Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. КАЗАНЦЕВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Утверждена Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2020

УДК 517.91 (075.8)
К 142

Рецензенты:

В.В. Комиссаров, канд. физ.-мат. наук, доцент
О.В. Брюханов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Казанцева Е.В.
К 142 Дифференциальные уравнения. Фазовая плоскость: учебное пособие / Е.В. Казанцева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2020. – 64 с.

ISBN 978-5-7782-4128-2

Учебное пособие предназначено для студентов I и II курса очного отделения технических направлений и специальностей. Пособие посвящено методам решения и качественного исследования задач из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для проведения практических занятий по рассмотренным темам. Все задачи не являются оригинальными, а заимствованы из учебников и сборников задач, список которых представлен в конце пособия.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов технических специальностей с углубленной
математической подготовкой

УДК 517.91 (075.8)

ISBN 978-5-7782-4128-2

© Казанцева Е.В., 2020
© Новосибирский государственный технический университет, 2020

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие устойчивости решения

Определение

Решение $x = \varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

определенной при всех $t \geq t_0$, называется ***устойчивым*** (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $x = x(t)$ той же системы уравнений, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$\left| x(t_0) - \varphi(t_0) \right| < \delta, \tag{2}$$

при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\left| x(t) - \varphi(t) \right| < \varepsilon .$$

Решение $x = \varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений (1) называется ***асимптотически устойчивым*** (по Ляпунову), если оно устойчиво

и существует такое $\delta_0 > 0$, что для всякого решения $x = x(t)$ той же системы уравнений, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$\left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| < \delta_0 ,$$

справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \left|x(t) - \varphi(t)\right| = 0 .$$

Если решение $x = \varphi(t)$ не является устойчивым, то оно называется ***неустойчивым.*** Таким образом, для неустойчивости решения $x = \varphi(t)$ достаточно, чтобы существовало положительное число $\varepsilon_0 > 0$ и при любом как угодно малом $\delta > 0$ нашлось хотя бы одно решение $x = x(t)$, удовлетворяющее при $t = t_0$ неравенству (2), для которого при некотором $t_1 \geq t_0$ выполнялось бы равенство $\left|x(t_1) - \varphi(t_1)\right| = \varepsilon_0$.

Вопрос исследования устойчивости некоторого решения $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $y(t) \equiv 0$ другой системы, получаемой из (1) с помощью замены

$$x = y + \varphi(t) .$$

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ

1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выясним, устойчивы ли решения данных уравнений с указанными начальными условиями:

$$\frac{dx}{dt} = k\frac{x}{t},\ x(1) = 0\ .$$

Решение

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = t^k x_0\ ,\quad \text{если}\ \ x(1) = x_0\ .$$

Тогда решение, удовлетворяющее условию $x(1) = 0$, есть $x_0(t) \equiv 0$.

Рассмотрим разность $x(t) - x_0(t) = t^k x_0$:

если $k = 0$, то $\left|x(t) - x_0(t)\right| = \left|x_0\right|$;

если $k < 0$, то $\left|x(t) - x_0(t)\right| = \left|x_0\right| t^k \to 0$ при $t \to +\infty$;

если $k > 0$, то $\left|x(t) - x_0(t)\right| \to \infty$ при $t \to +\infty$, каким бы малым по абсолютной величине ни было $x_0 \neq 0$.

Делаем вывод, что решение $x = 0$ неустойчиво при $k > 0$, асимптотически устойчиво при $k < 0$, устойчиво при $k \leq 0$.

2. Исследуем на устойчивость решение задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x\ ,\ x(0) = 0\ .$$

Решение

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t\ ,\quad \text{если}\ \ x(0) = x_0\ .$$

Разность любых двух решений $x(t)$, $x(0)=x_0$ и $y(t)$, $y(0)=y_0$:

$$x(t)-y(t)=e^{-t}\left(x_0-y_0\right)\Rightarrow\left|x(t)-y(t)\right|=e^{-t}\left|x_0-y_0\right|\to 0 \text{ при } t\to+\infty .$$

Таким образом, все решения данного уравнения асимптотически устойчивы.

3. Исследуем на устойчивость решение задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt}=\sin^2 x,\ x(0)=0 .$$

Решение

Решение, удовлетворяющее условию $x(1)=0$, есть $x_0(t)\equiv 0$.

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x_0-t),\quad \text{если } x(0)=x_0,\ 0<x_0<\pi .$$

Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}x_0-t\right)=\pi$. Значит, каким бы малым ни было $x_0>0$, найдется момент времени $t_1>0$ такой, что $x(t_1)>1$. Следовательно, решение $x=0$ неустойчиво.

4. Исследовать на устойчивость решение $x=\frac{1}{t}$, $t\ge 1$, уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt}=-\left(x-\frac{2}{t}\right)^2 .$$

Решение

Сделаем замену $x=y+\frac{1}{t}$. Получим уравнение Бернулли:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2}{t}y-y^2 . \qquad (3)$$

Таким образом, исследование устойчивости решения $x = \frac{1}{t}$ исходного уравнения сводится к исследованию вопроса устойчивости тривиального решения $y \equiv 0$ полученного уравнения Бернулли. Решая уравнение (3), находим

$$y = \frac{3t^2}{t^3 + 3c} \text{ и } y = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $y(1) = y_0$ имеет вид

$$y = \frac{3y_0 t^2}{y_0(t^3 - 1) + 3}.$$

Анализируя полученное решение, видим, что, каким бы малым по абсолютной величине ни было $y_0 < 0$, решение $y(t)$, $y(1) = y_0$ уравнения (3) непродолжимо до моментов $t = t^* \geq \left(1 - \frac{3}{y_0}\right)^{1/3}$, т. е. $\lim\limits_{t \to t^* - 0} y(t) = -\infty$. Таким образом, решение $y(t) \equiv 0$ уравнения (3) неустойчиво.

5. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy. \end{cases}$$

а) Исследовать на устойчивость решения;

б) изобразить траектории решений;

в) указать направление движения по траекториям.

Решение

а) Решениями этой системы являются функции $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0 e^{x_0 t}$, где x_0 и y_0 произвольные постоянные.

Зафиксируем произвольное решение

$$x(t) = \varphi(t) = x_0, \; y(t) = \psi(t) = y_0^* e^{x_0^* t}$$

и исследуем его на устойчивость. Если $x_0^* < 0$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, чтобы из неравенства

$$\left|\varphi(0) - x(0)\right| + \left|y(0) - \psi(0)\right| \equiv \left|x^* - x_0\right| + \left|y^* - y_0\right| < \delta \qquad (5)$$

следовало неравенство

$$\left|\varphi(t) - x(t)\right| + \left|\psi(t) - y(t)\right| = \left|x^* - x_0\right| + \left|e^{x_0^* t} y_0^* - e^{x_0 t} y_0\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

для всех $t \geq 0$. Выбор такого $\delta(\varepsilon)$ обеспечен тем, что

$$\left|x^* - x_0\right| + \left|e^{x_0^* t} y_0^* - e^{x_0 t} y_0\right| \leq \left|x^* - x_0\right| +$$

$$+ \left|y^* - y_0\right| + \left|e^{x_0^* \tau} - e^{x_0 \tau}\right| \left|y_0\right| \leq \left|x^* - x_0\right| + \left|y^* - y_0\right| +$$

$$+ e^{\min\left(\left|x^*\right|, \left|x_0\right|\right)\tau} \left(1 - e^{-\left|x^* - x_0\right|\tau}\right) \left|y_0\right| \to 0$$

равномерно по $\tau \geq 0$, лишь только $x_0 \to x_0^*$, $y_0 \to y_0^*$ и $x_0 < 0$.

Неравенства (5) и (6) означают, что любое решение $x = x_0^* < 0$, $y = e^{x_0^* t} y_0^*$ устойчиво. Если $x_0^* \geq 0$, то разность $|\psi(t) - y(t)|$ стремится к бесконечности при $t \to +\infty$:

$$|\psi(t) - y(t)| = \left| e^{x_0^* t} y_0^* - e^{x_0 t} y_0 \right| \to +\infty .$$

В этом случае неравенство (6) при всех $t \geq 0$ невозможно, какое бы малое δ ни фиксировали. Следовательно, любое решение $x = x_0^* \geq 0$, $y = e^{x_0^* t} y_0^*$ исходной системы уравнений неустойчиво.

