_3 = 0 \\ 0 + C_4 = 0 \end{array} \right\rangle$$

и окончательно получаем

$$x = ut, \quad z = \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив время из уравнений движения, получаем уравнение траектории – параболу:

$$t = x/u \Rightarrow z = \frac{g(x/u)^2}{2} = \frac{g}{2u^2}x^2.$$

Время полета T определяем приравниванием координаты z высоте h :

$$z = \frac{gT^2}{2} = h \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Дальность полета D определяем подстановкой времени полета в уравнение $x(t)$:

$$x = ut \Rightarrow D = uT = u\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$\boxed{D = \sqrt{2} \cdot u \sqrt{\frac{h}{g}}}. \quad (3.17)$$

Решение методом анализа размерностей

Подход 1. Сначала рассмотрим обычные размерности. Решение разобьем на этапы, которые в дальнейшем обобщим в [табл. 4.1](#).

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Группируем параметры задачи на входные и один выходной и записываем их в виде следующей таблицы:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные параметры:</i>			
• начальная скорость	u	м/с	$L T^{-1}$
• начальная высота	h	м	L
• ускорение силы тяжести	g	м/с ²	$L T^{-2}$
<i>Выходной параметр:</i>			
• дальность полета	D	м	L
Итого	$n = 4$	$k = 2$	

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Здесь $n = 4$ физические величины имеют $k = 2$ независимые размерности L, T . Значит, по Пи-теореме здесь будет два ($p = n - k = 4 - 2 = 2$) числа подобия (π_1, π_2). Проверим это. Представим искомую зависимость

$$D = f(u, h, g)$$

по способу Рэлея в виде степенного комплекса

$$D = C \cdot u^a h^b g^c.$$

Это уравнение перепишем в размерностях

$$[D] = [C][u]^a [h]^b [g]^c,$$

$$L = 1 (L T^{-1})^a (L)^b (L T^{-2})^c,$$

$$L = 1 L^{a+b+c} T^{-a-2c}.$$

Уравниваем показатели степеней у соответствующих размерностей слева и справа:

$$L: 1 = a + b + c, \quad T: 0 = -a - 2c.$$

Из двух уравнений с тремя неизвестными находим только две из них (b, c), а третья неизвестная (a) выступает как независимая величина:

$$c = -a/2,$$

$$b = 1 - a - c = 1 - a + a/2 = 1 - a/2.$$

Отсюда

$$D = C \cdot u^a h^b g^c = C \cdot u^a h^{1-a/2} g^{-a/2} = C \cdot u^a (h)(h^{-1/2})^a (g^{-1/2})^a,$$

$$D = C \cdot h \left(\frac{u}{\sqrt{gh}} \right)^a.$$

В критериальном виде это уравнение принимает вид зависимости от двух безразмерных чисел подобия:

$$\left(\frac{D}{h} \right) = C \left(\frac{u}{\sqrt{gh}} \right)^a \rightarrow \pi_1 = f(\pi_2),$$

где

$$\pi_1 = \frac{D}{h}, \quad \pi_2 = \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

Этап 3 – *качественный прогноз через сравнительный анализ*. В таком виде решение слишком обобщенное. Мы не сможем определить, во сколько раз изменится выходной параметр D , если изменить входные параметры u , h или g .

Этап 4 – *количественный прогноз через моделирование*. Для определения зависимости $\pi_1 = f(\pi_2)$ экспериментальным путем нам потребуется провести серию экспериментов, что займет много времени и ресурсов.

Подход 2. Теперь рассмотрим **векторные размерности**.

Для более продуктивного вида нужно уменьшить разницу $p = n - k = 4 - 2 = 2$. Число физических переменных $n = 4$ не может быть уменьшено. Однако нельзя ли увеличить число основных единиц измерения k с двух до трех?

Этап 1 – *постановка задачи и группировка параметров*. Обозначим горизонтальные перемещения размерностью L_x , а вертикальные перемещения – размерностью L_z . Составим новую таблицу.

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные параметры:</i>			
• начальная скорость	u	M_x / c	$L_x T^{-1}$
• начальная высота	h	M_z	L_z
• ускорение силы тяжести	g	M_z / c^2	$L_z T^{-2}$
<i>Выходной параметр:</i>			
• дальность полета	D	M_x	L_x
Итого	$n = 4$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Здесь $n = 4$ физические величины имеют уже не две, а три независимые размерности. Значит, по Пи-теореме здесь будет одно ($p = n - k = 4 - 3 = 1$) число, или константа, подобия π_1 . Как и ранее, ищем дальность по способу Рэлея в виде степенного комплекса

$$D = C \cdot u^a h^b g^c .$$

Это уравнение перепишем в размерностях:

$$[D] = [C][u]^a [h]^b [g]^c ,$$

$$L_x = 1 \left(L_x T^{-1} \right)^a L_z^b \left(L_z T^{-2} \right)^c ,$$

$$L_x = 1 L_x^a L_z^{b+c} T^{-a-2c} .$$

Уравниваем показатели степеней у соответствующих размерностей слева и справа:

$$L_x : 1 = a, \quad L_z : 0 = b + c, \quad T : 0 = -a - 2c .$$

Отсюда находим

$$a = 1, \quad c = -a/2 = -1/2, \quad b = -c = 1/2$$

и получаем

$$D = C \cdot u^a h^b g^c = C \cdot u^1 h^{1/2} g^{-1/2},$$

$$\boxed{D = C \cdot u \sqrt{\frac{h}{g}}}. \quad (3.18)$$

В критериальном виде это уравнение принимает вид зависимости для одного ($p = 1$) безразмерного числа подобия:

$$\left(\frac{D}{u} \sqrt{\frac{g}{h}} \right) = C = \pi_1. \quad (3.19)$$

Этап 3 – *качественный прогноз через сравнительный анализ.* Из найденного решения (3.18) можем определить, во сколько раз изменится выходной параметр D , если изменить входные параметры u , h или g . Например, если начальная скорость u увеличится в 4 раза, то и дальность D тоже увеличится в 4 раза, а если увеличить в 4 раза высоту h , то дальность D увеличится только в 2 раза.

Этап 4 – *количественный прогноз через моделирование.* Для определения величины $C = \pi_1$ в выражении (3.18) достаточно провести всего один эксперимент, и необязательно с пулей. Например, можно разогнать до скорости u_1 шарик по столу высотой h_1 и измерить расстояние D_1 , которое он пролетит до касания пола. Из выражения (3.19) найдем искомую константу

$$C = \frac{D_1}{u_1} \sqrt{\frac{g}{h_1}}.$$

Выводы по примеру. Таким образом, с помощью новых векторных размерностей смогли получить полное решение задачи с точностью до одной константы. Сравнив полученное решение (3.18) с теоретическим (3.17), видим, что $C = \sqrt{2}$.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

3.3.2. ДРУГИЕ ВЕКТОРНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

1) Длина. В предыдущем примере рассмотрены векторные размерности длины. Такой подход можно распространить на другие размерные величины [69].

2) Работа (или энергия) и вращающий момент. Обе эти физические величины имеют одинаковую размерность, определяемую из формулы произведения силы на расстояние:

$$H \cdot m = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{м} = (\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2) = ML^2T^{-2}.$$

Вращающий момент определяется произведением двух взаимно перпендикулярных векторов силы и плеча h , поэтому его формулу размерности можно представить в виде

$$H_x \cdot m_y = (L_x MT^{-2})(L_y) = L_x L_y MT^{-2}.$$

Работа определяется произведением двух коллинеарных векторов силы и пути s , поэтому ее формулу размерности можно представить в виде

$$H_s \cdot m_s = (L_s MT^{-2})(L_s) = L_s^2 MT^{-2}$$

или

$$L_x^2 MT^{-2}, \quad L_y^2 MT^{-2}, \quad L_z^2 MT^{-2}.$$

Таким образом, становится возможным провести разграничение между этими разнородными величинами.

3) Угол и угловая скорость. Плоский угол, измеряемый в радианах, традиционно считается безразмерной величиной. Если же учесть его определяющую формулу, по которой угол есть отношение дуги s к радиусу r , то для угла получим следующую размерность:

$$[\varphi] = [s]/[r] = L_s / L_r = L_s L_r^{-1} = L_x L_y^{-1}.$$

Угловая скорость вместо традиционной размерности рад/с = T^{-1} также получает более содержательную размерность

$$[\omega] = [\varphi]/[t] = L_x L_y^{-1} T^{-1}.$$

4) Векторные площади. Рассмотрим для примера сопротивление движению торпеды в воде. Полное сопротивление складывается из двух составляющих: лобового сопротивления воды и вязкого сопротивления. Формула размерности для каждого из них включает величину сила / площадь. В обоих случаях сила является вектором, параллельным скорости движения, или оси x .

Для силы лобового сопротивления учитывается площадь поперечного сечения, перпендикулярного скорости, поэтому размерность площади будет определяться произведением $L_y \cdot L_z$.

Сопротивление вязкости проявляется на боковых поверхностях, параллельных оси x , поэтому размерности таких площадей будут иметь вид $L_x \cdot L_y$ или $L_x \cdot L_z$. В силу симметрии относительно оси движения x можно последние две записи объединить:

$$\sqrt{L_x L_y} \sqrt{L_x L_z} = L_x \sqrt{L_y L_z}.$$

5) Дифференцированные массы. В физике масса рассматривается с двух различных позиций – как мера инерции и как количество вещества. В механике масса выступает как мера инерции тела, и размерность ее можно записать как M_i . В задачах, где фигурирует теплота и температура, массу следует рассматривать как количество вещества, и размерность такой массы можно записать как M_p .

Итоги по векторным размерностям

Использование векторных единиц длины и дифференцированных единиц массы существенно расширяет возможности метода размерностей. В частности, значительно увеличивается число задач, которые можно свести к одному безразмерному числу или, другими словами, для которых можно установить вид искомой функции с точностью до одной постоянной.

В [53] отмечается, что на возможность использования векторных размерностей кроме Г. Хантли [69] в 1967 году указывали А.П. Ваничев [13] в 1938 году, Л.И. Седов в предисловии к книге Г. Биркгофа [11] в 1963 году. Сам Хантли при изложении своей идеи указывает, что «идея этого метода была предложена в 1892 году Вильямсом [92] и вновь анализировалась Муном и Спенсером [86] в 1949 году».

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

3.4. ВЫВОДЫ ПО ПРИМЕРАМ

Из примеров для обычных и векторных размерностей видно, что используя анализ размерностей, можно находить числа подобия, не имея математического описания физического явления, а лишь зная, от каких параметров оно зависит. В этом большое преимущество метода анализа размерностей перед методом анализа уравнений.

В том случае, когда количество n размерных величин задачи превышает количество независимых размерностей k на p единиц

$$n - k = p,$$

критериальное уравнение в соответствии с Пи-теоремой содержит p безразмерных чисел подобия.

Если $p = 1$, то искомая величина находится с точностью до одного коэффициента, что очень удобно для практических целей. В этом случае можно провести качественный прогноз через сравнительный анализ, либо количественный прогноз через моделирование, т. е. достаточно провести один эксперимент и из него определить эту константу.

Если $p = 2, 3, \dots$, т. е. больше единицы, то в этом случае итоговая формула неудобна, поскольку нужно проводить серию экспериментов для определения безразмерных чисел подобия. И чем больше разница $p = n - k$, тем больше требуется экспериментов. Для уменьшения величины $p = n - k$ можно использовать векторные размерности (увеличить k) и тем самым сократить количество экспериментальной работы.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

3.5. ОБЩАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ

Обобщим результаты, полученные в предыдущих рассуждениях, и сведем их в общую методику.

1. Выбрать независимые переменные, существенно влияющие на исследуемый процесс, и составить полный список переменных. Подсчитать количество параметров задачи n .

2. Выбрать класс основных размерностей. Подсчитать количество независимых размерностей задачи k .

3. Определить число $p = n - k$ искомых чисел подобия согласно Пи-теореме.

4. Выбрать способ определения чисел подобия и записать исходную формулу.

5. Переписать исходную формулу в размерностях и уравнять показатели размерностей слева и справа.

6. Выбрать независимые показатели степеней и из полученной системы уравнений определить остальные показатели.

7. Найденные показатели степеней подставить в исходное выражение для критерия подобия.

8. Изучить полученные критерии подобия с точки зрения физического смысла и практической пригодности.

9. Рассмотреть альтернативные формы критериев, задаваясь другими вариантами независимых степеней или преобразуя уже полученные критерии.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ В СРАВНИТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ И МОДЕЛИРОВАНИИ

4.1. ОБЩАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПОДОБИЯ

В пособии [42] уже было указано, как метод подобия используется для предсказания поведения исследуемых величин задачи. Напомним здесь кратко высказанные там суждения. Общая схема работ с использованием чисел (критериев) подобия может выглядеть следующим образом (см. рис. 4.1 и табл. 4.1 на следующей странице).

1. Постановка задачи и группировка параметров задачи. Все переменные величины подразделяются на входные и выходные (функции входных) параметры. В способе Рэля выходной параметр ищется как функция входных. Например, для математического маятника выходной параметр – период колебаний – ищем в виде функции от входных параметров: массы, гравитации и длины подвеса:

$$t = f(m, g, l).$$

2. Вывод критериального уравнения, записываемого через динамические числа подобия задачи ($\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$). Если используется анализ уравнений, то числа подобия получаются путем сведения исходного уравнения к безразмерному виду. Если используется анализ размерностей, то числа подобия получаются путем уравнивания размерностей слева и справа в уравнении размерностей. Напомним, что при использовании анализа уравнений вместо чисел подобия π можно использовать индикаторы подобия λ .

3. Качественный прогноз для выходного параметра через сравнительный анализ, т. е. мы устанавливаем, во сколько раз изменится выходной показатель, если изменить один из входных параметров.

4. Количественный прогноз для выходного параметра через моделирование (эксперимент), т. е. мы устанавливаем, какое значение примет выходной параметр при известных значениях входных параметров.

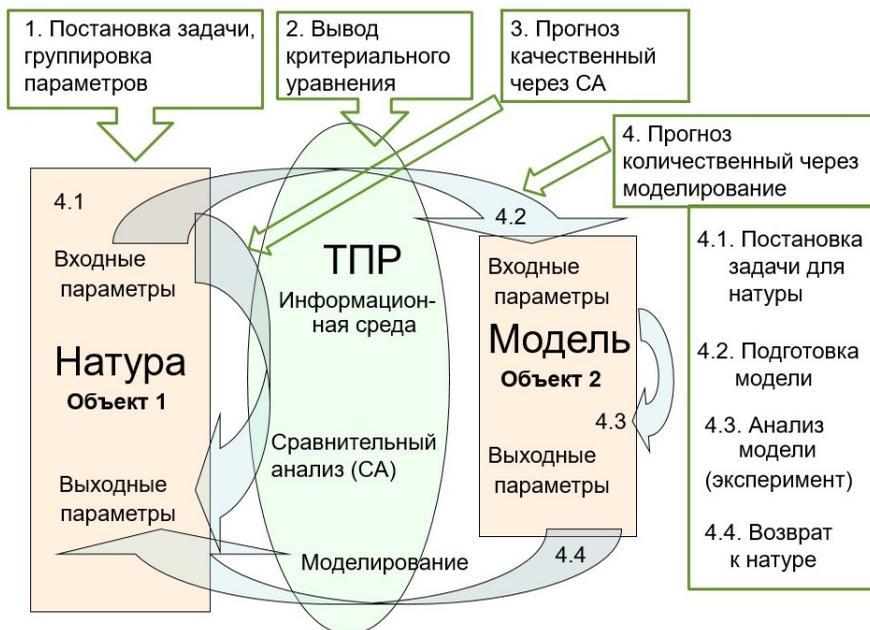


Рис. 4.1. Общая схема применения теории подобия и размерностей (ТТР)

Таблица 4.1

Этапы работ	Содержание работ	
1. Постановка задачи и группировка параметров задачи	Входные параметры и выходной параметр (функция)	
2. Вывод динамических чисел подобия π (либо индикаторов подобия λ)	Через анализ уравнений	Через анализ размерностей
3. Прогнозирование для выходного параметра	Качественный прогноз через сравнительный анализ	
	Количественный прогноз через моделирование (эксперимент)	

Из табл. 4.1 видно, что оба метода – и **анализ размерностей**, и **анализ уравнений** – применяются лишь для получения чисел подобия π . Дальнейшая работа с числами подобия не зависит от того, каким методом они получены. При этом для практических вычислений на этапах сравнительного анализа и моделирования удобно от чисел подобия π перейти к индикаторам подобия λ .

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

4.2. ОБЩАЯ МЕТОДИКА СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Общая методика сравнительного анализа параметров задачи на основании безразмерных чисел подобия была рассмотрена в пособии [42] и состоит в следующем:

- записать выбранное число подобия для двух состояний системы;
- ввести коэффициенты подобия параметров задачи;
- переписать число подобия через коэффициенты подобия и от числа подобия π перейти к индикатору подобия λ ;
- из условия одинаковости чисел подобия для обоих состояний системы определить связь между коэффициентами подобия выходного и входных параметров;
- задать числовые значения входных коэффициентов подобия и вычислить значение коэффициента подобия выходного параметра.

Сравнительный анализ удастся провести не всегда. Поясним это более подробно. Пусть в задаче возникает несколько чисел подобия ($\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$), причем определяемое число подобия π_1 зависит, например, от перепада давления p и скорости V . Тогда критериальное уравнение можно записать в виде

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots).$$

Нам интересно узнать, во сколько раз требуется изменить перепад давления p , чтобы скорость V увеличилась в два раза. Если скорость V не входит в состав определяющих критериев подобия π_2, π_3, \dots , то из условия $\pi_1 = \text{const}$ легко можно найти $V(p)$. Если же скорость V входит в состав определяющих критериев подобия π_2, π_3, \dots , то такой сравнительный анализ проделать невозможно, так как при изменении V изменятся критерии подобия π_2, π_3, \dots , изменится правая

часть критериального уравнения и число подобия π_1 уже не останется постоянным.

Из приведенных рассуждений понятно, что если задача сводится только к одному критерию подобия, то сравнительный анализ выполняется легко.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

4.3. ОБЩАЯ МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Общая методика моделирования в соответствии с рис. 4.1 содержит четыре этапа: постановка задачи для природы, подготовка модели, анализ модели (проведение эксперимента) и возврат от модели к природе. При этом в процессе моделирования теория подобия и размерностей (ТПР на рис. 4.1) занимает место информационной среды между натурным и модельным объектами.

При планировании эксперимента удобно пользоваться **таблицей проектирования эксперимента 4.2** [42], которая похожа на рис. 4.1 и имеет следующий вид для абстрактных входных параметров a, b и выходного параметра $d = d(a, b)$.

Т а б л и ц а 4.2

Натура	Коэффициенты подобия	Модель
1) Входные параметры природы $a \quad b \quad \Rightarrow$	$a_C = \frac{a_1}{a} \quad b_C = \frac{b_1}{b}$	2) Входные параметры модели $\Leftarrow \quad a_1 \quad b_1$
4) Выходной параметр природы вычисляем (прогнозируем) $d = \frac{d_1}{d_C}$	Из условия подобия $\pi = \pi_1$ находим $d_C = \frac{d_1}{d} = \text{например, } \sqrt{\frac{a_C}{b_C}}$	3) Выходной параметр модели измеряем в эксперименте d_1

Классификация этапов моделирования. При описании методики проведения экспериментов разные авторы разделяют процесс моделирования на различное количество этапов работ. Например, в учебном пособии под редакцией Н.А. Спирина [48] инженерный эксперимент делят на 7 этапов, перечисленных в первом столбце табл. 4.3; Л.А. Шаповалов [70] предлагает различать 9 этапов моделирования, перечисленных во втором столбце табл. 4.3.

Таблица 4.3

Этапы моделирования по Н.А. Спирина [48]	Этапы моделирования по Л.А. Шаповалову [70]	Этапы моделирования по рис. 4.1
1. Постановка задачи с четким формулированием цели исследования 2. Разработка подробного плана и основ методики эксперимента	1. Подготовительные мероприятия 2. Постановка задачи исследования 3. Установление условий подобия модели и натуре 4. Проектирование эксперимента на модели	1. Постановка задачи для натуре
3. Изготовление и подготовка экспериментальной установки	5. Изготовление модели и приспособлений для осуществления эксперимента	2. Подготовка модели
4. Проведение эксперимента 5. Обработка исходных опытных данных	6. Проведение эксперимента 7. Обработка экспериментальных данных	3. Анализ модели (проведение эксперимента)
6. Обобщение и анализ результатов измерений 7. Формулирование выводов и рекомендаций по результатам эксперимента	8. Переход от модели к натуре 9. Анализ результатов моделирования и рекомендации для проектирования натурального объекта	4. Возврат от модели к натуре

Обе классификации носят субъективный характер и могут подвергаться критике. Если за основу рассуждений принять рис. 4.1, то моделирование можно разделить на 4 этапа, перечисленных в третьем столбце табл. 4.3, которые естественным образом согласуются с методикой рассуждений по теории подобия.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5. СПОСОБЫ ВЫВОДА ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ ИЗ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ГРУЗА

Числа подобия, или инварианты, можно получить двумя путями: либо из дифференциальных уравнений, описывающих процесс или явление, либо из анализа размерностей параметров задачи. Способы вывода чисел подобия из дифференциальных уравнений рассмотрены в пособии [42]. Здесь рассмотрим следующие семь способов вывода чисел подобия из анализа размерностей [41]:

- способ P1 – комбинации переменных, или способ непосредственных рассуждений, или способ Бертрана;
- ранние способы P2 – Апе́лля, Фе́дермана, Толмэна, Ипсена;
- способ P3 – преобразования формул размерностей в степенные комплексы;
- способ P4 – частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема;
- способ P5 – полного двустороннего комплекса, или способ Рэлея;
- способ P6 – полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия;
- способ P7 – способ качественного физико-математического анализа, или способ Морозова.

Отметим, что приведенная терминология в названиях способов не устоялась и в разных источниках названия методов могут различаться. Общие положения по выводу чисел подобия будем иллюстрировать примерами для одной задачи механики о вынужденных колебаниях груза.

Уравнение вынужденных колебаний тела, или его центра масс как материальной точки, было выведено в учебном пособии [42] и имеет следующий размерный вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = P \sin \omega t .$$

В этом уравнении четыре слагаемых и каждое слагаемое есть сила: первое – сила инерции, второе – сила сопротивления, третье – сила упругости, справа стоит внешняя сила:

$$F_{\text{ин}} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x} \quad (5.1)$$

$$F_{\text{упр}} = cx; \quad \Phi_x = P \sin \omega t .$$

Здесь m – масса груза (материальной точки); k – коэффициент демпфирования; c – жесткость пружины; P , ω – амплитуда и круговая частота возмущающей силы.

После приведения к безразмерному виду уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \pi_1 \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + \pi_2 \bar{x} = \pi_3 \sin(\pi_4 \bar{\omega} \bar{t}) .$$

Здесь безразмерные коэффициенты

$\pi_1 = \frac{kt}{m} = \text{idem}, \quad \pi_2 = \frac{ct^2}{m} = \text{idem},$	(5.2)
$\pi_3 = \frac{Pt^2}{mx} = \text{idem}, \quad \pi_4 = \omega t = \text{idem}$	

являются числами подобия. Слово *idem* дословно переводится с латинского как «одно и то же», т. е. для полного подобия природы и модели требуется равенство четырех чисел подобия.

Покажем, что те же числа подобия можно вывести через анализ размерностей, не обращаясь к уравнению колебаний.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.1. СПОСОБ Р1 – КОМБИНАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ, ИЛИ СПОСОБ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ РАССУЖДЕНИЙ, ИЛИ СПОСОБ БЕРТРАНА

В нашу задачу о вынужденных колебаниях груза входит $n = 7$ размерных параметров

$$m, x, t, P, \omega, c, k,$$

размерности которых либо известны, либо определяются из выражений (5.1) для соответствующих сил:

$$\begin{aligned} [m] &= \text{кг} = M, & [x] &= \text{м} = L, & [t] &= \text{с} = T, \\ [P] &= \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = MLT^{-2}, & [\omega] &= \text{рад/с} = 1/\text{с} = T^{-1}, \\ [c] &= \text{Н/м} = (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) / \text{м} = \text{кг} / \text{с}^2 = MT^{-2}, \\ [k] &= \text{Н} / (\text{м/с}) = (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) / (\text{м/с}) = \text{кг} / \text{с} = MT^{-1}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь всего три ($k = 3$) независимые размерности – L, M, T . В соответствии с Пи-теоремой задачу можно описать через три размерных и четыре ($n - k = 7 - 3 = 4$) безразмерных параметра.

Величины (m, x, t) имеют простейшие размерности – килограмм, метр и секунда, которые невозможно свести к безразмерному виду. Остались величины

$$k, c, P, \omega.$$

Рассмотрим коэффициент демпфирования k . Поскольку его размерность есть (кг/с), для создания безразмерного комплекса его нужно умножить на время и поделить на массу:

$$[k] = \frac{M}{T} \Rightarrow \pi_1 = k \frac{t}{m} \Rightarrow [\pi_1] = \frac{M}{T} \frac{T}{M} = 1.$$

Рассмотрим коэффициент упругости пружины c . Поскольку его размерность есть (кг/с²), для создания безразмерного комплекса его нужно умножить на время в квадрате и поделить на массу:

$$[c] = \frac{M}{T^2} \Rightarrow \pi_2 = c \frac{t^2}{m} \Rightarrow [\pi_2] = \frac{M}{T^2} \frac{T^2}{M} = 1.$$

Точно так же составляем безразмерные комбинации для амплитуды P и круговой частоты ω возмущающей силы:

$$[P] = \frac{LM}{T^2} \Rightarrow \pi_3 = P \frac{t^2}{mx} \Rightarrow [\pi_3] = \frac{LM}{T^2} \frac{T^2}{ML} = 1,$$

$$[\omega] = \frac{1}{T} \Rightarrow \pi_4 = \omega t \Rightarrow [\pi_4] = \frac{1}{T} T = 1.$$

В результате приходим к тем же критериям подобия (5.2):

$\pi_1 = \frac{kt}{m},$	$\pi_2 = \frac{ct^2}{m},$	$\pi_3 = \frac{Pt^2}{mx},$	$\pi_4 = \omega t$
-------------------------	---------------------------	----------------------------	--------------------

Способ P1 (комбинации переменных) описан под разными названиями у многих авторов и применялся для различных задач. Обзор литературы по этому способу приведен в разделе 10.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.2. РАННИЕ СПОСОБЫ P2 – АПЕЛЛЯ, ФЕДЕРМАНА, ТОЛМЭНА, ИПСЕНА

В силу громоздкости и сложности действий по этим способам, а также их непопулярности мы их применять к задаче о колебаниях груза не будем. Описание этих способов можно найти в литературе, упоминаемой в обзоре, который приведен в разделе 10.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.3. СПОСОБ P3 – ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ РАЗМЕРНОСТЕЙ В СТЕПЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Рассмотрим нашу задачу о колебаниях груза. Записываем формулы размерностей (5.3) для параметров задачи в международных обозначениях LMT (метры, килограммы, секунды):

$$[m] = M, [c] = MT^{-2}, [x] = L, [t] = T,$$

$$[k] = MT^{-1}, [P] = LMT^{-2}, [\omega] = T^{-1}.$$

Заменяем размерности соответствующими параметрами и делим каждое равенство на его правую часть:

$$\frac{m}{m} = 1, \quad \frac{c}{mt^{-2}} = \frac{ct^2}{m}, \quad \frac{x}{x} = 1, \quad \frac{t}{t} = 1,$$

$$\frac{k}{mt^{-1}} = \frac{kt}{m}, \quad \frac{P}{xmt^{-2}} = \frac{Pt^2}{xm}, \quad \frac{\omega}{t^{-1}} = \omega t.$$

Опять получаем те же критерии подобия (5.2):

$$\pi_1 = \frac{kt}{m}, \quad \pi_2 = \frac{ct^2}{m}, \quad \pi_3 = \frac{Pt^2}{mx}, \quad \pi_4 = \omega t$$

Обзор литературы по способу РЗ – преобразования формул размерностей в степенные комплексы – приведен в разделе 10.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.4. СПОСОБ Р4 – ЧАСТИЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ, ИЛИ СПОСОБ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ГРУППИРОВКИ, ИЛИ СПОСОБ НУЛЕВЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ, ИЛИ СПОСОБ БУКИНГЕМА

В нашу задачу о вынужденных колебаниях груза входит 7 размерных параметров

$$m, c, x, t, P, \omega, k,$$

которые имеют размерности (5.3):

$$[m] = M, \quad [c] = MT^{-2}, \quad [x] = L, \quad [t] = T,$$

$$[P] = LMT^{-2}, \quad [\omega] = T^{-1}, \quad [k] = MT^{-1}.$$

Запишем показатели размерностей в виде таблицы, которая называется матрицей размерностей:

Размерности	Параметры и степени						
	m	c	x	t	P	ω	k
M	1	1	0	0	1	0	1
L	0	0	1	0	1	0	0
T	0	-2	0	1	-2	-1	-1

По способу Букингема «из 7 размерных величин выделяются 3 первичных и ищется 4 критерия, содержащих каждый по одной вторичной величине, подбирая для них комбинацию первичных, образующих безразмерный комплекс» [32].

Выберем в качестве первичных, или основных, параметры (m, x, t), которые образуют базовую тройку, так как содержат все три независимые размерности задачи: килограмм, метр и секунду (M, L, T). Будем добавлять по одному размерному параметру к базовой тройке и формировать безразмерный комплекс.