б) Найдем траектории решений данной системы уравнений.

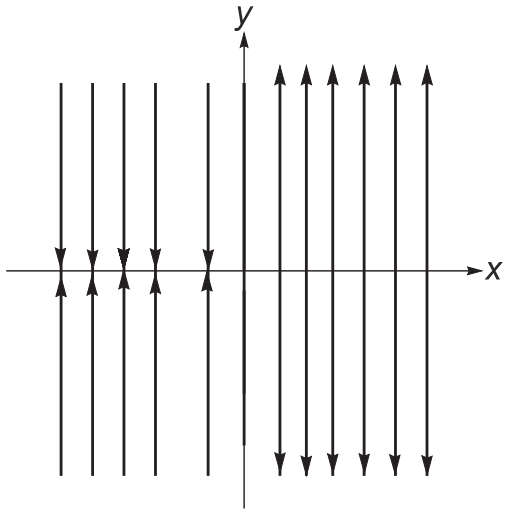


Рис. 1

Правые части исходных уравнений одновременно обращаются в нуль при $xy = 0$, т. е. на координатных осях. Следовательно, координатные оси состоят из особых точек. Каждая такая точка служит

траекторией решения $x = 0$, $y = y_0$ или $x = x_0$, $y = 0$. Если же $xy \neq 0$, то уравнение траекторий имеет вид $\frac{dx}{dy} = 0$. Отсюда $x = x_0 = \text{const}$, т. е. траекториями служат лучи $x = x_0$, $y > 0$ и $x = x_0$, $y < 0$. Из второго уравнения исходной системы находим $y(t) = y_0 e^{x_0 t}$. Значит, если $x_0 < 0$, то движение по указанным лучам происходит в направлении к оси абсцисс. Если $x_0 > 0$, то движение по указанным лучам происходит в направлении удаления от оси абсцисс.

Траектории изображены на рис. 1.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x)\,, \tag{7}$$

где A – постоянная матрица, $f(t,\ x)$ – непрерывная по t и x функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(t,0) = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 0\,.$$

Система уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

называется *системой первого приближения* для системы (7).

Теорема. Если действительные числа всех собственных чисел матрицы A отрицательны, а функция $f(t,\ x)$ удовлетворяет условиям, то нулевое решение системы уравнений (7) асимптотически устойчиво. Если же среди собственных чисел матрицы имеется хотя бы одно число с положительной вещественной частью, а функция $f(t,\ x)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то нулевое решение уравнения (7) неустойчиво.

Если же среди собственных чисел матрицы A имеется хотя бы одно с нулевой действительной частью, а остальные – с отрицательной, то нулевое решение системы уравнений (7) может быть как устойчивым (асимптотически устойчивым), так и неустойчивым, т. е. в этом случае

из устойчивости решений системы первого приближения нельзя делать вывод об устойчивости тривиального решения полной системы уравнений.

Пример

Исследовать устойчивость положений равновесия математического маятника с трением:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\sin x=0,\ \ k>0.$$

Решение

Уравнение движения маятника эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\sin x-2ky.\end{cases}$$

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases}y=0,\\ \sin x+2ky=0;\end{cases}$$

решения системы определяют положения равновесия:

$$x=n\pi,\ \ y=0,\ \ n\in\mathbb{Z}\,.$$

В силу периодичности правых частей системы уравнений по переменной x достаточно исследовать устойчивость двух ее решений: $x=0,\ \ y=0$ (решение соответствует нижнему положению равновесия маятника) и $x=\pi,\ \ y=0$ (решение соответствует верхнему положению равновесия маятника).

Линеаризуем систему уравнений в окрестности точки $(0,0)$. Для этого выделим из функции $\sin x$ ее линейную часть:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Запишем уравнения первого приближения, соответствующие положению равновесия $(0;0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2ky. \end{cases}$$

Тогда характеристическое уравнение, соответствующее положению равновесия $(0;0)$, записывается в виде

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

По условию $k > 0$, т. е. действительные части корней этого уравнения отрицательны. Следовательно, решение $x = 0,\ y = 0$ уравнения асимптотически устойчиво.

Исследуем устойчивость верхнего положения равновесия маятника, т. е. устойчивость решения $x = \pi,\ y = 0$ системы уравнений. В окрестности точки $x = \pi$ справедливо разложение

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \ldots$$

Запишем уравнения первого приближения, соответствующие положению равновесия $x = \pi,\ y = 0$: $\begin{cases} \dfrac{d(x-\pi)}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-\pi) - 2ky. \end{cases}$

Тогда характеристическое уравнение, соответствующее положению равновесия $(\pi;0)$, записывается в виде

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0 .$$

Корни этого уравнения действительны и имеют разные знаки, поэтому решение $x = \pi,\ y = 0$ (верхнее положение равновесия маятника) неустойчиво.

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \tag{8}$$

Динамической системой называют систему вида (8), где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые в некоторой области xOy (или во всей плоскости) функции. Тогда координатная плоскость является ее ***фазовой плоскостью.***

В системе (8) возможны три типа фазовых кривых (траекторий): точка, замкнутая кривая и незамкнутая кривая.

Решение, траекторией которого является точка $(x_0,\ y_0)$ (положение равновесия), постоянно:

$$x(t) = x_0,\ \ y(t) = y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Замкнутая кривая соответствует периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому.

Под ***направлением на фазовой кривой*** подразумеваем направление движения фазовой точки $\big(x(t),\ y(t)\big)$ по L в сторону возрастания t.

Основная задача качественного исследования динамической системы (8) состоит в том, чтобы выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории.

Топологическая структура фазовой плоскости – все те свойства, которые остаются инвариантными при топологическом (т. е. взаимно однозначном и взаимно непрерывном) преобразовании плоскости в себя.

Чтобы выяснить качественную картину для системы (8), нужно знать поведение не всех фазовых кривых, а лишь некоторых из них, называемых ***особыми***: положения равновесия, предельные циклы и незамкнутые кривые, у которых хотя бы одна полутраектория является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия.

Замечание. ***Сепаратриса*** – траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при $t \to \infty$ (устойчивая сепаратриса) или при $t \to -\infty$ (неустойчивая сепаратриса). Если сепаратриса стремится к седлу при $t \to \pm\infty$, то ее (вместе с седлом) называют петлей сепаратрисы. В диссипативных динамических системах из петли сепаратрисы может рождаться предельный цикл. В консервативных динамических системах петли сепаратрисы могут разделять фазовое пространство на области с различным поведением траекторий.

Предельным циклом системы (8) называется замкнутая фазовая кривая, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, по которым фазовая точка неограниченно приближается к этой замкнутой кривой при $t \to \infty$ или при $t \to -\infty$.

ЛИНЕЙНАЯ ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \tag{9}$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Если $\det A \neq 0$, то система (10) имеет единственное положение равновесия:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Тип положения равновесия определяется собственными числами матрицы A, т. е. корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 .$$

Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (λ_1, λ_2 одного знака), то положение равновесия – узел. Причем если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то узел *устойчивый* (рис. 2); если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ то узел *неустойчивый* (рис. 3);
если $\lambda_1 = \lambda_2$ и $rang(A - \lambda E) = 1$, то узел называется *вырожденным*.
Если система (9) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то узел называют *дикритическим*.

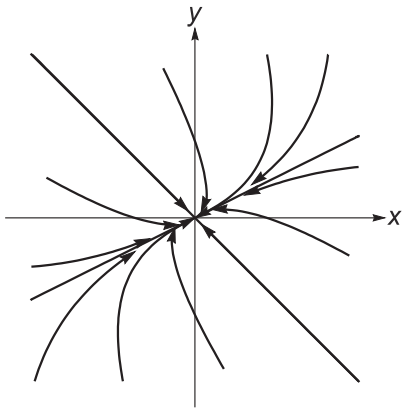


Рис. 2

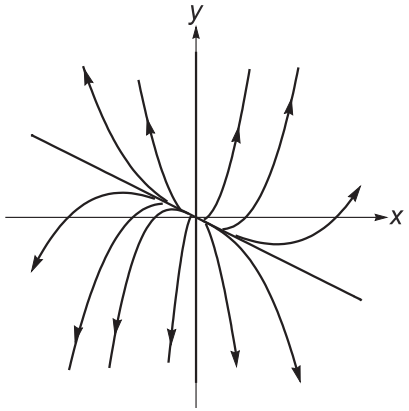


Рис. 3

Если $\lambda_1,\ \lambda_2\ \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1,\ \lambda_2$ разных знаков), то положение равновесия – седло (рис. 4).

Если $\lambda_1,\ \lambda_2\ \in \mathbb{C}$ и $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то положение равновесия – *фокус* при $\alpha \neq 0$ и *центр* при $\alpha = 0$ (рис. 5).

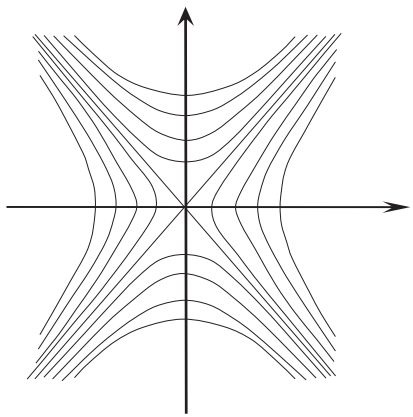


Рис. 4

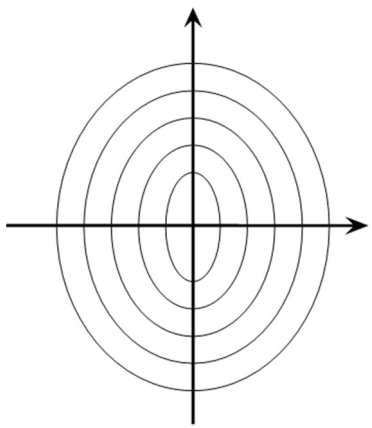


Рис. 5

Чтобы построить фазовые кривые системы (10) на плоскости xOy в случае узла, седла и вырожденного узла, нужно прежде всего найти те фазовые кривые, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы A.

В случае узла фазовые кривые касаются этой прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине значению λ.

Для исследования положения равновесия более общей системы (8) надо перенести начало координат в исследуемое положение равновесия и разложить функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничившись членами первого порядка.

Тогда система (8) примет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi(x, y) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Замечание 1. Если $\varphi = 0$, $\psi = 0$, то из системы (11) получаем систему (10).

Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ и $\alpha \neq 0$, то положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (8) имеет тот же тип, что и положение равновесия системы (10).

Замечание 2. Если для системы (10) точка $x = 0$, $y = 0$ является центром, то для системы (11) она может быть фокусом или центром.

Замечание 3. Для наличия центра достаточно, чтобы фазовые кривые имели ось симметрии, проходящую через исследуемое положение равновесия.

Замечание 4. Ось симметрии существует, если уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

не меняется при замене x на $-x$ (или y на $-y$).

Замечание 5. Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия было асимптотически устойчиво при $t \to \infty$ или при $t \to -\infty$. Исследование устойчивости можно провести с помощью теорем Ляпунова.

Исследование окрестности положения равновесия системы (9) – это локальная задача качественной теории дифференциальных уравнений.

В отдельных случаях, исследовав поведение фазовых кривых в окрестности каждого положения равновесия, удается решить ***глобальную задачу качественной теории*** – установить поведение фазовых кривых системы (8) на всей фазовой плоскости или установить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{12}$$

Запишем уравнение (12) в виде системы

$$f(x) \in D_I, \;\; x \in \mathbb{R} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x). \end{cases} \tag{13}$$

Введем следующие функции:

$\Pi(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$ – потенциальная энергия,

$T(y) = \dfrac{y^2}{2}$ – кинетическая энергия,

$E(x, y) = \Pi(x) + T(y)$ – полная механическая энергия.

$E(x, y)$ – первый интеграл системы (13), следовательно, каждая фазовая кривая системы (13) целиком лежит на одном множестве уравнения

энергии, т. е. на множестве $\{(x,\ y)\,|\,\Pi(x)+T(y)=C\}$ при некотором значении C.

Чтобы построить линии уровня энергии, представим шарик, катающийся в «потенциальной яме П». Зафиксируем значение полной энергии E. Заметим, что кинетическая энергия неотрицательна. Поэтому потенциальная энергия не превосходит полной. Значит, линия уровня энергии E проецируется на ось Ox на множество не превосходящих E значений потенциальной энергии П. Далее, скорость тем больше (по абсолютной величине), чем меньше потенциальная энергия:

$$|y|=\sqrt{2\left(E-\Pi(x)\right)}$$

(скатываясь в яму, шарик набирает скорость, а поднимаясь, теряет ее). В «точках поворота», где $\Pi(x)=E$, скорость равна нулю. Из четности энергии по отношению к y следует, что линия уровня энергии симметрична относительно оси Ox (шарик проходит каждую точку туда и обратно с одинаковой скоростью).

Этих простых соображений достаточно, чтобы построить линии уровня энергии систем с разнообразными потенциалами П (x). Рассмотрим простейший случай (бесконечно глубокая потенциальная яма с одним притягивающим центром x_0); тогда $f(x)$ монотонно убывает, $f(x_0)=0,\ \ I=R$.

Если значение полной энергии E_1 меньше минимума потенциальной энергии E_2, то множество уровня $E(x,\ y)=E_1$ пусто (движение шарика физически невозможно). Множество уровня $E(x,\ y)=E_2$ состоит из одной точки $(x_0;0)$ (шарик покоится на дне ямы).

Если значение полной энергии E_3 больше критического $E_2=\Pi(x_0)$, то множество уровня $E(x,\ y)=E_3$ – гладкая замкнутая симметричная

кривая, окружающая положение равновесия $(x_0; 0)$ на фазовой плоскости (шарик катается в яме взад и вперед; он поднимается до высоты E_3, в этот момент его скорость обращается в нуль и он скатывается обратно в яму, проходит точку x_0, в этот момент его скорость максимальна, он поднимается с другой стороны, и т. д.).

При исследовании более сложных случаев следует поступать подобным же образом, последовательно увеличивая значения полной энергии E и отмечая значения E, равные критическим значениям потенциальной энергии $\Pi(x)$ (где $\Pi'(x) = 0$), и рассматривая кривые, для которых E немного меньше и немного больше критических.

Если консервативная система имеет положение равновесия типа «центр», то малые возмущения этой системы могут привести к появлению устойчивости предельного цикла. В этом случае при весьма разных начальных условиях устанавливается периодическое колебание одной и той же вполне определенной амплитуды. Этот режим называется *режимом автоколебаний*.

При выяснении вопроса существования предельных циклов системы уравнений (9) часто пользуются *принципом кольца:* если на фазовой плоскости можно указать такое кольцо

$$r_1^2 \le (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r_2^2 ,$$

что все решения системы (9), начинающиеся на границе этого кольца, входят внутрь кольца, то внутри кольца будет предельный цикл системы уравнений (9).

ПРИМЕРЫ

Пример 1

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Решение

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

Если $y = 2x$, то $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases}$ – решение системы.

Следовательно, точки прямой $y = 2x$ являются положениями равновесия.

Фазовые кривые, отличные от положения равновесия, – интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{-4x + 2y}$, или $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$, $y \neq 2x$,

т. е. это полупрямые, получаемые из семейства прямых $y = -\dfrac{1}{2}(x + C)$ при пересечении его прямой $y = 2x$.

Движение по фазовым кривым происходит в направлении к положениям равновесия, так как если фазовая точка $\big(x(t),\ y(t)\big)$ в момент t находится в области $2x - y < 0$ (в области I на рис. 6), то

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y > 0, \ \frac{dy}{dt} = 2x - y < 0,$$

т. е. $x(t)$ возрастает, а $y(t)$ убывает при $t \to \infty$. И наоборот, если $2x - y > 0$ (область II), то $x(t)$ убывает, $y(t)$ возрастает.