1. Параметры (m, x, t) + c . Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{41} = \frac{c}{m^{a_1} x^{b_1} t^{c_1}}.$$

Эта же формула в размерностях:

$$[\pi_{41}] = \frac{[c]}{[m^{a_1}][x^{b_1}][t^{c_1}]} = \frac{MT^{-2}}{M^{a_1}L^{b_1}T^{c_1}} = M^{1-a_1}L^{-b_1}T^{-2-c_1} = 1 = M^0L^0T^0.$$

Уравнивая показатели степеней в левой и правой части уравнения, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно показателей:

$$M: 1 - a_1 = 0,$$

$$L: -b_1 = 0,$$

$$T: -2 - c_1 = 0.$$

Решаем эту систему уравнений:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -2$$

и получаем уже знакомый критерий подобия:

$$\pi_{41} = \frac{c}{m^{a_1} x^{b_1} t^{c_1}} = \frac{c}{m^1 x^0 t^{-2}} = \frac{ct^2}{m} = \pi_2, \quad \boxed{\pi_2 = \frac{ct^2}{m}}.$$

2. Параметры $(m, x, t) + P$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{42} = \frac{P}{m^{a_2} x^{b_2} t^{c_2}}.$$

Эта же формула в размерностях:

$$[\pi_{42}] = \frac{[P]}{[m^{a_2}][x^{b_2}][t^{c_2}]} = \frac{LMT^{-2}}{M^{a_2} L^{b_2} T^{c_2}} = M^{1-a_2} L^{1-b_2} T^{-2-c_2} = 1.$$

Уравниваем показатели степеней:

$$M: 1 - a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 1,$$

$$L: 1 - b_2 = 0 \rightarrow b_2 = 1,$$

$$T: -2 - c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -2.$$

Получаем уже знакомый критерий подобия:

$$\pi_{42} = \frac{P}{m^{a_2} x^{b_2} t^{c_2}} = \frac{P}{m^1 x^1 t^{-2}} = \frac{Pt^2}{mx} = \pi_3, \quad \boxed{\pi_3 = \frac{Pt^2}{mx}}.$$

3. Параметры $(m, x, t) + \omega$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{43} = \frac{\omega}{m^{a_3} x^{b_3} t^{c_3}}.$$

Эта же формула в размерностях:

$$[\pi_{43}] = \frac{[\omega]}{[m^{a_3}][x^{b_3}][t^{c_3}]} = \frac{T^{-1}}{M^{a_3} L^{b_3} T^{c_3}} = M^{-a_3} L^{-b_3} T^{-1-c_3} = 1.$$

Уравниваем показатели степеней:

$$\begin{aligned} M: \quad -a_3 = 0 & \quad \rightarrow \quad a_3 = 0, \\ L: \quad -b_3 = 0 & \quad \rightarrow \quad b_3 = 0, \\ T: \quad -1 - c_3 = 0 & \quad \rightarrow \quad c_3 = -1. \end{aligned}$$

Получаем уже знакомый критерий подобия:

$$\pi_{43} = \frac{\omega}{m^{a_3} x^{b_3} t^{c_3}} = \frac{\omega}{m^0 x^0 t^{-1}} = \omega t = \pi_4, \quad \boxed{\pi_4 = \omega t}.$$

4. Параметры $(m, x, t) + k$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{44} = \frac{k}{m^{a_4} x^{b_4} t^{c_4}}.$$

Эта же формула в размерностях:

$$[\pi_{44}] = \frac{[k]}{[m^{a_4}][x^{b_4}][t^{c_4}]} = \frac{MT^{-1}}{M^{a_4}L^{b_4}T^{c_4}} = M^{1-a_4}L^{-b_4}T^{-1-c_4} = 1.$$

Уравниваем показатели степеней:

$$\begin{aligned} M: \quad 1 - a_4 = 0 & \quad \rightarrow \quad a_4 = 1, \\ L: \quad -b_4 = 0 & \quad \rightarrow \quad b_4 = 0, \\ T: \quad -1 - c_4 = 0 & \quad \rightarrow \quad c_4 = -1. \end{aligned}$$

Получаем уже знакомый критерий подобия:

$$\pi_{44} = \frac{k}{m^{a_4} x^{b_4} t^{c_4}} = \frac{k}{m^1 x^0 t^{-1}} = \frac{kt}{m} = \pi_1, \quad \boxed{\pi_1 = \frac{kt}{m}}.$$

В результате получили те же четыре критерия (5.2) для базовой тройки параметров (m, x, t) :

$$\pi_1 = \frac{kt}{m}, \quad \pi_2 = \frac{ct^2}{m}, \quad \pi_3 = \frac{Pt^2}{mx}, \quad \pi_4 = \omega t.$$

Обзор литературы по способу Р4 – частичных комплексов – приведен в разделе 10.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.5. СПОСОБ Р5 – ПОЛНОГО ДВУСТОРОННЕГО КОМПЛЕКСА, ИЛИ СПОСОБ РЭЛЕЯ

Рассмотрим нашу задачу о вынужденных колебаниях груза. В задаче входит 7 параметров:

$$m, c, x, t, P, \omega, k.$$

Допустим, необходимо найти коэффициент силы сопротивления k , который может зависеть от всех остальных параметров задачи. Составим полный двусторонний комплекс в виде

$$k = C_0 m^{z_1} c^{z_2} x^{z_3} t^{z_4} P^{z_5} \omega^{z_6}, \quad (5.4)$$

где C_0 – безразмерный коэффициент. Учтем размерности (5.3) этих величин в системе СИ:

$$[m] = M, \quad [c] = MT^{-2}, \quad [x] = L, \quad [t] = T,$$

$$[P] = LMT^{-2}, \quad [\omega] = T^{-1}, \quad [k] = MT^{-1}.$$

Перепишем уравнение (5.4) в размерностях:

$$[k] = [C_0][m]^{z_1}[c]^{z_2}[x]^{z_3}[t]^{z_4}[P]^{z_5}[\omega]^{z_6},$$

$$MT^{-1} = 1 M^{z_1} (MT^{-2})^{z_2} L^{z_3} T^{z_4} (LMT^{-2})^{z_5} (T^{-1})^{z_6},$$

$$MT^{-1} = M^{z_1+z_2+z_5} L^{z_3+z_5} T^{-2z_2+z_4-2z_5-z_6}.$$

Поскольку размерности левой и правой части этого уравнения должны быть одинаковыми, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned}
 M: 1 &= z_1 + z_2 + z_5, \\
 L: 0 &= z_3 + z_5, \\
 T: -1 &= -2z_2 + z_4 - 2z_5 - z_6.
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Такой СЛАУ соответствует следующая матрица размерностей:

Размерности	Параметры и степени					
	m	c	x	t	P	ω
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
M	1	1	0	0	1	0
L	0	0	1	0	1	0
T	0	-2	0	1	-2	-1

Из трех уравнений (5.5) можно определить только три неизвестных. Будем искать (z_1, z_3, z_4) . Тогда показатели степеней (z_2, z_5, z_6) будут считаться независимыми. В этом случае в матрице размерностей переставим столбцы:

Размерности	Параметры и степени						
	m	x	t		c	P	ω
	z_1	z_3	z_4		z_2	z_5	z_6
M	1	0	0		1	1	0
L	0	1	0		0	1	0
T	0	0	1		-2	-2	-1

Определитель такой СЛАУ, составленный из первых трех столбцов матрицы размерностей, отличен от нуля:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому система уравнений (5.5) имеет решение:

$$z_1 = 1 - z_2 - z_5,$$

$$z_3 = -z_5,$$

$$z_4 = -1 + 2z_2 + 2z_5 + z_6.$$

Подставляя полученные значения в исходное уравнение (5.4), получаем

$$k = C_0 m^{1-z_2-z_5} c^{z_2} x^{-z_5} t^{-1+2z_2+2z_5+z_6} P^{z_5} \omega^{z_6}.$$

Группируем сомножители по степеням:

$$k = C_0 (m^1 t^{-1}) (m^{-1} c t^2)^{z_2} (m^{-1} x^{-1} t^2 P)^{z_5} (\omega t)^{z_6}.$$

И в окончательном виде получаем

$$\left(\frac{kt}{m}\right) = C_0 \left(\frac{ct^2}{m}\right)^{z_2} \left(\frac{Pt^2}{mx}\right)^{z_5} (\omega t)^{z_6}. \quad (5.6)$$

Безразмерные комплексы в скобках дают те же четыре критерия подобия (5.2)

$\pi_1 = \frac{kt}{m},$	$\pi_2 = \frac{ct^2}{m},$	$\pi_3 = \frac{Pt^2}{mx},$	$\pi_4 = \omega t$
-------------------------	---------------------------	----------------------------	--------------------

Таким образом, выражение (5.6) можно представить в виде критериального соотношения

$$\pi_1 = C_0 (\pi_2)^{z_2} (\pi_3)^{z_5} (\pi_4)^{z_6},$$

где константы C_0, z_2, z_5, z_6 находятся из эксперимента. Обзор литературы по способу P5 – полного двустороннего комплекса – приведен в разделе 10.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

5.6. СПОСОБ P6 – ПОЛНОГО ОДНОСТОРОННЕГО КОМПЛЕКСА, ИЛИ СПОСОБ ГЛОБАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

Рассмотрим нашу задачу о вынужденных колебаниях груза. Составим глобальный критерий подобия, включающий все параметры задачи:

$$\pi = m^{z_1} c^{z_2} x^{z_3} t^{z_4} P^{z_5} \omega^{z_6} k^{z_7} . \quad (5.7)$$

Размерность каждого параметра $p = (m, c, x, t, P, \omega, k)$ представим в виде произведения независимых размерностей (м, кг, с) = (L, M, T):

$$[p] = L^\alpha M^\beta T^\gamma .$$

Тогда размерность глобального критерия (5.7) запишется в виде

$$[\pi] = (L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1})^{z_1} (L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2})^{z_2} \times \\ \times (\dots)^{z_3} (\dots)^{z_4} (\dots)^{z_5} (\dots)^{z_6} (L^{\alpha_7} M^{\beta_7} T^{\gamma_7})^{z_7} .$$

Соберем размерности:

$$[\pi] = (L^{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_7 z_7}) (M^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_7 z_7}) (T^{\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots + \gamma_7 z_7}) .$$

Слева – величина безразмерная, т. е. ее размерности имеют нулевую степень, поэтому и справа все размерности должны быть в нулевой степени:

$$\begin{aligned} L: \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 + \alpha_5 z_5 + \alpha_6 z_6 + \alpha_7 z_7 &= 0, \\ M: \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \beta_4 z_4 + \beta_5 z_5 + \beta_6 z_6 + \beta_7 z_7 &= 0, \\ T: \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3 + \gamma_4 z_4 + \gamma_5 z_5 + \gamma_6 z_6 + \gamma_7 z_7 &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Этой системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно показателей степеней (z_1, z_2, \dots) соответствует следующая матрица размерностей:

Размерности	Параметры и степени						
	m	c	x	t	P	ω	k
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
L	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
M	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
T	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7

С учетом фактических размерностей (5.3) параметров задачи

$$[m] = M, [c] = MT^{-2}, [x] = L, [t] = T,$$

$$[P] = LMT^{-2}, [\omega] = T^{-1}, [k] = MT^{-1}.$$

СЛАУ (5.8) и соответствующая ей матрица размерностей упростятся:

$$z_3 + z_5 = 0,$$

$$z_1 + z_2 + z_5 + z_7 = 0, \tag{5.9}$$

$$-2z_2 + z_4 - 2z_5 - z_6 - z_7 = 0.$$

Размерности	Параметры и степени						
	m	c	x	t	P	ω	k
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
L	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_3 = 1$	$\alpha_4 = 0$	$\alpha_5 = 1$	$\alpha_6 = 0$	$\alpha_7 = 0$
M	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 0$	$\beta_5 = 1$	$\beta_6 = 0$	$\beta_7 = 1$
T	$\gamma_1 = 0$	$\gamma_2 = -2$	$\gamma_3 = 0$	$\gamma_4 = 1$	$\gamma_5 = -2$	$\gamma_6 = -1$	$\gamma_7 = -1$

Из трех уравнений (5.9) можем определить три неизвестных, остальные четыре можем задать произвольно.

Выберем в качестве базовых три параметра (m, x, t), размерности которых содержат все три независимые размерности задачи (L, M, T). Тогда соответствующие показатели степеней (z_1, z_3, z_4) находятся из СЛАУ (5.9), а остальные четыре показателя (z_2, z_5, z_6, z_7) для параметров (c, P, ω, k) задаются произвольно.

Перепишем СЛАУ (5.9) так, чтобы показатели степеней (z_1, z_3, z_4) находились в левой части:

$$\begin{aligned} 0 + z_3 + 0 &= -z_5, \\ z_1 + 0 + 0 &= -z_2 - z_5 - z_7, \\ 0 + 0 + z_4 &= 2z_2 + 2z_5 + z_6 + z_7. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Этой СЛАУ соответствует новая матрица размерностей с переставленными столбцами:

Размерности	Параметры и степени							
	m	x	t		c	P	ω	k
	z_1	z_3	z_4		z_2	z_5	z_6	z_7
L	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_3 = 1$	$\alpha_4 = 0$		$\alpha_2 = 0$	$\alpha_5 = 1$	$\alpha_6 = 0$	$\alpha_7 = 0$
M	$\beta_1 = 1$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 0$		$\beta_2 = 1$	$\beta_5 = 1$	$\beta_6 = 0$	$\beta_7 = 1$
T	$\gamma_1 = 0$	$\gamma_3 = 0$	$\gamma_4 = 1$		$\gamma_2 = -2$	$\gamma_5 = -2$	$\gamma_6 = -1$	$\gamma_7 = -1$

Из матрицы находим определитель СЛАУ (5.10):

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Так как он не равен нулю, то СЛАУ (5.10) имеет единственное решение (в этом случае говорят, что матрица размерностей имеет ранг $r = 3$).

В СЛАУ (5.10) справа стоят 4 независимых показателя (z_2, z_5, z_6, z_7). Поочередно будем задавать одному из них значение 1, а остальным – значение 0. Всего наберется 4 комбинации.

Комбинация 1. Примем $z_2 = 1, z_5 = z_6 = z_7 = 0$. В соответствии с (5.7) это равносильно тому, что к базовой тройке параметров (m, x, t) добавляется четвертый параметр c . Тогда из (5.10) получим следующую СЛАУ:

$$\begin{aligned} z_3 &= -z_5 = 0, \\ z_1 &= -z_2 - z_5 - z_7 = -1, \\ z_4 &= 2z_2 + 2z_5 + z_6 + z_7 = 2, \end{aligned}$$

после решения которой определяем набор показателей в следующем виде:

$$z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 2, z_5 = 0, z_6 = 0, z_7 = 0.$$

Подставляем эти значения в (5.7) и находим, что такому набору показателей соответствует критерий подобия

$$\pi = m^{z_1} c^{z_2} x^{z_3} t^{z_4} P^{z_5} \omega^{z_6} k^{z_7} = m^{-1} c^1 x^0 t^2 P^0 \omega^0 k^0 = \frac{ct^2}{m}, \quad \boxed{\pi_2 = \frac{ct^2}{m}}.$$

Комбинация 2. Примем $z_2 = 0, z_5 = 1, z_6 = z_7 = 0$. В соответствии с (5.7) это равносильно тому, что к базовой тройке параметров (m, x, t) добавляется четвертый параметр P . Тогда из (5.10) получим СЛАУ

$$\begin{aligned} z_3 &= -z_5 = -1, \\ z_1 &= -z_2 - z_5 - z_7 = -1, \\ z_4 &= 2z_2 + 2z_5 + z_6 + z_7 = 2. \end{aligned}$$

В результате набор показателей принимает следующий вид:

$$z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = -1, z_4 = 2, z_5 = 1, z_6 = 0, z_7 = 0.$$

Подставляем эти значения в (5.7) и находим, что такому набору показателей соответствует критерий подобия

$$\pi = m^{z_1} c^{z_2} x^{z_3} t^{z_4} P^{z_5} \omega^{z_6} k^{z_7} = m^{-1} c^0 x^{-1} t^2 P^1 \omega^0 k^0 = \frac{Pt^2}{mx}, \quad \boxed{\pi_3 = \frac{Pt^2}{mx}}.$$

Комбинация 3. Примем $z_2 = z_5 = 0$, $z_6 = 1$, $z_7 = 0$. В соответствии с (5.7) это равносильно тому, что к базовой тройке параметров (m, x, t) добавляется четвертый параметр ω . Тогда из (5.10) получим СЛАН

$$\begin{aligned} z_3 &= -z_5 = 0, \\ z_1 &= -z_2 - z_5 - z_7 = 0, \\ z_4 &= 2z_2 + 2z_5 + z_6 + z_7 = 1. \end{aligned}$$

В результате набор показателей принимает следующий вид:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1, \quad z_5 = 0, \quad z_6 = 1, \quad z_7 = 0.$$

Подставляем эти значения в (5.7) и находим, что такому набору показателей соответствует критерий подобия

$$\pi = m^{z_1} c^{z_2} x^{z_3} t^{z_4} P^{z_5} \omega^{z_6} k^{z_7} = m^0 c^0 x^0 t^1 P^0 \omega^1 k^0 = \omega t, \quad \boxed{\pi_4 = \omega t}.$$

Комбинация 4. Примем $z_2 = z_5 = z_6 = 0$, $z_7 = 1$. В соответствии с (5.7) это равносильно тому, что к базовой тройке параметров (m, x, t) добавляется четвертый параметр k . Тогда из (5.10) получим СЛАН

$$\begin{aligned} z_3 &= -z_5 = 0, \\ z_1 &= -z_2 - z_5 - z_7 = -1, \\ z_4 &= 2z_2 + 2z_5 + z_6 + z_7 = 1. \end{aligned}$$

В результате набор показателей принимает следующий вид:

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1, \quad z_5 = 0, \quad z_6 = 0, \quad z_7 = 1.$$

Подставляем эти значения в (5.7) и находим, что такому набору показателей соответствует критерий подобия

$$\pi = m^{z_1} c^{z_2} x^{z_3} t^{z_4} P^{z_5} \omega^{z_6} k^{z_7} = m^{-1} c^0 x^0 t^1 P^0 \omega^0 k^1 = \frac{kt}{m}, \quad \boxed{\pi_1 = \frac{kt}{m}}.$$

В результате получили те же четыре критерия подобия (5.2):

$$\pi_1 = \frac{kt}{m}, \quad \pi_2 = \frac{ct^2}{m}, \quad \pi_3 = \frac{Pt^2}{mx}, \quad \pi_4 = \omega t.$$

Обзор литературы по способу Р6 – полного одностороннего комплекса – приведен в разделе 10.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.7. СПОСОБ Р7 – КАЧЕСТВЕННОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ИЛИ СПОСОБ МОРОЗОВА

Все ранее описанные способы опирались на Пи-теорему. Обязательным условием их применения было наличие полного списка всех размерных и безразмерных величин, участвующих в задаче. В отличие от них способ Морозова не требует знания **всех** величин задачи.

Н.А. Морозов разрабатывал свой способ в 1890–1906 годах, опубликовал его в 1908 году [49], задолго до появления Пи-теоремы Букингема (1914). Поэтому в его изложении отсутствует понятие безразмерного критерия подобия. Морозов не различает размерную величину и ее размерность, и то и другое обозначает одной буквой. Из-за этого трудно понять, о чем конкретно идет речь. По способу Морозова невозможно получить несколько критериев подобия, как это имеет место в нашей задаче о вынужденных колебаниях груза. Поэтому для знакомства с этим способом покажем его применение на более простой задаче о собственных колебаниях струны, которую рассматривает сам Н.А. Морозов.

Определить зависимость высоты тона струны от ее длины и силы натяжения. Музыкант знает, что при увеличении силы натяжения струны высота ее тона повышается, а при увеличении длины – уменьшается. Но не знает, в какой пропорции. Поможем ему.

Под высотой тона понимается круговая частота колебаний струны. Вводим обозначения:

f – сила натяжения струны, размерность F ,

d – длина струны, размерность L ,

ω – круговая частота колебаний струны, размерность рад/с = U .

Сначала записываем исходную формулу, которая следует из рассуждений музыканта:

$$\omega = k \frac{f}{d}, \quad (5.11)$$

потом переходим к размерностям:

$$[\omega] = [k] \frac{[f]}{[d]} \Rightarrow U = [k] \frac{F}{L}. \quad (5.12)$$

Параметр k Морозов называет «комплексом непредусмотренных факторов, который укажет все необходимые поправки, если мы написали формулу не совсем правильно или что-то пропустили».

В отличие от общепринятого в наше время класса системы единиц MLT – масса, длина, время, Н.А. Морозов все рассуждения проводит в системе единиц класса MLV – масса, длина, скорость. Найдем размерности частоты и силы в системе единиц MLV :

$$[\omega] = \frac{1}{c} = \frac{m/c}{m} = \frac{V}{L} \Rightarrow U = \frac{V}{L},$$

$$[f] = H = \frac{кг \cdot м}{c^2} = кг \frac{м}{c} \frac{1}{c} = MVU \Rightarrow F = MVU.$$

Подставляем эти размерности в (5.12) и находим размерность комплекса k :

$$U = [k] \frac{F}{L} \Rightarrow \frac{V}{L} = [k] \frac{MVU}{L},$$

$$V = [k] MVU,$$

$$[k] = \frac{V}{MVU} = \frac{1}{MU}.$$

Подставляем найденную размерность в первоначальную формулу размерностей (5.12):

$$U = [k] \frac{F}{L} = \frac{1}{MU} \frac{F}{L},$$

$$U^2 = \frac{F}{LM}, \quad U = \sqrt{\frac{F}{LM}}. \quad (5.13)$$

От размерностей переходим к переменным:

$$\omega = k_1 \sqrt{\frac{f}{dm}}. \quad (5.14)$$

Здесь k_1 является константой. Сравнивая полученную формулу (5.14) с исходной формулой (5.11), видим, что параметр k не является константой:

$$\omega = k \frac{f}{d} = k_1 \sqrt{\frac{f}{dm}},$$

$$k = k_1 \sqrt{\frac{f}{dm}} \frac{d}{f} = k_1 \sqrt{\frac{d}{fm}},$$

а представляет собой целый «комплекс непредусмотренных факторов», как и называет его Н.А. Морозов.

В результате «получили известную формулу Тейлора, которая давно употребляется в акустике»:

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{dm}}.$$

Здесь обнаружилось, что высота тона ω зависит не только от силы натяжения f и длины струны d , как это предполагалось в (5.11), но и от массы струны m : чем больше масса, тем меньше высота тона. Это подтверждается на практике: басовые струны при той же длине и натяжении более толстые, т. е. массивные.

Итоги по примеру. Подход Морозова похож на способ Рэля – так же ищется одна неизвестная величина в виде алгебраического степенного комплекса, составленного из остальных величин. Но, в отличие от способа Рэля, у Морозова в исходной формуле участвуют не все параметры задачи. Так же как и в способе подбора, здесь необходимо

правильно угадать исходную зависимость искомой функции от параметров задачи.

В наше время такой подход не используется. Здесь он приведен для напоминания исторического приоритета российского ученого Н.А. Морозова в разработке анализа размерностей.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

5.8. ВЫВОДЫ ПО СПОСОБАМ P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7

На основании рассмотрения одной задачи видим, что из анализа размерностей одни и те же числа подобия можно получить различными способами, которые здесь для краткости обозначены P1, P2, P3, P4, P5, P6 и P7. При этом видна сравнительная трудность этих способов. Для практического применения можно рекомендовать использование нескольких подходов, и если числа подобия будут одинаковы, то это будет обоснованием их достоверности.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

6. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В этом разделе рассмотрим два примера, которые помимо математического несут еще и исторический смысл. В примере 1 получим третий закон Кеплера для планет, при этом там возникнет два критерия подобия. Пример 2 посвящен задаче Галилея о падении тел, в которой количество критериев подобия будет меняться от одного до двух в зависимости от подходов. Дополнительно к выводам критериев подобия приведем интересные исторические сведения.

6.1. ЗАКОН КЕПЛЕРА

6.1.1. ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В 1600 году 53-летний датский астроном Тихо Браге служил придворным математиком и астрологом императора Священной Римской империи, который большую часть времени проводил в Праге в своей резиденции. Около 20 лет до этого Тихо Браге вел астрономические наблюдения у себя на родине в Дании, у него накопились огромные таблицы, и он пришел к выводу, что ему нужен молодой талантливый помощник-математик для обработки накопленных данных. Поэтому он пригласил к себе в Прагу 29-летнего немецкого математика Иоганна Кеплера, которому по религиозным причинам пришлось покинуть Германию.

В 1601 году оба беженца (датчанин Тихо Браге¹ и немец Иоганн Кеплер²) начали работу в Праге над новыми, уточненными астрономическими таблицами, которые в честь римского императора Рудольфа, приютившего Тихо Браге, получили название «Рудольфовых». Но Бра-

¹ Википедия. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Браге,_Тихо.

² Википедия. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кеплер,_Иоганн.

ге успел только дать таблицам название. В октябре того же 1601 года он неожиданно заболел и умер. По одной из версий, его отравили. «Рудольфовы таблицы» были закончены Кеплером только через 26 лет, в 1627 году, и служили астрономам и морякам 200 лет, вплоть до начала XIX века.

В процессе работы над этими астрономическими таблицами, а также благодаря собственным наблюдениям за звездами сначала с помощью механических приборов, которые достались ему от Браге, а затем с помощью новинки того времени – оптического прибора под названием «телескоп», Кеплер сумел в 1609 и 1618 годах сформулировать три общих закона, которые положили начало современной астрономии. Теперь эти законы называются «законы Кеплера». Рисунки к законам Кеплера можно посмотреть в [приложении 4](#).

Закон 1 (1609). Планеты описывают около Солнца эллипсы, причем Солнце находится в одном из фокусов эллипса. До этого, по Копернику, считалось, что планеты движутся по окружностям.

Закон 2 (1609). Радиус-вектор, соединяющий Солнце с планетой, ометает в равные промежутки времени равные площади. Отсюда следует, что чем ближе подходит планета к Солнцу, тем больше ее скорость.

Закон 3 (1618). Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам соответствующих больших полуосей:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{D_1^3}{D_2^3}. \quad (6.1)$$

Если определить величину силы взаимодействия Солнца и планеты как массу, умноженную на ускорение, то из законов Кеплера математическим путем можно вывести закон всемирного тяготения

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

где F есть сила притяжения, r – расстояние между центрами масс Солнца и планеты, а M и m – их массы. Этот закон был установлен Ньютоном почти через 70 лет после Кеплера и в дальнейшем был проверен и подтвержден сравнением полученных с его помощью многочисленных выводов с наблюдениями в природе и в специально поставленных опытах.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

6.1.2. ПРИМЕР 1 – ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ

Проверить ньютоновское уравнение для силы притяжения F между двумя массами, находящимися на расстоянии r друг от друга, если его записать без гравитационной постоянной [36, 65, 69]:

$$F = \frac{Mm}{r^2}.$$

Проверим эту формулу методом размерностей. В левой части уравнения размерность силы содержит время T . В правой части время не содержится ни в одном из сомножителей. Следовательно, это уравнение неоднородно по размерностям. Здесь пропущен коэффициент пропорциональности, а именно гравитационная постоянная G . Введение этого недостающего множителя в правую часть уравнения позволяет сбалансировать это уравнение по размерностям:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Таким образом, G является постоянной величиной, имеющей следующую размерность:

$$G = \frac{Fr^2}{Mm},$$

$$[G] = \frac{[F][r]^2}{[M][m]} = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

6.1.3. ПРИМЕР 2 – ПЕРИОД ОБРАЩЕНИЯ ПЛАНЕТЫ

Планета обращается вокруг своего Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью D . Найти период обращения планеты [36, 61, 69, 72].

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Основными физическими величинами, которые влияют на период обращения t , являются масса звезды M , масса планеты m , длина полуоси эллипса D

и гравитационная постоянная G . Составим следующую таблицу для пяти физических величин:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности
<i>Входные параметры</i>		
Масса звезды	M	M
Масса планеты	m	M
Большая полуось орбиты	D	L
Гравитационная постоянная	G	$L^3 M^{-1} T^{-2}$
<i>Выходной параметр</i>		
Период	t	T
Итого	$n = 5$	$k = 3$

Этап 2 – вывод чисел подобия. Здесь $n - k = 5 - 3 = 2$, поэтому в соответствии с Пи-теоремой здесь должно быть два критерия подобия. Будем искать период обращения планеты способом Рэлея. Для этого запишем функциональную связь между этими величинами

$$t = t(M, m, D, G)$$

в виде степенного комплекса, т. е. в виде произведения параметров, возведенных в степени:

$$t = k \cdot M^x m^y D^z G^u. \quad (6.2)$$

В итоге уравнение размерностей будет иметь вид

$$T = M^x M^y L^z (L^3 M^{-1} T^{-2})^u,$$

$$M^0 L^0 T^1 = M^{x+y-u} L^{z+3u} T^{-2u}.$$

Уравниваем показатели степеней слева и справа:

$$M: 0 = x + y - u, \quad L: 0 = z + 3u, \quad T: 1 = -2u,$$

откуда находим

$$u = -1/2, \quad z = -3u = 3/2, \quad y = u - x = -1/2 - x.$$

Подставляем найденные значения в выражение (6.2):

$$t = k \cdot M^x m^{-1/2-x} D^{3/2} G^{-1/2},$$

$$t = k \cdot D^{3/2} (Gm)^{-1/2} (M/m)^x.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$t^2 = k^2 \left(\frac{D^3}{Gm} \right) \left(\frac{M}{m} \right)^{2x},$$

$$1 = k^2 \left(\frac{D^3}{t^2 Gm} \right) \left(\frac{M}{m} \right)^{2x}.$$

В скобках стоят безразмерные числа подобия

$$\pi_1 = \frac{D^3}{t^2 Gm}, \quad \pi_2 = \frac{M}{m}.$$

В результате получили следующее критериальное уравнение:

$$1 = k^2 \pi_1 \pi_2^{2x}.$$

Второе число подобия π_2 является безразмерным симплексом-константой. Из условия безразмерности первого числа подобия следует

$$\pi_1 = \frac{D^3}{t^2 Gm} = C \Rightarrow \frac{D^3}{t^2} = C \cdot Gm = \frac{1}{C_1} \Rightarrow \frac{t^2}{D^3} = C_1.$$

В итоге мы получили третий закон Кеплера (6.1): квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам соответствующих больших полуосей:

$$\frac{t_1^2}{D_1^3} = \frac{t_2^2}{D_2^3} \Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{D_1^3}{D_2^3}. \quad (6.3)$$

Данный пример интересен тем, что он показывает возможность получения важного результата весьма простым алгебраическим способом.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

6.2. ЗАДАЧА ГАЛИЛЕЯ – ПАДЕНИЕ ТЕЛА

Если тело свободно падает из состояния покоя, то как будет зависеть расстояние s , проходимое телом, от времени полета t [69]?

6.2.1. ПОДХОД 1 – С УЧЕТОМ МАССЫ ТЕЛА

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Предполагаем, что в задачу входят следующие четыре величины:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные параметры</i>			
Время падения	t	с	T
Ускорение силы тяжести (гравитация)	g	м/с ²	$L T^{-2}$
Масса тела	m	кг	M
<i>Выходной параметр</i>			
Проходимое телом расстояние	s	м	L
Итого	$n = 4$	$k = 3$	

Из Пи-теоремы следует, что здесь должен получиться один ($n - k = 4 - 3 = 1$) безразмерный критерий подобия.

В разделе 2.2 мы решали эту задачу способом полного двустороннего комплекса, или методом Рэлея

$$s = s(g, t, m) = C \cdot g^x t^y m^z. \quad (6.4)$$

После составления и решения уравнивания размерностей получили

$$s = C \cdot g^1 t^2 m^0 = C \cdot g t^2, \quad (6.5)$$

откуда следует один критерий подобия

$$\pi_1 = C_1 = \frac{gt^2}{s}.$$

Из выражения (6.5) следует, что, как и утверждал Галилей, пройденное расстояние s не зависит от массы тела.

А вдруг при составлении уравнения была пропущена какая-то физическая величина? Возникают две альтернативы:

- либо пройденное расстояние s действительно не зависит от массы тела,
- либо при составлении исходного уравнения (6.4) была пропущена какая-то физическая величина.