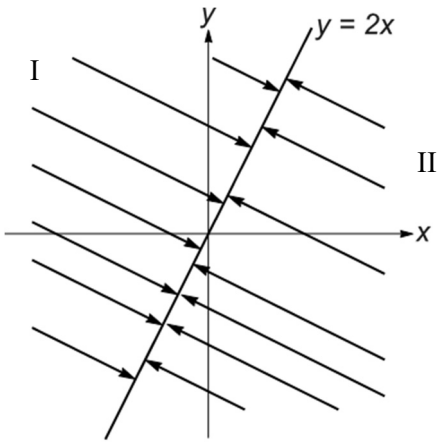


Рис. 6

Пример 2

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Решение

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

Если $y = -2x$, то $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases}$ – решение системы.

Следовательно, точки прямой $y = -2x$ являются положениями равновесия.

В точках (x, y), для которых $y + 2x \neq 0$, имеем $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{0}{2x + y}$, или $(2x + y)dx = 0 \;\Rightarrow\; dx = 0$. Фазовые кривые системы , отличные от положения равновесия, лежат на прямых $x = C$.

Итак, каждая прямая $x = C$ состоит из трех фазовых кривых:

– точки $(C; -C)$

– полупрямых $\begin{array}{l} x = C, \;\; y > -2C; \\ x = C, \;\; y < -2C. \end{array}$

Поскольку $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y > 0$ при $y > -2x$ и $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y < 0$ при $y < -2x$, то движения по фазовым кривым уходят в $+\infty(-\infty)$ при $t \to \infty$, т. е. положения равновесия являются неустойчивыми (рис. 7).

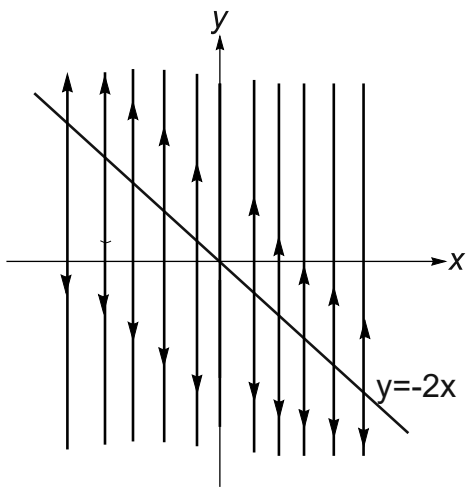


Рис. 7

Пример 3

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Решение

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = 0, \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

система имеет единственное положение равновесия (0; 0).

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) = 0,$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$.

Проанализируем $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 > 0, \\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_2 > 0, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$ положение равновесия (0; 0) – неустойчивый узел.

Найдем собственные векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, соответствующие числам $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$, тогда $(A - \lambda_1 E)\vec{b}_1 = \vec{0}$.

Пусть $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Данная система эквивалентна уравнению $x + 2y = 0$, отсюда получаем $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим $\lambda_2 = 3$, тогда $(A - \lambda_2 E)\vec{b}_2 = \vec{0}$.

Пусть $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Данная система эквивалентна системе $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, отсюда получаем $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

На плоскости xOy строим прямые $x + 2y = 0$ и $x = 0$, направленные вдоль векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$. Каждая из прямых содержит три фазовые кривые:

– точку $(0; 0)$ – положение равновесия:

– полупрямые $\begin{matrix} x + 2y = 0, \ \ y > 0; \\ x + 2y = 0, \ \ y < 0. \end{matrix}$

Остальные фазовые кривые касаются при подходе к точке O (0,0) прямой $x + 2y = 0$, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ (рис. 8).

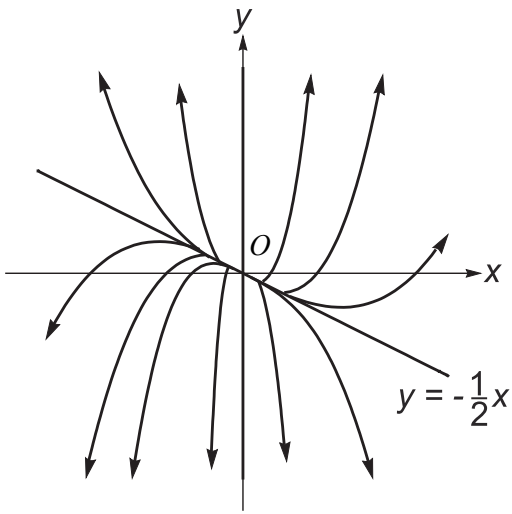


Рис. 8

Пример 4

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$$

Решение

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$.

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0, \\ x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

система имеет единственное положение равновесия (0; 0).

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0,$$

$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -5$.

Проанализируем: $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 < 0, \\ \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_2 < 0, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$ положение равновесия (0; 0) – устойчивый узел.

Прямые, содержащие фазовые кривые системы, ищем в виде $y = kx$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 4y}{-3x + 2y} \Rightarrow \frac{dkx}{dx} = \frac{x - 4kx}{-3x + 2kx} \Rightarrow k = \frac{1 - 4k}{-3 + 2k},$$

$-3k+2k^2-1+4k=0$, корни уравнения $k_1=1$ и $k_2=\frac{1}{2}$. Следовательно, $y=-x$, $y=\frac{x}{2}$ – искомые прямые.

Найдем собственные векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, соответствующие числам $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=-5$.

Рассмотрим $\lambda_1=-2$, тогда $\left(A-\lambda_1 E\right)\vec{b}_1=\vec{0}$.

Пусть $\vec{b}_1=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Данная система эквивалентна уравнению $x-2y=0$, отсюда получаем $\vec{b}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим $\lambda_2=-5$, тогда $(A-\lambda_2 E)\vec{b}_2=\vec{0}$.

Пусть $\vec{b}_2=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Данная система эквивалентна уравнению $x+y=0$, отсюда получаем $\vec{b}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

На плоскости xOy строим прямые $x-2y=0$ и $y=-x$, направленные вдоль векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$. Так как собственный вектор $\vec{b}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_1=-2$, параллелен прямой $y=\frac{x}{2}$, то фазовые кривые, являющиеся частями парабол $\left((2y-x)^2=C(y+x)^5\right)$, касаются в точке (0; 0) данной прямой, $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ (рис. 9).

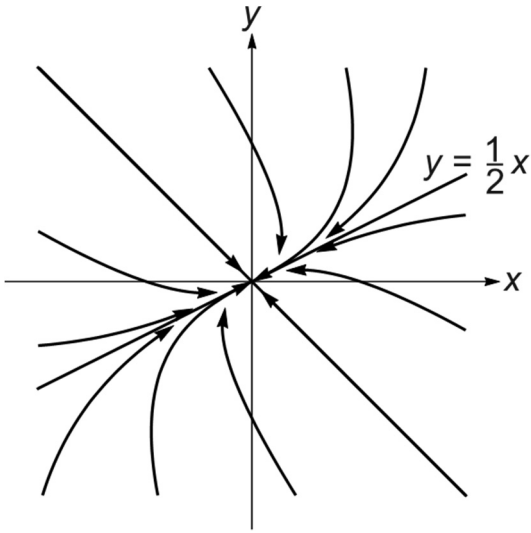


Рис. 9

Замечание. Параболы можно построить методом изоклин.

Пример 5

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$.

$$\begin{cases} 2y = 0, \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

– система имеет единственное положение равновесия (0; 0).

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \ \ \lambda_1 = -1, \ \ \lambda_2 = 4 .$$

Проанализируем: $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R}, \\ \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{sgn}\lambda_1 \neq \operatorname{sgn}\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$ положение равновесия (0; 0) – седло.

Найдем сепаратрисы седла.

Сепаратрисы – прямые, разделяющие гиперболы разных типов.

Прямые, содержащие фазовые кривые системы, ищем в виде $y = kx$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{2y} \Rightarrow \frac{dkx}{dx} = \frac{2x+3kx}{2kx} \Rightarrow k = \frac{2+3k}{2k} \ ,$$

$2k^2 - 3k - 2 = 0$, корни уравнения $k_1 = -\frac{1}{2}$ и $k_2 = 2$. Следовательно, $y = -\frac{x}{2}$, $y = 2x$ – искомые прямые.

Каждая из прямых $y = -\frac{x}{2}$, $y = 2x$ состоит из трех фазовых кривых. На прямой $y = -\frac{x}{2}$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(-2y) + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Значит, вдоль прямой $y=-\frac{x}{2}$ фазовая точка $\left(x(t),\ y(t)\right)$ движется по закону $\begin{cases} x(t)=x_0e^{-t}, \\ y(t)=y_0e^{-t}, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=0. \end{cases}$ Следовательно, движение точки с ростом t происходит по направлению к началу координат.

На прямой $y=2x$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x, \\ \dfrac{dy}{dt}=y+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x, \\ \dfrac{dy}{dt}=4y, \end{cases}$$

следовательно, вдоль прямой $y=2x$ фазовая точка $\left(x(t),\ y(t)\right)$ движется по закону $\begin{cases} x(t)=x_0e^{4t}, \\ y(t)=y_0e^{4t}, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\infty, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\infty. \end{cases}$ Таким образом, движение точки с ростом t происходит в направлении от начала координат. Этой информации достаточно, чтобы схематически изобразить фазовые кривые исходной системы и указать направление движения по этим кривым (рис. 10).

Пример 6

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=kx+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+ky. \end{cases}$$

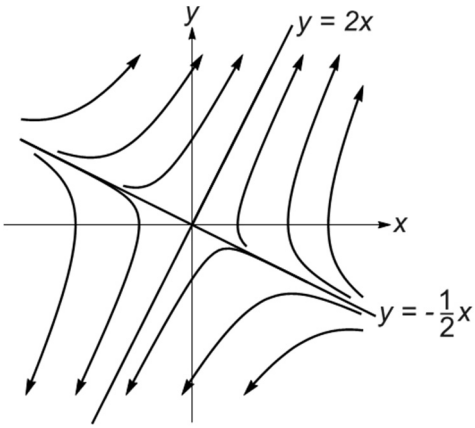


Рис. 10

Решение

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0,\ \forall k \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} kx + y = 0, \\ -x + ky = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ – система имеет единственное положение равновесия (0; 0).

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} k-\lambda & 1 \\ -1 & k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2k\lambda + k^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = k \pm i.$$

Проанализируем:

1) если $k = 0$, то положение равновесия – центр. В этом случае исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C^2,$$

т. е. ее фазовые кривые – окружности радиуса $|C| > 0$ с центром в точке (0;0) (рис. 11);

2) если $k \neq 0$, тогда положение равновесия – фокус.

Если $k < 0$, то фокус устойчивый (рис. 12).

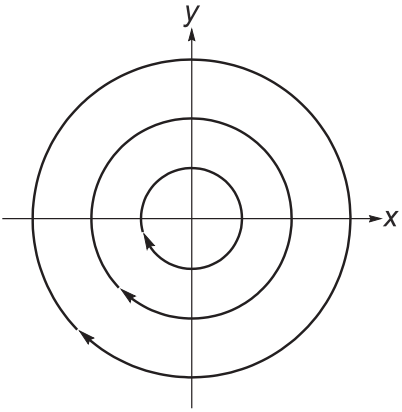


Рис. 11

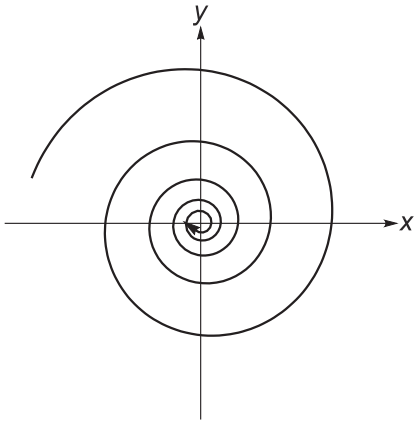


Рис. 12

Если $k > 0$, то фокус неустойчивый (рис. 13).

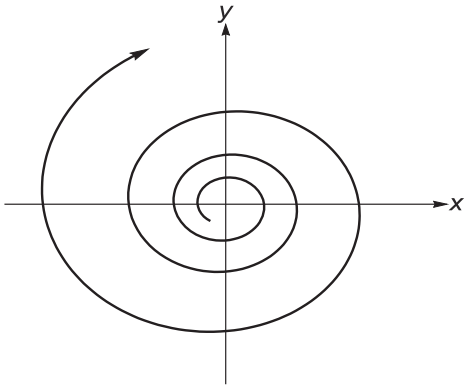


Рис. 13

В этом случае фазовые кривые – спирали, наматывающиеся на точку (0;0). Движение фазовой точки по этим спиралям происходит в направлении к положению равновесия, если $k<0$, и в направлении от него, если $k>0$.

Пример 7

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay. \end{cases}$$

Решение

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1) $a=0$. Тогда $\dfrac{dy}{dt}=0 \;\Rightarrow\; y=y_0$ и каждая прямая $y=y_0$ содержит три фазовые кривые: полупрямую $y=y_0$, $x<0$; точку $(0;y_0)$; полупрямую $y=y_0$, $x>0$. Движение фазовой точки по указанным полупрямым происходит в сторону возрастания x, т. е. слева направо (рис. 14).

2) Если $a \neq 0$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay}{x^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{y} = a\dfrac{dx}{x^2} \;\Rightarrow\; \ln\dfrac{y}{C} = -\dfrac{a}{x}$

и фазовые кривые лежат на линиях $y = Ce^{-a/x}$ (рис. 15 и 16).

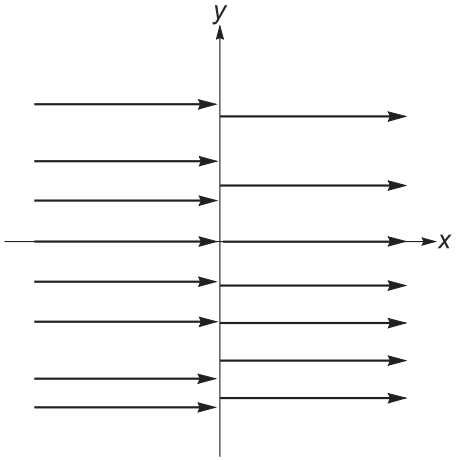


Рис. 14

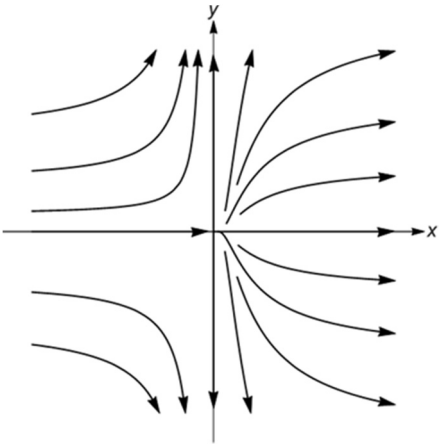


Рис. 15

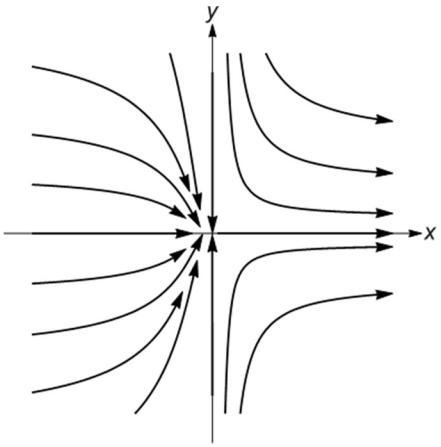


Рис. 16

Ось ординат кроме положения равновесия (0; 0) содержит две фазовые кривые: полупрямые $x = 0,\ \ y > 0$ и $x = 0,\ \ y < 0$.

Пример 8

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ay, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2. \end{cases}$$

Решение

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases} ay = 0, \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 0, \\ a = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0, \\ y = 0, \\ x^2 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

3) $a = 0$. Тогда $\dfrac{dx}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; x = x_0$ и каждая прямая $x = x_0$ содержит три фазовые кривые: полупрямую $x = x_0$, $y < 0$; точку $(x_0; 0)$; полупрямую $x = x_0$, $y > 0$. Движение фазовой точки по указанным полупрямым происходит в сторону возрастания y, т. е. снизу вверх (рис. 17).