Рассмотрим последовательно эти альтернативы.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

6.2.2. ПОДХОД 2 – БЕЗ УЧЕТА МАССЫ ТЕЛА

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Сначала будем считать, что s не зависит от массы тела. В этом случае уравнение связи между переменными по способу Рэля в отличие от (6.4) примет следующий вид:

$$s = s(g, t) = C \cdot g^x t^y. \quad (6.6)$$

Перепишем его в размерностях:

$$[s] = [C][g]^x [t]^y,$$

$$L = 1 (\text{м/с}^2)^x (c)^y = 1 (LT^{-2})^x T^y = L^x T^{-2x} T^y = L^x T^{-2x+y}.$$

Теперь в задачу входят три размерные величины ($n = 3$) и две размерности ($k = 2$). В соответствии с Пи-теоремой должно существовать одно число подобия ($n - k = 3 - 2 = 1$).

Сравнивая размерности слева и справа, получаем систему из двух уравнений:

$$L: 1 = x, \quad T: 0 = -2x + y,$$

из которой находим

$$x = 1, \quad y = 2x = 2.$$

Тогда искомое уравнение (6.6) совпадает с решением (6.5):

$$s = C \cdot g^1 t^2 = C \cdot g t^2. \quad (6.7)$$

Из уравнения (6.7) следует, что, как и предсказывалось Пи-теоремой, задача сводится к одному критерию подобия

$$\pi_1 = C_1 = \frac{g t^2}{s}.$$

Оценка численного коэффициента C в уравнении (6.7) методом размерностей невозможна. Но если принять, что коэффициент $C = 1/2$, то уравнение (6.7) совпадет с теоретическим решением (2.3) в примере 2.2.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

6.2.3. ПОДХОД 3 – С УЧЕТОМ МАССЫ И ВЕСА ТЕЛА

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Рассмотрим теперь альтернативную возможность, которую могли бы выдвинуть оппоненты Галилея, а именно что вес w падающего тела влияет на пройденный путь. Тогда в функциональное уравнение (6.4) следует ввести эту дополнительную переменную. Будем искать новую зависимость тем же способом полного двустороннего комплекса, или способом Рэлея:

$$s = s(g, t, m, w) = C \cdot g^x t^y m^z w^u. \quad (6.8)$$

Перепишем это выражение в размерностях:

$$\begin{aligned} [s] &= [C][g]^x [t]^y [m]^z [w]^u, \\ L &= 1 (\text{м/с}^2)^x (c)^y (\text{кг})^z (H)^u = 1 (L T^{-2})^x T^y (M)^z (M L T^{-2})^u = \\ &= L^x T^{-2x} T^y M^z M^u L^u T^{-2u} = L^{x+u} T^{-2x+y-2u} M^{z+u}. \end{aligned}$$

Теперь в задачу входят пять размерных параметров ($n = 5$) и три размерности ($k = 3$). В соответствии с Пи-теоремой должно существовать два числа подобия ($n - k = 5 - 3 = 2$).

Сравнивая размерности слева и справа, получим систему из трех уравнений:

$$L: 1 = x + u, \quad M: 0 = z + u, \quad T: 0 = -2x + y - 2u.$$

Так как имеется четыре неизвестные величины и только три уравнения, необходимо выразить три неизвестные величины через четвертую. Выбрав величину u в качестве четвертой неизвестной, получим

$$x = 1 - u, \quad y = 2x + 2u = 2(1 - u) + 2u = 2 - 2u + 2u = 2, \quad z = -u.$$

Подставляем найденное решение в уравнение (6.8):

$$\begin{aligned} s &= C \cdot g^x t^y m^z w^u = C \cdot g^{1-u} t^2 m^{-u} w^u = \\ &= C \cdot g t^2 (g^{-u} m^{-u} w^u) = C \cdot g t^2 \left(\frac{w}{mg} \right)^u. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} 1 &= C \left(\frac{g t^2}{s} \right) \left(\frac{w}{mg} \right)^u, \\ C_1 &= \left(\frac{g t^2}{s} \right) \left(\frac{w}{mg} \right)^u. \end{aligned}$$

Отсюда следуют два безразмерных критерия подобия, как это и должно быть в соответствии с Пи-теоремой:

$$\pi_1 = \frac{g t^2}{s}, \quad \pi_2 = \frac{w}{mg}. \quad (6.9)$$

Учитывая, что вес $w = mg$, получаем

$$C_1 = (\pi_1)(1)^u = \pi_1,$$

откуда следует

$$s = C_1 \cdot gt^2.$$

Опять получили такое же уравнение (6.5), которое при $C_1 = 1/2$ дает теоретическое решение (2.3) в примере 2.2.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

6.2.4. ПОДХОД 4 – С УЧЕТОМ СКОРОСТИ ТЕЛА

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Предыдущие подходы 1, 2, 3 к решению задачи убедили нас, что пройденный путь s не зависит от массы тела. А вдруг s зависит еще от какого-то параметра, например от скорости?

Предположим, что кроме переменных g и t на расстояние s влияет еще скорость тела v . В этом случае первичное уравнение (6.6) способа Рэля примет вид

$$s = s(g, v, t) = C \cdot g^x v^y t^z. \quad (6.10)$$

Из него получаем уравнение для размерностей

$$\begin{aligned} [s] &= [C][g]^x [v]^y [t]^z, \\ L &= 1 (\text{м}/\text{с}^2)^x (\text{м}/\text{с})^y (\text{с})^z = 1 (LT^{-2})^x (LT^{-1})^y T^z = \\ &= L^x T^{-2x} L^y T^{-y} T^z = L^{x+y} T^{-2x-y+z}. \end{aligned}$$

Теперь в задачу входят четыре размерные величины ($n = 4$) и две размерности ($k = 2$). В соответствии с Пи-теоремой должно существовать два ($n - k = 4 - 2 = 2$) числа подобия.

Сравнивая размерности слева и справа, получаем систему из двух уравнений:

$$L: 1 = x + y, \quad T: 0 = -2x - y + z,$$

которая дает следующие показатели:

$$y = 1 - x, \quad z = 2x + y = 2x + (1 - x) = 1 + x.$$

Следовательно, уравнение (6.10) принимает вид

$$s = C \cdot g^x v^{1-x} t^{1+x} = C \cdot vt (g^x v^{-x} t^x),$$

или

$$s = C \cdot vt \left(\frac{gt}{v} \right)^x. \quad (6.11)$$

Обе части последнего уравнения имеют одинаковую размерность при любых значениях степени x :

$$[s] = L,$$

$$[C][v][t] \left(\frac{[g][t]}{[v]} \right)^x = 1 (LT^{-1})T \left(\frac{(LT^{-2})T}{(LT^{-1})} \right)^x = (L) \left(\frac{LT^{-1}}{LT^{-1}} \right)^x = L \cdot 1^x = L.$$

Преобразуем уравнение (6.11) к следующему виду:

$$1 = C \left(\frac{vt}{s} \right) \left(\frac{gt}{v} \right)^x, \quad C_1 = \left(\frac{vt}{s} \right) \left(\frac{gt}{v} \right)^x.$$

Отсюда следуют два безразмерных критерия подобия, как это и должно быть в соответствии с Пи-теоремой:

$$\pi_1 = \frac{vt}{s}, \quad \pi_2 = \frac{gt}{v}.$$

Рассмотрим уравнение (6.11) более подробно:

- если степень $x = 1$, то

$$s = C \cdot vt \left(\frac{gt}{v} \right)^1 = C \cdot vt \frac{gt}{v} = C \cdot gt^2$$

и получаем такое же уравнение (6.5), как и ранее;

- если степень $x = 0$, то

$$s = C \cdot vt \left(\frac{gt}{v} \right)^0 = C \cdot vt \cdot 1 = C \cdot vt.$$

При $C = 1/2$ эта формула

$$s = \frac{vt}{2}$$

совпадает с теоретическим решением (2.3) и также является правильной, но неудобной, поскольку в условии задачи дано время t , но не дана скорость v .

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

6.2.5. ВЫВОДЫ ПО ПРИМЕРУ

Первый подход к выбору определяющих параметров (6.4) привел к хорошему результату (6.5).

Второй подход к выбору определяющих параметров (6.6) привел к такому же результату (6.7).

Из третьего и четвертого подхода (6.8) и (6.10) можно заключить, что введение в исходное уравнение невливающих физических величин не всегда приводит к неправильным выводам, но может привести к менее удачным решениям.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

7.1. СТАТИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ

В этом примере рассмотрим три задачи: общие условия подобия, подобие напряжений и подобие деформаций. В каждой задаче рассуждения проведем в три этапа в соответствии с [табл. 4.1](#): постановка задачи и группировка параметров, вывод динамических чисел подобия, количественный прогноз через моделирование (эксперимент).

7.1.1. ЗАДАЧА 1 – ОБЩИЕ УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ

Этап 1 – *постановка задачи и группировка параметров*. Пусть мы имеем какое-нибудь сооружение из однородного материала, например мостовую ферму. Рассмотрим задачу о моделировании упругих перемещений при равновесии конструкции.

Если при определении размеров модели не использовать аффинное подобие, т. е. масштаб моделирования для габаритов и толщин принимать одинаковым, то подобие упругих перемещений в модели и натуре будет определяться таким же геометрическим масштабом, как и для размеров. В результате все размеры модели будут определяться одним некоторым характерным размером B .

Упругие свойства изотропного материала определяются двумя постоянными: модулем Юнга E и безразмерным коэффициентом Пуассона ν . Если в рассматриваемом состоянии равновесия вес конструкции существен, то нужно учесть удельный вес γ . Кроме силы веса частей сооружения на него действуют внешние нагрузки, распределенные по элементам конструкции. Пусть величина этих нагрузок определяется характерной силой P . В результате система определяющих параметров задачи включает пять величин.

Подход 1 – класс размерностей LMT [61]

В классе размерностей LMT пять размерных величин имеют три независимые размерности:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
Коэффициент Пуассона	ν	1	1
Модуль Юнга	E	$H/m^2 = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
Характерный размер	B	м	L
Удельный вес	γ	$H/m^3 = \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$
Характерная сила	P	$H = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$	MLT^{-2}
Итого	$n = 5$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. В соответствии с Питеоремой здесь должно быть два ($p = n - k = 5 - 3 = 2$) числа подобия. В работе Л.И. Седова [61] указывается без доказательства, что безразмерных чисел подобия здесь будет не два, а три, и они имеют следующий вид:

$$\pi_1 = \nu, \quad \pi_2 = \frac{P}{EB^2}, \quad \pi_3 = \frac{\gamma B}{E}. \quad (7.1)$$

Докажем, что это действительно так.

Решать задачу будем способом полного одностороннего комплекса, или глобального критерия подобия, в следующем виде:

$$\pi = C\nu^x E^y B^z \gamma^u P^w. \quad (7.2)$$

Перепишем выражение (7.2) в размерностях:

$$1 = [\nu]^x [E]^y [B]^z [\gamma]^u [P]^w,$$

или

$$M^0 L^0 T^0 = 1^x (ML^{-1}T^{-2})^y L^z (ML^{-2}T^{-2})^u (MLT^{-2})^w,$$

$$M^0 L^0 T^0 = 1^x M^{y+u+w} L^{-y+z-2u+w} T^{-2y-2u-2w}.$$

Уравнивая показатели степеней слева и справа, получаем:

$$\begin{aligned} M: y + u + w &= 0, \\ L: -y + z - 2u + w &= 0, \\ T: -2y - 2u - 2w &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Параметр x в эти уравнения не вошел, значит, он может принимать любые значения. Третье уравнение линейно зависимо от первого, поэтому его следует отбросить. В итоге остается только два первых уравнения:

$$\begin{aligned} y + u + w &= 0, \\ -y + z - 2u + w &= 0. \end{aligned}$$

Здесь два уравнения и четыре параметра. Можем определить только две величины через остальные две. Попробуем разрешить эту систему относительно показателей y, z :

$$\begin{aligned} y &= -u - w, \\ z &= y + 2u - w = (-u - w) + 2u - w = u - 2w. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Подставляем найденные значения в выражение (7.2):

$$\begin{aligned} \pi &= C v^x E^{-u-w} B^{u-2w} \gamma^u P^w = C v^x E^{-u} E^{-w} B^u B^{-2w} \gamma^u P^w = \\ &= C v^x (E^{-w} B^{-2w} P^w) (E^{-u} B^u \gamma^u) = C (v)^x (E^{-1} B^{-2} P)^w (E^{-1} B \gamma)^u \Rightarrow \\ \pi &= C (\pi_1)^x (\pi_2)^w (\pi_3)^u. \end{aligned} \quad (7.5)$$

В скобках стоят безразмерные комплексы (константы):

$$\pi_1 = v, \quad \pi_2 = E^{-1} B^{-2} P = \frac{P}{EB^2}, \quad \pi_3 = (E^{-1} B \gamma) = \frac{\gamma B}{E}, \quad (7.6)$$

которые совпадают с выражениями (7.1) и действительно не имеют размерностей:

$$[\pi_1] = [v] = 1,$$

$$[\pi_2] = \frac{[P]}{[E][B]^2} = \frac{MLT^{-2}}{(ML^{-1}T^{-2})L^2} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-2}} = 1,$$

$$[\pi_3] = \frac{[\gamma][B]}{[E]} = \frac{(ML^{-2}T^{-2})L}{ML^{-1}T^{-2}} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-1}T^{-2}} = 1.$$

Подход 2 – класс размерностей LF

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Мы рассматриваем задачу статики, и здесь время не должно появляться в размерностях. Откажемся от традиционной системы размерностей класса (длина, масса, время) = (LMT) и перейдем к классу независимых размерностей (длина, сила) = (метр, ньютон) = (LF) . Тогда размерности входящих в задачу величин изменятся:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
Коэффициент Пуассона	ν	1	L
Модуль Юнга	E	H/M^2	FL^{-2}
Характерный размер	B	m	L
Удельный вес	γ	H/M^3	FL^{-3}
Характерная сила	P	H	F
Итого	$n = 5$	$k = 2$	

Этап 2 – вывод динамических чисел подобия. Теперь в соответствии с Пи-теоремой в задаче должно быть три ($p = n - k = 5 - 2 = 3$) безразмерных критерия подобия, что соответствует выражениям (7.1).

Решать задачу будем тем же способом полного одностороннего комплекса. Будем искать глобальный критерий подобия в виде (7.2)

$$\pi = C\nu^x E^y B^z \gamma^u P^w. \quad (7.7)$$

Перепишем выражение (7.7) в размерностях:

$$1 = [v]^x [E]^y [B]^z [\gamma]^u [P]^w,$$

или

$$F^0 L^0 = 1^x (FL^{-2})^y L^z (FL^{-3})^u F^w,$$

$$F^0 L^0 = 1^x F^{y+u+w} L^{-2y+z-3u}.$$

Уравнивая показатели степеней слева и справа, получаем

$$F: y + u + w = 0, \tag{7.8}$$

$$L: -2y + z - 3u = 0.$$

Здесь два уравнения и четыре параметра. Можем определить только две величины через остальные две. Попробуем разрешить эту систему относительно показателей y , z :

$$y = -u - w,$$

$$z = 2y + 3u = 2(-u - w) + 3u = u - 2w.$$

Получили такие же значения (7.4), как и при рассуждениях в классе размерностей LMT . Поэтому после подстановки найденных значений в выражение (7.7)

$$\begin{aligned} \pi &= C v^x E^{-u-w} B^{u-2w} \gamma^u P^w = C v^x E^{-u} E^{-w} B^u B^{-2w} \gamma^u P^w = \\ &= C v^x (E^{-w} B^{-2w} P^w) (E^{-u} B^u \gamma^u) = C (v)^x (E^{-1} B^{-2} P)^w (E^{-1} B \gamma)^u \Rightarrow \end{aligned}$$

получаем формулу

$$\pi = C (\pi_1)^x (\pi_2)^w (\pi_3)^u, \tag{7.9}$$

которая совпадает с выражением (7.5). В скобках стоят безразмерные комплексы (константы):

$$\pi_1 = v, \quad \pi_2 = E^{-1} B^{-2} P = \frac{P}{EB^2}, \quad \pi_3 = (E^{-1} B \gamma) = \frac{\gamma B}{E}, \tag{7.10}$$

которые совпадают с выражениями (7.1).

Итоги по двум подходам. Сравнивая рассуждения в подходах 1 и 2, видим, что результаты получаются одинаковыми – формулы (7.5), (7.6) в подходе 1 и формулы (7.9), (7.10) в подходе 2. При этом подход 2 более удобен по двум причинам:

- во-первых, количество критериев подобия соответствует Питеореме;
- во-вторых, количество вычислений уменьшается: вместо решения системы из трех уравнений (7.3) здесь требуется решить систему из двух уравнений (7.8).

Итак, критерии подобия (7.1) выведены двумя способами: через размерности классов LMT и LF . Переходим в соответствии с табл. 4.1 к третьему этапу рассуждений: каким условиям должна удовлетворять модель при проведении экспериментов?

Этап 3 – количественный прогноз через моделирование (эксперимент). Условиями подобия будут равенства трех критериев подобия (7.1) для модели и для природы [61]. При этом внешние нагрузки, прикладываемые к модели, рассчитываются из условия одинаковости второго числа подобия. При выполнении этих условий все деформации (упругие перемещения) будут подобными, т. е. если модель в N раз меньше природы, то на модели и деформации (соответствующие упругие перемещения) будут в N раз меньше, чем в природе.

Частный случай – модель и сооружение в природе выполнены из одного и того же материала. В этом случае коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E одинаковы для модели и для природы. Удельный вес определяется через плотность и гравитацию $\gamma = \rho g$. Для выполнения подобия по третьему числу подобия необходимо удовлетворить условию

$$\pi_3 = \frac{\gamma B}{E} = \frac{\rho g B}{E} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad gB = \text{const}, \quad (7.11)$$

т. е. для уменьшения размера модели B требуется увеличить гравитацию g . В обычных условиях $g = \text{const}$, следовательно, для соблюдения механического подобия должно быть $B = \text{const}$, т. е. модель должна совпадать с натурой. В результате, строго говоря, **при одинаковом g моделирование невозможно.**

На практике для несложных конструкций требуемое увеличение удельного веса ρg , что соответствует утяжелению модели, иногда можно осуществить приложением к элементам модели дополнительных нагрузок. Это так называемое **моделирование с догрузкой** (смотри подробности в пособии [42]).

Для сложных конструкций изменения g можно достигнуть искусственным путем, если заставить модель вращаться с постоянной угловой скоростью, поместив ее в центробежную машину. Это так называемое **центробежное моделирование**. Схемы установок для центробежного моделирования показаны на рис. 7.1, 7.2, 7.3.

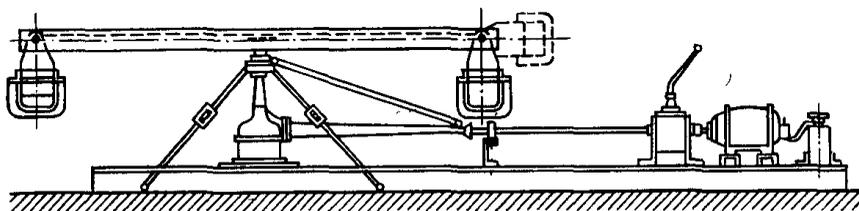


Рис. 7.1. Схема установки по [61, рис. 13]

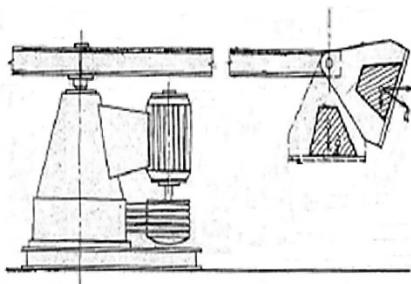


Рис. 7.2. Схема установки по [19, рис. 10]

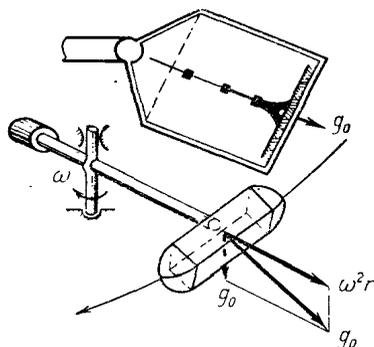


Рис. 7.3. Схема установки по [26, рис. 24.4]

При достаточно малых размерах модели и большом радиусе вращения центробежные силы инерции элементов модели можно считать параллельными. Вращая капсулу около вертикальной оси, получим, что на модель будут действовать постоянные массовые силы, аналогичные силе тяжести, но только с другим ускорением. Выбором угловой скорости вращения можно получать любые большие значения для ускорения.

Л.И. Седов [61] отмечает, что идея о применении центробежной машины для моделирования различных процессов была высказана инженером Бакки в 1931 году, независимо от него эту же идею выдвину-

ли в 1932 году Н.Н. Давиденков и Г.И. Покровский. Еще до этого в 1929 году Давиденков предлагал пользоваться для этой же цели падающим на жесткую пружину ящиком, однако этот способ неудобен и перестал использоваться.

Центробежное моделирование применялось в докомпьютерную эпоху для исследования на моделях различных процессов, происходящих в грунтах, а также в высотных сооружениях.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

7.1.2. ЗАДАЧА 2 – ПОДОБИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Рассмотрим напряжение σ , возникающее при деформации упругой конструкции под действием веса и заданного распределения нагрузок. Под σ мы можем понимать максимальное значение какого-нибудь компонента напряжения или вообще некоторый компонент напряжения для определенного элемента конструкции. Л.И. Седов [61] без доказательства указывает, что так как комбинация σ/E является безразмерной, то она может зависеть только от остальных безразмерных комплексов (7.1), и поэтому можно написать

$$\frac{\sigma}{E} = f\left(\nu, \frac{P}{EB^2}, \frac{\rho g B}{E}\right). \quad (7.12)$$

Проверим, так ли это.

Составим таблицу всех величин задачи в классе размерностей LMT :

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные величины</i>			
Коэффициент Пуассона	ν	1	1
Модуль Юнга	E	$H/M^2 = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
Характерный размер	B	м	L
Удельный вес	γ	$H/M^3 = \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$
Характерная сила	P	$H = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$	MLT^{-2}
<i>Выходная величина</i>			
Напряжение	σ	$H/M^2 = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
Итого	$n = 6$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод чисел подобия. Будем искать напряжение по способу Рэлея в виде

$$\sigma = C v^x E^y B^z \gamma^u P^w. \quad (7.13)$$

Перепишем выражение (7.13) в размерностях:

$$[\sigma] = [v]^x [E]^y [B]^z [\gamma]^u [P]^w,$$

или

$$ML^{-1}T^{-2} = 1^x (ML^{-1}T^{-2})^y L^z (ML^{-2}T^{-2})^u (MLT^{-2})^w,$$

$$ML^{-1}T^{-2} = 1^x M^{y+u+w} L^{-y+z-2u+w} T^{-2y-2u-2w}.$$

Уравнивая показатели степеней слева и справа, получаем:

$$M: \quad 1 = y + u + w,$$

$$L: \quad -1 = -y + z - 2u + w,$$

$$T: \quad -2 = -2y - 2u - 2w.$$

Параметр x в эти уравнения не вошел, значит, он может принимать любые значения. Третье уравнение линейно зависимо от первого, поэтому его следует отбросить. В итоге остается только два первых уравнения:

$$1 = y + u + w,$$

$$-1 = -y + z - 2u + w.$$

Здесь два уравнения и четыре параметра. Можем определить только две величины через остальные две. Попробуем разрешить эту систему относительно показателей y , z :

$$y = 1 - u - w,$$

$$z = -1 + y + 2u - w = -1 + (1 - u - w) + 2u - w = u - 2w.$$

Подставляем найденные значения в выражение (7.13):

$$\begin{aligned}
 \sigma &= Cv^x E^y B^z \gamma^u P^w = \\
 &= Cv^x E^1 E^{-u} E^{-w} B^u B^{-2w} \gamma^u P^w = \\
 &= CEv^x (E^{-w} B^{-2w} P^w) (E^{-u} B^u \gamma^u) = \\
 &= CE(v)^x (E^{-1} B^{-2} P)^w (E^{-1} B \gamma)^u \Rightarrow \\
 \sigma &= CE(\pi_1)^x (\pi_2)^w (\pi_3)^u .
 \end{aligned}$$

В скобках стоят безразмерные комплексы (7.1). Отсюда получаем критериальное уравнение

$$\frac{\sigma}{E} = C(\pi_1)^x (\pi_2)^w (\pi_3)^u \Rightarrow \frac{\sigma}{E} = f\left(v, \frac{P}{EB^2}, \frac{\rho g B}{E}\right), \quad (7.14)$$

которое совпадает с выражением (7.12).

Этап 3 – *количественный прогноз через моделирование (эксперимент)*, или условия подобия при моделировании.

Частный случай 1 – одинаковые материалы. Если модель и сооружение в натуре сделаны из одинакового материала, то $E = \text{const}$, поэтому для механически подобных состояний, когда $(\sigma/E) = \text{const}$, напряжения в соответствующих точках будут одинаковыми. Если мы примем, что напряженные состояния механически подобны и что разрушение определяется значениями максимальных напряжений, то станет очевидно, что на модели и в натуре разрушения наступят для подобных состояний.

Частный случай 2 – невесомые конструкции. Если величины внешних нагрузок велики, а собственный вес конструкции настолько мал, что им можно пренебречь, то параметр $\gamma = \rho g$, а следовательно, и третий критерий

$$\pi_3 = \frac{\rho g B}{E}$$

несущественны. В этом случае соотношение (7.14) приобретает вид

$$\frac{\sigma}{E} = f\left(\nu, \frac{P}{EB^2}\right)$$

и условия подобия представляются только двумя критериями:

$$\pi_1 = \nu = \text{const}, \quad \pi_2 = \frac{P}{EB^2} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что при моделировании невесомых конструкций на том же материале

$$\nu = \text{const}, \quad E = \text{const}$$

внешние нагрузки необходимо изменять пропорционально квадрату линейных размеров:

$$\frac{P}{B^2} = \text{const}.$$

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.1.3. ЗАДАЧА 3 – ПОДОБИЕ ДЕФОРМАЦИЙ

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Обозначим через l изменение первоначальной длины B (удлинение) при деформации некоторого элемента упругой системы. В сопротивлении материалов комбинация (l/B) записывается обычно как приращение длины к начальной длине и называется относительной деформацией

$$\frac{l}{B} \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon.$$

Л.И. Седов [61] без доказательства указывает, что так как комбинация (l/B) безразмерна, она может зависеть только от остальных безразмерных комплексов (7.1), и поэтому можно написать

$$\frac{l}{B} = \varphi\left(\nu, \frac{P}{EB^2}, \frac{\rho g B}{E}\right). \quad (7.15)$$

Докажем, что это действительно так.

Составим таблицу всех величин задачи в классе размерностей LMT .

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные величины</i>			
Коэффициент Пуассона	ν	1	1
Модуль Юнга	E	$H/M^2 = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
Характерный размер	B	м	L
Удельный вес	γ	$H/M^3 = \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$
Характерная сила	P	$H = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$	MLT^{-2}
<i>Выходная величина</i>			
Удлинение	l	м	L
Итого	$n = 6$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод чисел подобия. Будем искать удлинение, или изменение длины, по способу Рэля в виде

$$l = C\nu^x E^y B^z \gamma^u P^w. \quad (7.16)$$

Перепишем это выражение в размерностях:

$$[l] = [\nu]^x [E]^y [B]^z [\gamma]^u [P]^w,$$

или

$$L = 1^x (ML^{-1}T^{-2})^y L^z (ML^{-2}T^{-2})^u (MLT^{-2})^w,$$

$$M^0 L^1 T^0 = 1^x M^{y+u+w} L^{-y+z-2u+w} T^{-2y-2u-2w}.$$

Уравнивая показатели степеней слева и справа, получаем:

$$M: 0 = y + u + w,$$

$$L: 1 = -y + z - 2u + w,$$

$$T: 0 = -2y - 2u - 2w.$$

Параметр x в эти уравнения не вошел, значит, он может принимать любые значения. Третье уравнение линейно зависимо от первого, по-

этому его следует отбросить. В итоге остается только два первых уравнения:

$$0 = y + u + w,$$

$$1 = -y + z - 2u + w.$$

Здесь два уравнения и четыре параметра. Можем определить только две величины через остальные две. Попробуем разрешить эту систему относительно показателей y , z :

$$y = -u - w,$$

$$z = 1 + y + 2u - w = 1 + (-u - w) + 2u - w = 1 + u - 2w.$$

Подставляем найденные значения в выражение (7.16):

$$\begin{aligned} l &= Cv^x E^y B^z \gamma^u P^w = \\ &= Cv^x (E^{-u} E^{-w}) (B^1 B^u B^{-2w}) \gamma^u P^w = \\ &= CB^1 v^x (E^{-w} B^{-2w} P^w) (E^{-u} B^u \gamma^u) = \\ &= CB(v)^x (E^{-1} B^{-2} P)^w (E^{-1} B \gamma)^u \Rightarrow \\ l &= CB(\pi_1)^x (\pi_2)^w (\pi_3)^u . \end{aligned}$$

В скобках стоят безразмерные комплексы (7.1). Отсюда получаем критериальное уравнение

$$\frac{l}{B} = C(\pi_1)^x (\pi_2)^w (\pi_3)^u \Rightarrow \frac{l}{B} = \varphi\left(v, \frac{P}{EB^2}, \frac{\rho g B}{E}\right), \quad (7.17)$$

которое совпадает с выражением (7.15).

Этап 3 – *количественный прогноз через моделирование (эксперимент)*, или условия подобия при моделировании. Величина деформации l/B влияет на напряжения, а это позволяет нам рассмотреть вопрос о том, как прочность конструкции зависит от ее размеров.

Сначала рассмотрим **весомые** конструкции. Докажем, что конструкция малых размеров будет иметь большую прочность. Доказательство проведем в два этапа.

Во-первых, установим, как безразмерная деформация l/B зависит от числа подобия

$$\pi_3 = \frac{\rho g B}{E}.$$

Для этого рассмотрим две геометрически одинаковые конструкции одного размера, изготовленные из разных материалов. Из физических соображений понятно, что при уменьшении удельного веса $\gamma = \rho g$ элементов конструкции, т. е. при уменьшении параметра π_3 , нагрузка на конструкцию уменьшается. Это приводит к уменьшению удлинений l , и величина l/B уменьшается. Таким образом, установили, что при уменьшении числа подобия π_3 деформация l/B **уменьшается**.