4) Если $a \neq 0$, то уравнение фазовых кривых $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{ay}$ легко интегрируется:

$$\frac{2}{3}x^3 - ay^2 = C.$$

5) Построим фазовые кривые системы: $\frac{dy}{dt} = x^2 > 0 \ \ \forall t$, следовательно, $y = y(t)$ возрастает при любом значении *t*.

Рассмотрим $\frac{dx}{dt} = ay$. Если $\begin{cases} a > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, то $x = x(t)$ – возрастающая функция (рис. 18).

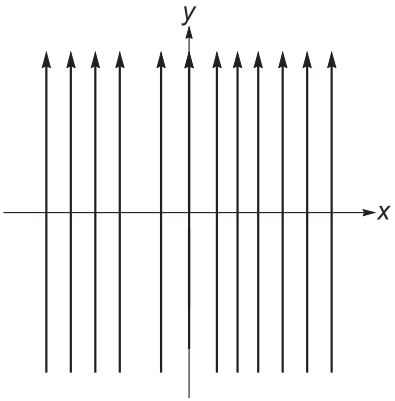


Рис. 17

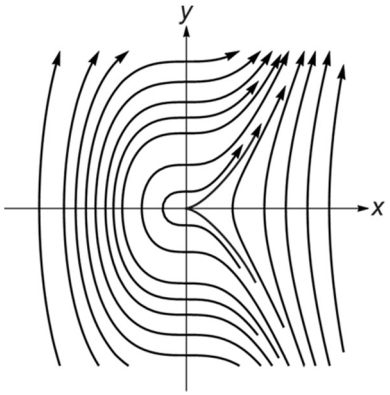


Рис. 18

Если $\begin{cases} a > 0 \\ y < 0 \end{cases}$, то $x = x(t)$ убывает (рис. 19).

Пример 9

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3x^2 \end{cases}$$

в окрестности положений равновесия, а также во всей фазовой плоскости.

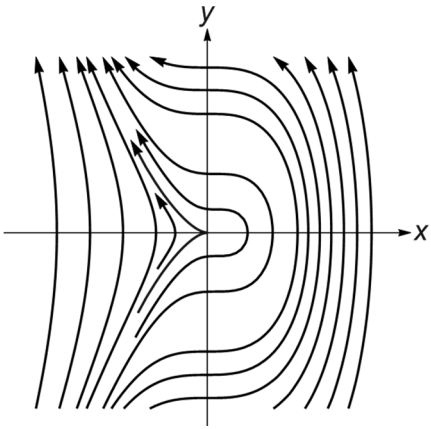


Рис. 19

Решение

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases} y = 0, \\ x - 3x^2 = 0. \end{cases}$$

Решения системы: $(0;0)$, $(1/3;0)$.

Запишем уравнения первого приближения, соответствующие положению равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - 6x. \end{cases}$$

Тогда характеристическое уравнение, соответствующее положению равновесия $(x_0; y_0)$, записывается в виде

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 - 6x_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 - 6x_0 = 0 .$$

В точке (0; 0) это уравнение принимает вид $\lambda^2+1=0$, т. е. $\lambda_{1,2}=\pm i$. Таким образом, положение равновесия (0; 0) может быть либо центром, либо фокусом.

Рассмотрим уравнение фазовых кривых $\frac{dy}{dx}=\frac{x-3x^2}{-y}$, заменим y на $-y$: $\frac{d(-y)}{dx}=\frac{x-3x^2}{-(-y)}$, или $\frac{dy}{dx}=\frac{x-3x^2}{-y}$ – уравнение не изменилось. Следовательно, фазовые кривые симметричны относительно оси абсцисс, поэтому O (0;0) – центр.

Характеристическое уравнение, соответствующее положению равновесия $O_1(1/3;0)$, имеет вид $\lambda^2-1=0$, корни уравнения $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$. Итак, положение равновесия O_1 – седло.

Определим направления, по которым сепаратрисы подходят к седлу. Линеаризуя систему в окрестности точки O_1, получим

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y,\\ \frac{dy}{dt}=-\left(x-\frac{1}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x-1/3}{y}. \tag{14}$$

Уравнения касательных к сепаратрисам в точке O_1 ищем в виде $y=k(x-1/3)$. Подставим в (14), находим $k=\pm1$, и уравнения касательных к сепаратрисам имеют вид: $y=-(x-1/3)$, $y=x-1/3$.

Мы провели полное исследование поведения фазовых кривых данной системы в окрестности положений равновесия. Для построения фазовых кривых во всей плоскости проинтегрируем уравнение фазовых кривых:

$$ydy=(3x^2-x)dx,\quad \int ydy=\int(3x^2-x)dx,\quad x^2+y^2-2x^3=C.$$

Построив вспомогательное семейство кривых $z = -x^2 + 2x^3 + C$, нетрудно построить и фазовые кривые данной системы. Направление движения может быть установлено, если учесть, что при $y > 0$ функция $x = x(t)$ убывает $\left(\text{следует из уравнения } \dfrac{dx}{dt} = -y\right)$ и возрастает в полуплоскости $y < 0$ (рис. 20).

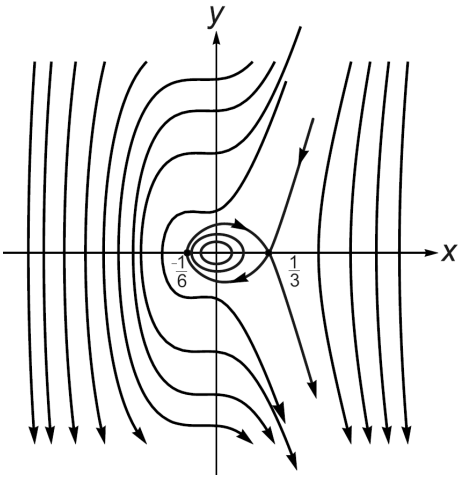


Рис. 20

Пример 10

Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 4x^3 \end{cases}$$

в окрестности положений равновесия, а также во всей фазовой плоскости.

Решение

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases} 2y = 0, \\ 4x - 4x^3 = 0. \end{cases}$$

Решения системы: $(0;0)$, $(1;0)$, $(-1;0)$.

Рассмотрим уравнение фазовых кривых $\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 4x^3}{2y}$, при замене x на $-x$, y на $-y$ уравнение не изменилось, следовательно, фазовые кривые симметричны относительно осей ординат и абсцисс.

Для построения фазовых кривых во всей плоскости проинтегрируем уравнение фазовых кривых

$$ydy = (2x - 2x^3)dx ,$$

$$\int ydy = \int (2x - 2x^3)dx \Rightarrow x^4 + y^2 - 2x^2 = C .$$

Построив вспомогательное семейство кривых $z = -x^4 + 2x^2 + C$, нетрудно построить и фазовые кривые данной системы.

Пусть $C = 0$, тогда $x^4 + y^2 - 2x^2 = 0$. Кривая содержит три траектории – две петли и точку O (0;0).

$C > 0$, кривая $x^4 + y^2 - 2x^2 = C$ определяет одну траекторию;

$C < 0$, кривая $x^4 + y^2 - 2x^2 = C$ определяет две траектории (два овала);

$C = -1$, получаем две изолированные точки $O_1(-1;0)$ и $O_2(1;0)$.

Направление движения может быть установлено из первого уравнения системы, если учесть, что при $y > 0$ функция $x = x(t)$ возрастает $\left(\text{следует из уравнения } \frac{dx}{dt} = 2y\right)$ (рис. 21).

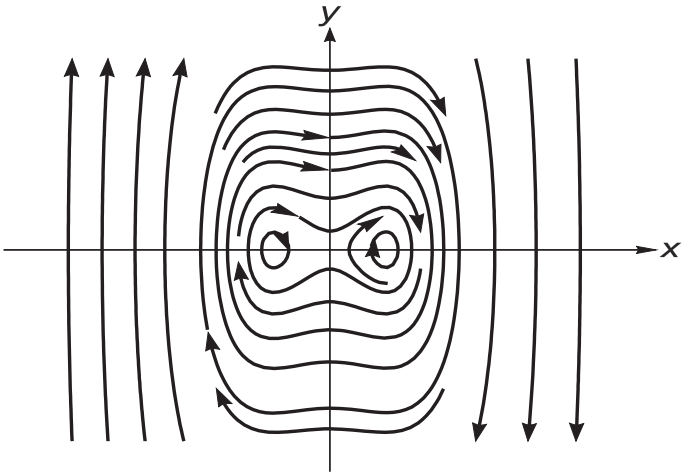


Рис. 21

Пример 11

Исследовать тип каждого из положений равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x+y-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1-x). \end{cases}$$

Решение

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases} x\left(x+y-2\right) = 0, \\ y\left(1-x\right) = 0. \end{cases}$$

Решения системы определяют три положения равновесия: $O(0;0)$, $O_1(1;1)$, $O_2(2;0)$.