Во-вторых, рассмотрим теперь две геометрически подобные конструкции разных размеров и изготовленные из одного и того же материала (ρ , E и ν одинаковые):

$$\rho = \text{const}, \quad E = \text{const}, \quad \nu = \text{const}.$$

Допустим, что величины внешних нагрузок изменяются пропорционально квадратам размеров, т. е.

$$\frac{P}{B^2} = \text{const}.$$

В этом случае первый и второй критерии подобия на модели и натуре одинаковы:

$$\pi_1 = \nu = \text{const}, \quad \pi_2 = \frac{P}{EB^2} = \text{const},$$

а третий критерий подобия $\pi_3 = \frac{\rho g B}{E}$ при условии

$$\rho = \text{const}, \quad g = \text{const}, \quad E = \text{const}$$

изменяется: он уменьшается с уменьшением размеров B конструкции. Следовательно, механическое подобие будет нарушено и безразмерное

удлинение l/B на модели не будет равно безразмерному удлинению на натуре. А так как ранее мы установили, что при уменьшении π_3 деформация l/B тоже уменьшается, то отсюда следует, что на конструкции меньших размеров относительные деформации будут меньше, поэтому **весомая конструкция малых размеров будет иметь большую прочность.**

Теперь рассмотрим **невесомые** конструкции. В том случае, когда удельный вес материала $\gamma = \rho g$ несуществен по сравнению с внешними нагрузками, третье число подобия

$$\pi_3 = \frac{\rho g B}{E}$$

можно не учитывать, и при условии соблюдения подобия по двум оставшимся критериям

$$\pi_1 = v = \text{const}, \quad \pi_2 = \frac{P}{EB^2} = \text{const}$$

относительные деформации (7.17) $\frac{l}{B} = C(\pi_1)^x (\pi_2)^w$ имеют одинаковые значения для тел различных масштабов. Другими словами, **для невесомых конструкций прочность не зависит от их размеров.**

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

7.1.4. ВЫВОДЫ ПО ПРИМЕРУ (ЗАДАЧИ 1, 2, 3)

При моделировании упругих **весомых** конструкций, когда требуется учитывать собственный вес, необходимо выполнить три критерия подобия (7.1):

$$\pi_1 = v = \text{const}, \quad \pi_2 = \frac{P}{EB^2} = \text{const}, \quad \pi_3 = \frac{\rho g B}{E} = \text{const}.$$

Для этого приходится прибегать либо к моделированию с догрузкой, либо к центробежному моделированию. При этом конструкции малых размеров имеют более высокую прочность.

При моделировании упругих **невесомых** конструкций, когда собственный вес можно не учитывать, необходимо выполнить только два критерия подобия:

$$\pi_1 = v = \text{const}, \quad \pi_2 = \frac{P}{EB^2} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что при моделировании на том же материале внешние нагрузки необходимо изменять пропорционально квадрату линейных размеров. При этом для невесомых конструкций прочность не зависит от их размеров.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.1.5. ДОБАВЛЕНИЕ ИЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В справочниках по расчету на прочность [10, с. 602; 35, с. 146], в учебнике по сопротивлению материалов [4, с. 440] со ссылкой на ГОСТ 25.504 [17] указывается, что при расчете деталей машин на усталостную прочность предел выносливости детали σ_{-1d} с увеличением размеров уменьшается. Влияние абсолютных размеров детали учитывается через масштабный коэффициент K_d :

$$\sigma_{-1d} = K_d \sigma_{-1}. \quad (7.18)$$

Здесь σ_{-1} – предел выносливости стандартного круглого образца диаметром 7...10 мм; σ_{-1d} – предел выносливости геометрически подобной детали размером (диаметром) d ; $K_d \leq 1$ – масштабный коэффициент.

В изданиях [20, с. 341; 68, с. 239] приводится график определения масштабного коэффициента K_d для реальных размеров d круглых деталей, подверженных симметричному циклу нагружения (рис. 7.4). Кривая 1 соответствует мягким углеродистым сталям, кривая 2 – высокопрочным легированным сталям. Из графика видно, что с увеличением размеров d детали масштабный коэффициент K_d уменьшается и предел выносливости детали σ_{-1d} в соответствии с формулой (7.18) уменьшается. Другими словами, крупная деталь менее прочная, чем малая, и наоборот, малая деталь более прочная, чем большая.

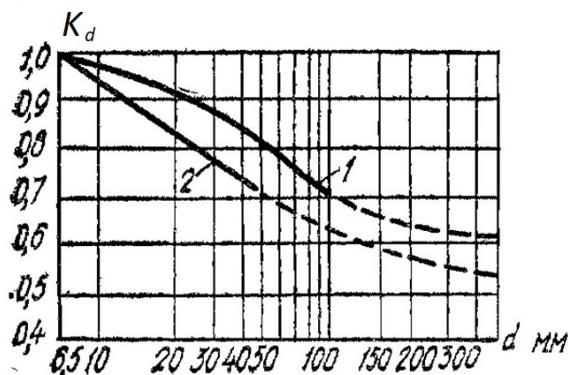


Рис. 7.4. Зависимость масштабного коэффициента от размера детали

Это явление, для установления которого понадобилось большое количество длительных экспериментов на усталость, было предсказано через анализ размерностей путем только логических рассуждений на более простой задаче статического равновесия.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.2. СТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Шарнирно опертая балка постоянного сечения и большого габарита (например, мостовая балка) нагружена в центре сосредоточенной силой (рис. 7.5). Найти прогиб под точкой приложения силы.

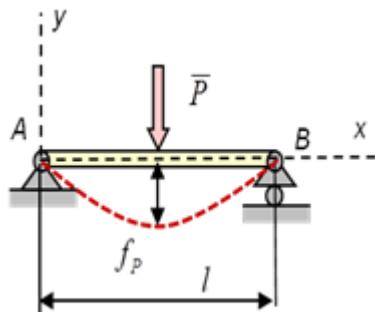


Рис. 7.5. Шарнирно опертая балка

Эта задача была рассмотрена в пособии [42]. Там было выведено число подобия

$$\pi = \frac{Pl^3}{Elf_p} = \frac{1}{C}, \quad (7.19)$$

из которого находится прогиб с точностью до постоянного множителя [4]:

$$\boxed{f_p = C \frac{Pl^3}{EI}}. \quad (7.20)$$

Решим эту задачу методом анализа размерностей – попытаемся получить разными способами то же выражение (7.20). Напомним, что при выводе этой формулы использовалось не геометрическое, а аффинное подобие, так как масштабы по осям x , y и z выбирались разными. Кроме того, в отличие от предыдущего примера здесь не участвует коэффициент Пуассона и не учитывается собственный вес балки, поэтому двух безразмерных критериев подобия Седова

$$\pi_1 = \nu, \quad \pi_3 = \frac{\gamma B}{E}$$

из предыдущего примера (см. раздел 7.1) здесь не будет.

Итак, согласно формуле (7.20) в задачу входят пять величин ($n = 5$), которые содержат три ($k = 3$) независимые размерности:

Физическая величина	Обозначение	Размерность
<i>Входные параметры</i>		
Внешняя сила	P	$H = MLT^{-2}$
Длина балки	l	$m = L$
Модуль упругости материала	E	$H/m^2 = ML^{-1}T^{-2}$
Момент инерции поперечного сечения	I	$m^4 = L^4$
<i>Выходной параметр</i>		
Прогиб в середине балки	f_p	$m = L$
Итого	$n = 5$	$k = 3$

Этап 2 – вывод чисел подобия. В соответствии с Пи-теоремой в задаче должно быть два ($p = n - k = 5 - 3 = 2$) безразмерных критерия

подобия. Проверим размерность полученного ранее числа подобия (7.19):

$$[\pi] = \frac{[P][I]^3}{[E][I][f_p]} = \frac{(MLT^{-2})L^3}{(ML^{-1}T^{-2})L^4L} = \frac{ML^4T^{-2}}{ML^4T^{-2}} = 1.$$

Как и полагается, оно оказалось безразмерным комплексом.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.2.1. ПОДХОД 1 – КЛАСС РАЗМЕРНОСТЕЙ LMT

Будем решать задачу способом полного двустороннего комплекса, или методом Рэлея:

$$f_p = C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4}. \quad (7.21)$$

Уравнение (7.21) перепишем в размерностях:

$$\begin{aligned} [f_p] &= [C][P]^{z_1}[I]^{z_2}[E]^{z_3}[I]^{z_4}, \\ L &= 1(MLT^{-2})^{z_1}L^{z_2}(ML^{-1}T^{-2})^{z_3}(L^4)^{z_4}, \\ M^0L^1T^0 &= M^{z_1+z_3}L^{z_1+z_2-z_3+4z_4}T^{-2z_1-2z_3}. \end{aligned}$$

Уравниваем показатели степеней у соответствующих размерностей слева и справа:

$\begin{aligned} M: 0 &= z_1 + z_3, \\ L: 1 &= z_1 + z_2 - z_3 + 4z_4, \\ T: 0 &= -2z_1 - 2z_3. \end{aligned}$	(7.22)
--	--------

Из этой системы третье уравнение следует исключить, так как оно линейно зависимо от первого. Поэтому остается только первых два уравнения, из которых можем определить только две неизвестные из четырех. Это приведет к тому, что безразмерных чисел подобия будет не два, а три. Рассмотрим разные варианты определения показателей степеней из уравнений (7.22): вначале найдем z_1, z_2 , затем z_1, z_3 , потом z_2, z_3 .

Вариант 1. Вначале определим из (7.22) значения (z_1, z_2) через (z_3, z_4) :

$$\begin{aligned} z_1 &= -z_3, \\ z_2 &= 1 - z_1 + z_3 - 4z_4 = 1 + 2z_3 - 4z_4. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения в формулу (7.21):

$$\begin{aligned} f_p &= C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4} = C \cdot P^{(-z_3)} l^{(1+2z_3-4z_4)} E^{z_3} I^{z_4} = \\ &= C \cdot l^1 (P^{-z_3} E^{z_3} l^{2z_3}) (l^{-4z_4} I^{z_4}) = \\ &= C \cdot l (P^{-1} E l^2)^{z_3} (l^{-4} I)^{z_4} \Rightarrow \\ f_p &= C \cdot l \left(\frac{E l^2}{P} \right)^{z_3} \left(\frac{I}{l^4} \right)^{z_4}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Из последнего выражения получаем критериальное уравнение

$$\left(\frac{f_p}{l} \right) = C \left(\frac{E l^2}{P} \right)^{z_3} \left(\frac{I}{l^4} \right)^{z_4} \Rightarrow \pi_{11} = C \cdot \pi_{12}^{z_3} \pi_{13}^{z_4}.$$

Здесь

$$\pi_{11} = \frac{f_p}{l}, \quad \pi_{12} = \frac{E l^2}{P}, \quad \pi_{13} = \frac{I}{l^4} \quad (7.24)$$

являются числами подобия, не имеющими размерности:

$$\begin{aligned} [\pi_{11}] &= \frac{[f_p]}{[l]} = \frac{L}{L} = 1, \\ [\pi_{12}] &= \frac{[E][l]^2}{[P]} = \frac{(ML^{-1}T^{-2})L^2}{MLT^{-2}} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-2}} = 1, \\ [\pi_{13}] &= \frac{[I]}{[l]^4} = \frac{L^4}{L^4} = 1. \end{aligned}$$

При этом получился один из критериев подобия Седова из предыдущего примера

$$\pi_{12} = \frac{El^2}{P} = \frac{1}{\pi_2} = \frac{EB^2}{P}.$$

В результате видим, что полученная формула (7.23) не совпадает с искомой формулой (7.20). В частном случае если задать значения

$$z_3 = z_4 = -1,$$

то выражение (7.23) преобразуется к виду (7.20)

$$f_p = C \cdot l \left(\frac{El^2}{P} \right)^{-1} \left(\frac{l}{l^4} \right)^{-1} = C \cdot l \frac{P}{El^2} \frac{l^4}{l} \Rightarrow$$

$$f_p = C \frac{Pl^3}{El}.$$

Вариант 2. Теперь определим из (7.22) значения (z_1, z_3) через (z_2, z_4) :

$$z_1 = (1 - 3z_2 - 4z_4) / 2,$$

$$z_3 = -z_1 = -(1 - 3z_2 - 4z_4) / 2.$$

Подставим найденные значения в формулу (7.21):

$$\begin{aligned} f_p &= C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4} = C \cdot P^{(1-z_2-4z_4)/2} l^{z_2} E^{-(1-z_2-4z_4)/2} I^{z_4} = \\ &= C \cdot P^{1/2} P^{-z_2/2} P^{-4z_4/2} l^{z_2} E^{-1/2} E^{z_2/2} E^{4z_4/2} I^{z_4} = \\ &= C (P^{1/2} E^{-1/2}) (P^{-1/2} l E^{1/2})^{z_2} (P^{-2} E^2 I)^{z_4} = \\ &= C (P/E)^{1/2} (l(E/P)^{1/2})^{z_2} ((E/P)^2 I)^{z_4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_p = C \sqrt{\frac{P}{E}} \left(l \sqrt{\frac{E}{P}} \right)^{z_2} \left(\frac{IE^2}{P^2} \right)^{z_4}. \quad (7.25)$$

Из последнего выражения получаем критериальное уравнение

$$\left(f_p \sqrt{\frac{E}{P}} \right) = C \left(l \sqrt{\frac{E}{P}} \right)^{z_2} \left(I \left(\frac{E}{P} \right)^2 \right)^{z_4} \Rightarrow \pi_{21} = C \cdot \pi_{22}^{z_2} \pi_{23}^{z_4}.$$

Здесь

$$\pi_{21} = f_p \sqrt{\frac{E}{P}}, \quad \pi_{22} = l \sqrt{\frac{E}{P}}, \quad \pi_{23} = I \left(\frac{E}{P} \right)^2 \quad (7.26)$$

являются числами подобия, не имеющими размерности:

$$[\pi_{21}] = [f_p] \sqrt{\frac{[E]}{[P]}} = L \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-2}}{MLT^{-2}}} = L \sqrt{\frac{1}{L^2}} = 1,$$

$$[\pi_{22}] = [l] \sqrt{\frac{[E]}{[P]}} = L \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-2}}{MLT^{-2}}} = L \sqrt{\frac{1}{L^2}} = 1,$$

$$[\pi_{23}] = [I] \left(\frac{[E]}{[P]} \right)^2 = L^4 \left(\frac{ML^{-1}T^{-2}}{MLT^{-2}} \right)^2 = L^4 \left(\frac{1}{L^2} \right)^2 = 1.$$

При этом получился один из критериев подобия Седова из предыдущего примера:

$$\pi_{22} = l \sqrt{\frac{E}{P}} = \sqrt{\pi_2} = \sqrt{\frac{EB^2}{P}}.$$

В результате видим, что полученная формула (7.25) не совпадает с искомой формулой (7.20). В частном случае если задать значения

$$z_2 = 3, \quad z_4 = -1,$$

то выражение (7.25) преобразуется к виду (7.20):

$$\begin{aligned}
 f_p &= C \sqrt{\frac{P}{E}} \left(l \sqrt{\frac{E}{P}} \right)^{z_2} \left(\frac{IE^2}{P^2} \right)^{z_4} = C \left(\frac{P}{E} \right)^{1/2} \left(l \left(\frac{P}{E} \right)^{-1/2} \right)^3 \left(\frac{IE^2}{P^2} \right)^{-1} \Rightarrow \\
 f_p &= C \cdot l^3 \left(\frac{P}{E} \right)^{1/2-3/2} \left(\frac{P^2}{IE^2} \right)^1 = C \cdot l^3 \left(\frac{P}{E} \right)^{-1} \left(\frac{P^2}{IE^2} \right) = C \cdot l^3 \frac{P}{IE} \Rightarrow \\
 f_p &= C \frac{Pl^3}{EI}.
 \end{aligned}$$

Вариант 3. Теперь определим из (7.22) значения (z_2, z_3) через (z_1, z_4) :

$$z_3 = -z_1,$$

$$z_2 = 1 - z_1 + z_3 - 4z_4 = 1 - z_1 + (-z_1) - 4z_4 = 1 - 2z_1 - 4z_4.$$

Подставим найденные значения в формулу (7.21):

$$\begin{aligned}
 f_p &= C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4} = C \cdot P^{z_1} l^{1-2z_1-4z_4} E^{-z_1} I^{z_4} = \\
 &= C \cdot l^1 (Pl^{-2} E^{-1})^{z_1} (I^{-4})^{z_4} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$f_p = C \cdot l \left(\frac{P}{El^2} \right)^{z_1} \left(\frac{I}{I^4} \right)^{z_4}. \quad (7.27)$$

Из последнего выражения получаем критериальное уравнение

$$\left(\frac{f_p}{l} \right) = C \left(\frac{P}{El^2} \right)^{z_1} \left(\frac{I}{I^4} \right)^{z_4} \Rightarrow \pi_{31} = C \cdot \pi_{32}^{z_1} \pi_{33}^{z_4}.$$

Здесь

$$\pi_{31} = \frac{f_p}{l}, \quad \pi_{32} = \frac{P}{El^2}, \quad \pi_{33} = \frac{I}{I^4} \quad (7.28)$$

являются числами подобия, не имеющими размерности:

$$[\pi_{31}] = \frac{[f_p]}{[l]} = \frac{L}{L} = 1,$$

$$[\pi_{32}] = \frac{[P]}{[E][l]^2} = \frac{MLT^{-2}}{(ML^{-1}T^{-2})L^2} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-2}} = 1,$$

$$[\pi_{33}] = \frac{[I]}{[l]^4} = \frac{L^4}{L^4} = 1.$$

При этом получился один из критериев подобия Седова из предыдущего примера:

$$\pi_{32} = \frac{P}{El^2} = \pi_2 = \frac{P}{EB^2}.$$

В результате видим, что полученная формула (7.27) не совпадает с искомой формулой (7.20). В частном случае если задать значения

$$z_1 = 1, \quad z_4 = -1,$$

то выражение (7.27) преобразуется к виду (7.20)

$$f_p = C \cdot l \left(\frac{P}{El^2} \right)^1 \left(\frac{l}{l^4} \right)^{-1} = C \cdot l \frac{P}{El^2} \frac{l^4}{l} \Rightarrow$$

$$f_p = C \frac{Pl^3}{EI}.$$

Итог по решению задачи через класс размерностей LMT . Ни один из трех вариантов не дал искомой зависимости (7.20).

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.2.2. ПОДХОД 2 – КЛАСС РАЗМЕРНОСТЕЙ LF

Мы рассматриваем задачу статики, и здесь время не должно появляться в размерностях. Откажемся от традиционной системы размерностей класса (длина, масса, время) = LMT и перейдем к классу незави-

симых размерностей (длина, сила) = (метр, ньютон) = LF . Тогда размерности входящих в задачу величин изменятся:

Физическая величина	Обозначение	Размерность
<i>Входные параметры</i>		
Внешняя сила	P	$H = F$
Длина балки	l	$m = L$
Модуль упругости материала	E	$H/m^2 = FL^{-2}$
Момент инерции поперечного сечения	I	$m^4 = L^4$
<i>Выходной параметр</i>		
Прогиб в середине балки	f_p	$m = L$
Итого	$n = 5$	$k = 2$

В соответствии с Пи-теоремой в задаче должно быть три ($n - k = 5 - 2 = 3$) безразмерных критерия подобия. Проверим размерность полученного ранее числа подобия (7.19) в наших размерностях:

$$[\pi] = \frac{[P][I]^3}{[E][I][f_p]} = \frac{FL^3}{(FL^{-2})L^4L} = \frac{FL^3}{FL^3} = 1.$$

Как и полагается, оно оказалось безразмерным комплексом.

Будем решать задачу способом полного двустороннего комплекса, или методом Рэлея:

$$f_p = C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4}. \quad (7.29)$$

Уравнение (7.29) перепишем в размерностях:

$$\begin{aligned} [f_p] &= [C] \cdot [P]^{z_1} [l]^{z_2} [E]^{z_3} [I]^{z_4}, \\ L &= 1 \cdot (F)^{z_1} (L)^{z_2} (FL^{-2})^{z_3} (L^4)^{z_4}, \\ F^0 L^1 &= F^{z_1+z_3} L^{z_2-2z_3+4z_4}. \end{aligned}$$

Уравнивая показатели степеней у соответствующих размерностей слева и справа

$$F: 0 = z_1 + z_3,$$

$$L: 1 = z_2 - 2z_3 + 4z_4,$$

находим

$$z_3 = -z_1,$$

$$z_2 = 1 + 2z_3 - 4z_4 = 1 - 2z_1 - 4z_4.$$

Полученные значения показателей степеней подставляем в выражение (7.29):

$$\begin{aligned} f_p &= C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4} = C \cdot P^{z_1} l^{1-2z_1-4z_4} E^{-z_1} I^{z_4} = \\ &= C \cdot l (P^{z_1} l^{-2z_1} E^{-z_1}) (l^{-4z_4} I^{z_4}) = C \cdot l (P l^{-2} E^{-1})^{z_1} (l^{-4} I)^{z_4} \Rightarrow \\ f_p &= C \cdot l \left(\frac{P}{E l^2} \right)^{z_1} \left(\frac{I}{l^4} \right)^{z_4}. \end{aligned}$$

Получили такое же выражение (7.27), как и в варианте 3.

Таким образом, данный подход ничего нового не принес, хотя несколько сократил промежуточные выкладки.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.2.3. ПОДХОД 3 – КЛАСС ВЕКТОРНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ $L_x L_y F$

Размеры по длине балки обозначим через L_x (например, метры), а по ширине и высоте – через L_y (например, миллиметры). Тогда размерности входящих в задачу величин в классе независимых размерностей (длина, сила) = (метр, ньютон) = LF изменятся:

Физическая величина	Обозначение	Размерность
<i>Входные параметры</i>		
Внешняя сила	P	$H = F$
Длина балки	l	$m = L_x$
Модуль упругости материала	E	$H/m^2 = FL_y^{-2}$
Момент инерции поперечного сечения	I	$m^4 = L_y^4$
<i>Выходной параметр</i>		
Прогиб в середине балки	f_p	$m = L_y$
Итого	$n = 5$	$k = 3$

В соответствии с Пи-теоремой в задаче должно быть два ($n - k = 5 - 3 = 2$) безразмерных числа подобия. Это уже лучше, чем три в подходе 2 с обычными размерностями для длин. Проверим размерность полученного ранее числа подобия (7.19):

$$[\pi] = \frac{[P][I]^3}{[E][I][f_p]} = \frac{FL_x^3}{(FL_y^{-2})L_y^4L_y} = \frac{FL_x^3}{FL_y^3} = \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^3 = \text{const} \neq 1.$$

В этом случае оно уже не будет безразмерным комплексом. Значит, наш предполагаемый результат, получаемый из условия безразмерности, заведомо не должен совпасть с ранее полученной формулой (7.20).

Тем не менее попытаемся найти решение для этого случая. Будем решать задачу способом полного двустороннего комплекса, или методом Рэлея:

$$f_p = C \cdot P^{z_1} l^{z_2} E^{z_3} I^{z_4}. \quad (7.30)$$

Уравнение (7.30) перепишем в размерностях:

$$[f_p] = [C] \cdot [P]^{z_1} [l]^{z_2} [E]^{z_3} [I]^{z_4},$$

$$L_y = 1 \cdot (F)^{z_1} (L_x)^{z_2} (FL_y^{-2})^{z_3} (L_y^4)^{z_4},$$

$$F^0 L_y^1 = F^{z_1+z_3} L_x^{z_2} L_y^{-2z_3+4z_4}.$$

Уравнивая показатели степеней у соответствующих размерностей слева и справа

$$F: 0 = z_1 + z_3, \quad L_x: 0 = z_2, \quad L_y: 1 = -2z_3 + 4z_4,$$

находим

$$z_2 = 0, \quad z_3 = (4z_4 - 1) / 2, \quad z_1 = -z_3 = -(4z_4 - 1) / 2.$$

Полученные решения подставляем в выражение (7.30):

$$\begin{aligned} f_p &= C \cdot P^{z_1} I^{z_2} E^{z_3} I^{z_4} = C \cdot P^{-(4z_4-1)/2} I^0 E^{(4z_4-1)/2} I^{z_4} = \\ &= C \cdot P^{1/2} E^{-1/2} P^{-2z_4} E^{2z_4} I^{z_4} = C \left(\frac{P}{E} \right)^{1/2} \left(\frac{E^2}{P^2} I \right)^{z_4} \Rightarrow \\ f_p &= C \sqrt{\frac{P}{E}} \left(\frac{IE^2}{P^2} \right)^{z_4}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Это выражение сводится только к двум безразмерным числам подобия

$$\left(f_p \sqrt{\frac{E}{P}} \right) = C \left(\frac{IE^2}{P^2} \right)^{z_4} \Rightarrow \pi_{41} = C \pi_{42}^{z_4},$$

где

$$\pi_{41} = f_p \sqrt{\frac{E}{P}}, \quad \pi_{42} = \frac{IE^2}{P^2}. \quad (7.32)$$

Эти числа действительно безразмерны:

$$\begin{aligned} [\pi_{41}] &= [f_p] \sqrt{\frac{[E]}{[P]}} = L_y \sqrt{\frac{FL_y^{-2}}{F}} = L_y \sqrt{\frac{1}{L_y^2}} = 1, \\ [\pi_{42}] &= \frac{[I][E]^2}{[P]^2} = \frac{L_y^4 (FL_y^{-2})^2}{F^2} = \frac{L_y^4 L_y^{-4}}{1} = 1. \end{aligned}$$

Однако полученное выражение (7.31) невозможно свести к формуле (7.20), поскольку здесь отсутствует параметр длины l . Таким образом, использование векторных размерностей не привело к ожидаемым преимуществам.

Итоги по подходам 1, 2, 3. Этот пример показывает:

- во-первых, анализ размерностей уступает анализу уравнений, хотя при определенных значениях показателей степеней верная формула (7.20) все-таки получается;
- во-вторых, использование векторных размерностей привело к результату, намного худшему по сравнению с традиционным подходом.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.2.4. ПОДХОД 4 – КЛАСС ВЕКТОРНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ $L_x L_y L_z F \Theta$ ДЛЯ ПОВОРОТА

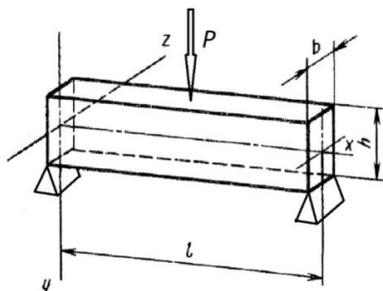


Рис. 7.6. Шарнирно опертая балка прямоугольного сечения

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Вначале определим угол поворота φ сечения балки, например, на левом конце над шарниром. Для простоты будем рассматривать балку с прямоугольным сечением размерами b по оси z и h по оси y (рис. 7.6). Момент инерции такого сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (7.33)$$

В список определяющих параметров включим длину l , размеры b , h поперечного сечения, модуль упругости материала E , внешнюю силу P . Тогда перечень всех существенных величин задачи будет следующим [70]:

$$\varphi = \varphi(P, E, b, h, l).$$

Размерности по длине балки обозначим через L_x (например, метры), по ширине и высоте – через L_z , L_y (например, миллиметры).

Для угла поворота введем размерность углов поворота Θ , для силы – размерность силы F .

Размерность модуля упругости E в этой необычной системе единиц найдем из следующих соображений. Из экспериментов известно, что кривизна изогнутой оси балки

$$1/\rho = d\varphi/dx$$

прямо пропорциональна изгибающему моменту M_z и обратно пропорциональна жесткости на изгиб EI_z :

$$\frac{d\varphi}{dx} = C \frac{M_z}{EI_z}.$$

Отсюда размерность модуля упругости может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} \dim E &= \frac{\dim M_z}{\dim \frac{d\varphi}{dx} \dim I_z} = \frac{\dim M_z}{\dim \frac{d\varphi}{dx} \dim (bh^3)} = \\ &= \frac{FL_x}{(\Theta/L_x)(L_zL_y^3)} = FL_x^2L_y^{-3}L_z^{-1}\Theta^{-1}. \end{aligned}$$

Сведем все величины и размерности в таблицу.

Физическая величина	Обозначение	Размерность
<i>Входные величины</i>		
Внешняя сила	P	F
Длина балки	l	L_x
Ширина сечения балки	b	L_z
Высота сечения балки	h	L_y
Модуль упругости материала	E	$FL_x^2L_y^{-3}L_z^{-1}\Theta^{-1}$
<i>Выходная величина</i>		
Угол поворота сечения балки на конце	φ	Θ
Итого	$n = 6$	$k = 5$

Этап 2 – вывод числа подобия. В соответствии с Пи-теоремой в задаче должен быть один ($n - k = 6 - 5 = 1$) безразмерный критерий подобия. Будем искать единственный критерий подобия способом глобального критерия в виде

$$\pi = C \cdot \varphi^{z_1} P^{z_2} E^{z_3} b^{z_4} h^{z_5} l^{z_6}. \quad (7.34)$$

Перейдем к размерностям:

$$\begin{aligned} [\pi] &= [C][\varphi]^{z_1}[P]^{z_2}[E]^{z_3}[b]^{z_4}[h]^{z_5}[l]^{z_6}, \\ 1 &= 1 \Theta^{z_1} F^{z_2} \left(FL_x^2 L_y^{-3} L_z^{-1} \Theta^{-1} \right)^{z_3} (L_z)^{z_4} (L_y)^{z_5} (L_x)^{z_6}, \\ 1 &= \Theta^{z_1 - z_3} F^{z_2 + z_3} L_x^{2z_3 + z_6} L_y^{-3z_3 + z_5} L_z^{-z_3 + z_4}. \end{aligned}$$

Уравниваем размерности слева и справа:

$$\begin{aligned} L_x: \quad 0 &= 2z_3 + z_6, & L_y: \quad 0 &= -3z_3 + z_5, & L_z: \quad 0 &= -z_3 + z_4, \\ F: \quad 0 &= z_2 + z_3, & \Theta: \quad 0 &= z_1 - z_3. \end{aligned}$$

Получили СЛАУ из пяти уравнений для шести переменных. Найдем пять неизвестных через шестую неизвестную z_1 :

$$\begin{aligned} \Theta: \quad z_3 &= z_1, & L_x: \quad z_6 &= -2z_3 = -2z_1, & L_y: \quad z_5 &= 3z_3 = 3z_1, \\ L_z: \quad z_4 &= z_3 = z_1, & F: \quad z_2 &= -z_3 = -z_1. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения в (7.34):

$$\begin{aligned} \pi &= C \cdot \varphi^{z_1} P^{z_2} E^{z_3} b^{z_4} h^{z_5} l^{z_6} = C \cdot \varphi^{z_1} P^{-z_1} E^{z_1} b^{z_1} h^{3z_1} l^{-2z_1} = \\ &= C (\varphi P^{-1} E b h^3 l^{-2})^{z_1} = C \left(\frac{\varphi E b h^3}{P l^2} \right)^{z_1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем единственный критерий подобия:

$$\pi_1 = \frac{\varphi E b h^3}{P l^2} = \text{idem} = C_1.$$

Отсюда можем оценить максимальный угол поворота сечения с учетом (7.33):

$$\varphi = C_1 \frac{P l^2}{E (b h^3)} = C_2 \frac{P l^2}{E I_z}. \quad (7.35)$$

Таким образом, введение векторных единиц измерения длины позволяет оценить угол поворота сечения балки методом анализа размерностей.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

7.2.5. ПОДХОД 5 – КЛАСС ВЕКТОРНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ $L_x L_y L_z F \Theta$ ДЛЯ ПРОГИБА

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Теперь определим прогиб балки под силой. В список определяющих параметров включим длину l , размеры b , h поперечного сечения, модуль упругости материала E , внешнюю силу P и прогиб f_P в центре балки. Тогда перечень всех существенных величин задачи будет следующим:

$$f_P = f_P(P, E, b, h, l).$$

Размерности по длине балки обозначим через L_x (например, метры), по ширине L_z и по высоте – через L_y (например, миллиметры), для силы введем единицу силы F . Для того чтобы ввести размерность прогибов w по оси y , необходимо вспомнить из сопротивления материалов соотношения между прогибом w и углом поворота сечения φ :

$$\varphi = dw / dx.$$

Для угла поворота введем единицу углов поворота Θ , тогда для прогиба размерность будет

$$dw = \varphi \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \dim w = \dim \varphi \cdot \dim x = \Theta L_x.$$

Размерность модуля упругости E в этой необычной системе единиц находится точно так же, как и в предыдущем подходе:

$$\begin{aligned} \dim E &= \frac{\dim M_z}{\dim \frac{d\varphi}{dx} \dim I_z} = \frac{\dim M_z}{\dim \frac{d\varphi}{dx} \dim (bh^3)} = \\ &= \frac{FL_x}{(\Theta / L_x)(L_z L_y^3)} = FL_x^2 L_y^{-3} L_z^{-1} \Theta^{-1}. \end{aligned}$$

Сведем все величины и размерности в таблицу.

Физическая величина	Обозначение	Размерность
<i>Входные параметры</i>		
Внешняя сила	P	F
Длина балки	l	L_x
Ширина сечения балки	b	L_z
Высота сечения балки	h	L_y
Модуль упругости материала	E	$FL_x^2 L_y^{-3} L_z^{-1} \Theta^{-1}$
<i>Выходной параметр</i>		
Максимальный прогиб	$w_{\max} = f_p$	ΘL_x
Итого	$n = 6$	$k = 5$

Этап 2 – вывод числа подобия. В соответствии с Пи-теоремой в задаче должен быть один ($p = n - k = 6 - 5 = 1$) безразмерный критерий подобия. Будем искать единственный критерий подобия способом глобального критерия в виде

$$\pi = C \cdot f_p^{z_1} P^{z_2} E^{z_3} b^{z_4} h^{z_5} l^{z_6}. \quad (7.36)$$

Перейдем к размерностям:

$$[\pi] = [C][f_p]^{z_1}[P]^{z_2}[E]^{z_3}[b]^{z_4}[h]^{z_5}[l]^{z_6},$$

$$1 = 1(\Theta L_x)^{z_1} F^{z_2} \left(FL_x^2 L_y^{-3} L_z^{-1} \Theta^{-1} \right)^{z_3} (L_z)^{z_4} (L_y)^{z_5} (L_x)^{z_6},$$

$$1 = \Theta^{z_1 - z_3} F^{z_2 + z_3} L_x^{z_1 + 2z_3 + z_6} L_y^{-3z_3 + z_5} L_z^{-z_3 + z_4}.$$

Уравниваем размерности слева и справа:

$$\begin{aligned} L_x : 0 &= z_1 + 2z_3 + z_6, & L_y : 0 &= -3z_3 + z_5, & L_z : 0 &= -z_3 + z_4; \\ F : 0 &= z_2 + z_3, & \Theta : 0 &= z_1 - z_3, \end{aligned}$$

Получили СЛАУ из пяти уравнений для шести переменных. Найдем пять неизвестных через шестую неизвестную z_1 :

$$\begin{aligned} \Theta : z_3 &= z_1, & L_x : z_6 &= -z_1 - 2z_3 = -3z_1, \\ L_y : z_5 &= 3z_3 = 3z_1, & L_z : z_4 &= z_3 = z_1, & F : z_2 &= -z_3 = -z_1. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения в (7.36):

$$\begin{aligned} \pi &= C \cdot f_p^{z_1} P^{z_2} E^{z_3} b^{z_4} h^{z_5} l^{z_6} = C \cdot f_p^{z_1} P^{-z_1} E^{z_1} b^{z_1} h^{3z_1} l^{-3z_1} = \\ &= C \left(f_p P^{-1} E b h^3 l^{-3} \right)^{z_1} = C \left(\frac{f_p E b h^3}{P l^3} \right)^{z_1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем единственный критерий подобия:

$$\pi_1 = \frac{f_p E b h^3}{P l^3} = \text{idem} = C_1.$$

Отсюда можем оценить максимальный прогиб с учетом момента инерции сечения (7.33):

$$f_p = C_1 \frac{P l^3}{E (b h^3)} = C_2 \frac{P l^3}{E I_z}. \quad (7.37)$$

Получили выражение, которое совпадает с (7.20).

Итоги по подходам 4, 5. Введение векторных единиц измерения длины, а также специальных размерностей силы и угла поворота сече-

ния позволяет оценить максимальный прогиб балки методом анализа размерностей. Этого удалось достигнуть только после учета основных гипотез сопротивления материалов, на которые опирается вывод дифференциального уравнения изгиба балки, хотя само уравнение мы не использовали.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

7.3. УДАР

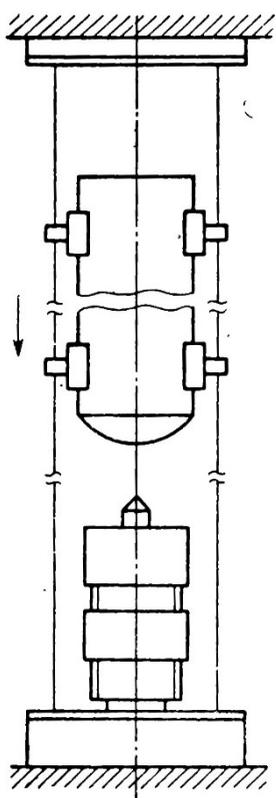


Рис. 7.7. Схема ударного стенда [9]

В монографии [9] рассматриваются инженерные методы исследования ударных процессов. Решение таких задач, связанных с ударом тел, сопряжено с большими математическими трудностями. В связи с этим экспериментальные методы исследования, основанные на моделировании явлений, приобретают особую роль. Одна из рассматриваемых в [9] задач посвящена рассмотрению экспериментального исследования волновых процессов в деформируемом теле относительно малого размера, закрепленном на жестком основании, после удара по нему массивным жестким бойком (рис. 7.7).

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Предполагается, что жесткий боек массой m в момент удара движется со скоростью v_0 . Требуется определить параметры возникающего ударного процесса в деформируемом теле и установить условия, при которых такие процессы будут подобны друг другу.

Для вывода чисел подобия ударных процессов авторы [9] выделяют следующие размерные величины для деформируемого тела: плотность материала ρ , модуль упругости E , характерный геометрический размер D . Вместо давления p на тело бе-

рется величина максимальной местной деформации α_{\max} материала. Поскольку объектом исследования является закон движения тела в процессе удара, в число определяющих параметров включается текущее время t , а также ускорение при свободном падении g . В итоге список размерных величин задачи состоит из восьми параметров:

$$m, v_0, \rho, \alpha_{\max}, g, t, E, D. \quad (7.38)$$

Далее авторы указывают, что в соответствии с Пи-теоремой из восьми параметров, среди которых три имеют независимые размерности, можно составить не более пяти независимых безразмерных комплексов [9, с. 72, формулы 139, 140]:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{v_0 t}{\alpha_{\max}}, & \pi_2 &= \frac{m}{\rho \alpha_{\max}^3}, \\ \pi_3 &= \frac{v_0}{\sqrt{g \alpha_{\max}}}, & \pi_4 &= \frac{D}{\alpha_{\max}}, & \pi_5 &= \frac{\rho v_0^2}{E}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Никакого вывода при этом авторы не приводят, предполагая, что читатель сам может доказать справедливость предлагаемых формул.

Попробуем вывести эти числа подобия. Для этого все размерные величины сведем в таблицу.

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
Масса тела	m	кг	M
Начальной скорости удара	v_0	м/с	LT^{-1}
Плотность материала	ρ	кг/м ³	ML^{-3}
Максимальная местная деформация материала	α_{\max}	м	L
Ускорение при свободном падении	g	м/с ²	LT^{-2}
Текущее время	t	с	T
Модуль упругости материала	E	Н/м ² = (кг · м)/(с ² м ²)	$ML^{-1}T^{-2}$
Геометрический параметр деформируемого тела	D	м	L
Итого	$n = 8$		$k = 3$

Этап 2 – вывод чисел подобия. Для нахождения пяти ($p = n - k = 8 - 3 = 5$) чисел подобия используем способ полного одностороннего комплекса. Будем искать глобальный критерий подобия в виде

$$\pi = Cm^x v_0^y \rho^z \alpha_{\max}^u g^w t^p E^q D^r. \quad (7.40)$$

Перепишем выражение (7.40) в размерностях:

$$1 = [m]^x [v_0]^y [\rho]^z [\alpha_{\max}]^u [g]^w [t]^p [E]^q [D]^r,$$

или

$$M^0 L^0 T^0 = M^x (LT^{-1})^y (ML^{-3})^z L^u (LT^{-2})^w T^p (ML^{-1}T^{-2})^q L^r,$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{x+z+q} L^{y-3z+u+w-q+r} T^{-y-2w+p-2q}.$$

Уравнивая показатели степеней слева и справа, получаем

$$\begin{cases} x + z + q = 0, \\ y - 3z + u + w - q + r = 0, \\ -y - 2w + p - 2q = 0. \end{cases} \quad (7.41)$$

Подход 1. Здесь три уравнения и восемь параметров. Можем определить только три величины через остальные пять. Попробуем разрешить эту систему относительно показателей x, u, p :

$$x = -z - q, \quad u = -y + 3z - w + q - r, \quad p = y + 2w + 2q.$$

Подставляем найденные значения в выражение (7.40):

$$\begin{aligned} \pi &= Cm^{-z-q} v_0^y \rho^z \alpha_{\max}^{-y+3z-w+q-r} g^w t^{y+2w+2q} E^q D^r = \\ &= C \left(v_0^y \alpha_{\max}^{-y} t^y \right) \left(m^{-z} \rho^z \alpha_{\max}^{3z} \right) \left(\alpha_{\max}^{-w} g^w t^{2w} \right) \left(m^{-q} \alpha_{\max}^q t^{2q} E^q \right) \left(\alpha_{\max}^{-r} D^r \right) = \\ &= C \left(v_0 \alpha_{\max}^{-1} t \right)^y \left(m^{-1} \rho \alpha_{\max}^3 \right)^z \left(\alpha_{\max}^{-1} g t^2 \right)^w \left(m^{-1} \alpha_{\max} t^2 E \right)^q \left(\alpha_{\max}^{-1} D \right)^r = \\ &= C \left(\frac{v_0 t}{\alpha_{\max}} \right)^y \left(\frac{\rho \alpha_{\max}^3}{m} \right)^z \left(\frac{g t^2}{\alpha_{\max}} \right)^w \left(\frac{\alpha_{\max} t^2 E}{m} \right)^q \left(\frac{D}{\alpha_{\max}} \right)^r. \end{aligned}$$

В скобках стоят безразмерные комплексы (константы):

$$\pi_{11} = \frac{v_0 t}{\alpha_{\max}}, \quad \pi_{12} = \frac{\rho \alpha_{\max}^3}{m}, \quad \pi_{13} = \frac{g t^2}{\alpha_{\max}},$$

$$\pi_{14} = \frac{\alpha_{\max} t^2 E}{m}, \quad \pi_{15} = \frac{D}{\alpha_{\max}}.$$
(7.42)

С учетом последних обозначений критериальное уравнение принимает вид

$$\pi = C \pi_{11}^y \pi_{12}^z \pi_{13}^w \pi_{14}^q \pi_{15}^r.$$

Сравнивая полученные значения (7.42) с безразмерными комплексами (7.39), видим, что у нас получилось три исходных комплекса:

$$\pi_{11} = \pi_1, \quad \pi_{12} = \frac{1}{\pi_2}, \quad \pi_{15} = \pi_4,$$

а комплексы π_3 и π_5 не совпадают с нашими выражениями.

Подход 2. Попробуем разрешить систему трех уравнений (7.41) относительно показателей y , u , z . Из первого и третьего уравнения найдем z и y :

$$z = -x - q, \quad y = -2w + p - 2q.$$

Из второго уравнения находим u :

$$\begin{aligned} u &= -y + 3z - w + q - r = \\ &= -(-2w + p - 2q) + 3(-x - q) - w + q - r = \\ &= 2w - p + 2q - 3x - 3q - w + q - r = \\ &= -3x + (2w - w) - p + (2q - 3q + q) - r = \\ &= -3x + w - p - r. \end{aligned}$$

Подставляем найденные значения в выражение (7.40):

$$\begin{aligned}
 \pi &= C m^x v_0^{-2w+p-2q} \rho^{-x-q} \alpha_{\max}^{-3x+w-p-r} g^w t^p E^q D^r = \\
 &= C m^x v_0^{-2w+p-2q} \rho^{-x-q} \alpha_{\max}^{-3x+w-p-r} g^w t^p E^q D^r = \\
 &= C \left(m^x \rho^{-x} \alpha_{\max}^{-3x} \right) \left(v_0^{-2w} \alpha_{\max}^w g^w \right) \left(t^p v_0^p \alpha_{\max}^{-p} \right) \left(E^q v_0^{-2q} \rho^{-q} \right) \left(D^r \alpha_{\max}^{-r} \right) = \\
 &= C \left(m \rho^{-1} \alpha_{\max}^{-3} \right)^x \left(v_0^{-2} \alpha_{\max} g \right)^w \left(t v_0 \alpha_{\max}^{-1} \right)^p \left(E v_0^{-2} \rho^{-1} \right)^q \left(D \alpha_{\max}^{-1} \right)^r.
 \end{aligned}$$

В окончательном виде получаем следующее уравнение:

$$\pi = C \left(\frac{m}{\rho \alpha_{\max}^3} \right)^x \left(\frac{\alpha_{\max} g}{v_0^2} \right)^w \left(\frac{t v_0}{\alpha_{\max}} \right)^p \left(\frac{E}{v_0^2 \rho} \right)^q \left(\frac{D}{\alpha_{\max}} \right)^r. \quad (7.43)$$

В скобках стоят безразмерные комплексы (константы):

$$\begin{aligned}
 \pi_{21} &= \frac{m}{\rho \alpha_{\max}^3}, \quad \pi_{22} = \frac{\alpha_{\max} g}{v_0^2}, \quad \pi_{23} = \frac{t v_0}{\alpha_{\max}}, \\
 \pi_{24} &= \frac{E}{v_0^2 \rho}, \quad \pi_{25} = \frac{D}{\alpha_{\max}}.
 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Сравнивая полученные значения (7.44) с безразмерными комплексами (7.39), видим, что все исходные комплексы получены:

$$\pi_{21} = \pi_2, \quad \pi_{22} = \frac{1}{\pi_3^2}, \quad \pi_{23} = \pi_1, \quad \pi_{24} = \frac{1}{\pi_5}, \quad \pi_{25} = \pi_4. \quad (7.45)$$

Если учесть обозначения (7.44) и (7.45), то критериальное уравнение (7.43) примет вид

$$\pi = C (\pi_2)^x \left(\frac{1}{\pi_3^2} \right)^w (\pi_1)^p \left(\frac{1}{\pi_5} \right)^q (\pi_4)^r.$$

Таким образом, числа подобия (7.39) получены.

Выводы по примеру. Вариантов записи пяти чисел подобия существует множество, однако не все они пригодны для практического использования. Для получения удобных безразмерных комплексов необходимо, во-первых, хорошо знать предмет исследования и, во-вторых, иметь знания и навыки использования методов подобия.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

В этом разделе не только рассмотрим примеры для жидкости и газа с позиций анализа размерностей, но и дадим добавления из гидравлики и аэродинамики.

8.1. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Долгое время в гидравлике пользовались многочисленными эмпирическими формулами, предложенными различными авторами. Эти формулы содержали ряд размерных постоянных, значения которых определялись частными условиями опытов и свойствами жидкостей. Соображения анализа размерностей вместе с более четкой и общей постановкой задачи позволили согласовать и объединить многие эмпирические формулы, найденные для движения различных жидкостей при разной температуре в трубах с различными диаметрами и с различными скоростями движения. Изложение материала построим в соответствии с этапами [табл. 4.1](#).

ЭТАП 1 – ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Класс движений мы определим следующими условиями [61]. Трубы цилиндрические с одинаковой формой поперечного сечения, обязательно круглой. Следовательно, труба и ее поперечное сечение полностью определяются заданием характерного линейного размера сечения. Для круглых труб в качестве характерного размера обычно берется диаметр d . Длина труб достаточно велика, поэтому можно не учитывать особенностей движения на концах трубы. Идеализируя явление, мы примем, что трубы имеют бесконечную длину. Кроме того,

считаем, что труба расположена горизонтально. В этом случае нам не нужно учитывать влияние гравитации на течение жидкости.

Относительно движения жидкости мы предположим, что оно установившееся ламинарное, т. е. слоистое, без завихрений. Жидкость движется со средней скоростью V (рис. 8.1). Будем рассматривать жидкость несжимаемую с плотностью ρ и коэффициентом вязкости μ . Нам интересно определить, как меняется давление p по длине трубы.

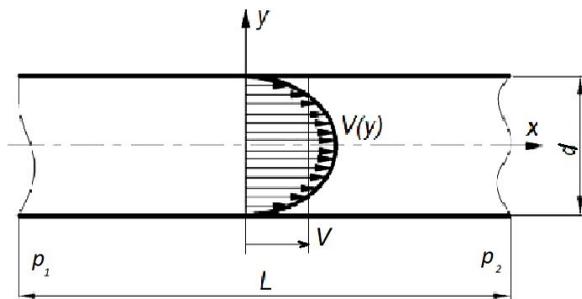


Рис. 8.1. Средняя скорость жидкости

Таким образом, задача характеризуется следующими размерными величинами в классе размерностей LMT :

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные параметры</i>			
Скорость	V	м/с^2	LT^{-1}
Длина трубы	l	м	L
Диаметр трубы	d	м	L
Плотность жидкости	ρ	кг/м^3	ML^{-3}
Динамическая вязкость жидкости	μ	$\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$	$ML^{-1}T^{-1}$
<i>Выходной параметр</i>			
Перепад давления	p	$\text{Н/м}^2 = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
Итого	$n = 6$	$k = 3$	

В этой задаче шесть ($n = 6$) размерных параметров и три ($k = 3$) независимые размерности. Поэтому число безразмерных параметров, характеризующих явление, равно трем ($n - k = 6 - 3 = 3$).

В разделе 3.2.3 мы решали эту задачу способом глобального критерия и нашли, что перепад давления определяется формулой

$$p = \frac{\rho V^2}{2} f(\pi_2, \pi_3), \quad (8.1)$$

где безразмерные числа подобия

$$\pi_2 = \frac{l}{d}, \quad \pi_3 = \frac{\rho V d}{\mu} = \text{Re} \quad (8.2)$$

называются удлинением трубы и числом Рейнольдса. Решим ту же задачу способом подбора.

ЭТАП 2 – ВЫВОД ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ СПОСОБОМ ПОДБОРА

Труба, жидкость и состояние движения жидкости в целом определяются системой четырех параметров [61]

$$\rho, \mu, d, V. \quad (8.3)$$

Все остальные механические характеристики движения являются функциями этих параметров. Из четырех определяющих параметров (8.3) можно образовать только одну независимую безразмерную комбинацию

$$\frac{\rho V d}{\mu} = \text{Re},$$

которая называется числом Рейнольдса. Все безразмерные величины, зависящие от указанных четырех параметров (8.3), являются функциями числа Рейнольдса.

Введем в задачу пятую величину – перепад давления $p = p_1 - p_2$. Падение давления на единицу длины трубы представляется величиной

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{p}{l},$$

где p_1 и p_2 есть давления в сечениях трубы, отстоящих друг от друга на расстоянии l (рис. 8.1). Рассмотрим комплекс $\frac{p}{\rho V^2 / 2}$. Удостоверимся, что он является безразмерной величиной:

$$\frac{[p]}{[\rho][V]^2 / 2} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3+2}T^{-2}} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-1}T^{-2}} = 1.$$

Тогда комплекс

$$\frac{p}{l} \frac{d}{\rho V^2 / 2} = \frac{d}{l} \frac{p}{\rho V^2 / 2} = \lambda \quad (8.4)$$

также является безразмерной величиной и называется коэффициентом сопротивления трубы. Безразмерная функция λ может зависеть только от безразмерных величин, следовательно,

$$\lambda = \lambda(\text{Re}).$$

В результате из критерия подобия (8.4) находим

$$p = \frac{\rho V^2}{2} \frac{l}{d} \lambda(\text{Re}). \quad (8.5)$$

Сравним формулу (8.5) с формулой (8.1), которая была получена ранее другим способом. Если в выражении (8.1), имеющем более общий вид, положить

$$f(\pi_2, \pi_3) = \pi_2 \cdot \lambda(\pi_3) = \frac{l}{d} \lambda(\text{Re}),$$

то оно преобразуется к виду

$$p = \frac{\rho V^2}{2} f(\pi_2, \pi_3) = \frac{\rho V^2}{2} \frac{l}{d} \lambda(\text{Re}),$$

который полностью совпадает с формулой (8.5). Таким образом, ту же формулу вывели другим способом.

ЭТАП 3 – МОДЕЛИРОВАНИЕ. ДОБАВЛЕНИЕ ИЗ ГИДРАВЛИКИ

Задача об определении сопротивления трубы сводится к отысканию функциональной зависимости $\lambda(\text{Re})$. Эту функцию можно найти экспериментальным путем, измеряя сопротивление в зависимости от скорости при движении воды в одной какой-нибудь трубе. Полученные результаты можно использовать при рассмотрении движения других жидкостей и в трубах с другими диаметрами. Так, например, по опытным данным о движении воды можно в ряде случаев решить многие вопросы о движении в трубе нефти, бензина, воздуха и т. п.

На рис. 8.2 и 8.3 показана известная экспериментальная зависимость параметра сопротивления λ от числа Рейнольдса Re в логарифмических координатах для ламинарного ($\lg \text{Re} < 3.0$) и турбулентного ($\lg \text{Re} > 3.4$) течений.

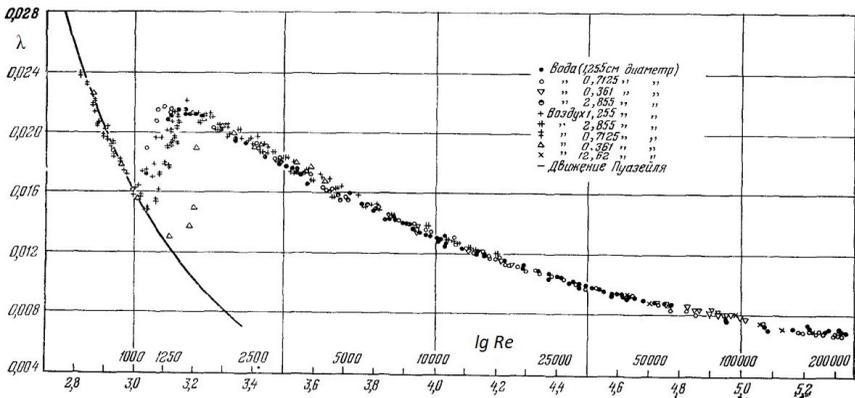


Рис. 8.2. Зависимости коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re [61, рис. 4]

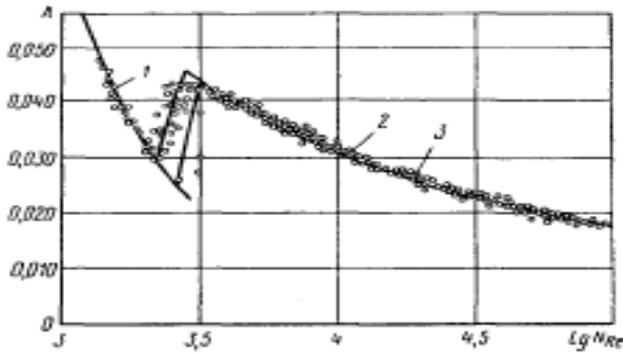


Рис. 8.3. Зависимости коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re [22, рис. 11]

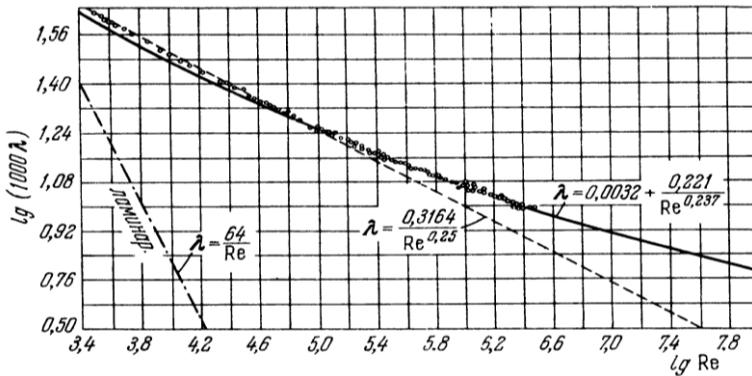


Рис. 8.4. Зависимости коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re [46, рис. 250]

На рис. 8.4 [45, 46] та же зависимость показана более подробно только для турбулентного течения ($\lg Re > 3.4$). На этих рисунках точками показаны экспериментальные результаты, линиями – теоретические аппроксимации зависимости коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re различными авторами.

Из рисунков видно, что движение жидкости в трубе происходит при двух резко различающихся между собой режимах: ламинарном и турбулентном. При ламинарном движении в цилиндрической трубе

частицы жидкости движутся по прямым, параллельным образующим трубы; при турбулентном движении имеется беспорядочное перемешивание жидкости в направлении, перпендикулярном к образующим трубы. Турбулентный поток можно рассматривать как установившееся движение только в среднем.

В ряде случаев ламинарное движение жидкости в трубе обладает слабой устойчивостью или вообще неустойчиво и уступает место турбулентному движению. Свойство устойчивости представляет собой характеристику движения жидкости в целом, поэтому для гладких труб это свойство должно определяться числом Рейнольдса Re . Опыт хорошо подтверждает этот вывод. Для малых значений чисел Рейнольдса ламинарное движение устойчиво, для больших – неустойчиво. Граница устойчивости ламинарного движения характеризуется некоторым значением числа Рейнольдса, которое называется критическим.

Ламинарный режим характерен для движений очень вязкой жидкости с малыми скоростями в трубах с малыми диаметрами (например, в капиллярных трубках). Турбулентный режим характерен для движений жидкости с малой вязкостью, происходящих с большой скоростью в трубах с большими диаметрами.

В частности, при ламинарном течении ($\lg Re < 3.0$) коэффициент сопротивления (см. рис. 8.4) равен

$$\lambda(Re) = \frac{64}{Re}$$

и формула (8.5) дает известный в гидравлике закон Пуазейля

$$p = \frac{\rho V^2}{2} \frac{l}{d} \frac{64}{Re}. \quad (8.6)$$

ВЫВОДЫ ПО ПРИМЕРУ

Несмотря на то что при выводе критериального уравнения мы предполагали только ламинарное течение со средней скоростью V , тем не менее полученная формула (8.5) оказалась приемлемой и для турбулентного течения.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8.2. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ

При гидравлических экспериментах количество протекающей воды часто измеряют с помощью водослива. Обыкновенно отверстие водослива имеет прямоугольную форму (рис. 8.5). В этом случае ширина струи b постоянна, а ее толщина c и напор h над ребром водослива изменяются с изменением количества протекающей воды. В такой ситуации не соблюдается геометрическое подобие струй.

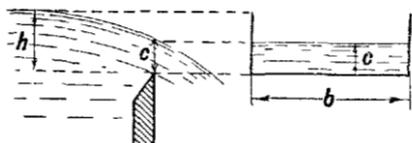


Рис. 8.5. Прямоугольный водослив [28, рис. 99]

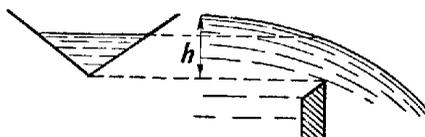


Рис. 8.6. Треугольный водослив [28, рис. 100]

Задача 1. Если вместо прямоугольного сделать отверстие треугольным с прямым углом $\alpha = 90^\circ$ в нижней точке (рис. 8.6), то для разных напоров h сечения струй будут давать подобные прямоугольные треугольники, и такое движение будет удовлетворять геометрическому подобию. В этом случае можно провести эксперимент в лаборатории по схеме, показанной на рис. 8.7, а затем обобщить результат на большие емкости.

Этап 1 – постановка задачи, группировка параметров. При струйном движении жидкости основное значение имеет вес Q жидкости, вытекающей через отверстие водослива в единицу времени, который может быть функцией только плотности ρ , ускорения силы тяжести g и напора h :

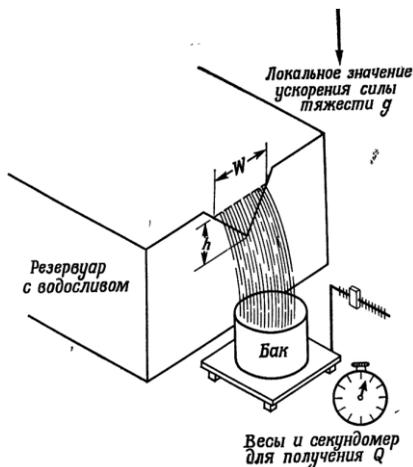


Рис. 8.7. Схема проведения эксперимента [71, рис. 4.6]

$$Q = f(\rho, g, h).$$

Этап 2 – вывод чисел подобия. Найдем вид этой функции способом рассуждений [61].

Размерность Q принята Н/с. Комбинация

$$\rho g h^3 \sqrt{\frac{g}{h}} = \rho g h^3 g^{1/2} h^{-1/2} = \rho g^{3/2} h^{5/2}$$

также имеет размерность Н/с:

$$\begin{aligned} [\rho][g]^{3/2}[h]^{5/2} &= (\text{кг/м}^3)(\text{м/с}^2)^{3/2}(\text{м})^{5/2} = \\ &= \text{кг}(\text{м})^{-3+3/2+5/2}(\text{с})^{-2\cdot 3/2} = \text{кг}(\text{м})^{-3+4}(\text{с})^{-3} = \text{кг} \cdot \text{м/с}^3 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \frac{1}{\text{с}} = \frac{\text{Н}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Поэтому отношение

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = \pi_1$$

будет безразмерной величиной, или числом подобия. Это отношение является функцией величин ρ , g , h , из которых нельзя образовать безразмерную комбинацию, поэтому можно написать

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = \pi_1 = C \Rightarrow Q = C \cdot \rho g^{3/2} h^{5/2}. \quad (8.7)$$

Здесь C есть абсолютная постоянная, которую проще всего определить из опыта. Полученная формула полностью определяет зависимость количества протекающей жидкости от напора h и от плотности ρ .