Запишем уравнения первого приближения, соответствующие положению равновесия $(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(2x_0 + y_0 - 2) + yx_0 - x_0^2 - x_0 y_0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -xy_0 + y(1 - x_0) + x_0 y_0. \end{cases}$$

Тогда характеристическое уравнение, соответствующее положению равновесия $(x_0; y_0)$, записывается в виде

$$\begin{vmatrix} 2x_0 + y_0 - 2 - \lambda & x_0 \\ -y_0 & 1 - x_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (x_0 + y_0 - 1)\lambda + 4x_0 - 2x_0^2 + y_0 - 2 = 0 \ .$$

В точке $O(0;0)$ получим уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Корни уравнения $\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 1$.

Проанализируем: $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ положение равновесия (0; 0) – седло.

В точке $O_1(1;1)$ получим уравнение $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Корни уравнения $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, причем $\operatorname{Re}\lambda = 1/2 > 0$, следовательно, положение равновесия $O_1(1;1)$ – неустойчивый фокус.

Характеристическое уравнение в точке $O_2(2;0)$ имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, корни уравнения $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 2$;

$$\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \ \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \ \lambda_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ положение равновесия } O_2(2;0) \text{ – седло.}$$

Координатные оси состоят из фазовых кривых. Ось абсцисс состоит из пяти фазовых кривых, а ось ординат из трех. Так, ось ординат состоит:

– из точки $(0;0)$;

– полупрямых $\begin{matrix} x = 0, \ \ y > 0, \\ x = 0, \ \ y < 0, \end{matrix}$

а ось абсцисс состоит:

– из полупрямой $y = 0, \ \ x < 0$;

– точки $(0;0)$;

– интервала $y = 0, \ \ 0 < x < 2$;

– точки $(2;0)$;

– полупрямой $y = 0, \ \ x > 2$.

Проанализируем движение фазовой точки. Если $x = 0$, то исходная система примет вид $\dfrac{dy}{dt} = y$. Решение уравнения $y(t) = e^t y_0$, и движение фазовой точки на оси ординат проходит в направлении от положения равновесия.

Рассмотрим движение фазовой точки по оси абсцисс. Тогда исходная система примет вид $\dfrac{dx}{dt} = x(x-2)$. Решая уравнение, получим

$$x(t) = \frac{2}{1 - Ce^{2t}}.$$

Пусть движение начинается из точки $(x_0;0)$ при $x_0 < 2$, тогда видим, что фазовая точка с течением времени приближается к началу координат.

Если же движение начинается из точки $(x_0;0)$, $x_0 > 2$, то фазовая точка с течением времени уходит в бесконечность. Фазовые кривые исходной системы уравнений изображены на рис. 22.

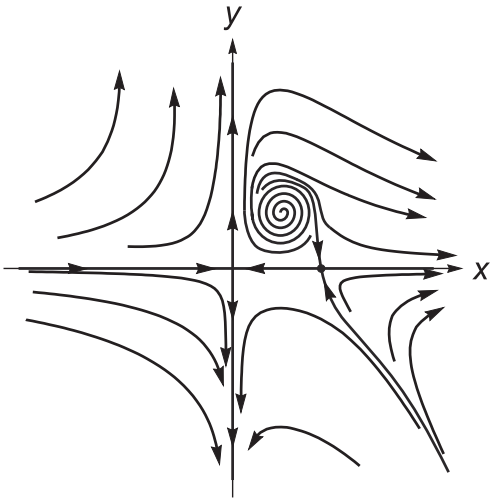


Рис. 22

Пример 12

Исследовать тип каждого из положений равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 + y - x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решение

Найдем положение равновесия:

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ 1 + y - x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решения системы определяют два положения равновесия: $O_1(-1;0)$, $O_2(1;0)$.

Заменим x на $-x$, исходная система не изменится. Фазовые кривые симметричны относительно оси ординат. Делаем вывод, что достаточно исследовать тип одного из положений равновесия, например, $O_2(1;0)$.

Запишем уравнения первого приближения, соответствующие положению равновесия $(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y_0 x + 2yx_0 - 2x_0 y_0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2xx_0 + y(1 + 2y_0) - y_0^2 + x_0^2 + 1. \end{cases}$$

Тогда характеристическое уравнение, соответствующее положению равновесия $(x_0; y_0)$, записывается в виде

$$\begin{vmatrix} 2y_0 - \lambda & 2x_0 \\ -2x_0 & 1 + 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \lambda^2 - (4y_0 + 1)\lambda + 4x_0^2 + 4y_0^2 + 2y_0 = 0.$$

В точке $O_2(1;0)$ получим уравнение $\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$. Корни уравнения $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$, причем $\operatorname{Re}\lambda = 1/2 > 0$. Следовательно, положение равновесия $O_2(1;0)$ – неустойчивый фокус. Тогда в силу симметрии и $O_1(-1;0)$ – тоже неустойчивый фокус.

Заметим, что ось ординат является фазовой кривой. На оси ординат система эквивалентна уравнению $\frac{dy}{dt} = y^2 + y + 1$. Фазовая точка, в какой бы точке оси ординат она ни начинала движение, с течением времени уходит в $+\infty$. Предлагаем читателю самостоятельно изобразить фазовые кривые.

Исследовать фазовые кривые системы уравнений. Выяснить, имеет ли предельный цикл данная система

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ 1 + y - x^2 + y^2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x - y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Решение

Положение равновесия O (0;0) – устойчивый фокус.

Перейдем к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi + \rho^3\cos\varphi, \\ \frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi + \rho^3\sin\varphi. \end{cases}$$

Разрешим эти уравнения относительно $\frac{d\rho}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(1 - \rho^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Проведем исследование уравнения фазовых кривых в полярной системе координат:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho(1-\rho^2).$$

Очевидно, что имеется одна замкнутая фазовая кривая $\rho = 1$. Для остальных фазовых кривых ρ как функция φ возрастает при $\rho > 1$ и убывает при $0 < \rho < 1$.

Таким образом, исходная система имеет положение равновесия – устойчивый фокус в точке (0;0) и неустойчивый предельный цикл – окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Пример 14

Исследовать фазовые кривые системы уравнений. Выяснить, имеет ли предельный цикл данная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + y^3. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\left(x(t), y(t)\right)$ – решение данной системы уравнений. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t) + y^2(t)\right) = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(y - x + x^3) +$$

$$+ 2y(-y - x + y^3) = -2(x^2 + y^2) + 2(x^4 + y^4).$$

Если фазовая точка $\left(x(t), y(t)\right)$ находится на окружности радиуса R и положение точки на окружности определяется уравнениями $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, то

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t) + y^2(t)\right) = -2R^2 + 2R^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) =$$

$$= -2R^2\left(1 - R^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\right).$$

Так как $1/2 \le \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \le 1$, то при $R < 1$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t) + y^2(t)\right) = -2R^2\left(1 - R^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\right) < -2R^2(1 - R^2) < 0.$$

При $R > \sqrt{2}$ получим $\frac{d}{dt}\left(x^2(t) + y^2(t)\right) > 0$.

Делаем вывод, что в кольце $1 < x^2 + y^2 < 2$ имеется предельный цикл, так как через окружности решения исходной системы выходят из этого кольца.

Исследуем положения равновесия системы.