Задача 2. Совокупность рассматриваемых движений можно расширить, допуская водосливы с различными углами α . В этом случае система определяющих параметров дополняется безразмерным углом α , который определит второе число подобия:

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = \pi_1 \quad \alpha = \pi_2.$$

Из критериального уравнения

$$\pi_1 = f(\pi_2) = f(\alpha)$$

находим новую формулу, аналогичную (8.7):

$$Q = \pi_1 \cdot \rho g^{3/2} h^{5/2} = f(\alpha) \rho g^{3/2} h^{5/2}, \quad (8.8)$$

т. е. коэффициент $C = f(\alpha)$ будет зависеть от угла α .

На основе опытов, произведенных с водой, можно дать исчерпывающие ответы о явлении вытекания нефти, ртути и т. д.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

8.3. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ГАЗОМ ИЛИ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

8.3.1. ВЫВОД КРИТЕРИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Рассмотрим моделирование движения тела с различной скоростью в сплошной среде, например, подводной лодки в невесомой жидкости или самолета в воздухе (рис. 8.8 и 8.9). Тело-модель должно быть геометрически подобно телу-натуре; направление скорости по отношению к соответствующим осям тела в модельном и натурном движении должно быть одинаковым (условие кинематического подобия). Это приводит к равенству соответствующих геометрических и кинематических параметров подобия для модельного и натурального явления.

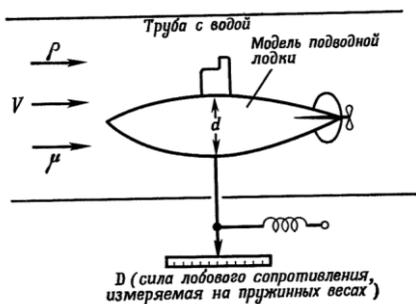


Рис. 8.8. Схема эксперимента с подводной лодкой [72, рис. 4.1]

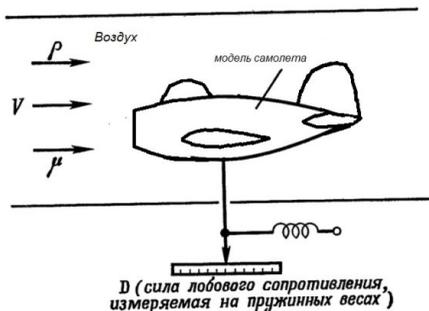


Рис. 8.9. Схема эксперимента с самолетом

Требуется определить силу лобового сопротивления. Такая задача содержит пять размерных величин, имеющих следующие размерности в классе размерностей LMT :

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные величины</i>			
Диаметр поперечного сечения тела (сечения Миделя)	d	м	L
Скорость движения тела	V	м/с	LT^{-1}
Плотность газа или жидкости	ρ	кг/м ³	ML^{-3}
Коэффициент динамической вязкости газа или жидкости	μ	кг/(м · с)	$ML^{-1}T^{-1}$
<i>Выходная величина</i>			
Сила сопротивления	F	Н = кг · м/с ²	MLT^{-2}
Итого	$n = 5$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод чисел подобия. Как следует из Пи-теоремы подобия, помимо геометрических и кинематических параметров подобия здесь имеется два ($n - k = 5 - 3 = 2$) безразмерных динамических числа подобия. Определим их способом подбора [66].

Первое число подобия сконструируем через коэффициент динамической вязкости газа μ , плотность ρ , скорость V и диаметр поперечного сечения d :

$$\pi_1 = \frac{\rho V d}{\mu} = \text{Re}. \quad (8.9)$$

Убедимся, что оно безразмерное:

$$[\pi_1] = \frac{[\rho][V][d]}{[\mu]} = \frac{(ML^{-3})(LT^{-1})L}{ML^{-1}T^{-1}} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-1}T^{-1}} = 1.$$

Получили число подобия Рейнольдса. Оно является критерием подобия, так как определяется через входные параметры задачи.

Второе число подобия сконструируем из силы лобового сопротивления F через плотность ρ , скорость V и площадь поперечного сечения S , которая пропорциональна d^2 :

$$\pi_2 = C = \frac{F}{\rho V^2 d^2} = \frac{F}{\rho V^2 S}. \quad (8.10)$$

Убедимся, что оно безразмерное:

$$[\pi_2] = \frac{[F]}{[\rho][V]^2[S]} = \frac{MLT^{-2}}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2 L^2} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-2}} = 1.$$

Это число, по терминологии Л.Г. Лойцянского [45–47], критерием называть нельзя, так как оно является выходным параметром задачи, который измеряется в эксперименте. Тогда безразмерный параметр C (коэффициент лобового сопротивления, или безразмерная сила) может быть функцией только безразмерных критериев подобия задачи, которых всего один – число Рейнольдса:

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \Phi(\pi_1) \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Phi(\text{Re}).$$

Из выражения (8.10) можно найти силу:

$$F = C(\rho V^2 S) = \frac{1}{2} \Phi(\text{Re}) (\rho V^2 S) = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot \Phi(\text{Re}),$$

$$F = C \frac{\rho V^2}{2} S. \quad (8.11)$$

Здесь величина $\rho V^2 / 2$ называется скоростным напором. Безразмерная функция $\Phi(\text{Re})$ является безразмерным коэффициентом, который можно определить:

- либо экспериментально,
- либо теоретически, решая, как правило, численно соответствующую газодинамическую задачу об обтекании тела вязким несжимаемым газом.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8.3.2. АЛГОРИТМ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Этап 3 – количественный прогноз через моделирование (эксперимент). Для описания поведения подводной лодки или самолета нет необходимости вычерчивать графики зависимости силы лобового сопротивления F от каждого из параметров V , d , ρ , μ в отдельности (рис. 8.10), а достаточно построить лишь одну кривую зависимости C от Re (рис. 8.11). В этом случае потребуется проводить меньше экспериментов.

При проведении экспериментов найти функцию от одной переменной $C = \Phi(Re)$ существенно легче, чем функцию от четырех переменных $F = F(\rho, V, d, \mu)$. Алгоритм действий при моделировании для построения зависимости $C = \Phi(Re)$ будет следующим:

- 1) задаем скорость V и измеряем силу сопротивления F ;
- 2) через скорость вычисляем число Рейнольдса Re :

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu};$$

3) через измеренную силу F и известную скорость V вычисляем коэффициент сопротивления C :

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S};$$

- 4) наносим точку на график $C(Re)$.

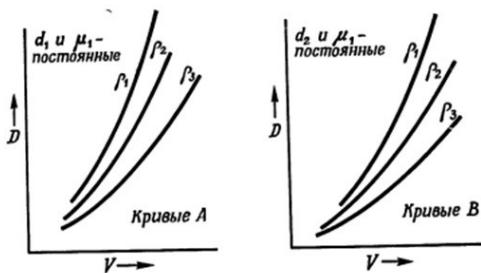


Рис. 8.10. Графики в исходных параметрах [72, рис. 4.2]

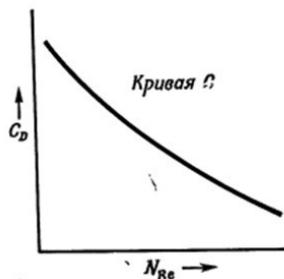


Рис. 8.11. Один график в безразмерных параметрах [72, рис. 4.2]

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8.3.3. ДОБАВЛЕНИЕ ИЗ АЭРОДИНАМИКИ

В аэродинамике формулу (8.11) для силы сопротивления записывают через коэффициент c_x :

$$F = c_x \frac{\rho V^2}{2} S .$$

Здесь коэффициент $c_x = \Phi(\text{Re})$ называется коэффициентом лобового сопротивления и зависит от числа Рейнольдса. На рис. 8.12 и 8.13 представлены зависимости коэффициента лобового сопротивления c_x от числа Рейнольдса для шара и цилиндра. Аналогичные зависимости для шара приводятся в работах [11, рис. 7б; 63, рис. 5.2; 66, рис. 1].

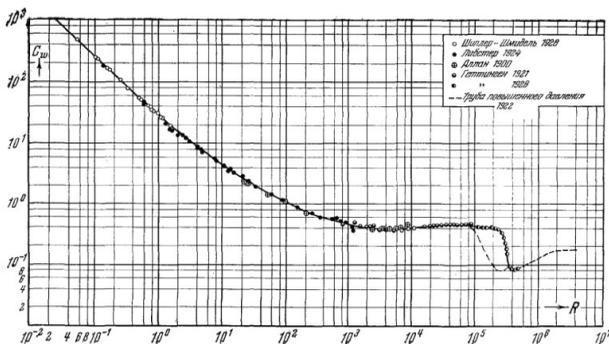


Рис. 8.12. Коэффициент лобового сопротивления $c_x = c_w$ для шара [61, рис. 7]. Экспериментальные точки получены для различных жидкостей и воздуха

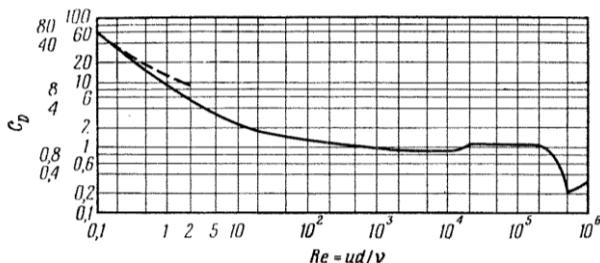


Рис. 8.13. Коэффициент лобового сопротивления $c_x = c_D$ для цилиндра [11, рис. 7а]

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8.4. ДВИЖЕНИЕ КОРАБЛЯ С УЧЕТОМ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

Этап 1 – постановка задачи, группировка параметров. Рассмотрим установившееся прямолинейное поступательное движение судна по поверхности либо вблизи поверхности покоящейся глубокой жидкости. При движении корабля сопротивление зависит от вязкости жидкости и от волнообразования на поверхности жидкости за счет ее раздвигания корпусом корабля (рис. 8.14).

8.4.1. ЧАСТИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗ УЧЕТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

Из экспериментов установлено, что сопротивление за счет вязкости уменьшается с увеличением числа Рейнольдса (см. рис. 8.12 и 8.13) и составляет при достаточно быстром движении корабля хорошо обтекаемой формы (с отрывом потока в корме) малую долю от волнового сопротивления [66]. Поэтому принимают, что сила сопротивления возникает в основном от волнообразования:

$$F_{\text{сопр}} = F_{\text{вяз}} + F_{\text{волн}} = F_{\text{волн}}.$$

Такое приближенное разделение сопротивления на две составляющие: одну, определяемую свойством вязкости, и другую (волновую), определяемую свойством весоности жидкости, – подтверждается как теоретическими, так и экспериментальными исследованиями.

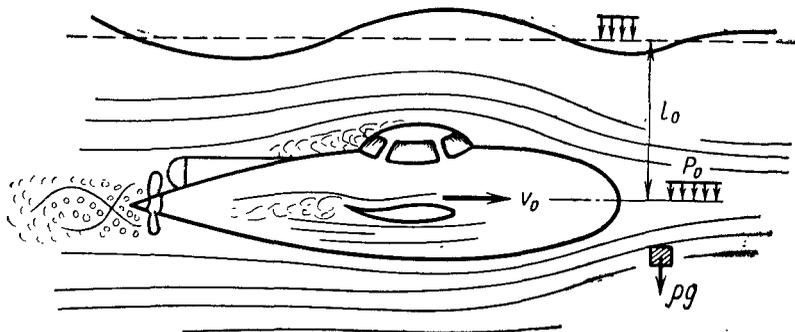


Рис. 8.14. Движение корабля с учетом волнообразования [26, рис. 24.1]

Задача определения силы волнового сопротивления как модели, так и натуре будет зависеть от следующих параметров:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные величины</i>			
Длина корабля	l	м	L
Объемное водоизмещение	D	м^3	L^3
Плотность жидкости	ρ	$\text{кг}/\text{м}^3$	ML^{-3}
Ускорение свободного падения	g	$\text{м}/\text{с}^2$	LT^{-2}
Скорость движения корабля	V	$\text{м}/\text{с}$	LT^{-1}
<i>Выходная величина</i>			
Сила сопротивления	F	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$	MLT^{-2}
Итого	$n = 6$	$k = 3$	

Этап 2 – вывод чисел подобия. Из Пи-теоремы следует, что динамически подобные движения при соблюдении геометрического и кинематического подобия модели и натуре будут определяться тремя размерными и тремя ($n - k = 6 - 3 = 3$) безразмерными величинами.

Первые два безразмерных параметра подобия выберем в следующем виде:

$$\pi_1 = \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gl}}, \quad \pi_2 = \Psi = \frac{l}{\sqrt[3]{D}}, \quad (8.12)$$

$$[\pi_1] = \frac{LT^{-1}}{\sqrt{(LT^{-2})L}} = \frac{LT^{-1}}{LT^{-1}} = 1, \quad [\pi_2] = \frac{L}{\sqrt[3]{L^3}} = \frac{L}{L} = 1.$$

Число подобия $\pi_1 = \text{Fr}$ называется числом Фруда, число подобия $\pi_2 = \Psi$ называется коэффициентом остроты.

Третье число подобия сконструируем из силы сопротивления. Для этого поделим ее на силу веса жидкости:

$$\pi_3 = \frac{F}{\rho g l^3},$$

$$[\pi_3] = \frac{[F]}{[\rho][g][l]^3} = \frac{MLT^{-2}}{(ML^{-3})(LT^{-2})L^3} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-2}} = 1.$$

Из условия безразмерности числа подобия находим выражение для силы сопротивления:

$$\pi_3 = \frac{F}{\rho g l^3} = C \Rightarrow F = C \cdot \rho g l^3.$$

Безразмерный параметр C может быть функцией только двух предыдущих безразмерных параметров

$$C = \Phi(\text{Fr}, \Psi).$$

Отсюда получаем формулу для силы волнового сопротивления

$$F = \rho g l^3 \cdot \Phi(\text{Fr}, \Psi). \quad (8.13)$$

Этап 3 – моделирование. При моделировании без учета вязкости критериями подобия служат первые два безразмерных числа – π_1 и π_2 :

$$\pi_1 = \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gl}} = \text{idem}, \quad \pi_2 = \Psi = \frac{l}{\sqrt[3]{D}} = \text{idem}.$$

Третье число π_3 , по терминологии Л.Г. Лойцянского [45–47], критерием подобия не является, так как относится не к входным параметрам, а к выходным, т. е. этот параметр мы не задаем, а измеряем. По физическому смыслу число π_3 является безразмерной силой сопротивления.

При моделировании условие одинаковости коэффициента остроты Ψ для геометрически подобных судов выполняется без труда. Соотношение для числа Фруда Fr (8.12) показывает, что для обеспечения динамического подобия отношение скоростей модели и натуре

должно быть пропорционально квадратному корню из отношения длин модели и натуры:

$$\frac{V^M}{\sqrt{gl^M}} = \frac{V^H}{\sqrt{gl^H}}, \quad \frac{V^M}{V^H} = \frac{\sqrt{gl^M}}{\sqrt{gl^H}} = \frac{\sqrt{l^M}}{\sqrt{l^H}}, \quad \frac{V^M}{V^H} = \sqrt{\frac{l^M}{l^H}},$$

что также можно выполнить. Значит, моделирование возможно.

Теперь найдем правило пересчета силы сопротивления, определенной в опыте на модели, на натуру в той же жидкости. Из соотношения (8.13) следует

$$\frac{F^M}{F^H} = 1 \cdot 1 \left(\frac{l^M}{l^H} \right)^3 = \left(\frac{l^M}{l^H} \right)^3, \quad \frac{F^M}{F^H} = \left(\frac{l^M}{l^H} \right)^3.$$

Получили, что сила сопротивления пропорциональна кубу масштаба моделирования. Отсюда видно, что сила сопротивления для натуры будет во много раз больше силы, измеренной на модели:

$$\frac{F^H}{F^M} = \left(\frac{l^H}{l^M} \right)^3, \quad F^H = \left(\frac{l^H}{l^M} \right)^3 F^M.$$

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8.4.2. ПОЛНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

Этап 1 – постановка задачи, группировка параметров. В случае учета вязкости жидкости сила сопротивления определяется через два слагаемых:

$$F_{\text{сопр}} = F_{\text{вяз}} + F_{\text{волн}}$$

и к предыдущим параметрам добавляется коэффициент вязкости:

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности	
<i>Входные величины</i>			
Длина корабля	l	м	L
Объемное водоизмещение	D	$м^3$	L^3
Плотность жидкости	ρ	$кг/м^3$	ML^{-3}
Ускорение свободного падения	g	$м/с^2$	LT^{-2}
Скорость движения корабля	V	м/с	LT^{-1}
Коэффициент динамической вязкости	μ	кг/(м · с)	$ML^{-1}T^{-1}$
<i>Выходная величина</i>			
Сила сопротивления	F	$H = кг \cdot м/с^2$	MLT^{-2}
Итого	$n = 7$	$k = 3$	

В итоге количество безразмерных чисел подобия в соответствии с Пи-теоремой должно равняться четырем ($n - k = 7 - 3 = 4$).

Этап 2 – вывод чисел подобия. Вдобавок к предыдущим трем числам подобия четвертый безразмерный комплекс сконструируем из коэффициента динамической вязкости μ :

$$\pi_4 = \frac{\rho V l}{\mu} = Re, \quad (8.14)$$

$$[\pi_4] = \frac{[\rho][V][l]}{[\mu]} = \frac{(ML^{-3})(LT^{-1})L}{ML^{-1}T^{-1}} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-1}T^{-1}} = 1.$$

Это число подобия носит имя Рейнольдса и является критерием подобия, так как относится к входным параметрам задачи.

В результате имеем три критерия подобия π_1 , π_2 , π_4 и одно число подобия π_3 :

$$\pi_1 = Fr = \frac{V}{\sqrt{gl}}, \quad \pi_2 = \Psi = \frac{L}{\sqrt[3]{D}}, \quad \pi_4 = Re = \frac{\rho V l}{\mu}, \quad \pi_3 = \frac{F}{\rho g l^3}.$$

Из условия безразмерности числа подобия π_3 находим выражение для силы сопротивления:

$$\pi_3 = \frac{F}{\rho g l^3} = C \Rightarrow F = C \cdot \rho g l^3 .$$

Безразмерный параметр C может быть функцией только трех предыдущих безразмерных параметров

$$C = \Phi(\text{Fr}, \Psi, \text{Re}).$$

Отсюда получаем формулу для силы волнового сопротивления

$$F = \rho g l^3 \cdot \Phi(\text{Fr}, \Psi, \text{Re}). \quad (8.15)$$

Этап 3 – моделирование. Оказывается, что полное моделирование в одной и той же жидкости с одновременным учетом двух критериев подобия: и числа Фруда, и числа Рейнольдса – невозможно. Докажем это.

Из равенства чисел Рейнольдса для натуре и модели в той же жидкости вытекает

$$Vl = \text{const} .$$

Для тех же условий для числа Фруда вытекает

$$\frac{V}{\sqrt{l}} = \text{const}, \quad \frac{V^2}{l} = \text{const} .$$

Возникает противоречие:

- при уменьшении размеров модели критерий Рейнольдса требует повышения ее скорости относительно скорости натуре;
- критерий Фруда требует понижения скорости модели.

Значит, моделирование невозможно. Поэтому прибегают к частичному моделированию, что требует глубокого проникновения в природу изучаемого явления.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

8.4.3. УДЕШЕВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Со времен Фруда моделирование движения судов проводилось в гидроканалах, или опытовых бассейнах. Современный опытовый бассейн представляет собой канал длиной до 1000 м, шириной до 18 м и глубиной до 12 м, перекрытый крышей. Вдоль канала уложены рельсы, по которым движется самоходная буксировочная тележка (рис. 8.15).

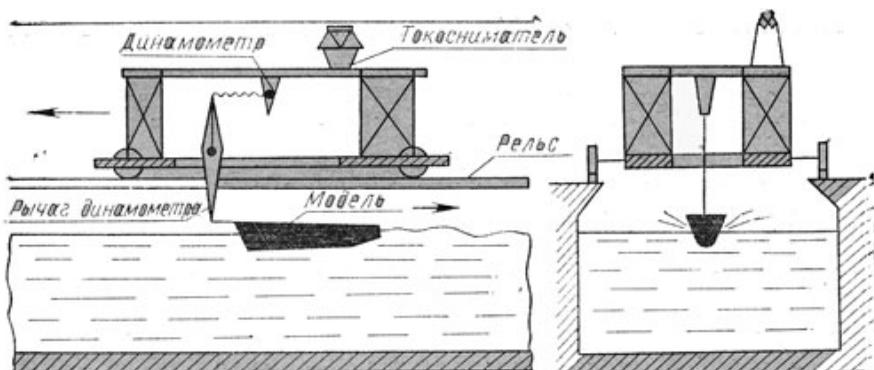


Рис. 8.15. Схема измерений с буксировочной тележкой

В необитаемой тележке размещены электродвигатель и измерительная аппаратура, в обитаемой — еще и исследователи. В средней части пола тележки сделан вырез, над которым установлен динамометр с рычагом, спускающимся к воде. К концу рычага крепится буксирный тросик, соединенный с моделью. Когда тележка, а за ней и модель движутся вдоль канала, динамометр показывает горизонтальную силу, с которой модель тянет рычаг назад. Это и есть полное сопротивление, которое встречает модель при буксировке.

Рельсовый путь, по которому перемещается тележка, должен не иметь стыков для уменьшения вибрации и быть выставлен на постоянном уровне над поверхностью воды. В противном случае на динамометр, измеряющий силу сопротивления воды движению объекта, будет действовать дополнительная составляющая от силы тяжести подвески. Силовой привод, обеспечивающий движение тележки, должен обеспечивать высокое качество стабилизации скорости. В противном случае на динамометр, измеряющий силу сопротивления воды движению объекта, будет действовать сила инерции.

Из-за высокой стоимости строительства и обслуживания гидроканалов такие эксперименты очень дороги. С появлением современной видеотехники появилась возможность удешевить такие испытания, применив новую схему, показанную на рис. 8.16 [62].

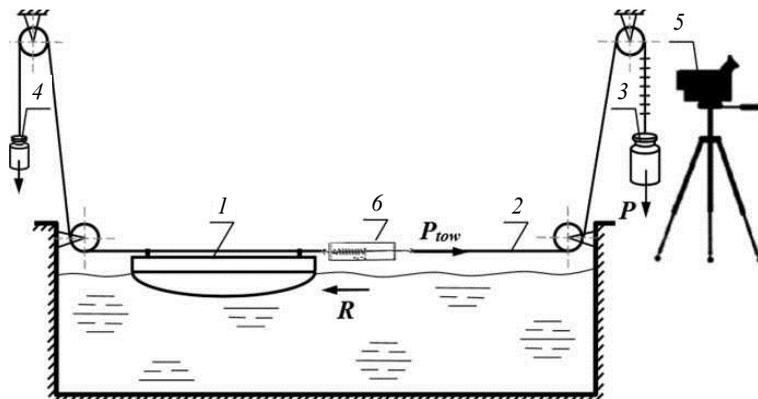


Рис. 8.16. Схема малой гравитационной буксировочной системы [62, рис. 9]

Буксировочное усилие, приводящее модель 1 в движение, обеспечивается падением буксировочного груза 3 . Для возвращения модели 1 в исходное положение и предотвращения соприкосновения буксировочной нити 2 с поверхностью воды применяется оттяжка с противовесом 4 . Скорость движения модели определяется с помощью видеокамеры 5 , закрепленной на штативе. Для этого на буксировочную нить наносится разметка в виде маркерных рисок. Фиксируя движение рисок буксировочной нити относительно контрольной линии, получаем зависимость скорости от пройденного пути, которую при известной частоте кадров несложно перевести в зависимость скорости от времени.

Буксировочное усилие на модели измеряется динамометром 6 , показания которого во время проведения буксировок моделей снимаются второй видеокамерой (на рисунке не показана). Наличие динамометра снимает проблему определения собственных потерь системы.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

9. ПРИМЕРЫ ПОДОБИЯ РАЗНЫЕ

9.1. ОПОЗДАНИЕ СТУДЕНТА

Рассмотрим забавный пример – определим время опоздания студента на первую пару [55].

Этап 1 – постановка задачи и группировка параметров. Предположим, что время опоздания студента O (размерность – с, или T) зависит от следующих факторов:

S – продолжительности сна (размерность – с, или T), равной разности между временем подъема и временем отхода ко сну;

Q – количества, точнее массы, съеденного вечером калорийного ужина (размерность – кг, или M);

P – атмосферного давления (размерность – $\text{Н/м}^2 = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)/\text{м}^2 = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)$, или $M/(LT^2)$), определяющего сонливость при низком давлении;

t_{in} и t_{out} – температуры внутри помещения и на улице (размерность – град., или θ);

V – средней скорости транспорта (размерность – м/с, или L/T).

Требуется определить зависимость

$$O = F(S, Q, P, t_{\text{in}}, t_{\text{out}}, V).$$

Этап 2 – вывод чисел подобия. Здесь $n = 7$ физических величин имеют $k = 4$ независимые размерности L , M , T , Θ . Значит, по Пи-теореме здесь будет $p = n - k = 7 - 4 = 3$ числа подобия:

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3.$$

Проверим это.

Представим искомую зависимость по способу Рэлея в виде степенного комплекса

$$O = C \cdot S^a Q^b P^c t_{in}^d t_{out}^e V^f. \quad (9.1)$$

Подставим вместо переменных их размерности:

$$[O] = [C][S]^a [Q]^b [P]^c [t_{in}]^d [t_{out}]^e [V]^f,$$

$$T^1 = 1 T^a M^b (M / LT^2)^c \theta^d \theta^e (L / T)^f,$$

$$T^1 M^0 L^0 \theta^0 = T^{a-2c-f} M^{b+c} L^{-c+f} \theta^{d+e}.$$

Напишем уравнения для каждой размерной величины:

$$T: 1 = a - 2c - f,$$

$$M: 0 = b + c,$$

$$L: 0 = -c + f,$$

$$\theta: 0 = d + e.$$

Преобразуем равенства:

$$d = -e, \quad c = f, \quad b = -c = -f, \quad a = 1 + 2c + f = 1 + 3f.$$

Подставим найденные значения в основное уравнение (9.1):

$$O = C \cdot S^{(1+3f)} Q^{-f} P^f t_{in}^d t_{out}^{-d} V^f = C \cdot S^1 S^{3f} Q^{-f} P^f V^f (t_{in} / t_{out})^d,$$

или

$$O = C \cdot S \left(\frac{S^3 P V}{Q} \right)^f \left(\frac{t_{in}}{t_{out}} \right)^d.$$

Изучим полученное уравнение с точки зрения физического смысла. Поскольку время опоздания студента должно быть тем больше, чем меньше скорость движения транспорта V , степень f должна иметь

знак минус. Знак степени d соответствует физическому смыслу. Окончательно:

$$O = C \cdot S \left(\frac{S^3 PV}{Q} \right)^{-f} \left(\frac{t_{\text{in}}}{t_{\text{out}}} \right)^d = C \cdot S \left(\frac{Q}{S^3 PV} \right)^f \left(\frac{t_{\text{in}}}{t_{\text{out}}} \right)^d. \quad (9.2)$$

Приведем это уравнение к критериальному виду

$$\left(\frac{O}{S} \right) = C \left(\frac{Q}{S^3 PV} \right)^f \left(\frac{t_{\text{in}}}{t_{\text{out}}} \right)^d \rightarrow \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3),$$

где

$$\pi_1 = \frac{O}{S}, \quad \pi_2 = \frac{Q}{S^3 PV}, \quad \pi_3 = \frac{t_{\text{in}}}{t_{\text{out}}}.$$

Здесь в скобках стоят безразмерные числа подобия:

$$[\pi_1] = \frac{[O]}{[S]} = \frac{T}{T} = 1,$$

$$[\pi_2] = \frac{[Q]}{[S]^3 [P] [V]} = \frac{M}{T^3 (M / LT^2) (L / T)} = \frac{M}{T^{3-2-1} M L^{-1+1}} = \frac{M}{M} = 1,$$

$$[\pi_3] = \frac{[t_{\text{in}}]}{[t_{\text{out}}]} = \frac{\theta}{\theta} = 1.$$

Этап 3 – *качественный прогноз через сравнительный анализ.* Из выражения (9.2) следует, что время опоздания студента на первую пару пропорционально количеству съеденного калорийного ужина Q (чем больше это количество, тем крепче сон); обратно пропорционально продолжительности сна S (чем позднее лег, тем меньше продолжительность сна, тем больше вероятность проспать и опоздать на первую пару); обратно пропорционально атмосферному давлению P (чем ниже давление, тем крепче сон); обратно пропорционально средней скорости движения общественного транспорта V (чем меньше скорость из-за пробок, тем больше время опоздания) и прямо пропорционально

симплексу температур (чем больше отношение (t_{in} / t_{out}) , тем холоднее на улице и тем тяжелее выходить из теплого помещения на холод).

Итог. Из этого примера видно, что анализ размерностей может помочь составить формулу даже в том случае, когда математических уравнений или мы не знаем, или их не существует.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

9.2. КРУПНЫЕ ПЕРЕВОЗКИ ДЕШЕВЛЕ

9.2.1. ПЕРЕВОЗКИ СУДАМИ

1. Формула полного сопротивления движению судна

В современном судостроении наблюдается стремление к постройке больших судов. Покажем методом подобия, что перевозки грузов большими судами обходятся дешевле [61].

Определение силы сопротивления движению кораблей с помощью испытания моделей основано на практической возможности разделения сопротивления на две составляющие: одну, определяемую свойством вязкости, и другую, определяемую свойством весомости. Оказывается, что сила полного сопротивления F приближенно может быть представлена следующей формулой:

$$F = F_f + F_w,$$

$$F_f = c_f(\text{Re}) \frac{\rho V^2}{2} S, \quad (9.3)$$

$$F_w = c_w(\Psi, \text{Fr}) \rho g D.$$

Здесь ρ – плотность жидкости; V – скорость судна; S – площадь смачиваемой поверхности днища; D – объемное водоизмещение.

Сила сопротивления F_f [сравни с формулой (8.11)] называется сопротивлением трения. Значение коэффициента трения c_f определяется числом Рейнольдса Re . Этот коэффициент зависит также от шероховатости поверхности корабля и в некоторой мере от формы обводов корпуса корабля, но в данном рассуждении мы это учитывать не будем.

Сила сопротивления F_w [сравни с формулой (8.13)] называется остаточным, или волновым, сопротивлением, возникающим за счет волнообразования на поверхности жидкости. Коэффициент

$$c_w = \frac{F_w}{\rho g D}$$

имеет смысл силы сопротивления на тонну водоизмещения. Этот коэффициент определяется экспериментально, путем испытания геометрически подобных моделей с соблюдением закона подобия по числу Фруда π_1 и коэффициенту остроты π_2 :

$$\begin{aligned} \pi_1 = Fr = \frac{V}{\sqrt{gl}} = \text{idem} &\Rightarrow \frac{V_1}{\sqrt{gl_1}} = \frac{V_2}{\sqrt{gl_2}}, \\ \pi_2 = \Psi = \frac{l}{\sqrt[3]{D}} = \text{idem} &\Rightarrow \frac{l_1}{\sqrt[3]{D_1}} = \frac{l_2}{\sqrt[3]{D_2}}. \end{aligned}$$

Формуле (9.3) можно придать несколько иной вид:

$$\begin{aligned} F = F_f + F_w = c_f(\text{Re}) \frac{\rho V^2}{2} S + c_w(\Psi, Fr) \rho g D = \\ = \left(c_f(\text{Re}) + c_w(\Psi, Fr) \frac{\rho g D}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \right) \frac{\rho V^2}{2} S. \end{aligned}$$

В окончательном виде сила полного сопротивления

$$F = (c_f(\text{Re}) + c'_w(\Psi, Fr)) \frac{\rho V^2}{2} S, \quad (9.4)$$

где

$$c'_w = c_w \frac{\rho g D}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = c_w \frac{2gD}{V^2 S}.$$

Выразим скорость из числа Фруда:

$$\text{Fr}^2 = \frac{V^2}{gl} \Rightarrow V^2 = gl \text{Fr}^2$$

и подставим в знаменатель дроби:

$$c'_w = 2c_w \frac{gD}{(gl \text{Fr}^2)S} = 2c_w \frac{D}{(l \text{Fr}^2)S} = 2c_w \frac{D}{lS} \frac{1}{\text{Fr}^2}.$$

Отсюда видно, что коэффициент c'_w зависит от числа Фруда.

2. Сравнительный анализ

Во-первых, перед сравнением двух судов следует обеспечить их **геометрическое подобие**. Рассмотрим два геометрически подобных судна с водоизмещениями, пропорциональными кубу линейных размеров:

$$\frac{D_1}{l_1^3} = \frac{D_2}{l_2^3} \Rightarrow \frac{D_2}{D_1} = \frac{l_2^3}{l_1^3} = l_C^3, \quad (9.5)$$

что равносильно естественному допущению о подобии подводных частей. Очевидно, что смоченная площадь S пропорциональна квадрату линейных размеров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{l_2^2}{l_1^2} = l_C^2. \quad (9.6)$$

Во-вторых, рассмотрим **подобие сил сопротивления** движению (9.4). Пусть l_1 и l_2 суть характерные соответствующие длины, причем $l_2 > l_1$. Тогда $l_C = l_2 / l_1$ будет больше единицы. Так как характерный размер l входит в формулу для числа Рейнольдса в числитель, а в формулу числа Фруда в знаменатель

$$\text{Re} = \frac{\rho V l}{\mu}, \quad \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gl}},$$

то получается, что при одной и той же скорости движения с увеличением размера судна число Рейнольдса растет, а число Фруда уменьшается:

$$V_2 = V_1, \quad l_2 > l_1 \Rightarrow Re_2 > Re_1 \quad Fr_2 < Fr_1.$$

Из опытов известно, что коэффициент трения c_f с увеличением числа Рейнольдса убывает (см. рис. 9.1 для шара и аналогичные рис. 8.12 и 8.13) и коэффициент остаточного сопротивления c'_w с уменьшением числа Фруда также убывает, по крайней мере, в диапазоне небольших значений числа Фруда $Fr < 0.5$, характерных для практики (рис. 9.2).

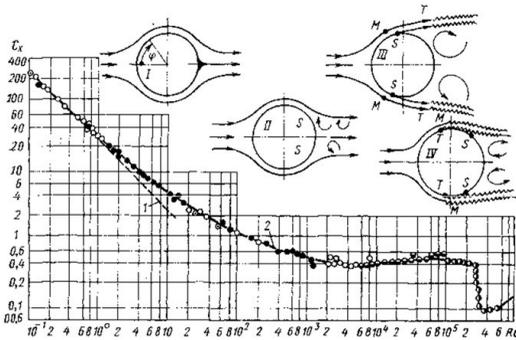


Рис. 9.1. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для шара [63, рис. 5.2]

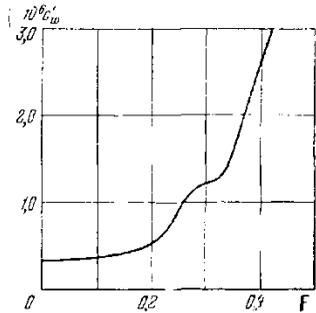


Рис. 9.2. Зависимость коэффициента остаточного сопротивления от числа Фруда [61, рис. 16]

Таким образом, с увеличением размеров l выражение в скобке в формуле полного сопротивления (9.4) убывает

$$l \uparrow \left\{ \frac{Re \uparrow (c_f \downarrow)}{Fr \downarrow (c'_w \downarrow)} \right\} (c_f + c'_w) \downarrow.$$

Тогда отношение сил сопротивления (9.4) для подобных судов будет определяться выражением

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(c_f(Re_2) + c'_w(Fr_2))}{(c_f(Re_1) + c'_w(Fr_1))} \frac{\rho V_2^2 S_2 / 2}{\rho V_1^2 S_1 / 2} = \lambda \frac{V_2^2 S_2}{V_1^2 S_1}. \quad (9.7)$$

Здесь коэффициент λ для подобных судов будет меньше единицы:

$$\lambda = \frac{(c_f(\text{Re}_2) + c'_w(\text{Fr}_2))}{(c_f(\text{Re}_1) + c'_w(\text{Fr}_1))} < 1. \quad (9.8)$$

В-третьих, рассмотрим **подобие удельных стоимостей**. Мощность двигателя есть произведение движущей силы от винта на скорость судна. Если судно движется с постоянной скоростью, то движущая сила от винта равна силе сопротивления движению. В этом случае мощность определится как произведение силы сопротивления на скорость:

$$N = FV.$$

Для геометрически подобных судов, движущихся с одинаковой скоростью ($V_1 = V_2$), отношение сил сопротивления F_2 / F_1 равняется отношению мощностей двигателей:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{N_2 / V_2}{N_1 / V_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

а последнее при одинаковых коэффициентах полезного действия двигателей равно отношению расходов топлива T в единицу времени:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Так как при одинаковых скоростях оба судна за единицу времени пройдут одинаковый путь, то можно расход топлива T в единицу времени заменить на расход топлива на один километр пути.

Удельная стоимость Q перевозки одной тонны груза на расстояние в один километр пропорциональна отношению веса израсходованного топлива в единицу времени к весу перевезенного груза, который, в свою очередь, пропорционален водоизмещению D :

$$Q = k \frac{T}{\rho g D}.$$

Здесь k – некоторый коэффициент, согласующий размерности слева и справа. При одинаковой скорости движения отношение стоимо-

стей Q_2 и Q_1 перевозки одной тонны груза на расстояние в один километр представится формулой

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{kT_2 / \rho g D_2}{kT_1 / \rho g D_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{D_1}{D_2} = \frac{F_2}{F_1} \frac{D_1}{D_2}.$$

Подставим сюда формулу (9.7), а также (9.5) и (9.6):

$$\begin{aligned} \frac{Q_2}{Q_1} &= \frac{F_2}{F_1} \frac{D_1}{D_2} = \lambda \frac{V_2^2}{V_1^2} \frac{S_2}{S_1} \frac{D_1}{D_2} = \\ &= \lambda \frac{V_2^2}{V_1^2} \frac{S_2 / S_1}{D_2 / D_1} = \lambda \cdot 1 \frac{l_C^2}{l_C^3} = \frac{\lambda}{l_C}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в соответствии с (9.8) коэффициент λ меньше единицы, а масштабный коэффициент $l_C = l_2 / l_1$ больше единицы, находим:

$$\lambda < 1, \quad l_C > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\lambda}{l_C} < 1 \quad \Rightarrow \quad Q_2 < Q_1. \quad (9.9)$$

Формула (9.9) показывает, что **удельная стоимость перевозки Q_2 на большом судне меньше, чем удельная стоимость перевозки Q_1 на малом судне.**

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

9.2.2. ПЕРЕВОЗКИ САМОЛетаМИ

Приведенные выше соображения могут быть отнесены не только к кораблям, движущимся по поверхности воды, но и к самолетам, так как «сопротивление воздуха при фиксированной скорости полета растет медленнее, чем пропорционально квадрату линейных размеров, а вес самолета и полезный груз растут приблизительно пропорционально кубу линейных размеров. В связи с этим относительный запас топлива и дальность полета самолетов возрастают с их размерами. Этим объясняется увеличение размеров и веса самолетов, предназначенных для дальних полетов» [61, с. 83].

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

9.2.3. РАЗМЕРЫ ДВИГАТЕЛЕЙ

Вместе с этим представляет большой практический интерес вопрос о рациональных размерах авиационных двигателей. Отношение веса реактивных двигателей к развиваемой ими тяге («удельный вес») – это важнейшая характеристика двигателя с точки зрения его применения на самолетах.

Для получения заданной тяги выгоднее использовать несколько двигателей с меньшими размерами, чем один двигатель больших размеров, так как «с увеличением размеров двигателя его удельный вес возрастает, потому что тяга растет пропорционально квадрату линейных размеров, а вес двигателя пропорционален приблизительно кубу линейных размеров.

Таким образом, если иметь в виду удельный вес двигателей, затраты на дефицитные материалы и производственные операции, то выгоднее строить несколько маленьких двигателей, чем один большой. Для двигателей очень малых размеров указанные соображения теряют свою силу, так как с резким уменьшением размеров теряется механическое подобие, при этом тяга и полезная мощность уменьшаются очень быстро» [61, с. 84].

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

9.3. ПАРАДОКС РЯБУШИНСКОГО

Анализ размерностей не всегда приводит к хорошим результатам. Если в перечне исходных параметров задачи отсутствует важная размерная величина или включена лишняя величина, то можно получить малоприменимую формулу. С этих позиций поучительна хорошо известная дискуссия между Рэлеем и Рябушинским, развернувшаяся на страницах журнала «Nature» в 1915 году, которая известна в литературе под названием «парадокс Рябушинского». Изложим ее, опираясь в основном на [12, 18, 33, 61].

Начало было положено статьей Рэля [88] (Nature, 1915, с. 66), в которой он рассматривал задачу теплообмена между горячим твердым телом и омывающей его жидкостью. В задаче принималось, что скорость переноса тепла h в обозначениях Бриджмена [12] определяется размерами тела a , разностью температур θ , скоростью жидкости v , ее теплопроводностью k и теплоемкостью c . Общее число существенных для процесса размерных величин составляет $n = 6$.

Эти величины имеют две механические размерности (длину и время) и две тепловые (количество теплоты и температуру). Таким образом, количество независимых размерностей составляет $k = 4$.

В соответствии с Пи-теоремой число безразмерных комплексов определится как $n - k = 6 - 4 = 2$. В результате Рэлей получил формулу для двух чисел подобия

$$\left(\frac{h}{ka\theta}\right) = F\left(\frac{acv}{k}\right),$$

из которой искомая величина h находится как функция от одного безразмерного комплекса:

$$h = ka\theta \cdot F\left(\frac{acv}{k}\right). \quad (9.10)$$

Вскоре после опубликования статьи Рэрея появилось письмо Д. Рябушинского (Nature, 1915, с. 591) с возражениями принципиального характера, суть которых заключается в следующем. Температура, которая включена в число первичных величин, может быть определена через среднюю кинетическую энергию молекул. А это значит, что ее следует перевести в разряд вторичных, и количество независимых размерностей станет не четыре, а три ($k = 3$). Соответственно количество чисел подобия уже будет не два, а три ($n - k = 6 - 3 = 3$):

$$\left(\frac{h}{ka\theta}\right) = F\left(\frac{v}{ka^2}, ca^3\right),$$

и получится решение, в котором искомая величина будет определена как функция не одного, а двух безразмерных аргументов:

$$h = ka\theta \cdot F\left(\frac{v}{ka^2}, ca^3\right). \quad (9.11)$$

Витиеватый ответ Рэрея (Nature, 1915, с. 644) сводился к тому, что его анализ основан на уравнении Фурье, в котором температура и количество теплоты рассматриваются как однородные величины. Решение парадокса, по его мнению, состоит в том, что Рябушинский нарушает принцип однородности и вводит предположение о молекулярной природе теплоты и температуры, которого нет в уравнениях Фурье.

Неопределенность ответа Рэлея породила мнение, что он не сумел опровергнуть рассуждения Рябушинского. Такого же мнения придерживался и П.В. Бриджмен. В своей работе [12], первое издание которой вышло в 1921 году, он только излагает рассуждения Рэлея и Рябушинского, но не пытается объяснить причину их расхождений. Объяснение парадокса Рябушинского дала Т.А. Афанасьева-Эренфест [80] в 1925 году. По ее аргументации, ошибка Рябушинского очевидна: он нарушил основные правила теории подобия [33].

Во-первых, Рябушинский присоединил к уравнениям связи выражение температуры, зависящей от средней кинетической энергии молекул, т. е. от таких величин (молекулярная скорость и молекулярная масса), которые не встречаются ни в каком из предыдущих уравнений связи. Из этого нового уравнения получается добавочный критерий подобия, который и фигурирует в уравнении Рябушинского (9.11).

Во-вторых, Рябушинский приравнял друг другу константы подобия – скорости жидкости и скорости молекул, а это величины хотя и одной размерности, но разной природы, они никак не связаны друг с другом. Скорость жидкости может стать равной нулю, что не отразится на скорости молекул, и, наоборот, скорость жидкости может поддерживаться постоянной, а скорость молекул увеличится за счет нагрева жидкости.

Более подробно решения Рэлея (9.10) и Рябушинского (9.11) рассмотрел Л.И. Седов в монографии [61], первое издание которой вышло в 1944 году. Воспроизводя их рассуждения, Седов также методами анализа размерностей показал, при каких поправках в рассуждениях Рябушинского формула (9.11) переходит в более корректную формулу, которую можно привести к формуле Рэлея (9.10), если принять во внимание несущественность механического эквивалента тепла.

Ошибку Рябушинского подробно объяснил М.В. Кирпичёв [33] с позиций уже не анализа размерностей, а анализа уравнений, т. е. с помощью приведения к безразмерному виду дифференциального уравнения Фурье–Кирхгофа для стационарного процесса конвективного теплообмена в жидкости. Он показал, что в рассматриваемой задаче в принятых предположениях решение Рэлея совершенно правильно. В критериальных обозначениях уравнение Рэлея (9.10) можно представить как зависимость числа Нуссельта (Nu) от числа Пекле (Pe):

$$Nu = F(Pe) . \quad (9.12)$$

Полученное решение приближенное, так как теплообмен в жидкости нагреет различные ее слои до разной температуры, вследствие чего в различных местах жидкости возникнут подъемные силы, которые надо присоединить к уравнению Навье–Стокса. Тогда критериальное уравнение (9.12) с учетом зависимости

$$Pe = Re \cdot Pr$$

превратится в зависимость Nu от трех чисел подобия: Рейнольдса (Re), Прандтля (Pr) и Грасгофа (Gr):

$$Nu = F(Re, Pr, Gr) .$$

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

10. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО СПОСОБАМ ВЫВОДА ЧИСЕЛ ПОДОБИЯ ИЗ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

10.1. СПОСОБ P1 – КОМБИНАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ, ИЛИ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ РАССУЖДЕНИЙ, ИЛИ СПОСОБ БЕРТРАНА

П.М. Алабужев и другие [1, 2] называют этот способ **методом анализа размерностей**.

Г.И. Баренблатт [6, 7] рассматривает свою работу как продолжение книги П. Бриджмена [12] и способ P1 – комбинации переменных – применяет в задачах для периода колебаний математического маятника, для поступательного движения шара в газе с большой скоростью, для доказательства теоремы Пифагора (с. 55). Этим способом Г.И. Баренблатт выводит критерии Рейнольдса (с. 62) и Фруда (с. 64), из задачи о конвективном теплообмене в горизонтальном слое жидкости (с. 71) выводит критерии Грасгофа, Рэлея и Прандтля.

П.В. Бриджмен [12] этим способом решает задачу о периоде колебаний маятника (с. 12), задачу Рэлея 1915 года о колебаниях капли жидкости в невесомости под влиянием сил поверхностного натяжения (с. 14), задачу о жесткости прогибающейся балки (с. 78).

В.А. Веников [14] называет этот способ методом **непосредственных рассуждений** (с. 92) и, применяя его к задаче о теплоотдаче от круглой трубы к поперечно омывающему ее потоку жидкости, получает критерии Нуссельта и Рейнольдса.

М.В. Кирпичёв [33] способ P1 называет **способом Бертрана** (с. 75) и отмечает, что суть его состоит в попытках комбинировать между собой размерные величины так, чтобы получились безразмерные произведения. Как отмечает М.В. Кирпичёв, «руководящей нитью в таком рассуждении являются чутье и догадка».

Л.И. Седов [61] применяет этот способ к решению следующих задач: о периоде колебаний математического маятника (с. 36); об истечении весомой жидкости (с. 39); о движении жидкости в трубах (с. 40); о движении тела в жидкости (с. 46); о теплоотдаче тела в потоке жидкости с упоминанием решения Рэлея и парадокса Рябушинского (с. 53); о равновесии упругих конструкций с моделированием на центрифуге и выводом соотношений между внешней нагрузкой и собственным весом (с. 60); об установившемся (с. 67) и неустановившемся (с. 71) движении твердого тела в сжимаемой жидкости; о движении корабля с обоснованием удешевления перевозок для больших судов и самолетов (с. 76); о глиссировании по поверхности воды (с. 84); об ударе о воду, о рикошете, о посадке гидросамолета (с. 91); о вертикальном ударе о воду (с. 96); о погружении клина в воду (с. 99).

В.А. Соколов [65] показывает применение этого способа на примерах для задач, возникающих в нефтегазодобыче.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

10.2. РАННИЕ СПОСОБЫ P2

К этой группе способов вывода критериев подобия из анализа размерностей отнесем такие способы, которые упоминаются в литературе, но широкого применения не получили.

М.В. Кирпичёв [33] описывает три ранних способа: Апелля [74] (1893 г.), Федермана [67] (1912 г.), Толмэна [91] (1914 г.). Применение способа Апелля показано на примере отыскания периода колебаний математического маятника. Способ Федермана описан на примере отыскания скорости истечения жидкости через отверстие, сделанное в сосуде на известной глубине. Способ Толмэна описан на примере вывода закона состояния для идеального газа.

Х. Шенк [72] описывает способ последовательного исключения размерностей, или поэтапный способ Ипсена, и его модификацию – способ линейных пропорциональностей Барра. При этом Х. Шенк отмечает, что этот способ «не так прост, особенно при большом числе переменных и при наличии 4...5 основных размерностей».

Ю.А. Дьячков и М.А. Черемшанов [21] показывают применение способов Ипсена и Барра к задаче движения автомобильного амортизатора.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

10.3. СПОСОБ Р3 – ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ РАЗМЕРНОСТЕЙ В СТЕПЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Этот способ описывает А.А. Гухман [18]. Он показывает его применение в задаче о гидродинамическом сопротивлении при стационарном течении несжимаемой жидкости по каналу-трубе (с. 280). В этой задаче он получает критерии Эйлера и Рейнольдса.

<К ОГЛАВЛЕНИЮ>

10.4. СПОСОБ Р4 – ЧАСТИЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ, ИЛИ СПОСОБ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ГРУППИРОВКИ, ИЛИ СПОСОБ НУЛЕВЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ, ИЛИ СПОСОБ БУКИНГЕМА

Этот способ основан на выводе теоремы Букингема и предложен им же [78].

П.М. Алабужев и другие [1] называют этот способ **методом нулевых размерностей** и показывают его применение на примере вынужденных колебаний груза. В [2] приводится применение этого способа для многочисленных задач из различных отраслей техники.

Г.И. Баренблатт [6, 7] представляет способ Р4 как следствие доказательства Пи-теоремы (с. 15, 44). Этим способом он решает задачу о распределении скорости в пристеночной области сдвигового турбулентного потока (с. 115), задачу для расплывания грунтовых вод (с. 126).

П.В. Бриджмен [12] решает этим способом задачу о периоде колебаний ящика с жидкостью (с. 69) и получает два критерия подобия, задачу Стокса о скорости падающей сферы в жидкости (с. 75), задачу о давлении идеального газа (с. 80).

В.А. Веников [14] отмечает, что этот способ вытекает из Пи-теоремы Букингема, показывает его применение на примере вынужденных колебаний груза (с. 73), а также на задаче о падении давления при движении вязкой жидкости в трубе, из которой получает критерии Рейнольдса и Эйлера (с. 90).

Ю.А. Дьячков и М.А. Черемшанов [21] называют этот способ **способом Букингема** и показывают его применение на примере движения автомобильного амортизатора.

М.В. Кирпичёв [33] также называет этот способ **способом Букингема**, поскольку он вытекает из Пи-теоремы Букингема, и показывает его применение на примере теплопередачи между стенкой трубки и потоком жидкости.

С.Д. Корнеев [39] и С.И. Пинчук [54] упоминают этот способ, но примеров не приводят.

О.Я. Романов и В.В. Ходосов [58] способ P4 называют способом **предварительной группировки** и показывают его применение на задаче о движении капли жидкости в потоке вязкого газа при изотермических условиях, в которой получаются два независимых критерия: Вебера и Рейнольдса.

Р.Х. Санников [59] при описании способов получения критериев подобия на основе Пи-теоремы выделяет **классический** способ (в нашем случае способ P6) и **видоизмененный классический** способ (в нашем случае способ P4). Применение этих способов показывает на примере для вынужденных колебаний груза.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

10.5. СПОСОБ P5 – ПОЛНОГО ДВУСТОРОННЕГО КОМПЛЕКСА, ИЛИ СПОСОБ РЭЛЕЯ

В.А. Архипов и А.П. Березиков [3] показывают применение этого способа на задаче о теплообмене при стационарном турбулентном течении теплоносителя (газа или жидкости) в трубе.

Г. Биркгоф [11] использует способ P5 при определении силы сопротивления жидкости в зависимости от плотности, скорости и диаметра тела (с. 125).

П. Бриджмен [12] решает этим способом задачу о периоде вращения двух масс (с. 16), две задачи Рэля о скорости переноса тепла в жидкости (с. 19) и о скорости волны в жидкости (с. 66).

М.В. Кирпичёв [33] определяет этот способ как **метод Рэля** (с. 81) и показывает его использование на примере для теплоотдачи.

А.А. Кудинов [43] рассматривает анализ размерностей по способам P5 и P6. Способом P5, который называет **методом Рэля**, получает критерии подобия Фруда, Эйлера, Рейнольдса, Струхаля и делает вывод, что анализ уравнений и анализ размерностей являются, по существу, разными методами одной и той же системы исследова-

ния, основанной на использовании обобщенных безразмерных переменных.

С.И. Пинчук [54] упоминает этот способ, но примеров не приводит.

Л.И. Седов [61] способом P5 решает задачу о малых волнах на поверхности жидкости (с. 101).

Г. Хантли [69] приводит решение этим способом 45 задач из области механики твердых тел, гидромеханики, теплопередачи, электричества.

Х. Шенк [72] описывает способ P5 как **рэлеевский метод** решения на основании теоремы Букингема.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

10.6. СПОСОБ P6 – ПОЛНОГО ОДНОСТОРОННЕГО КОМПЛЕКСА, ИЛИ СПОСОБ ГЛОБАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

П.М. Алабужев и другие [1] показывают применение этого способа на примере вынужденных колебаний груза.

А.А. Кудинов [43] получает этим способом критерии подобия Фруда, Эйлера, Рейнольдса, Струхаля.

С.И. Пинчук [54] упоминает этот способ, но примеров не приводит.

О.Я. Романов и В.В. Ходосов [58] называют этот способ **способом глобального критерия** и показывают его применение в задаче по определению силы сопротивления движению твердого тела в несжимаемой жидкости, в которой из семи размерных параметров, имеющих 3 независимые размерности, следуют 4 критерия подобия: коэффициент силы сопротивления, угол атаки в радианах, число Рейнольдса и число Фруда.

Р.Х. Санников [59] называет этот способ **классическим** способом анализа размерностей и показывает его применение на примере для вынужденных колебаний груза.

Л.А. Шаповалов [70] применяет этот способ для составления проекта проведения работ по моделированию прочности и жесткости элементов конструкций в различных задачах.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

10.7. СПОСОБ Р7 – КАЧЕСТВЕННОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ИЛИ СПОСОБ МОРОЗОВА

С одной стороны, в отличие от всех предыдущих способов способ Морозова [49] не требует знания **всех** величин задачи. В этом его преимущество перед другими способами.

С другой стороны, этот способ имеет существенные недостатки.

1. В изложении Н.А. Морозова отсутствует понятие безразмерного критерия подобия. Это объясняется тем, что он разрабатывал свой способ задолго до появления Пи-теоремы Букингема, в которой это понятие отчетливо появляется.

2. Н.А. Морозов не различает размерную величину и ее размерность, и то и другое обозначает одной буквой. Из-за этого трудно понять, о чем конкретно идет речь.

3. По способу Морозова невозможно получить несколько критериев подобия.

4. Так же как и в способе подбора, здесь необходимо правильно угадать исходную зависимость искомой функции от параметров задачи.

В настоящее время такой подход не используется. Здесь он рассматривается для подчеркивания исторического приоритета российского ученого Н.А. Морозова в разработке анализа размерностей.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

ВЫВОДЫ

В заключение приведем сводную таблицу использования авторами цитируемых работ перечисленных способов вывода критериев подобия (см. таблицу на следующей странице).

Из этой таблицы видно, что наиболее употребительными в силу их удобства являются способ Р4 – частичных комплексов, или способ Букингема, и способ Р5 – полного двустороннего комплекса, или способ Рэлея. Также довольно часто используется способ Р6 – полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия.

Сводная таблица использования способов

Номер по списку	Авторы	Способы						
		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
1	Алабужев П.М., Геронимус В.В., Минкевич Л.М., Шеховцов Б.А.	P1			P4		P6	
2	Алабужев П.М., Кирнарский М.Ш., Полищук В.Г. и др.	P1			P4			
6,7	Баренблатт Г.И.	P1			P4			
11	Биркгоф Г. [Birkhoff G.]					P5		
12	Бриджмен П.В. [Bridgman P.W.]	P1			P4	P5		
14	Веников В.А.	P1			P4			
18	Гухман А.А.			P3				
21	Дьячков Ю.А., Черемшанов М.А.		P2		P4	P5		
32	Кирпичёв М.В., Конаков П.К.					P5		
33	Кирпичёв М.В.	P1	P2			P5		
39	Корнеев С.Д.				P4			
43	Кудинов А.А.					P5	P6	
49	Морозов Н.А.							P7
54	Пинчук С.И.				P4	P5	P6	
58	Романов О.Я., Ходосов В.В.				P4		P6	
59	Санников Р.Х.				P4		P6	
61	Седов Л. И.	P1				P5		
65	Соколов В.А.	P1						
69	Хантли Г. [Huntley H.E.]					P5		
70	Шаповалов Л.А.						P6	
72	Шенк Х. [Schenck H.]		P2			P5		

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

31. ОБЩАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПОДОБИЯ

Этот вопрос рассмотрен в разделе 4.1. Напомним, что все этапы работ отражены в логической [табл. 4.1](#) и на рис. 4.1.

32. ДОСТОИНСТВА АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

1. Анализ размерностей (АР) помогает выявить алгебраические ошибки в рассуждениях путем обнаружения неоднородности по размерностям в уравнениях (см. [раздел 1.4](#) о формуле размерностей).

2. АР помогает определить коэффициенты пересчета при переходе от одной системы единиц к другой (см. [раздел 1.7](#) о пересчете в другие размерности).

3. АР помогает вспомнить забытую формулу (см. [раздел 2.1](#)).

4. АР помогает вывести новую формулу (см. [раздел 2.2](#)) и тем самым получить частные решения даже таких задач, которые слишком сложны для решения обычными приемами математического анализа (см. [раздел 9.1](#) об опоздании студента).

5. АР помогает аналитику на основании открытых источников выявить скрываемую информацию (см. [раздел 2.4](#) об атомном взрыве).

Кроме того, числа подобия (ЧП), полученные либо методом **анализа размерностей**, либо методом **анализа уравнений**, помогают инженеру и экспериментатору.

6. ЧП помогают инженеру провести сравнительный анализ параметров задачи, тем самым без проведения сложных расчетов и экспериментов быстро предсказать изменение величины искомой функции, что может существенно повлиять на выбор дальнейших практических действий (см. [раздел 3.2.1](#) о сравнительном анализе параметров математического маятника, а также [раздел 9.2](#) о крупных перевозках).

7. ЧП помогают экспериментатору в выборе необходимых экспериментов, обеспечивающих получение полезной информации, и в итоге позволяют сократить количество экспериментов (см. [раздел 2.3](#)).

8. ЧП помогают обосновать поведение масштабных моделей и преобразовать информацию, получаемую в экспериментах, с модели на натуру (см. [рис. В2](#) на стр. 12, а также [раздел 3.2.1](#) о количественном определении периода колебаний математического маятника через моделирование).

Этот перечень достоинств показывает, что изучение анализа размерностей как раздела теории подобия вполне оправдывает затраченное при этом время. Практическое применение анализа размерностей несложно, и он достаточно интересен сам по себе. Привычка рассматривать физические символы с «размерностной» точки зрения приобретает легко. Студент вскоре обнаружит, что небольшие затраты времени и усилий существенно повысят его уровень знаний и обогатят его математическое мышление [69, с. 47].

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

33. НЕДОСТАТКИ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

С другой стороны, в некоторых случаях анализ размерностей может привести к неверным заключениям [33, 34, 71].

1. В математическом описании физического процесса встречаются размерные постоянные величины. Их трудно обнаружить при подборе величин для анализа размерностей (см. [раздел 6.1.2](#) о гравитационной константе).

2. Можно ошибиться, не включив в анализ необходимую величину, существенную для процесса (см. [раздел 6.2](#) о падении тел).

3. В анализ размерности могут быть ошибочно включены лишние величины, не относящиеся к рассматриваемому явлению (см. [раздел 9.3](#) о парадоксе Рябушинского).

4. На основе анализа размерностей невозможно провести разделение величин одинаковой размерности, но имеющих различный физический смысл (см. [раздел 9.3](#) о парадоксе Рябушинского), хотя в некоторых случаях этот недостаток можно преодолеть с помощью векторных размерностей (см. [раздел 3.3](#)).

5. Величины нулевой размерности (безразмерные константы, коэффициенты) выпадают из контроля анализа размерностей.

6. Анализ размерностей не учитывает условия однозначности – краевые и начальные условия.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

34. СОПОСТАВЛЕНИЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ И АНАЛИЗА УРАВНЕНИЙ

При решении конкретной задачи выбор того, каким методом подобия воспользоваться (анализом уравнений или анализом размерностей), зависит от объема предварительных знаний.

Если есть возможность сформулировать задачу математически, т. е. составить систему основных уравнений с граничными и начальными условиями, то правильнее пользоваться **анализом уравнений**. Только этот метод может дать существенно надежные результаты. Поэтому при возможности пользоваться обоими методами надо выбирать анализ уравнений.

Если задачу описать математически невозможно, то приходится использовать **анализ размерностей**. Здесь достаточно знать общие соотношения, характеризующие процесс. Однако, применяя его, не нужно забывать, что нельзя быть полностью уверенным в результатах анализа, и необходимо искать их подтверждение путем опытной или теоретической проверки.