Данная система имеет только одно положение равновесия: (0;0). Составим характеристическое уравнение для этого положения равновесия:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

корни уравнения $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Так как корни уравнения комплексно-сопряженные, причем $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = -1$, то положение равновесия – устойчивый фокус.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В задачах 1–10 исследовать поведение фазовых кривых систем уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(y - x). \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$

В задачах 11–18 выяснить тип положений равновесия систем уравнений:

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2xy - 8. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 - \sqrt{8y + x^2}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2(x-y)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 + x - y^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-1)(3x+y-5), \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 3xy - 18 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(4 - 2y + y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = 6 - 2\sqrt{4y + x^2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-x)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4 + 2x - y^2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2y-1)(3x+2y-5), \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + 4y^2 - 5. \end{cases}$

19. Построить линии уровня энергии и фазовые кривые консервативных систем уравнений Ньютона:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^2. \end{cases}$$

20. Построить линии уровня энергии и фазовые кривые консервативных систем уравнений Ньютона:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin 2x. \end{cases}$$

21. Построить фазовые кривые консервативных систем с потенциальной энергией:

$$\Pi(x) = \pm \frac{2x}{1 + x^2}.$$

22. Построить фазовые кривые консервативных систем с потенциальной энергией:

$$\Pi(x) = \pm x \sin x\ .$$

СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется равенство, содержащее независимую переменную x (явно или неявно), неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', y''',...,y^{(n)}$:

$$F(y', y'', y''',...,y^{(n)}) = 0 . \qquad (15)$$

Определение 2. Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения (1), называется *порядком* этого уравнения.

Определение 3. Если уравнение (15) может быть приведено к такому виду, в котором левая часть есть полином относительно всех входящих в него производных, то наивысшая степень старшей производной называется *степенью* уравнения.

Определение 4. *Решением уравнения* (15) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Определение 5. График решения на плоскости (x, y) называется *интегральной кривой.*

Определение 6. Процесс нахождения решений называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит:

– в нахождении всех решений;

– в изучении свойств этих решений.

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{16}$$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ – однозначная и непрерывная правая часть ОДУ.

Если $f(x, y) \to \infty$ в окрестности точки (x_0, y_0), то рассматривается «перевернутое» ДУ

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{17}$$

Другие виды записей уравнения (16):

$$dy - f(x, y)dx = 0, \; Mf(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

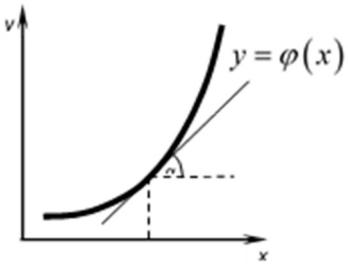
Определение 7. Пусть $x \in (a, b)$, тогда решением уравнения (16) в (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в этом интервале, обращающая (16) в тождество $\forall x \in (a, b)$. Причем точки $\left(x, \varphi(x)\right)$ лежат в области задания функции $f(x, y)$.

Замечание. Интервал (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным; как замкнутым, так и незамкнутым.

Поле направлений:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$y = \varphi(x)$ – интегральная кривая; α – угол между касательной к $y = \varphi(x)$ и осью OX, т. е. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$.



Вывод: направления касательных к интегральным кривым задаются самим дифференциальным уравнением.

Определение 8. *Поле направлений* получим, если проведем в каждой точке (x, y) из области задания функции $f(x, y)$ отрезок единичной (произвольной) длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α, $\mathrm{tg}\alpha = f(x, y)$.

Замечание

а) если $f(x_0, y_0) \to \infty$, то направление поля параллельно оси Oy (см. выражение (17));

б) если $f(x_0, y_0) = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, то поле в точке (x_0, y_0) не определено и точка (x_0, y_0) называется *особой точкой* дифференциального уравнения. Если найдется такая интегральная кривая $y = y(x)$ ($x = x(y)$, что $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ $\left(x(y) \to x_0\right.$, где $\left.y \to y_0\right)$, то говорят, что она примыкает к точке (x_0, y_0).

Определение 9. *Изоклины* – линии, во всех точках которых направление поля одно и то же.

Линия точек максимумов: $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ f'_x(x,y)<0. \end{cases}$

Линия точек минимумов: $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ f'_x(x,y)>0. \end{cases}$

ЗАДАЧА КОШИ

Определение 10.

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (18) \\ y(x_0) = y_0. & (19) \end{cases}$$

Задача нахождения решения уравнения (18), удовлетворяющего заданным начальным условиям (19), называется *задачей Коши.*

Замечание

Если $f(x_0, y_0) \to \infty$, то интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, y_0), ищут в виде $x = x(y)$, решают задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}, \\ x(y_0) = x_0. \end{cases}$$

Геометрический смысл задачи Коши: ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку (x_0, y_0);

выражение (19) – начальное условие решения $y = y(x)$; (x_0, y_0) – начальные данные решения $y = y(x)$, $(x_0 \neq \infty, y_0 \neq \infty)$.

Определение 11. Точки (x_0, y_0), в которых функция $f(x, y)$ непрерывна, а $\left.\dfrac{df}{dy}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \to \infty$, называются *особыми точками* уравнения (18). В этих точках может быть нарушена единственность решения задачи Коши.

ОБЩЕЕ, ЧАСТНОЕ, ОСОБОЕ РЕШЕНИЯ

Пусть D – область существования и единственности решения задачи Коши (18), (19) или ее часть.

Определение 12. Функция

$$y = \varphi(x,\ C), \tag{20}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C, где $\varphi'_x(x)$ – непрерывная функция, называется *общим решением* уравнения (18) в D, если равенство (20) разрешимо в некоторой области D относительно произвольной постоянной C:

$$C = \psi(x,\ y) \tag{21}$$

и если функция (20) является решением уравнения (18) при всех значениях постоянной C, когда точка (x, y) пробегает область D.

Определение 13. Общее решение $y = \varphi(x,\ x_0, y_0)$ называется *общим решением в форме Коши.*

Определение 14. Если общее решение уравнения (18) задано в неявном виде $\Phi(x, y,\ C) = 0$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Определение 15. Если общий интеграл уравнения (18) записан в виде $C = \Psi(x,\ y)$, то функция $\Psi(x,\ y)$ называется *интегралом* этого уравнения.

Определение 16. Если функция $y = \varphi(x,\ C)$ записана в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t, C) \end{cases}$, то систему называют *общим решением* уравнения (18) в *параметрическом виде.*

Определение 17. Решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши, называется *частным решением*.

Определение 18. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*.

Замечание. Особое решение не содержится в формуле общего решения ни при каком *C*.

Определение 19. *Подозрительные на особое решение* кривые: если $f(x,y)$ непрерывна, $\exists f'_y(x,y)$ (ограниченная или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых $f'_y(x,y) \to \infty$.

Определение 20. *Огибающая* – это кривая, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и вся состоит из этих точек касания.

Замечание. Огибающей может быть только *дискриминантная кривая.*

Замечание. Огибающая – особое решение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y = \varphi(x,\ C) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial C} = 0 \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Phi(x,\ y,\ C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Но дискриминантная кривая может и не быть огибающей.

Для дискриминантной кривой необходимо $\mathrm{tg}\alpha_1 = \mathrm{tg}\alpha_2$.

Замечание. Дифференциальное уравнение может иметь решение, которое не является ни частным, ни особым решением, а является «склейкой» этих решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – 2 изд. – Москва : Высшая школа, 1989. – 383 с.

2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – 4-е изд. – Москва : Наука, 1974. – 331 с.

3. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филлипов. – 7-е изд. – Москва : Наука, 1992. – 128 с.

4. *Гудыменко Ф. С.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Ф. С. Гудыменко, И. А. Павлюк, В. А. Волкова. – Киев : Вища школа, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Устойчивость решений дифференциальных уравнений 3

Понятие устойчивости решения 3

Исследование устойчивости решения 5

Критерий устойчивости по первому приближению 11

Фазовая плоскость 15

Линейная однородная система 17

Примеры 23

Задачи для самостоятельной работы 51

Справочная информация. Дифференциальные уравнения.
Основные определения и понятия 55

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной 56

Задача Коши 59

Общее, частное, особое решения 60

Библиографический список 62

Казанцева Евгения Владимировна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Учебное пособие

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 18.03.2020. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 50 экз.
Уч.-изд. л. 3,72. Печ. л. 4. Изд. № 11. Заказ № 505. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20