Таким образом, сущность различий в том, что аппарат анализа уравнений применяется к уравнениям, описывающим процесс, а аппарат анализа размерностей применяется не к уравнениям процесса, а к определяющим уравнениям, т. е. к формулам размерностей.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алабужев П.М.* Теория подобия и размерностей. Моделирование / П.М. Алабужев, В.В. Геронимус, Л.М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. – М.: Высшая школа, 1968. – 208 с.
2. *Алабужев П.М.* Основы теории подобия, размерности, моделирования / П.М. Алабужев, М.Ш. Кирнарский, В.Г. Полищук, В.С. Соколов, А.Е. Чижов, В.В. Юшин. – Курск: Курский политехнический ин-т, 1993. – 103 с.
3. *Архипов В.А.* Основы теории инженерно-физического эксперимента: учебное пособие / В.А. Архипов, А.П. Березиков. – Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2008. – 206 с.
4. *Атапин В.Г.* Сопротивление материалов: учебник / В.Г. Атапин, А.Н. Пель, А.И. Темников. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 556 с.
5. *Афанасьев А.А.* Физические основы измерений: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.А. Афанасьев, А.А. Погонин, А.Г. Схиртладзе. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 240 с.
6. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. – 2-е изд. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 256 с.
7. *Баренблатт Г.И.* Анализ размерностей: учебное пособие. – М.: МФТИ, 1987. – 168 с.
8. *Басниев К.С.* Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
9. *Батуев Г.С.* Инженерные методы исследования ударных процессов / Г.С. Батуев, Ю.В. Голубков, А.К. Ефремов, А.А. Федосов. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.
10. *Биргер И.А.* Расчет на прочность деталей машин: справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. – 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
11. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Методы, факты, подобие: пер. с англ. – М.: Иностранная литература, 1963. – 246 с. (пер. с англ.: G. Birkhoff. Hydrodynamics. A study in logic, fact and similitude. Princeton, New Jersey Princeton University Press, 1960).
12. *Бриджмен П.В.* Анализ размерностей / Изд. 1: Л.; М.: ОНТИ ГТТИ, 1934 – 119 с. Изд. 2: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 148 с. (пер. со 2-го англ. изд. под ред. С.И. Вавилова: P.W. Bridgman. Dimensional analysis. – New Haven, Yale University Press. 1932. Первое англ. изд. – Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1921).
13. *Ваничев А.П.* О расширении содержания физического подобия // ЖТФ. – 1938. – Т. VIII. – Вып. 2. – С. 198.
14. *Веников В.А.* Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики): учебное пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1976. – 479 с.
15. *Гаусс К.Ф.* Интенсивность земной силы, приведенная к абсолютной мере. Доклад, 1832. Избранные труды. – М.: Изд. АН СССР, 1952.

16. ГОСТ 8.417-81 (СТ СЭВ 1052-78). Единицы физических величин. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 40 с.
17. ГОСТ 25.504-82. Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. – М.: Изд-во стандартов, 1982.
18. *Гухман А.А.* Введение в теорию подобия: учебное пособие для втузов. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1973. – 296 с.
19. *Дидух Б.И.* Практическое применение методов теории размерностей и подобия в инженерно-строительных расчетах / Б.И. Дидух, И.Б. Каспэ. – М.: Стройиздат, 1975. – 48 с.
20. *Долинский Ф.В.* Краткий курс сопротивления материалов / Ф.В. Долинский, М.Н. Михайлов. – М.: Высшая школа, 1988. – 432 с.
21. *Дьячков Ю.А.* Моделирование систем автомобилестроения: учебное пособие / Ю.А. Дьячков, М.А. Черемшанов. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2009. – 240 с.
22. *Желтов Ю.П.* Механика нефтегазоносного пласта. – М.: Недра, 1975. – 216 с.
23. *Зозуля В.В.* Механика сплошной среды / В.В. Зозуля, А.В. Мартыненко, А.Н. Лукин. – Харьков: Изд-во Нац. ун-та внутр. дел, 2003. – 600 с.
24. *Иванов М.Г.* Размерность и подобие. – Долгопрудный, 2013. – 68 с.
25. *Иванов И.Е.* Методы подобия физических процессов: учебное пособие / И.Е. Иванов, В.Е. Ерещенко. – М.: МАДИ, 2015. – 144 с.
26. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1971. – 247 с.
27. *Кирпичёв В.Л.* О подобии при упругих явлениях // Журнал Русского физико-химического общества. – Серия физ. – Т. VI, 1874, № 9. – С. 152–155.
28. *Кирпичёв В.Л.* Беседы о механике. – 4-е изд.: М.; Л., 1950. – 360 с. Доступ через [50].
29. *Кирпичёв М.В.* Приложение теории подобия к опыту / М.В. Кирпичёв, А.А. Гухман // Труды Ленингр. обл. теплотехн. ин-та (ЛОТИ), вып. 1, 1931.
30. *Кирпичёв М.В.* Моделирование тепловых устройств // Известия энергетич. ин-та (ЭНИИ) АН СССР. – 1933. – Т. I.
31. *Кирпичёв М.В.* Теория подобия как основа эксперимента // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук, 1945, № 4–5. – С. 333–338. Доступ через [50].
32. *Кирпичёв М.В.* Математические основы теории подобия / М.В. Кирпичёв, П.К. Конаков. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – 106 с.
33. *Кирпичёв М.В.* Теория подобия. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – 96 с.
34. *Клайн С.Дж.* Подобие и приближенные методы: пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 302 с. (пер. с англ.: Kline S.J. Similitude and approximation. New York – St. Louis – San Francisco – Toronto – London – Sydney).
35. *Когаев В.П.* Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: справочник / В.П. Когаев, Н.А. Махутов, А.П. Гусенков. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
36. *Коган Б.Ю.* Размерность физической величины. – М.: Наука, 1968. – 72 с.
37. *Коган И.Ш.* О желательности расширения масштабов применения теории подобия при преподавании технических наук. // Машиностроение. Кон-

струкции и технологии: сб. науч. трудов ВятГТУ. – Киров, 1998. – Т. 3. – С. 64–69.

38. *Конаков П.К.* Вторая теорема подобия. – М.: Известия АН СССР, ОТН. – 1949. – № 2.

39. *Корнеев С.Д.* Гидрогазодинамика: курс лекций. – М.: МГИУ, 2011. – 230 с.

40. *Крамаренко Н.В.* Теория подобия и спецэффекты в кино / Н.В. Крамаренко, К.В. Ситнов // Наука. Промышленность. Оборона: труды 15 Всерос. науч.-техн. конф., Новосибирск, 23–25 апр. 2014 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – С. 347–351.

41. *Крамаренко Н.В.* Способы вывода критериев в теории подобия / Н.В. Крамаренко, Л.О. Тягнирядно, Ю.В. Вшивкова // Наука. Промышленность. Оборона: труды 17 Всерос. науч.-техн. конф., Новосибирск, 20–22 апр. 2016 г. В 4 т. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – Т. 1. – С. 226–234.

42. *Крамаренко Н.В.* Методы подобия в механике. Анализ уравнений: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 124 с.

43. *Кудинов А.А.* Техническая гидромеханика: учебное пособие. – Самара: Изд-во Самарского гос. техн. ун-та, 2006. – 295 с.

44. *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия и физические модели. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.

45. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – 3-е изд. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

46. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа: учебник для вузов. – 7-е изд. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

47. *Лойцянский Л.Г.* Методы подобия и размерностей в механике жидкости и газа // Сб. метод. статей по теорет. механике. – Вып. 11. – М.: Высшая школа, 1981. – С. 22–31.

48. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента: учебное пособие / Н.А. Спирин, В.В. Лавров, Л.А. Зайнуллин, А.Р. Бондин, А.А. Бурякин; под общ. ред. Н.А. Спирина. – Екатеринбург: УИИЦ, 2015. – 290 с.

49. *Морозов Н.* Основы качественного физико-математического анализа и новые физические факторы, обнаруживаемые им в различных явлениях природы. – М., 1908. Доступ через [50].

50. Некоторые обзорные работы и первоисточники по истории Питеоремы и теории подобия [Электронный ресурс]. – URL <http://gidropraktikum.narod.ru/pi-theorem-history.htm>.

51. *Никитин В.И.* Механика сплошных сред: учебное пособие. – Самара: СамГТУ, 2015. – 54 с.

52. Основы теории подобия и моделирования. Терминология: Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 88. – М.: Наука, 1973. – 50 с.

53. *Петухов Б.С.* Методы подобия и размерностей в теории теплообмена: учебное пособие. – М.: Московский энергетический ин-т, 1981. – 60 с.

54. *Пинчук С.И.* Организация эксперимента при моделировании и оптимизации технических систем: учебное пособие. – Днепропетровск: ООО Независимая издательская организация «Дива», 2008. – 248 с.

55. Пономарев В.Б. Математическое моделирование технологических процессов: курс лекций / В.Б. Пономарев, А.Б. Лошкарев. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. – 129 с.
56. Рекомендации РМГ 29-99. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения.
57. Рожков М. Н.А. Морозов – основоположник анализа размерностей // Успехи физических наук. – 1953. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 180–181. Доступ через [50].
58. Романов О.Я. Моделирование при проектировании сложных технических систем: учебное пособие / О.Я. Романов, В.В. Ходосов. – СПб.: БГТУ, 2006. – 60 с.
59. Санников Р.Х. Теория подобия и моделирования. Планирование инженерного эксперимента: учебное пособие. – Уфа: УГНТУ, 2010. – 253 с.
60. Седов Л.И. Распространение сильных взрывных волн // Прикладная математика и механика. – 1946. – Т. 10, № 2. – С. 241–250.
61. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – 8-е изд. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
62. Селиванов Е.И. Разработка теории подобия для неподобных, но сходственных тел для исследования сопротивления воды движению корабля (аффинное подобие): автореф. дис. ... канд. техн. наук по спец. 05.08.01 – Теория корабля и строительная механика. – Комсомольск-на-Амуре, 2017.
63. Сергель О.С. Прикладная гидрогазодинамика: учебник для авиационных вузов. – М.: Машиностроение, 1981. – 374 с.
64. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости: пер. с англ. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 256 с. (Пер. с англ.: Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Berlin – Gottingen – Heidelberg, 1959).
65. Соколов В.А. Основы теории подобия и анализа размерностей в нефтегазодобыче: учебное пособие. – Ухта: УГТУ, 2001. – 159 с.
66. Турский Г.А. Подобие и физическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7, № 8. – С. 122–127.
67. Федерман А. О некоторых общих методах интегрирования уравнений с частными производными первого порядка // Известия СПб. политехн. ин-та. Отдел техники, естествознания и математики. – 1911. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 97–155. Доступ через [50].
68. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Будівельник, 1982. – 280 с.
69. Хантли Г. Анализ размерностей / под ред. И.Т. Аладьева и др.; пер. с англ. А.Ф. Ульяновой. – М.: Мир, 1970. – 176 с. (Пер. с англ. Н.Е. Huntley. Dimensional Analysis. – Dover Publications, Inc. New York, 1967).
70. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с.
71. Швыдкий В.С. Механика жидкости и газа: учебное пособие для вузов. – 2-е изд. / под ред. В.С. Швыдкого. – М.: Академкнига, 2003. – 464 с.
72. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / под ред. Н.П. Бусленко; пер. с англ. Е.Г. Коваленко. – М.: Мир, 1972. – 384 с. (Пер. с англ.: Н. Schenck.

Theories of Engineering Experimentation. Second Edition. – McGraw-Hill Book Company. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney).

73. Эпштейн Л.А. Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 208 с.

74. Apell. *Mechanique rationelle*, 1893; Апель и Дотевилль. Теоретическая механика, 1912.

75. *Bertrand J.* Note sur la similitude en mécanique // *Journal de l'École polytechnique*, 1848, Cahier 32 (Т. 19), Р. 189–197. Доступ через [50].

76. *Bose E., Bose M.* Ueber die Turbulenzreibung Verschiedener Flüssigkeiten. – *Physikalische Zeitschrift*, 1911, Bd. 12, No 4, S. 126–135.

77. *Bose E., Rauert D.* Experimentalbeitrag zur Kenntnis der Turbulenten Flüssigkeitsreibung – *Physikalische Zeitschrift* 1909, Bd. 10, No 12, S. 406–409.

78. *Buckingham E.* On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations // *Physical Review*, 1914, Vol. 4, No. 4, P. 345–376. Доступ через [50].

79. *Erenfest-Afanassjewa T.A.* Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen. *Mathematische Annalen*, Band LXXVII Heft 2, 1915.

80. *Erenfest-Afanassjewa T.A.* Dimensional analysis viewed from standpoint of the theory of similitude. *Phys. Mag.*, vol. I, Jan., 1925.

81. *Fourier J.* Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822 (chap. 2, sect. 9, art. 175–162). Доступ через [50].

82. *Görtler H.* Zur Geschichte des П-Theorems // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1975, Bd. 55, H. 1, S. 3–8. Доступ через [50].

83. *Grober H.* Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. – Berlin, 1921. – 426 S.

84. *Karman Th., von.* Ueber die Turbulenzreibung verschiedener Flüssigkeiten. – *Physikalische Zeitschrift*, 1911, Bd 12, No 8, S. 283–284.

85. *Karman Th., von.* *Aerodynamics*. – Ithaca, New York, Cornell University Press, 1957. – 203 p.

86. Moon, Spencer. *Jnl. Franklin Inst.*, Dec. 1949, p.495.

87. *Newtoni J.* *Principia mathematica phylosophiae naturalis*. Lib. II, Sect. VII. Propos. 32, 33, 1687. // Рус. пер. с латинского академика А.Н. Крылова: Ньютон И. Математические начала натуральной философии, 1687 (кн. II, отд. 7, предл. 32, 33). Доступ через [50].

88. *Reyleigh L.* The principle of similitude. – *Nature*, 1915, v. 95, p. 66.

89. *Stokes G.* *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9, 8 (1850), Papers 3, p. 1–141.

90. *Taylor G.I.* The formation of a blast wave by a very intense explosion. – *Proc. Roy. Soc.*, 1950, vol. A 201, No A 1065, p. 159–186.

91. *Tolman R.C.* Principle of similitude. *Phys. Rev. ser. 2*, т. III, 1914; т. VI, 1915; т. VIII, 1916.

92. *Williams W.* *Phil. Mag.*, 34, 1892, p. 234.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Здесь приведены основные термины и определения Государственной системы обеспечения единства измерений в соответствии с Рекомендациями РМГ 29-99 [56], используемые в анализе размерностей. Нумерация терминов сохранена из оригинала.

3.11. Основная физическая величина – физическая величина, входящая в систему величин и условно принятая в качестве независимой от других величин этой системы.

3.12. Производная физическая величина – физическая величина, входящая в систему величин и определяемая через основные величины этой системы. Примеры производных величин механики системы *LMT*:

- скорость v поступательного движения, определяемая по модулю уравнением

$$v = dl / dt,$$

где l – путь, t – время;

- сила F , приложенная к материальной точке, определяемая по модулю уравнением

$$F = ma,$$

где m – масса точки; a – ускорение, вызванное действием силы F .

3.13. Размерность физической величины – выражение в форме степенного одночлена, составленное из произведений символов основных физических величин в различных степенях и отражающее связь этой физической величины с физическими величинами, принятыми в данной системе величин за основные с коэффициентом пропорциональности, равным единице.

Примечания

1. Степени символов основных величин, входящих в одночлен, в зависимости от связи рассматриваемой физической величины с основными, могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными. Понятие «размерность» распространяется и на основные вели-

чины. Размерность основной величины в отношении самой себя равна единице, т. е. формула размерности основной величины совпадает с ее символом.

2. В соответствии с международным стандартом ИСО 31/0 размерность величин следует обозначать знаком $\dim [x]$. В системе величин LMT размерность величины x будет

$$\dim x = L^l M^m T^t,$$

где L, M, T – символы величин, принятых за основные (соответственно длины, массы, времени).

3.15. Размерная физическая величина – физическая величина, в размерности которой хотя бы одна из основных физических величин возведена в степень, не равную нулю. Пример – сила F в системе LMT является размерной величиной: $\dim F = LMT^{-2}$.

3.16. Безразмерная физическая величина – физическая величина, в размерность которой основные физические величины входят в степени, равной нулю. **Примечание:** безразмерная величина в одной системе величин может быть размерной в другой системе.

4.2. Система единиц физических величин – совокупность основных и производных единиц физических величин, образованная в соответствии с принципами для заданной системы физических величин. Пример – Международная система единиц (СИ).

4.3. Основная единица системы единиц физических величин – единица основной физической величины в данной системе единиц. Пример – основные единицы Международной системы единиц (СИ): метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), моль (моль) и кандела (кд).

4.5. Производная единица системы единиц физических величин – единица производной физической величины системы единиц, образованная в соответствии с уравнением, связывающим ее с основными единицами или с основными и уже определенными производными. Примеры:

- 1 м/с – единица скорости, образованная из основных единиц СИ – метра и секунды;
- 1 Н – единица силы, образованная из основных единиц СИ – килограмма, метра и секунды.

4.10. Кратная единица физической величины – единица физической величины, в целое число раз большая системной или внесистемной единицы. Примеры: единица длины 1 км = 10^3 м, т. е. кратная метру; единица частоты 1 МГц (мегагерц) = 10^6 Гц, кратная герцу.

4.11. Дольная единица физической величины – единица физической величины, в целое число раз меньшая системной или внесистемной единицы. Примеры: единица длины 1 нм (нанометр) = 10^{-9} м и единица времени 1 мкс = 10^{-6} с являются дольными соответственно от метра и секунды.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Здесь приведены наиболее употребительные десятичные приставки в соответствии с [24, 50].

Десятичный множитель	Приставка	Обозначение	Пример
10^{12}	Тера	Т	ТВ = теравольт
10^9	Гига	Г	ГГц = гигагерц
10^6	Мега	М	МПа = мегапаскаль
10^3	Кило	к	кН = килоньютон
10^{-1}	Деци	д	дм = дециметр
10^{-2}	Санتي	с	см = сантиметр
10^{-3}	Милли	м	мН = миллиньютон
10^{-6}	Микро	мк	мкм = микрометр = микрон
10^{-9}	Нано	н	нм = нанометр
10^{-12}	Пико	п	пФ = пикофарад

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

СИСТЕМА ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ СИ

Современная Международная система единиц СИ (The International System Units) является десятичной метрической системой размерностей [24].

Первые работы по разработке метрической системы были начаты во Франции еще до революции по поручению короля Людовика XVI, но введена она была только в революционной Франции в 1795 году законом Национального Конвента. Экспериментальное определение основных единиц длины и массы было поручено комиссарам. В их число входили Ш.О. Кулон, Ж.Л. Лагранж, П.-С. Лаплас и другие выдающиеся ученые.

Через 80 лет, опять же в Париже, по инициативе Российской Петербургской Академии наук была созвана Международная дипломатическая конференция, на которой 20 мая 1875 года была принята Метрическая конвенция. Эту конвенцию подписали первоначально 17 государств: 1) Австро-Венгрия, 2) Аргентина, 3) Бельгия, 4) Бразилия, 5) Венесуэла, 6) Германия, 7) Дания, 8) Испания, 9) Италия, 10) Перу, 11) Португалия, 12) Россия – инициатор конференции, 13) США, 14) Турция, 15) Франция – страна проведения, 16) Швейцария, 17) Объединенные королевства Швеция и Норвегия. Конференция приняла решение о разработке международных эталонов и учредила Международное бюро мер и весов.

В 1960 году было введено современное название «Международная система единиц» (СИ). Постепенно метрическая система вытеснила различные национальные системы мер. Современная система СИ имеет семь основных единиц (см. таблицу). С точки зрения теоретика, можно было бы обойтись и меньшим количеством основных единиц. Так, система СГС (другое ответвление метрической системы) обходится тремя единицами: сантиметр, грамм, секунда. Лишние единицы измерения нужны в тех случаях, когда мы плохо умеем измерять какие-либо величины, но хорошо можем измерить отношения таких величин.

Величина	Размерность	Единица	Обозначение
Длина	L	Метр	м / m
Масса	M	Килограмм	кг / kg
Время	T	Секунда	с / s
Сила тока	I	Ампер	А / A
Температура	Θ	Кельвин	К / K
Количество вещества	N	Моль	моль / mol
Сила света	J	Кандела	кд / kd

Основные идеи метрической системы:

- для каждой величины есть только одна главная единица измерения, которая является комбинацией основных единиц;
- другие единицы измерения той же величины получаются из главной умножением на степень числа 10;
- величина каждой основной единицы измерения по возможности связана с неизменными природными константами и другими основными единицами;
- из природных констант выбираются по возможности фундаментальные (входящие в основные законы природы).

Метр

Первоначально за метр была принята длина парижского меридиана, деленная на 10^7 (на десять миллионов), т. е. метр был подобран так, чтобы расстояние по меридиану от полюса до экватора (четверть полной окружности) равнялось 10 тыс. км. Неизменной природной константой, к которой первоначально привязали метр, считался размер Земли. Для уточнения длины меридиана в 1792–1797 годах была предпринята экспедиция астрономов Деламбра и Мешена. Была измерена длина дуги от Дюнкерка до Барселоны ($9^\circ 40'$ по широте).

Почему длину меридиана разделили именно на десять миллионов? Ясно, что в соответствии с идеологией метрической системы делить решили на степень числа 10. Почему именно 10^7 ? Потому, что в этом случае получается длина человеческого масштаба: при таком определении рост взрослого человека обычно составляет величину между 1 и 2 м.

Прототип эталона метра был изготовлен из латуни в 1795 году. В 1799 году из платины был изготовлен эталон метра, известный как архивный метр. Это специальная линейка, на которой отмечена длина 1 м. Как впоследствии выяснилось, из-за неправильного учета сжатия Земли у полюсов эталон оказался короче на 0,2 мм, чем соответствующая доля длины меридиана. Это весьма большая ошибка для эталона, даже по тем временам. Кроме того, измерение размеров Земли не очень удобно для проверки эталона.

В 1889 году в соответствии с решением Метрической конвенции был изготовлен международный эталон метра из сплава 90 % платины и 10 % иридия. За основу был взят архивный метр, от привязки метра к размеру Земли отказались. С этого момента метр по определению считался расстоянием между двумя крестиками при температуре 0 °С на платино-иридиевом рельсе, хранящемся в Международном бюро мер и весов в Севре близ Парижа. Другие страны-участницы Метрической конвенции хранили копии парижского эталона, который считался основным. Идейно это был шаг назад: размер Земли оказался плохой константой для привязки к нему эталона длины. Как в древности, эталон стал всего лишь произвольным образцом.

В 1889 году было изготовлено 30 одинаковых эталонов метра. Эталон № 6 был выбран как главный (международный). Эталон № 28 был национальным в России. Эталон № 27 был национальным в США.

В 1960 году метр был определен как определенное число длин волн в вакууме определенной спектральной линии криптона-8616. Для воспроизведения метра теперь использовался специальный интерферометр. После этого старые платиново-иридиевые линейки перестали быть эталонами, а стали музейными экспонатами. Хранить эталон метра как образец теперь не нужно: его может изготовить кто угодно. Физики вернулись на новом уровне к изначальной идее: эталон метра оказался привязан к природной константе.

В 1983 году было принято новое определение метра:

$$\text{метр} = \text{скорость света в вакууме} \times \frac{1 \text{ секунда}}{299\,792\,458}.$$

Килограмм

Первоначально килограмм был определен как масса 1 дм³ (литра) воды при 4 °С (температура максимальной плотности воды) на уровне моря. В 1799 году был изготовлен эталон килограмма (архивный кило-

грамм) в виде платиновой гири. Как и с метром, позже выяснилось, что величина эталона была не совсем та (на 0,028 г больше массы литра воды).

В 1889 году в соответствии с решением Метрической конвенции был изготовлен международный эталон килограмма в виде цилиндра диаметром и высотой 39,17 мм из сплава 90 % платины и 10 % иридия. За основу был взят архивный килограмм, от привязки килограмма к литру воды отказались. С этого момента килограмм по определению считался массой эталонной гири, хранящейся в Международном бюро мер и весов в Севре близ Парижа. Другие страны-участницы Метрической конвенции хранили копии международного эталона, который считался основным. Идейно это был шаг назад. Как в древности, эталон стал всего лишь произвольным образцом. Как оказалось, даже находясь под тремя колпаками, масса эталона за год возрастала за счет загрязнений на величину до 1 мкг. Поэтому перед взвешиванием эталон необходимо было вымыть в соответствии со специальной процедурой.

В ноябре 2018 году на 26-й Генеральной конференции по мерам и весам в Париже принято решение об изменении определения килограмма. Этим решением килограмм был «отвязан» от материального носителя-эталона и теперь определяется через постоянную Планка:

$$h = 6,62606... \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

подобно тому как определяется метр через точное значение скорости света. Так как килограмм входит в размерность постоянной Планка

$$[h] = \text{Дж} \cdot \text{с} = (\text{Н} \cdot \text{м}) \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}},$$

то, зная ее значение, можно определить значение килограмма.

Установка, с помощью которой можно реализовать новый эталон массы, называется «весы Киббла». В таких весах эталоном служит груз, который уравнивает силу отталкивания между постоянным магнитом и катушкой, по которой пропускают ток. Таким образом, массу объекта можно найти за счет равенства электрической и механической силы. Константа Планка «прячется» в уравнениях, описывающих работу электрической части установки.

Благодаря новому определению килограмма каждая страна сможет воспроизводить эталонную установку самостоятельно в любое время, не сверяя с главным эталоном.

Секунда

Первоначальное определение секунды (астрономическая секунда) связано с периодом обращения Земли. Сутки (средний период от полудня до полудня) разделяются на 24 часа, час – на 60 минут, минута – на 60 секунд, т. е.

$$\text{сутки} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} = 86\,400 \text{ с}.$$

Во время Французской революции это казалось очевидным: надо только хорошо измерить среднюю длительность суток и построить хорошие часы. Точное определение средней длины суток оставили астрономам. Ну и еще множители 60 и 24 выбивались из набора степеней числа 10, которые использовали при создании метрической системы. С этой древней традицией тогда, к сожалению, справиться не удалось.

До сих пор обсуждаются проекты разделить сутки на 10 часов, час – на 100 минут и минуту – на 100 секунд, т. е. принять сутки равными 10 000 с. Удалось только изгнать из употребления терцию – одну шестидесятую секунды, которая в быту никому не нужна, и ввести вместо этого миллисекунду (0,001 с). Можно отметить упущенный шанс поделить по степеням числа 10 час или хотя бы минуту. В конце XVIII века при малом распространении точных часов это было бы еще возможно.

В 1960 году в СИ была принята секунда эфемеридного времени (в астрономии эфемериды – таблицы видимых положений звезд и планет):

$$\text{эфемеридная секунда} = \frac{\text{тропический год}}{31556925,9747}.$$

Тропический год (время от одного весеннего равноденствия до следующего) тоже непостоянен, поэтому в качестве эталона взяли тропический год в фундаментальную эпоху 1900 года по астрономическим таблицам Ньюкомба. Эфемеридная секунда была стандартом недолго, поскольку развитие физики уже предлагало более точные стандарты.

В 1968 году принято новое определение: секунда = $9'192'631'770$ периодов излучения при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния цезия-133, т. е. было принято, что частота соответствующей спектральной линии составляет $9'192'631'770$ Гц точно.

В 1997 году определение уточнили: атом цезия надо брать в состоянии покоя при температуре 0 К. Хотя законы термодинамики запрещают охладить что-либо до абсолютного нуля температуры, тем не менее частоту излучения при ненулевой температуре можно экстраполировать на температуру 0 К.

Переход на систему СИ

Различные страны имели свои системы мер. Переход на систему СИ происходил постепенно. В России была своя запутанная русская система мер. В 1893 году Д.И. Менделеев преобразует Депо образцовых мер и весов (создано в 1842 году) в Главную палату мер и весов (теперь Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии имени Д.И. Менделеева), на базе которой готовит введение в России метрической системы, предшественницы современной Международной системы СИ. Метрическая система была допущена к применению в России в необязательном порядке в 1899 году. Эта мера способствовала бурному научно-техническому и промышленному росту в России перед Первой мировой войной. Обязательным применение метрической системы мер в СССР стало после революции, в 1918 году. Переход на метрическую систему способствовал развитию науки, техники и образования и значительно упростил построение системы массового образования и индустриализацию.

Учитывая, что массовое образование и промышленность стали важными факторами обороноспособности страны, можно сказать, что введение метрической системы было одним из решений, позволивших подготовить страну к Великой Отечественной войне (о неизбежности новой большой европейской войны стали говорить сразу по окончании Первой мировой войны). Так что в победе СССР во Второй мировой войне есть немалый вклад Д.И. Менделеева как основоположника русской метрологии.

[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РИСУНКИ К ЗАКОНАМ КЕПЛЕРА

Портрет Кеплера (1627 г.) можно посмотреть по адресу:

URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2549218>

Первый закон

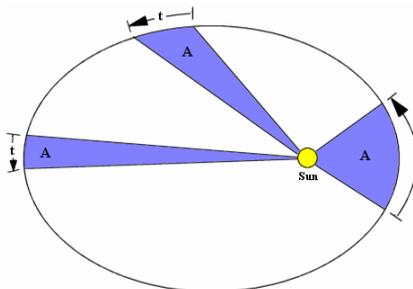
Планеты описывают около Солнца эллипсы, причем Солнце находится в одном из фокусов эллипса.



URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Файл%3AKepler%27s_law_1_ru.svg

Второй закон

Радиус-вектор, соединяющий Солнце с планетой, ометает в равные промежутки времени равные площади. Закрашенные площади равны и проходятся за одинаковое время.

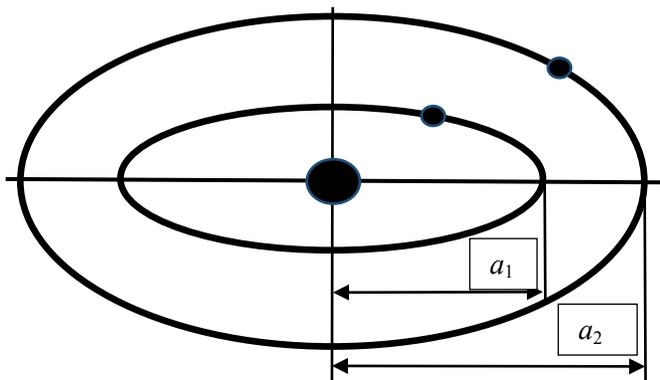


URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:Kepler%27s_law_2_ru.svg

Третий закон

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам соответствующих средних расстояний планет от Солнца:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$



[<К ОГЛАВЛЕНИЮ>](#)

Крамаренко Николай Владимирович

МЕТОДЫ ПОДОБИЯ В МЕХАНИКЕ. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Кинит*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 27.12.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 50 экз.
Уч.-изд. л. 12,32. Печ. л. 13,25. Изд. № 64/19. Заказ № 234. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20